UNIVERSIDADE DO EXTREMO SUL CATARINENSE - UNESC
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
DOUTORADO EM EDUCAÇÃO

IURI KIESLARCK SPACEK

UMA ANÁLISE ONTOLÓGICO-GENÉTICA DO OBJETO DE ENSINO DO CÁLCULO

CRICIÚMA
2023

IURI KIESLARCK SPACEK

UMA ANÁLISE ONTOLÓGICO-GENÉTICA DO OBJETO DE ENSINO DO CÁLCULO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade do Extremo Sul Catarinense - UNESC, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Educação.

Orientador: Prof. Dr. Vidalcir Ortigara

CRICIÚMA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

S732a Spacek, Iuri Kieslarck.
Uma análise ontológico-genética do objeto de ensino do cálculo / Iuri Kieslarck Spacek. – 2023.
345 p. : il.

Tese (Doutorado) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Programa de Pós-Graduação em Educação, Criciúma, 2023.
Orientação: Vidalcir Ortigara.

1. Cálculo – Estudo e ensino. 2. Objeto de ensino. 3. Relações ontológicas. 4. Ensino da matemática. I. Título.

CDD. 22. ed. 515

Bibliotecária Eliziane de Lucca Alosilla – CRB 14/1101
Biblioteca Central Prof. Eurico Back - UNESC

IURI KIESLARCK SPACEK

UMA ANÁLISE ONTOLÓGICO-GENÉTICA DO OBJETO DE ENSINO DO CÁLCULO

Esta tese foi julgada e aprovada para obtenção do Grau de Doutor em Educação na área de Educação no Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade do Extremo Sul Catarinense.

Criciúma, 14 de dezembro de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Vidalcir Ortigara - Doutor - (Unesc) - Orientador

Profa. Maria do Carmo de Sousa - Doutora - (UFSCar)

Profa. Maria Lucia Panossian - Doutora - (UTFPR)

Profa. Josélia Euzebio da Rosa - Doutora - (Unisul)

Prof. Rafael Rodrigo Muller - Doutor - (Unesc)

A Francisco e Adriana.

AGRADECIMENTOS

As próximas linhas são dedicadas ao reconhecimento da influência das relações estabelecidas e momentos compartilhados no processo de elaboração da presente pesquisa desde seu nascedouro. Antecipadamente, peço perdão àqueles a quem a minha memória não tenha ajudado a lembrar, mas reconheço que todo e qualquer contato, direto ou indireto, influenciou, com impactos variáveis, a produção do presente trabalho. Em certos momentos, um simples "E aí, como está a tese?" foi suficiente para elaborar alguma síntese ou ainda objetivar angústias que necessitavam ser externadas. De tal modo, meus agradecimentos sinceros a todos os amigos e familiares que me proporcionaram condições de me transformar no que hoje sou, assim como de escrever o que escrevi. Destaco, em especial:

- meu filho, amigão e parceiro de estripulias, Francisco, por me fornecer as forças e motivações necessárias para não desistir pelo caminho.

- minha esposa, parceira e companheira de vida, Adriana, por me proporcionar condições afetivas, psicológicas e materiais para me dedicar a este projeto, além de entender os muitos momentos de ausência que se fizeram necessários.

- meus pais, Edison – *in memoriam* – e Gladis, por me educarem e fomentarem o desenvolvimento de valores que extrapolam os limites fomentados pelas relações emergentes da atual ordem social, como companheirismo, lealdade e zelo à verdade, bem como por sempre exaltarem a importância que o conhecimento tem na condução do nosso viver.

- todos os professores e professoras que me ensinaram sobre a necessidade de nos aprofundarmos cada vez mais no conhecimento da complexidade que é a realidade.

- meu amigo e orientador de parte desta tese, professor Ademir Damazio, por ter aceitado me orientar, mesmo com as minhas evidentes limitações em relação ao tema. Além disso, agradeço imensamente pelas conversas, pela leitura e sugestões em relação à escrita do texto, especialmente naqueles momentos nos quais inexistia qualquer vínculo formal estabelecido, o que demonstra e ensina muita sobre ética, profissionalismo, camaradagem e seriedade com o ensino de matemática e com a ciência em geral.

- meu amigo e orientador, professor Vidalcir Ortigara, por me acolher em um dos momentos mais complicados do desenvolvimento da pesquisa, o que o tornou menos desgastante e mais suportável. Agradeço pelo zelo, atenção, profissionalismo e pelo comprometimento com a minha formação, mesmo quando todas as condições objetivas eram penosas e desgastantes. Agradeço também pelos momentos de convivência, pelas palavras

fraternas e pelos “choques de realidade” necessários para que as paixões fossem deixadas de lado e o objeto “falasse” por si.

- todos os professores e professoras do Programa, em especial àqueles(as) com quem tive a oportunidade de compartilhar momentos de estudo nas disciplinas cursadas no período do doutorado: professora Janine Moreira, professor Antônio Serafim Pereira, professor Rafael Rodrigo Muller, além dos supracitados, professor Ademir Damazio e professor Vidalcir Ortigara.

- o professor Wellington Lima Cedro e o Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal de Goiás (UFG), por me aceitarem e me acolherem como aluno especial da disciplina *Formação de Professores e a Teoria Histórico-Cultural*.

- o professor Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva Oliveira e o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista (Unesp), Câmpus de Rio Claro, por me aceitarem e me acolherem como aluno especial da disciplina *Gênese do Pensamento Diferencial*.

- as professoras Josélia Euzébio da Rosa, Maria Lucia Panossian e Maria do Carmo de Sousa pelas importantíssimas contribuições na banca de qualificação, que nos conduziram a tomar a decisão de alterar os rumos da pesquisa, e na banca de defesa. Sou grato pelo tempo e energia doados para aprimoramento do presente trabalho.

- o professor Rafael Rodrigo Muller, por sua participação na banca de defesa e dedicação de tempo e energia para o aprimoramento desta pesquisa.

- os colegas do *Grupo de Pesquisa em Educação Matemática* (GPEMAHC), do *Grupo de pesquisa Teoria do Ensino Desenvolvimental na Educação Matemática* (TEDMAT), do *Grupo de Estudos sobre Situações Desencadeadoras de Aprendizagem*, todos esses vinculados ao *Grupo de Estudos e Pesquisa em Atividade Pedagógica* (GEPAPe), pelos ricos momentos de debate. Muitíssimas das páginas que seguem foram concebidas no decorrer das discussões realizadas nesses espaços. As ideias a que o leitor terá acesso, a seguir, têm as marcas dos citados coletivos, contudo, salvaguardo-os dos possíveis equívocos interpretativos, que são exclusivamente de responsabilidade minha.

- os meus colegas e amigos William e Eloir, por compartilharem seus conhecimentos na elaboração de alguns projetos comuns durante a realização deste trabalho.

- a secretária do Programa, Vanessa, por atender com presteza e celeridade todas as demandas que surgiram no período de elaboração do presente trabalho.

- a todos os educadores e educadoras, professores(as) ou não, que se dedicam à formação de indivíduos mais humanos, em toda a profundidade que esse termo possa carregar.

- o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Santa Catarina (IFSC), por conceder afastamento de minhas funções, o que possibilitou dedicação exclusiva a esta pesquisa.

- o Fundo de Apoio à Manutenção e ao Desenvolvimento da Educação Superior (FUMDES), pela concessão de apoio financeiro via Programa UNIEDU/FUMDES Pós-Graduação.

- a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela concessão de apoio financeiro via Programa de Suporte à Pós-Graduação de Instituições de Ensino Particulares (PROSUP) – Código de Financiamento 001.

Para o refazimento do ser humano, a educação desempenha um papel central, ela é o caminho de formação social consciente de novas gerações, a principal forma de substituição de um tipo histórico de humano. *As novas gerações e as novas formas de educá-las são a estrada principal pela qual a história passa, criando um novo tipo de pessoa*.

Liev Semiónovitch Vigotski

RESUMO

A presente tese apresenta resultados da pesquisa que teve como objetivo investigar a relação entre o objeto do Cálculo e sua objetivação como objeto de ensino na organização do ensino no contexto escolar. A tese sustentada é de que o processo de constituição do objeto de ensino do Cálculo manifesta e objetiva um determinado conteúdo do objeto do Cálculo. A investigação, guiada pelo método ontológico-genético, ancorou-se nas categorias do materialismo histórico e dialético e no instrumental conceitual desenvolvido pela teoria histórico-cultural. Os resultados das duas primeiras ações, de natureza teórica, permitiram apreender a natureza do Cálculo como reflexo matemático da realidade na consciência – forma de representação e estudo do movimento –, bem como sua abstração substancial – relação de variação e acumulação de relações quantitativas entre grandezas variáveis em geral. A terceira ação, também de natureza teórica, forneceu subsídios teóricos para apreender os determinantes do objeto de ensino em geral e do objeto de ensino do Cálculo em particular. Entre eles se destaca a sua qualidade como determinante constitutivo e constituído na atividade coletiva de estudo escolar, o que evidencia sua dependência para com as relações que a estabelecem. Por sua vez, a quarta ação possibilitou capturar o modo de manifestação do objeto de ensino do Cálculo ao analisar tarefas presentes em teses que se anunciam embasadas em princípios da teoria histórico-cultural e apresentam uma proposta de ensino de Cálculo. Tal ação demandou uma busca na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações e no Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior para a seleção dos trabalhos que obteve um total de quatro teses. A pesquisa evidenciou que no processo de ensino há uma relação entre o objeto do Cálculo e os modos da organização e desenvolvimento da atividade que consubstancia o objeto de ensino. Um momento importante é a elaboração e proposição das tarefas, pois condensa as intencionalidades e direciona o processo de objetivação do conteúdo do conhecimento. Nas análises das tarefas presentes nas teses fica nítido que o objeto do Cálculo se objetiva desarticuladamente como consequência de uma estruturação do sistema de tarefas que não tem como referência a sua abstração substancial. Por sua vez, tais tarefas são guiadas por contradições externas ao conteúdo, não fomentando o surgimento de necessidades que mobilizem os estudantes para a apropriação dos conceitos. Além disso, os processos de generalização predominantemente seguem do particular para o geral. Conclui-se que a organização do ensino dificilmente contribui para o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes caso não seja antecedida por uma tomada de posição ontológica ante o saber e o conhecimento que o consubstancia.

Palavras-chave: Ensino de Cálculo; objeto de ensino; análise ontológico-genética.

ABSTRACT

The thesis hereby presents research results that aimed to investigate the relationship between the object of Calculus and its objectification as a tool for teaching in a school organization context. The following thesis here sustained is that the process of constituting the teaching object of Calculus manifests and aims at a certain content of the object of Calculus. The analysis, led by the ontological-genetic method, was based in historical and dialectical materialism categories and also in conceptual tools developed by a historical-cultural theory. The first two actions results, from theoretical nature, enabled us to acknowledge the nature of Calculus as a mathematical reflection of reality in consciousness – representation embodiment and study of movement –, as well as its initial genetic relationship – a bond of variation and accumulation of quantitative relationships between variable quantities in general. The third action, also of a theoretical nature, yield theoretical support in order to understand the determinants of the teaching object in general and the Calculus teaching object in particular. Among them, its quality is highlighted as a main establishment and accounts for the collective activity of school teaching, which underlines its dependence on the relationships that establish it. Therefore, the fourth action has made it possible to capture the manifestation procedure of the Calculus teaching object by scanning tasks present in theses which are announced to be based on principles of historical-cultural theory and present a proposal for teaching Calculus. Such an action required a look up in the Brazilian Theses Digital Library and in Dissertations from the Coordination for the Higher Education Personnel Improvement Catalog of Theses and in Dissertations in order to select the paper works, which begot a total of four theses. The research displayed that in the teaching process there is a connection between the object of Calculus and the ways of organizing and developing the activity which reinforces the teaching object. An important moment is the elaboration and proposition of tasks, as it condenses intentions and directs the process of objectifying the content of knowledge. In the assessment of the tasks showed in the theses, it is reputed that the object of Calculus is objectively disjointed as a consequence of a structuring of the task system that does not have as reference its initial genetic relationship. However, such tasks are guided by adventitious contradictions from the content, not encouraging the appearance of needs which would summon students up to appropriate the concepts. Furthermore, generalization processes mostly proceed from the private to the whole. It is concluded that the teaching organization hardly ever endowers to the development of students' theoretical thinking if it is not preceded by an ontological position in relation to knowledge and the knowledge that reinforces it.

Keywords: Teaching Calculus; teaching object; ontological-genetic analysis.

RESUMEN

La presente tesis presenta resultados de la investigación que tuvo como objetivo investigar la relación entre el objeto del Cálculo y su objetivación como objeto de enseñanza en la organización de la enseñanza en el contexto escolar. La tesis sostenida es que el proceso de constitución del objeto de enseñanza del Cálculo manifiesta y objetiva un determinado contenido del objeto del Cálculo. La investigación, guiada por el método ontológico-genético, se ha anclado en las categorías del materialismo histórico y dialéctico y en el instrumental conceptual desarrollado por la teoría histórico-cultural. Los resultados de las dos primeras acciones, de naturaleza teórica, permitieron aprehender la naturaleza del Cálculo como reflejo matemático de la realidad en la conciencia - forma de representación y estudio del movimiento -, así como su abstracción sustancial - relación de variación y acumulación de relaciones cuantitativas entre magnitudes variables en general. La tercera acción, también de naturaleza teórica, proporcionó subsidios teóricos para aprehender los determinantes del objeto de enseñanza en general y del objeto de enseñanza del Cálculo en particular. Entre ellos se destaca su calidad como determinante constitutivo y constituido en la actividad colectiva de estudio escolar, lo que evidencia su dependencia hacia las relaciones que la establecen. Por su parte, la cuarta acción posibilitó capturar el modo de manifestación del objeto de enseñanza del Cálculo al analizar tareas presentes en tesis que se anuncian basadas en principios de la teoría histórico-cultural y presentan una propuesta de enseñanza de Cálculo. Tal acción demandó una búsqueda en la Biblioteca Digital Brasileña de Tesis y Disertaciones y en el Catálogo de Tesis y Disertaciones de la Coordinación de Perfeccionamiento de Personal de Nivel Superior para la selección de los trabajos, que obtuvo un total de cuatro tesis. La investigación evidenció que en el proceso de enseñanza hay una relación entre el objeto del Cálculo y los modos de la organización y desarrollo de la actividad que consubstancia el objeto de enseñanza. Un momento importante es la elaboración y proposición de las tareas, pues condensa las intencionalidades y dirige el proceso de objetivación del contenido del conocimiento. En los análisis de las tareas presentes en las tesis queda claro que el objeto del Cálculo se objetiva desarticuladamente como consecuencia de una estructuración del sistema de tareas que no tiene como referencia su abstracción sustancial. A su vez, tales tareas son guiadas por contradicciones externas al contenido, no fomentando el surgimiento de necesidades que movilicen a los estudiantes para la apropiación de los conceptos. Además, los procesos de generalización predominantemente siguen del particular al general. Se concluye que la organización de la enseñanza difícilmente contribuye al desarrollo del pensamiento teórico de los estudiantes si no está precedida por una toma de posición ontológica ante el saber y el conocimiento que lo consubstancia.

Palabras clave: Enseñanza del Cálculo; objeto de enseñanza; análisis ontológico-genético.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Demonstração da proposição 21 e 22 de “Sobre Conoides e Esferoides” de Arquimedes 85
Figura 2 – Representação do movimento uniforme e uniformemente variado com base no trabalho de Oresme..... 95
Figura 3 – Diagrama da relação entre movimento uniformemente acelerado e movimento uniforme de Galileu..... 98
Figura 4 – Ilustração do Teorema II, Proposição II de Stevin..... 99
Figura 5 – Ilustração do procedimento de integração realizado por Fermat 105
Figura 6 – Ilustração de apoio para o método de determinação de tangentes de Fermat 107
Figura 7 – Triângulo característico..... 117
Figura 8 – Ampliação do triângulo característico 118
Figura 9 – Área sob a curva $y = 1x$ 126
Figura 10 – Área retangular..... 126
Figura 11 – Estrutura da atividade conforme Engeström..... 265
Figura 12 – Modelo mínimo representacional de interação entre sistemas de atividades..... 265
Figura 13 – Ações para a aprendizagem e contradições correspondentes no ciclo de aprendizagem expansiva 268
Figura 14 – Esquema de representação do triângulo do que Farias (2015) denomina de Atividade de Ensino de sua pesquisa 270

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Organização da relação entre curva, quadratura e integral das curvas de tipo $(1 - x^2)n/2$ com $n \in N$ 114
Quadro 2 – Tarefa 01 – Unidade I – Bezerra (2016) 276
Quadro 3 – Tarefa 4.AD e Tarefa IV-MO – Oliveira (2021) 277
Quadro 4 – Tarefa 1.EB – Oliveira (2021) 280
Quadro 5 – Tarefa 6 A.EM – Oliveira (2021) 285
Quadro 6 - Tarefa 4 – Unidade I – Bezerra (2016); Tarefa 1 – Problema 1 – Farias (2015) 285
Quadro 7 – Tarefa 07 – Unidade I – Bezerra (2016) 287
Quadro 8 – Tarefa 09 – Unidade I – Bezerra (2016) 288
Quadro 9 – Tarefa 7A.EM – Oliveira (2021) 291
Quadro 10 – Tarefa 2 – Unidade II – Bezerra (2016) 292
Quadro 11 – Tarefa 10A.EV – Oliveira (2021) 293
Quadro 12 – Tarefa 4 – Unidade II – Bezerra (2016) 294
Quadro 13 – Exercício 1 – Prevot (2019) 297
Quadro 14 – Situação-Problema 2 – Prevot (2019) 297
Quadro 15 – Tarefa 12A.EV – Oliveira (2021) 298
Quadro 16 – Problema 1 – Tarefa 3 – Farias (2015) 298
Quadro 17 – Tarefa 1 – Unidade III – Bezerra (2016) 301
Quadro 18 – Tarefa 2 – Bezerra (2016) 301
Quadro 19 – Exercício 3 – Prevot (2019) 302
Quadro 20 – Situação-problema 4 – Prevot (2019) 303
Quadro 21 – Tarefa 3 – Bezerra (2016) 304

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABP	Aprendizagem Baseada em Problemas
AOE	Atividade Orientadora de Ensino
ASPD	Atividade de Situação de Problema Discente
BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
BOA	Base Orientadora da Ação
CAPES	Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CDI	Cálculo Diferencial e Integral
DNC	Diretrizes Curriculares Nacionais
EBOCA	Esquema da Base Orientadora Completa da Ação
GPEMAHC	Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática
GEPAPe	Grupo de Estudos e Pesquisa sobre Atividade Pedagógica
MM	Modelagem Matemática
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
PBL	Problem-Based Learning
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
URSS	União das Repúblicas Socialistas Soviéticas
TA	Teoria da Atividade
TFC	Teorema Fundamental do Cálculo

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 17
1.1 METODOLOGIA 33
2 ELEMENTOS ONTOLÓGICOS GERAIS DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO 43
2.1 TOTALIDADE E REALIDADE 45
2.2 ASPECTOS ONTOLÓGICOS RELATIVOS AO CONHECIMENTO EM GERAL E AO CONHECIMENTO MATEMÁTICO EM PARTICULAR 52
3 ANÁLISE ONTOLÓGICO-GENÉTICA DO CÁLCULO 64
3.1 A GÊNESE DO SABER E DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO 68
3.2 O DEBATE GREGO SOBRE A RELAÇÃO ENTRE FLUÊNCIA E PERMANÊNCIA E UNIDADE E MULTIPLICIDADE 75
3.3 "A REALIDADE GRITA": O MOVIMENTO SE IMPÕE 89
3.4 A SÍNTESE HISTÓRICA DOS INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS DE APREENSÃO DO MOVIMENTO 108
3.5 A FORMALIZAÇÃO DOS CONCEITOS DE DERIVADA E INTEGRAL E O ESCAMOTEAMENTO DO FENÔMENO DO MOVIMENTO 122
3.6 DETERMINAÇÕES ONTOLÓGICAS DO SISTEMA CONCEITUAL DO CÁLCULO 136
4 A RELAÇÃO ENTRE O LÓGICO E O HISTÓRICO: ELEMENTOS TEÓRICO-CONCEITUAIS PARA A APROPRIAÇÃO DO CONCEITO DE OBJETO DE ENSINO 146
4.1 CONCEPÇÃO CONCRETA DE HISTÓRIA 147
4.2 A RELAÇÃO ENTRE O LÓGICO E O HISTÓRICO NO PROCESSO DE CONHECIMENTO 166
4.2.1 A interpretação da relação entre o lógico e o histórico com fundamento em elaborações de Engels 168
4.2.2 A interpretação ontológica da relação entre o lógico e o histórico 184
5 A DIALÉTICA ENTRE FILOGÊNESE E ONTOGÊNESE E A CONSTITUIÇÃO DO OBJETO DE ENSINO NO CONTEXTO DA ATIVIDADE COLETIVA DE ESTUDO ESCOLAR 199
5.1 MODOS DE CONCEBER A RELAÇÃO ENTRE FILOGÊNESE E ONTOGÊNESE E IMPLICAÇÕES PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA 200

5.2 O OBJETO DE ENSINO NO CONTEXTO DA ATIVIDADE COLETIVA DE ESTUDO ESCOLAR: UMA ANÁLISE ONTOLÓGICA DE SUA NATUREZA 224
6 A MANIFESTAÇÃO DO OBJETO DE ENSINO DO CÁLCULO EM TAREFAS QUE COMPÕEM A ORGANIZAÇÃO DO ENSINO DE PESQUISAS QUE SE ANUNCIAM EMBASADAS NA TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL 242
6.1 FUNDAMENTOS TEÓRICO-METODOLÓGICOS DAS ORGANIZAÇÕES DE ENSINO PROPOSTAS NAS TESES ANALISADAS 246
6.2 O CONTEÚDO MATEMÁTICO DO OBJETO DE ENSINO DO CÁLCULO 275
6.2.1 Análise do conteúdo matemático das tarefas relativas aos conceitos de função e limite 276
6.2.2 Análise do conteúdo matemático das tarefas relativas ao conceito de derivada. 289
6.2.3 Análise do conteúdo matemático das tarefas relativas ao conceito de integral .. 299
6.3 A OBJETIVAÇÃO DO OBJETO DE ENSINO DO CÁLCULO EM TAREFAS EXPLICITADAS DE PESQUISAS QUE SE ANUNCIAM FUNDAMENTADAS NA TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL 305
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS 309
REFERÊNCIAS 316
APÊNDICE - TESES E DISSERTAÇÕES QUE ABORDAM A RELAÇÃO ENTRE O LÓGICO E O HISTÓRICO 337

1 INTRODUÇÃO

A presente pesquisa se constitui como síntese de uma cadeia imensurável de inter-relações de natureza diversificada e estabelecidas em distintas esferas sociais, que se condensam em um tempo e espaço determinados na forma de um problema. Esta não é, de modo algum, uma produção oriunda unicamente da mente do sujeito/pesquisador, apesar de o sujeito/pesquisador ser um elemento importante em sua constituição. Caso a entendêssemos de outra forma, condenar-nos-íamos a abordar uma relação central do movimento de constituição do conhecimento, de modo a isolar elementos que possuem características próprias, mas que formam uma unidade indissolúvel, a saber: o sujeito e o objeto. O isolamento e a abordagem independente desses dois elementos – ou seja, a separação daquilo que está efetivamente imbricado, em unidade – incorreriam no erro comum dos filósofos metafísicos (Lefebvre, 1991). Por sua vez, é preciso sublinhar que, apesar de estarem ligados como categorias reflexivas de um mesmo processo, possuem suas especificidades e, portanto, características próprias.

A referida problemática pode ser encontrada na análise que Marx (2007, p. 533) faz do materialismo de sua época:

> O principal defeito de todo materialismo existente até agora (o de Feuerbach incluído) é que o objeto [*Gegenstand*], a realidade, o sensível, só é apreendido sob a forma do *objeto* [*Objekt*] ou da *contemplação*, mas não como *atividade humana sensível*, como *prática*; não subjetivamente. Daí o lado *ativo*, em oposição ao materialismo, [ter sido] abstratamente desenvolvido pelo idealismo – que, naturalmente, não conhece a atividade real, sensível, como tal. Feuerbach quer objetos sensíveis [*sinnliche Objekte*], efetivamente diferenciados dos objetos do pensamento: mas ele não apreende a própria atividade humana como atividade objetiva [*gegenständliche Tätigkeit*].

Nessas linhas, Marx aponta diferentes elementos concernentes à relação entre sujeito e objeto que se efetivam apenas na realização da atividade humana como uma forma objetiva de ser do próprio fazer humano. Assim, sujeito e objeto se determinam mutuamente na atividade, mas de modo algum se confundem. Essa característica faz emergir a necessidade de especificação da natureza e função de cada um desses elementos no contexto da atividade.

De maneira sucinta, com base em uma ontologia materialista-dialética, considera-se o sujeito como um ser humano que se forma, em sua essencialidade, na relação ativa com outros seres humanos e com os objetos da realidade em que está imerso (Leontiev, 1991, 2004, 2021). Com apoio em Lukács (2013), consideramos esses objetos como oriundos da própria

prática social, que se constituem como objetivações[1] necessárias aos indivíduos no processo de autoprodução e reprodução como seres humanos e, por consequência, no movimento de desenvolvimento e conservação da continuidade da sociedade e do gênero humano.

O sujeito, ao atuar para garantir sua reprodução, age sempre em uma realidade produzida, de maneira extensiva e intensiva, sobre uma matriz social. Como consequência, o enlaçamento do sujeito com o objeto tem suas raízes na própria constituição ontológica da realidade social, ou seja, na atividade humana dirigida à sua autorreprodução no decurso da história (Lukács, 2013).

Com base nessas considerações preliminares, que serão desenvolvidas e aprofundadas mais adequadamente na exposição da pesquisa, é possível identificar algumas características gerais do conhecimento humano. Conforme Lefebvre (1991), o conhecimento é *prático*, ou seja, tem por base a experiência que põe o ser humano em contato com a realidade objetiva. Destarte, o relacionamento do sujeito com o mundo é a base da possibilidade do conhecimento, que também é *social* e *histórico*.

O processo de conhecimento é, portanto, bastante complexo e sintetiza uma série de relações entre uma gigantesca cadeia de elementos, evidenciado pelo caráter infinitamente intensivo do objeto que se visa conhecer (Lukács, 2013). Dessa cadeia de elementos vale destacar, no contexto da presente pesquisa, a constituição do problema que põe o indivíduo na busca de uma solução, pois no movimento de sua gênese e desenvolvimento podem ser explicitadas características que ajudam a apropriação do próprio objeto a ser pesquisado. Esse, como apontam Araujo e Moraes (2017), na forma de objeto particular de uma investigação, é determinado pelo objeto geral da ciência de que faz parte – neste caso, da Ciência da Educação[2]

---

[1] A palavra objetivação tem posição central na teoria desenvolvida por Luis Radford, a *Teoria da Objetivação*. Essa se concentra em problemas ligados ao ensino e aprendizagem, fundamentando-se na filosofia de Hegel e no materialismo dialético desenvolvido por Marx, bem como nas contribuições de E. V. Ilienkov. Devido a proximidades teóricas, torna-se importante a distinção do significado de objetivação adotado em nosso trabalho e nas elaborações da referida teoria. Para Radford (2021a, p. 109) "a objetivação é um processo no qual o objeto cultural (*Objekt*), até então não reconhecido ou encontrado, é transformado em um objeto de consciência (*Gegenstand*) [...]". Tal interpretação se baseia em um significado de objetivação que remete a "algo que está diante de mim e cuja presença me desafia, que a teoria da objetivação toma emprestado seu nome" (Radford, 2021a). Ou seja, adotando como referência a interpretação etimológica da palavra *Gegenstand* que, segundo o autor, no dialeto swabiano de Hegel, possui significado de *obstáculo*, além de ter como contraparte na palavra latina *ob-jacere*, interpreta a objetivação com sentido próximo a "aquilo que me opõe". Apesar de entendermos e concordamos com o significado adotado pelo autor em sua teoria, quando empregamos a palavra *objetivação*, em geral, estamos nos referindo, assim como Duarte (2013), ao processo de fazer-se ou estar objetivo, ou seja, ao processo de adquirir ou ao estado de posse da propriedade da objetividade, no caso do ser humano, como ação dele mesmo. Em outras palavras, referimo-nos tanto ao processo de transformação do objeto e impressão de características da atividade do sujeito nas propriedades do objeto como ao produto desse processo. Retornaremos a esse tema no quinto capítulo do presente trabalho.

[2] Entendemos a Ciência da Educação como a área de pesquisa que se constitui quando "a educação, enquanto pontos de partida e de chegada, torna-se o centro das preocupações" (Saviani, 2013, p. 30). Não entraremos na

– do mesmo modo que, em seu ponto de chegada, determina a si mesmo e ao próprio objeto dessa ciência. Neste caso, o objeto particular da presente pesquisa é o *objeto de ensino do Cálculo* que, no âmbito da pesquisa em educação, é determinado pelo objeto geral dessa área de pesquisa, a saber: os modos de realização da dialética entre apropriação e objetivação dos conhecimentos, habilidades, capacidades, valores e formas de conduta historicamente elaborados pela humanidade.[3]

Para explicitarmos o processo de constituição do problema desta pesquisa, consideramos conveniente expor a razão pela qual entendemos o objeto da pesquisa em educação de tal maneira. Araujo e Moraes (2017, p. 50), ao tomarem como referência à pesquisa educacional a pesquisa pedagógica, devido aos seus lugares de fala – a educação escolar –, apontam que "o objeto central da pesquisa em Educação é a *Atividade Pedagógica* compreendida na perspectiva da educação escolar". Para as autoras, a abordagem da referida atividade nessa perspectiva se justifica por ser "a forma educativa mais desenvolvida existente em nossa sociedade, como a forma que permite realizar e expressar a Atividade Pedagógica" (Araujo; Moraes, 2017, p. 50). Nesse contexto, chamamos a atenção para o fato de a afirmação das autoras e a nossa não serem incongruentes, pois se diferenciam apenas pelos níveis de especificação dos objetos. Contudo, é mister destacar esses posicionamentos para matizar as diferenças aqui abordadas.

Nossa pesquisa, também inserida no contexto da educação escolar, volta-se à análise da *atividade coletiva de estudo escolar*[4]. Essa, em nosso entendimento, é a forma clássica de manifestação do fenômeno educacional, pois é expressão do modo mais desenvolvido e intencionalmente dirigido da produção e reprodução, em cada representante singular do gênero humano, das potencialidades historica e socialmente elaboradas pela humanidade (Duarte, 2013).

Para que fique mais explícita a relação entre nosso objeto e aquele da pesquisa em educação em geral e da pesquisa pedagógica em particular, cabe aqui fazer uma breve exposição

---

discussão dos diferentes modos de conceituação do que é a Ciência, entendendo-a como formas de investigação e apropriação de fenômenos específicos da realidade que, com o desenvolvimento social e, como consequência da divisão social e técnica do trabalho, ganharam um grau de autonomia e se institucionalizaram por meio de práticas sociais específicas.

[3] Essa não é uma afirmação de Araujo e Moraes (2017), mas de nossa autoria fundamentados em Duarte (2013) e Davídov e Slobódchikov (1991), o que isenta as autoras de quaisquer críticas.

[4] Chamamos aqui de *atividade coletiva de estudo escolar* como modo de distinção do conceito de *Atividade Pedagógica.* Isso se faz necessário para que não responsabilizemos autores que utilizam o conceito de Atividade Pedagógica por devidos equívocos interpretativos e fragilidades teóricas que venham a ser encontrados em nossa interpretação das atividades intencionalmente dirigidas à apropriação da realidade humanizada em âmbito escolar que envolvam sujeitos com funções sociais distintas.

do significado atribuído a *objeto*. Essa categoria, devido à polissemia da palavra que a nomeia, pode ser empregada indiscriminadamente em diferentes situações, o que conduz, a quem comunica, assim como a quem é comunicado, a compreensões divergentes. No contexto da presente pesquisa, pode-se referir ao(s) *objeto(s) matemático(s)* ou ainda ao(s) *objeto(s) da matemática*. No primeiro caso, a palavra *objeto* possui a conotação do que são marcas de referência do discurso dos matemáticos, como, por exemplo, números, pontos, funções e conjuntos (Shapiro, 2016). No segundo caso, o significado, que é o mesmo da discussão apresentada e possui propriedades próximas ao significado que buscamos transmitir, é generalíssimo, vinculado à *coisa*, ou, mais especificamente, um termo "de qualquer operação ativa, passiva, prática, cognoscitiva ou linguística" em que o possui como "termo ou limite" qualificado (Abbagnano, 2007, p. 723).

No que se refere à natureza da categoria *objeto*, é importante destacar que, na filosofia alemã, houve o emprego de palavras distintas para designar dois significados de objeto: *Gegenstand* e *Objekt*. De acordo com Radford (2021a), Hegel utiliza-se desses dois termos distinguindo o *Objekt*, que designa um objeto geral e independente do indivíduo que está dado no mundo, de *Gegenstand*, utilizado para se referir a um objeto da consciência, mediado por ela e que se modifica em dependência consigo. De tal modo, essa distinção gera determinadas implicações, uma vez que, na prática humana, os objetos (*Objekt*) entram em relações com os sujeitos em contextos que exigem uma atividade objetiva (*gegenständliche Tätigkeit*), conforme o supracitado excerto de Marx (2007).

É nesse cenário que interpretamos o entendimento de Araujo e Moraes (2017), para quem o objeto, no âmbito da pesquisa, é um fenômeno histórico e geral que se refere a um campo investigativo e tem por referência um motivo que a organiza e a direciona. Desse modo pressupõe-se, para a constituição do objeto de pesquisa, a existência da relação com um sujeito na unidade que configura uma atividade. Com isso, não negamos a independência do fenômeno que se constitui objeto, mas sim grifamos que o processo de apreensão de suas legalidades ou de ação do sujeito sobre ele, ou seja, a atividade, é que atribui a sua peculiaridade como objeto, dado que essa característica só faz sentido nesse contexto. Assim, pode-se advogar a favor da inseparabilidade – o que não é equivalente à indistinguibilidade – de sujeito e objeto na unidade que compõe a atividade, em especial quando lidamos com o objeto de ensino.

O objetivo da presente introdução, portanto, é expressar a relação entre o objeto da Ciência da Educação – os modos de realização da dialética entre apropriação e objetivação pelos indivíduos dos conhecimentos, habilidades, comportamentos e valores historicamente elaborados pela humanidade – e o objeto particular desta pesquisa – o objeto de ensino do

Cálculo – como manifestação de um modo geral de constituição de um objeto de pesquisa. É importante destacar que a intenção inicial, para a introdução, direcionava-se a lançar luz unicamente sobre os nexos internos e determinantes da problematização do objeto. Entretanto, ao nos depararmos com a *relação essencial*[5] (Davídov[6], 1988) – relação entre o ***objeto do conhecimento*** e o ***objeto do ensino*** – do fenômeno em processo de pesquisa, emergiu a necessidade de estabelecer o movimento de sua explicitação, o que nos conduziu à alteração da intenção inicial e ao desvio do percurso expositivo em direção à descrição e explicação do objeto de pesquisa da presente tese.

A referência inicial é a concepção da pesquisa como atividade, o que pressupõe outra, a de que o ser humano interage com a realidade, altera-a e a transforma, com base em um fim determinado. Segundo Davídov (1988, p. 21, tradução nossa)[7], fundamentado em Lênin, os componentes mais importantes dessa atividade são "a proposição de finalidades, a escolha e utilização de meios externos (instrumentos), a verificação da coincidência do subjetivo e o objetivo"[8]. De tal modo, é realizado um movimento de atuação sobre um objeto com o intuito de transformá-lo para atender determinada necessidade. Para a sua satisfação, o sujeito ou o grupo precisam agir sobre um determinado objeto com vistas à sua transformação em elemento que, por suas propriedades, permita a satisfação da carência que constitui a necessidade (Leontiev, 2017).

O sujeito inicia um movimento de busca, no qual cumprem um importante papel os conhecimentos prévios que possui, pois o auxiliam na identificação, entre os elementos e propriedades dos objetos, daquelas relações causais que podem ser colocadas em movimento para modificá-lo na direção desejada (Lukács, 2013). Desse modo, estabelece-se uma relação entre presente e futuro que direciona e conduz o movimento da atividade (Roth; Radford, 2011). Há, pois, uma imbricação entre o que é – o presente – e o que pode vir a ser – o devir ou futuro – que estabelece uma unidade indissociável na consciência na forma de reflexo da relação entre

---

[5] Davídov (1988) entende por *relação essencial* aquela que é base interna, geneticamente inicial, universal, de um objeto integral.

[6] Devido à transliteração do alfabeto cirílico para o alfabeto latino, é comum encontrar diferentes grafias para os nomes de autores russos e soviéticos. Adotaremos como referência a mesma grafia das bibliografias consultadas. Quando nos referirmos a esses autores sem explicitar uma obra específica, utilizaremos, arbitrariamente, sempre a grafia com [i] no lugar de [í], [ii], [y] ou [ý], bem como a supressão do apóstrofo ['] utilizado em algumas transliterações.

[7] Quando as citações são extraídas de referências escritas em outros idiomas, apresentaremos as traduções realizadas por nós no corpo do texto e a sua versão no idioma da edição citada em nota de rodapé.

[8] "[...] el planteamiento de finalidades, la elección y utilización de medios externos (instrumentos), la verificación de la coincidencia de lo subjetivo y lo objetivo".

a necessidade do sujeito e as legalidades da realidade sujeitas à reordenação para que se tornem um novo elemento que possa satisfazer dita necessidade.

O momento em que esses elementos emergiram – no contexto de nossa atuação e que se sintetizaram no problema da pesquisa –, foi a escolha por cursar Licenciatura em Matemática. Por diferentes razões, esse curso respondia a certas necessidades que na época, após a conclusão da Educação Básica, estruturavam as aspirações que possuíamos para a vida adulta.

No ingresso no curso, o principal motivo de estudo era cognoscitivo, uma vez que não vislumbrávamos atuar como docente. Entretanto, nesse processo emergiram necessidades de ordem econômica, psicológica, social, moral e emocional, pelas quais a possibilidade de atuação futura na docência começou a se constituir como objetivo. Desse modo, psicologicamente, foram atribuídos outros sentidos a conhecimentos de ordem didática e pedagógica estudados no curso. Eles começaram a ser considerados essenciais para uma prática pedagógica que se alinhasse aos objetivos de possibilitar aos estudantes a apropriação de conhecimentos, modos de ação, valores, formas de pensamento e de condutas historicamente elaborados pela humanidade. Nesse processo, um amplo conjunto de novas condições se apresentaram, o que nos proporcionou possibilidade de começar a participar de encontros de estudos do Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática: uma abordagem Histórico-Cultural (GPEMAHC), liderado pelo professor/pesquisador Ademir Damazio, primeiro orientador da presente pesquisa. A participação nesse grupo propiciou o surgimento da necessidade da pesquisa como meio para subsidiar uma atuação docente mais conscientemente direcionada ao fim que propúnhamos alcançar. Por decorrência, na interação com os pesquisadores do GPEMAHC pudemos entrar em contato com autores considerados clássicos da teoria histórico-cultural, como L. S. Vigotski, A. R. Luria, A. N. Leontiev, S. L. Rubinstein, P. Ya. Galperin, D. B. Elkonin e V. V. Davidov.

Após a conclusão da graduação, ingressamos no Programa de Pós-Graduação em Educação, no qual investigamos a relação existente entre o modo pelo qual o professor organiza e direciona a sua atividade de ensino e a formação da individualidade dos estudantes (Spacek, 2012), dissertação orientada pelo atual orientador desta pesquisa, professor/pesquisador Vidalcir Ortigara. Na oportunidade, foram encontrados indícios que apontavam para concepções voltadas à formação do estudante para o trabalho – ainda que a concepção dos professores não acompanhava o desenvolvimento de tal categoria na realidade – e para a cidadania, cuja concepção, entre os pesquisados, era superficial (Spacek, 2012; Spacek; Ortigara, 2018). Para atingir essas finalidades, os professores consideravam imprescindível a

relação direta dos conceitos matemáticos com o cotidiano do estudante. A categoria do *cotidiano*, para alguns dos entrevistados, também era alçada a critério de seleção de conceitos a serem ensinados, apesar de não possuírem uma compreensão teórica consciente do que significavam como cotidiano (Spacek, 2012; Spacek; Ortigara, 2022).

Nesse período, também começamos a atuar como docente no Ensino Médio, fato que desencadeou outros interesses[9] de pesquisa. Assim, nossa atenção se voltou para temas relacionados aos conceitos a serem ensinados. Entretanto, isso não teve papel mobilizador na formulação de problemas que nos colocassem em atividade de pesquisa no que se referia especificamente à organização do ensino. Por sua vez, nesse tempo, o GPEMAHC se ocupava, majoritariamente, com os estudos dos materiais do sistema de ensino Elkonin-Davidov (Davídov, 1988; Davýdov, [198-?]; Давыдов, Горбов, Микулина, 1997), o que nos possibilitou, mesmo que de maneira pouco intensa, a familiarização com os princípios didáticos e metodológicos que orientam dito sistema.

No ano de nossa defesa da dissertação, começamos a lecionar, em cursos de graduação, em sua maioria engenharias, disciplinas ligadas à matemática. Alguns anos depois, tivemos a oportunidade de ministrar a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral[10] I. A disciplina era estruturada de maneira que apresentasse um mesmo ritmo e um mesmo nível de cobrança em todos os diferentes cursos em que era ministrada dentro da universidade. Os professores possuíam uma liberdade limitada para a organização do tempo destinado ao desenvolvimento das sequências de ensino dos conceitos, bem como para a elaboração de avaliações. A atuação autoral se limitava ao âmbito da organização dessas sequências e da abordagem dos conceitos. Nesse contexto, percebemos algumas dificuldades dos estudantes na disciplina, o que também era detectado por outros professores de nosso contato pessoal. Dentre essas dificuldades, aquela que em nossa avaliação era apontada e diagnosticada, naquela época, como a que mais dificultava a apropriação dos conceitos do Cálculo se relacionava ao estabelecimento de relações de covariação entre grandezas variáveis. Consequentemente, refletia-se nos índices de êxito, considerados insatisfatórios para nós. Por decorrência, é possível levantar a hipótese de que, além da tendência a um alto índice de não aproveitamento na disciplina, não ocorria a apropriação dos conceitos abordados.

---

[9] Entendemos por interesse, assim como Leontiev (2017, p. 51), "*a direção determinada que têm as funções cognoscitivas para os objetos e fenômenos da realidade*".

[10] No restante do texto, com o intuito de tornar a leitura mais fluida, será adotada apenas a palavra *Cálculo* para nos referirmos ao *Cálculo Diferencial e Integral* e ao *Cálculo Infinitesimal*. Quando for necessária a especificação e suas diferenciações, utilizaremos as referidas adjetivações.

Esse cenário pode ser considerado como uma manifestação daquilo que Oliveira e Raad (2012) denominam de "cultura da reprovação"[11] nas disciplinas de Cálculo. Essa "cultura" se mostra presente em contextos em que os altos índices de não aproveitamento da disciplina, que incluem evasão e retenção, são normalizados. Maneiras distintas de manifestação desse fenômeno se objetivam entre os sujeitos que exercem determinadas posições na esfera de ensino. Entre os estudantes, cria-se o mito de que a reprovação é regra e a aprovação é exceção. Por sua vez, entre os professores se apresenta uma espécie de "senso comum" que concebe esses altos índices como um aspecto inerente à natureza da disciplina, o que proporciona, por consequência, uma atitude de resignação com os rumos do seu ensino. Por decorrência, limita-se o horizonte de possibilidades de atuação a ações meramente paliativas, como a inclusão de disciplinas preparatórias, a realização de revisões, o aumento do número de exercícios e o acréscimo de tempo na carga horária da disciplina (Oliveira; Raad, 2012).

Para além disso, consideramos que esse processo de normalização é produto e produz uma concepção de aprendizagem e desenvolvimento arraigada, em algum grau, no inatismo ou ainda em uma concepção que podemos denominar *culpabilizadora retrospectiva*. No primeiro caso, concebem-se como naturais as dificuldades dos estudantes com o Cálculo, enquanto no segundo adota-se como justificativa para o cenário descrito uma suposta lacuna de formação básica que deveria ser suprida pelos professores das etapas formativas anteriores. Conforme Oliveira e Raad (2012), nos locais onde a "cultura da reprovação" se faz presente, as soluções dos professores são remediar o problema com a ampliação da quantidade do que costumam fazer, ao invés de buscar outros modos de organizar o seu ensino. É possível estabelecer um paralelo entre essa forma de agir e *o princípio do caráter sucessivo* do ensino tradicional[12], identificado por Davydov (2017). Segundo esse princípio, durante o processo educativo escolar não há uma diferenciação clara entre as particularidades e especificidades das

[11] Para os autores, fundamentados em Chartier (2007 *apud* Oliveira; Raad, 2012), a noção de cultura é relativa a práticas ordinárias pelas quais uma sociedade ou indivíduo vive e que refletem sua relação com o mundo, com os outros indivíduos ou consigo mesmo. Desse modo, a noção de cultura está "agarrada a um grupo e à sua vida comum de existência, que nos localizamos no âmbito de uma História Cultural; em específico, à vida cotidiana das escolas, das universidades, aos significados construídos no meio escolar ou acadêmico que dão vida e funcionamento ao dia-a-dia pedagógico" (Oliveira; Raad, 2012, p. 127). Observa-se que, além da identificação de cotidiano com dia a dia, chama a atenção o conceito de cultura, mais estreito do que o adotado na presente tese, por sua vez mais abrangente e relativo ao modo pelo qual, essencialmente, realiza-se o processo de produção, conservação e reprodução de instrumentos, ideias e técnicas (Saviani, 1996).

[12] Entendemos como ensino tradicional aquele vinculado à escola tradicional que é, nas palavras de Davydov (2017, p. 211), "um sistema relativamente único de educação europeia que, em primeiro lugar, formou-se no período do nascimento e florescimento da produção capitalista e ao qual serviu; em segundo lugar, foi fundamentado nos trabalhos de Y. Komenius, I. Pestalozzi, A. Diesterweg, K. Ushinski, além de outros destacados pedagogos desse período; e, em terceiro lugar, conservou até agora seus princípios iniciais como base para a seleção do conteúdo e dos métodos de ensino na escola atual".

etapas subsequentes em relação às anteriores. Nesse sentido, a complexidade dos conhecimentos aumenta, entretanto sem uma análise indicadora de sua contribuição para a formação dos indivíduos, o que suscita, em geral, mudança apenas no que se refere à quantidade das exigências.

Outra característica da naturalização da dificuldade no estudo do Cálculo diz respeito a questões ligadas a aspectos epistemológicos (González-Martín; Correira de Sá, 2008; Rezende, 2003; Gyöngyösi; Solovej; Winsløw; 2011). Esses, devido ao longo percurso de desenvolvimento dos conceitos que compõem o Cálculo ter sido marcado por diversos períodos de continuidades e descontinuidades, acelerado desenvolvimento e relativa estagnação, podem ser entendidos como reflexo das dificuldades enfrentadas pelos indivíduos que os vivenciaram e que se repetem, necessariamente, na ontogênese – *princípio do recapitulacionismo*. Tal concepção, em uma vertente menos determinista, pode identificar como dificuldades dos estudantes certos "obstáculos" enfrentados pela humanidade na história. Entretanto, a referida caracterização se realiza ao tomar como parâmetro a forma atual de desenvolvimento do conhecimento, assim como o modo pelo qual nos comportamos diante dele, o que nessa premissa indica as suas limitações.

O objetivo de sublinhar essa caracterização não é negar a existência de dificuldades de ordem epistemológica, mas apontar a necessidade de considerar a sua gênese como localizada no modo pelo qual o nosso pensamento se estrutura na atualidade. Isso, por sua vez, tem fortes ligações com os aspectos culturais oriundos da forma de reprodução das várias esferas do ser social. Nesse sentido é que, para Davydov (1975), por exemplo, as características encontradas por Piaget no estágio operatório concreto estão enredadas na forma como a escola elementar tradicional é organizada, tendo como base, especialmente, o conteúdo externo, sem vinculações substanciais com o seu aspecto conceitual, teórico.

> Os ritmos mesmo [do desenvolvimento da criança] são derivados de modos específicos em que o ensino é realmente organizado. Em particular, os ritmos são derivados do grau pelo qual, e os níveis de idade do qual, as crianças dominam o "padrão" (ou "normas" conceituais) da atividade mental. Ao mesmo tempo, dentro do contexto do problema, respostas serão procuradas para perguntas sobre as então chamadas características de desenvolvimento do pensamento das crianças, que em essência podem ser apenas relativos, dependentes da maneira que o desenvolvimento do pensamento é "realmente organizado" no processo de ensino (no amplo sentido da palavra)[13] (Davydov, 1975, p. 94).

[13] "The rates themselves are derived from specific ways in which instruction is actually organized. In particular, the rates are derived from the extent to which, and the age levels at which, children master the real 'standards' (or conceptual 'norms') of mental activity. At the same time, within the context of this problem, answers will be sought to questions about the so-called developmental characteristics of the child's thinking, which in essence cab

Percebe-se que o autor russo põe em relevo a natureza social do desenvolvimento e a sua relação com a aprendizagem. Para Davydov (1975), a forma como se desenvolve o pensamento dos estudantes se ancora no modo pelo qual o ensino é organizado. Isso é um pressuposto da presente pesquisa, pois admitimos como base que o indivíduo humano, em seu movimento constante de relação com a realidade, apropria-se dos modos socialmente estabelecidos de pensar, agir e reagir diante dessa mesma realidade, no processo dialético de apropriação e objetivação (Duarte, 2013). De tal maneira, o ensino almejado possui como finalidade e essência o "desenvolvimento das capacidades gerais, genéricas do homem; a aquisição, por parte deste, dos procedimentos universais da atividade"[14] (Davídov; Slobódchikov, 1991, p. 118). Por decorrência, alicerçados em Davydov (2017), podemos conceber que a organização deste ensino influi diretamente na forma e no conteúdo que será apropriado na atividade coletiva de estudo escolar, seja ela na Educação Básica ou no Ensino Superior. Como destacado anteriormente, a afirmação desse pressuposto não descarta os problemas de natureza lógica, epistemológica, psicológica ou didática, mas os considera condicionados pelas formas de organização da sociedade, ou seja, pelo nível de desenvolvimento do ser social em sua totalidade. Nessa direção, Lukács (2013, p. 177) afirma que cada "sociedade reivindica certa quantidade de conhecimentos, habilidades, comportamentos etc. de seus membros; o conteúdo, o método, a duração etc. da educação no sentido mais estrito são consequência das carências sociais daí surgidas".

Na análise da organização do currículo de matemática, Davydov (1975) destaca sua falta de integração, o que, por consequência, falhava na garantia de continuidade entre os diferentes níveis do percurso educativo formal. Para atingir essa unidade, o autor estabeleceu, entre outras tarefas gerais, a estruturação do ensino da matemática como um conjunto integrado de conceitos. Importante destacar que essa integração não elimina a necessidade de organização com base no *princípio do caráter novo dos conhecimentos*, ou seja, ter por fundamento o pressuposto de que níveis distintos de ensino escolar devem, necessariamente, ser estruturados sobre a base de níveis qualitativamente diferenciados (Davídov; Slobódchikov, 1991; Davydov, 2017). Nesse sentido, para Davydov (2017), ao ingressar na escola, as crianças devem perceber e sentir nitidamente o novo caráter e peculiaridade dos conceitos com que agora têm contato

---

be only relative, dependent on the way the development of thinking is 'actually organized' in the instruction process (in the broad sense of the word)".

[14] "[...] desarrollo de las capacidades generales, genéricas del hombre; la adquisición, por parte de este, de los procedimientos universales de la actividad".

em relação aos da sua experiência pré-escolar. Do mesmo modo, nos "níveis superiores, a forma e o conteúdo dos conhecimentos e as condições de sua assimilação devem ter uma organização qualitativa diferente da dos níveis anteriores" (Davydov, 2017, p. 218). Essas diferenças qualitativas nas diversas etapas de ensino são, para Davydov (2017, p. 218), aquelas "que devem estar na base das ideias dos organizadores do ensino e psicólogos ocupados na estruturação do sistema total de ensino médio (a conexão do qualitativamente diferente é a verdadeira dialética do desenvolvimento e a dialética de sua teoria)".

Ao ampliar a assertiva davidoviana, é defensável que essas diferenças possam ser, também, base para a fundamentação do sistema de ensino nos níveis superiores. É nesse contexto que as ações paliativas – disciplinas preparatórias e revisões, elencadas pelos professores como forma de lidar com a problemática da não aprendizagem na disciplina de Cálculo (Oliveira; Raad, 2012) –, para que surtam algum efeito, necessitam de uma qualidade substancialmente distinta daquelas vivenciadas, seja no Ensino Médio, seja no curso regular de graduação, de modo que os estudantes percebam e se apropriem de uma nova qualidade do conhecimento.[15] Essa qualidade, contudo, não é determinada apenas pela mudança da forma de organização do ensino, mas principalmente por seu conteúdo. Nesse sentido, para Davídov (1988), na teoria de ensino desenvolvimental o conteúdo é basilar, vsito que dele é que derivam os métodos de ensino.

É nesse contexto que o ensino de Cálculo se torna uma de nossas maiores preocupações. Do enfrentamento constante do cenário descrito, surge a necessidade de proporcionar atividades coletivas de modo que, em seu desenvolvimento, apresentem-se as condições, aos estudantes, de se apropriar dos conceitos de Cálculo e poder pensar teoricamente a realidade fundamentados neles. Essa necessidade colocou-nos em movimento de busca por um objeto que a satisfizesse e que, de antemão, tivéssemos ciência da possibilidade de se tornar um objeto de pesquisa. Isso nos mobilizou a procurar estudos científicos que têm como objeto o ensino do Cálculo, bem como a formular nosso próprio projeto de pesquisa, que veio a ser um plano para a execução da investigação, ora em processo de descrição.

Conforme Bressoud *et al*. (2016), as pesquisas sobre ensino e aprendizagem de Cálculo cobrem quase todas as questões gerais que permeiam a pesquisa em educação matemática. Temas como dificuldades dos estudantes, práticas em sala de aula e elaboração de

[15] Esse processo de transição entre a formação básica e as etapas de formação profissional, em especial a educação superior, tem sido objeto de estudo de alguns pesquisadores. Por exemplo, Dias *et al*. (2010) realizam um estudo comparativo entre o Brasil e a França sobre o conceito de função, cujos dados de análise foram as provas de admissão para universidades. Também Ghedamsi e Lecorre (2021) investigam essa transição, além de realizar uma intervenção com professores a fim de auxiliá-los na preparação dos estudantes para encarar essa mudança.

tarefas, análise do currículo e uso de tecnologia têm sido explorados no âmbito da pesquisa. No entanto, diversos questionamentos continuam a surgir, desdobrados das múltiplas relações que compõem a totalidade que é o ensino de Cálculo, assim como o caráter processual da realidade da qual ele é um dos fenômenos constituintes. Tais questionamentos nos mobilizaram a buscar uma compreensão do modo pelo qual se estabelece a relação entre os determinantes envolvidos na constituição do objeto de ensino do Cálculo e o conteúdo do conhecimento que o constitui. Isso, entretanto, as referidas pesquisas não respondem de maneira suficiente.

Nossas considerações tomam como referência o empreendimento desenvolvido por Davydov (1975), que posiciona no centro da organização do ensino a ser formulado a seleção dos conceitos e de seus conteúdos. Nesse sentido, entendemos que esse aspecto pode se constituir como um princípio geral para a organização de um currículo e, por consequência, do ensino de matemática, em qualquer nível de ensino que se coloque como tarefa a criação de condições para os estudantes pensarem teoricamente. A identificação dos nexos conceituais[16] essenciais na constituição do objeto – no que se refere à presente pesquisa, o objeto do Cálculo –, nesse contexto, passa a ser elemento primordial. Isso exige, portanto, uma análise ontológico-genética, por um lado, do processo de constituição do objeto do Cálculo como especificidade da atividade matemática e, por outro, da sua relação e manifestação como objeto de ensino. Nesse quadro, torna-se importante considerar os elementos e nexos que orientam o processo de constituição de um objeto de ensino em geral e do objeto de ensino do Cálculo em particular, bem como o modo pelo qual ele se manifesta nas pesquisas sobre o ensino de Cálculo, especificamente aquelas que se anunciam fundamentas na teoria histórico-cultural, uma vez que tal análise pode fornecer-nos indicativos sobre as possibilidades e limitações de uma proposta de ensino sustentada nessa perspectiva teórica.

Desse cenário, desdobra-se outro pressuposto, alçado à posição de premissa em nosso movimento inicial de familiarização com o tema: a correta apreensão do problema do objeto do Cálculo e do seu ensino só é possível se fundamentada em uma análise ontológica. Em seu bojo, essa assertiva traz questionamentos relativos à apreensão do objeto de pesquisa com base na totalidade, para a qual se estabelece como constituinte. Tornam-se relevantes questões como: quais as abstrações substanciais do Cálculo? Que elementos fazem parte da essência desse campo de conhecimento? Qual é a especificidade do Cálculo diante de outros campos da matemática? A quais necessidades humanas esses conhecimentos respondem? Qual

[16] Entendemos por nexos conceituais determinados conceitos e relações entre eles que formam o sistema conceitual que reflete um objeto como sistema unitário, isto é, como uma totalidade.

o conteúdo teórico dos conhecimentos envolvidos no Cálculo? De que forma as determinações do objeto do Cálculo consubstanciam o objeto de ensino do Cálculo? Qual o conteúdo do objeto do Cálculo que constitui o conteúdo do objeto de ensino do Cálculo? E, por fim, quais os princípios organizadores do ensino de Cálculo com base nos princípios da teoria histórico-cultural? Essas questões não serão exploradas exaustivamente, mas se fazem presentes no horizonte desta pesquisa, iluminadas, parcialmente, pela análise ontológica, para nos auxiliar na apreensão concreta da multifacetada dinâmica do objeto de ensino do Cálculo, uma vez que articulam o "o que" se ensina com o "como", o "por que", o "para que", o "para quem", o "onde" e o "quando" se ensina e se aprende.

Emerge, desse contexto, a hipótese expressa da seguinte forma: a análise ontológica do objeto de ensino do Cálculo lança luz aos aspectos essenciais acerca do conteúdo do objeto do Cálculo objetivado na atividade coletiva de estudo escolar. Ou seja, essa forma de abordagem do objeto permite evidenciar elementos gerais referentes às relações entre o modo de organização e desenvolvimento do ensino e o objeto do conhecimento a ser apropriado.

Por extensão, a tese a ser defendida nesta pesquisa recebe a seguinte formulação: *O processo de constituição do objeto de ensino do Cálculo manifesta e objetiva um determinado conteúdo do objeto do Cálculo.*

No âmbito do quadro delineado, preocupamo-nos com o espaço daquelas formas de organização do ensino que se pautam em princípios teóricos galgados na teoria histórico-cultural. Isso porque eles constituíram instrumental teórico-metodológico de apropriação da realidade e atuação ante os problemas ligados às atividades envolvidas em nosso ser na docência e na pesquisa, além de constituir os fundamentos essenciais de nossa visão de mundo. Esse quadro teórico nos impulsiona para a tarefa de entender os determinantes dessa relação e sua manifestação em pesquisas – teses – que têm como objeto o ensino de Cálculo e se anunciam fundamentadas na teoria histórico-cultural.

A busca pela defesa desta tese se realizará no processo de resposta ao seguinte problema: **Qual o estatuto ontológico da relação entre o objeto do Cálculo e o objeto de seu ensino no contexto da educação escolar?**

A formulação do problema é a objetivação do movimento inicial da atividade ao atribuir-se uma finalidade que orienta o sujeito pesquisador no processo de pesquisa. Desse modo, a atividade de pesquisa "deve provocar no sujeito uma necessidade de solucionar algum problema. Ou, melhor ainda: ter sua nascente numa necessidade. Esta, por sua vez, só aparece diante de um problema que precisa ser resolvido e cuja solução exige uma estratégia de ação" (Moura, 2000, p. 34). Esse problema, por seu turno, constitui-se imbricado a necessidades de

explicitação da inter-relação – o que pressupõe a não dicotomia concomitante à necessária diferenciação – entre os dois objetos protagonistas de nossa discussão: o objeto do Cálculo e o objeto de ensino do Cálculo. A necessária discussão acerca desses elementos traz em seu bojo a reafirmação dos conteúdos teóricos dos conhecimentos como elementos essenciais à maioria das atividades desenvolvidas na esfera da educação escolar. Isso ocorre em um cenário no qual, segundo Duarte (2022), o negacionismo e o relativismo, na forma de visões de currículos, têm conquistado maior espaço no debate educacional brasileiro.[17]

Nesse quadro é que, no sentido de estabelecer as estratégias de ação para realizarmos o enfretamento da problemática, formulamos os elementos orientadores da pesquisa. Para tanto, definimos o seguinte objetivo geral: investigar a relação entre o objeto do Cálculo e sua objetivação como objeto de ensino na organização do ensino no contexto escolar. Esse objetivo geral se realiza por meio de ações que têm seus respectivos fins conectados aos seguintes objetivos específicos: explicitar a natureza do conhecimento matemático em geral e do conhecimento abordado no Cálculo em particular; identificar os nexos conceituais bem como a abstração substancial que estruturam o sistema conceitual do Cálculo; investigar a natureza do objeto de ensino em geral e do objeto de ensino do Cálculo em particular; e analisar as relações entre os elementos constitutivos da natureza do objeto do Cálculo e sua manifestação como objeto de ensino por intermédio de teses que se anunciam fundamentadas na teoria histórico-cultural.

Na esteira de Leontiev (2021), para nós a caracterização do presente estudo como atividade de pesquisa vincula-se ao seu objeto e à forma de atuação do sujeito/pesquisador, o que ocorre pela apropriação das suas relações essenciais por meio da investigação. Nosso objeto possui natureza acentuadamente teórica e responde a uma necessidade de mesmo tipo, o que não significa um descolamento da prática. Se assim fizéssemos, contradiríamos os preceitos teóricos que alicerçam este trabalho, em especial o de que não importa apenas interpretar o mundo de diferentes maneiras, mas sim transformá-lo (Marx, 2007). Entretanto, tal transformação pressupõe o conhecimento de suas legalidades, apreensão de sua essência para

[17] O autor cita três visões de currículo dominantes no debate em nosso país que, de uma maneira ou outra, têm impactado na formação de currículos pobres no que se refere à difusão de conhecimentos científicos, artísticos e filosóficos. Como uma de suas consequências, fortalecem a difusão do negacionismo e do relativismo. Uma dessas visões é a pragmática, que entende que os currículos escolares devem estar voltados à adaptação dos indivíduos às tendências ditadas pelo mercado. Outra é a de constituição dos currículos por temas presentes no cotidiano do estudante que expressam suas vivências culturais, subjetividades, narrativas e identidades. Outra ainda é uma visão voltada ao resgate de valores morais e religiosos tradicionais, supostamente ameaçados por perspectivas culturais distintas.

que então se possa, de modo intencional, colocar as cadeias causais em um movimento que seja condizente com as finalidades estabelecidas.

Nessa direção, importa explicitarmos que as finalidades às quais está orientado este trabalho são de apreender as legalidades inerentes à objetivação do ensino do Cálculo de modo que possibilitem a identificação de elementos subjacentes à sua manifestação. Além disso, por meio da crítica ontológica, fornecer material que sirva de base para propostas com vistas à formação dos indivíduos em suas máximas potencialidades, como individualidades que possuam possibilidades cada vez mais amplas de atuação no sentido de transformação da realidade social como um todo. Para tanto, um dos objetos particulares é a apropriação dos conhecimentos abordados no campo do Cálculo. Assim, a presente pesquisa responde a necessidades sociais de diferentes matizes, mais especificamente, àquelas vinculadas à reprodução do ser social, uma vez que o complexo da educação no qual está inserida nossa pesquisa é um elemento indispensável para tal movimento.

Além disso, o trabalho se configura como uma particularidade da busca por princípios gerais que devem orientar a formação de um objeto de ensino (Panossian, 2014). A análise da manifestação do objeto de ensino do Cálculo nas pesquisas pode evidenciar os pontos em que devemos nos apoiar para orientar um ensino que promova o desenvolvimento dos estudantes. Nas pesquisas em âmbito nacional, algumas se debruçam sobre a temática, das quais podemos destacar Panossian (2014), Nascimento (2014) e Panossian e Nascimento (2022). Corroboramos o posicionamento assumido por esta última ao assumir que o objeto de ensino "expressa os *nexos conceituais* de uma área, sintetizando a unidade entre as necessidades historicamente surgidas e as respostas que foram sendo desenvolvidas a tais necessidades em uma determinada esfera da vida" (Panossian; Nascimento, 2022, p. 336-337).

Ao evocar pesquisas que também abordam aspectos relativos à nossa temática, evidenciamos que nosso objeto se constitui com base nas produções e preceitos da fundamentação teórica aqui adotada. Isso pressupõe a historicidade – categoria ontológica universal da realidade – como elemento ineliminável desta pesquisa, o que implica a consideração do desenvolvimento de nosso objeto em um contexto determinado até sua possível formulação como objeto de pesquisa. Pôr em relevo a historicidade do objeto é importante, pois muitas vezes ela é negligenciada no processo de conhecimento, no qual acentuam-se as limitações dos sujeitos esquecendo-se das possíveis limitações para esse conhecimento que emanam do polo do desenvolvimento do objeto (Chasin, 2009). Podemos dizer que, dentro do espectro teórico aqui adotado, ocorreu um desenvolvimento anterior no qual se destacam as pesquisas de Yerushalmy e Swidan (2012) – que analisam o trabalho de dois estudantes sobre

o processo de acumulação de funções de uma variável, ao adotar a teoria da objetivação[18] –, Dalmolin (2015) – que analisa a natureza dos erros de estudantes na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I fundamentada na teoria histórico-cultural e elege como unidade de análise a tricotomia entre aritmética, álgebra e geometria –, Quintero (2018) – que, ao adotar a teoria da objetivação combinada com contribuições de autores que investigaram o desenvolvimento do pensamento teórico, propõe-se a analisar o desenvolvimento dessa forma de pensamento de estudantes colombianos do décimo primeiro ano no processo de objetivação do limite de uma função em um ponto com base na proposição de Atividades Orientadoras de Ensino[19] –, e Silva (2019) – que investiga, por intermédio de uma análise documental, o que denomina de movimento lógico-histórico do conceito de continuidade a fim de buscar a determinação das relações essenciais estabelecidas como seus nexos conceituais.

Contudo, as supracitadas pesquisas, apesar de fornecer elementos importantes que consubstanciam nosso estudo, não se propõem a responder à pergunta anteriormente elaborada. Portanto, diferenciam-se de nossa investigação pelo foco da análise, pela forma de abordagem e pelos autores e teorias que realizam seus respectivos estaqueamentos teórico-conceituais.

Em suma, consideramos que a realização desta pesquisa se configura como uma atividade que emerge do processo de atuação do pesquisador, na forma de necessidades individuais, mas que são constituídas, constitutivas e representativas de problemáticas sociais. É no sistema de atividades desenvolvido pelo indivíduo, em um contexto inerentemente social, que ocorre um processo de transformação do objetivo das ações de pesquisa – no âmbito da atividade de ensino – em motivo de outra atividade, a de pesquisa. Esta também só é possível na medida em que existam estruturas sociais e condições objetivas e subjetivas para sua execução. De acordo com Leontiev (2021), as necessidades, em meio a contextos socioculturais específicos, encontram, portanto, modos de satisfação que constituem o motivo da atividade. Essa, por sua vez, é realizada por ações, operações e tarefas, com uma finalidade a ser satisfeita que, em nosso caso, é a apreensão do movimento de objetivação do conteúdo e do processo de ensino do Cálculo. Assim como em qualquer outra atividade, na pesquisa os sujeitos agem com base em suas concepções, conhecimentos, habilidades. Ou seja, baseados nas condições

[18] Ver nota 1.

[19] A Atividade Orientadora de Ensino é uma categoria teórico-metodológica desenvolvida pelos pesquisadores do Grupo de Estudos e Pesquisas sobre a Atividade Pedagógia (GEPAPe). É concebida como "uma proposta de organização da atividade de ensino e de aprendizagem que, sustentada pelos pressupostos da teoria histórico-cultural, se apresenta como uma possibilidade para realizar a atividade educativa, tendo por base o conhecimento produzido sobre os processos humanos de construção de conhecimento" (Moura *et al*. 2016, p. 95). Para mais aprofundamentos, consultar Moura *et al*. (2016) e Moura, Araujo e Serrão (2018).

subjetivas que estabelecem o quadro de possibilidades para a atuação da percepção na identificação do objeto que pode satisfazê-las e as mobilizem para sua busca. Com esse quadro no horizonte, a presente introdução ocupou-se do propósito de expor o movimento de constituição do objeto de pesquisa, as necessidades, os motivos, as ações e as finalidades da atividade de pesquisa.

1.1 METODOLOGIA

No processo de investigação e exposição da pesquisa, seguimos a resolução metodológica marxiana (Marx, 2011). O cuidado foi para não incorrermos em um erro metodológico caso, parafraseando o pensador e revolucionário alemão, iniciássemos pelo movimento de objetivação do ensino, em sua clássica forma de manifestação, o ensino escolar, sem a efetiva delimitação dos processos que compõem o complexo da educação. O equívoco se apresentaria, pois tal atividade se constitui como uma abstração ao suprimir de seu movimento analítico os sujeitos que a realizam e os objetos com os quais atuam, assim como as totalidades que lhe são constitutivas. Sujeito, por sua vez, é uma palavra vazia se não consideramos suas motivações, desejos, necessidades, finalidades, o conjunto de experiências que vivenciam, as condições e classes sociais de que são partícipes, sua posição no conjunto das relações sociais, o comportamento ante o objeto, entre outros determinantes. O objeto, por sua parte, não significaria absolutamente nada ao se evitar a abordagem de seu conteúdo, do papel que ocupa no conjunto dos outros conhecimentos estudados e ensinados, de sua forma e posição no fluir das relações sociais. Por isso, caso começássemos pela objetivação do ensino, poderíamos chegar, nas palavras de Marx (2011, p. 54), a "uma representação caótica do todo". Tal representação é, contudo, a base para a realização de determinações mais precisas para capturar conceitos cada vez mais simples. Isto é, "do concreto representado [chegaria] a conceitos abstratos [*Abstrakta*] cada vez mais finos, até que tivesse chegado às determinações mais simples" (Marx, 2011, p. 54).

Esse primeiro movimento de separação do todo em unidades mais simples é imprescindível para a análise científica da totalidade, mas não é suficiente para a apreensão do seu ser, ou, nos dizeres de Marx (2011), não é o método cientificamente correto. Todavia, por ser necessário, é preciso descrevê-lo minimamente.

Como nosso objeto se apresenta no contexto da objetivação do ensino de Cálculo, temos a concretização de uma abstração mais geral, a da atividade coletiva de estudo escolar. Essa pressupõe, entre outros fatores, os sujeitos envolvidos – professor e estudantes – e o objeto

do conhecimento a ser apropriado e ensinado, os conceitos que compõem o Cálculo. Apropriar-se dele, dada a sua infinidade extensiva e intensiva de relações, é impossível sem uma primeira aproximação que nos permita a especificação de alguma de suas propriedades, a fim de entendermos o seu ser como totalidade, por uma perspectiva multilateral. Na esteira de Caraça (2003), referimo-nos a esse movimento inicial como o processo de busca do *isolado*[20] O isolado, conforme o autor, é "uma *secção* da realidade, nela recortada arbitrariamente" (Caraça, 2003, p. 105). Esse, no entanto, não é uma escolha realizada sem critérios, mas um destaque da realidade que contenha "todos os factores dominantes, isto é, todos aqueles cuja ação de interdependência influi sensivelmente no fenómeno a estudar" (Caraça, 2003, p. 105). Optamos, com base nesses princípios, por estudar o objeto da atividade coletiva de estudo escolar no ensino de Cálculo. O isolado a que recorremos é a sua manifestação como objeto de ensino, colocando sob especial escrutínio a sua relação com o modo de organização do ensino do Cálculo. Estabelecemos como critério de delimitação do isolado o processo de objetivação focado no ensino dos conceitos de derivada e integral de funções com uma variável independente.

A opção pela delimitação do isolado como o objeto de ensino e, dentro desse, o isolado mais específico relacionado ao ensino dos conceitos de derivada e integral, resulta das determinações próprias do objeto analisado. Poderia o leitor discordar ao eleger o conceito de limite como a unidade analítica que seria a abstração mais geral e fundamental do isolado de que temos tratado. Tal possibilidade ocorreria, segundo Rezende (2003), caso partíssemos de uma significação lógica que enfatizasse o aspecto formal, uma vez que a derivada, a integral e o conceito de diferencial são definidos com base no conceito de limite. Isso seria justificável e, segundo mostra a pesquisa de Sofronas *et al*. (2011), é uma opinião dominante entre 17 dos 24 entrevistados – considerados autoridades sobre ensino de Cálculo no Estados Unidos da América – que elegem o limite como o conceito fundamental do Cálculo. Não obstante, ao contrapor-se a essa interpretação, Rezende (2003) argumenta que utilizar o critério lógico de fundamentação nos conduziria a outro resultado no que se refere ao conceito central, como, por exemplo, o de número real, haja vista que a própria definição de limite, na formulação comumente utilizada, elaborada por Weierstrass[21], alicerça-se sobre ele. Ressaltamos que esse encadeamento poderia ser estendido até a relação essencial do número, isto é, a relação entre grandezas (Davídov, 1988; Rosa, 2012). Além disso, mesmo que priorizada uma abordagem

[20] Entendemos que o isolado é uma totalidade constitutiva de outra totalidade mais abrangente, que representa uma manifestação particular de relações mais gerais. Essas categorias serão exploradas no capítulo seguinte.
[21] Karl Weierstrass (1815-1897) – matemático alemão.

lógica, o posicionamento do conceito de limite como central não é garantido devido à existência de sistemas teóricos distintos que atribuem aos infinitésimos tal posição (Baldino, 1995, 2000; Ely, 2021).

Os elementos destacados como logicamente prioritários – sejam eles o conceito de número real, o de limite ou de infinitésimo – necessariamente se farão presentes na abordagem dos determinantes do Cálculo, dado que compõem seu sistema conceitual.[22] Isso, entretanto, não é central para a constituição de sua especificidade, que tem sua gênese na busca por apropriação do movimento da realidade de modo quantitativo. Tal enfrentamento ocorre, no âmbito da matemática, por meio do conceito de função e, especificamente, de derivada e integral. Machado assim o explica (1988, p. 7):

> O *Cálculo diferencial e integral* trata de questões relacionadas com a medida da rapidez com que as grandezas aumentam ou diminuem, os objetos se movem ou as coisas se transformam. Tratam também das questões envolvendo a interpretação de grandezas que variam continuamente como se variassem através de pequenos patamares onde se manteriam constantes, conduzindo a somas com um número cada vez maior de parcelas cada vez menores.
> A medida da rapidez de variação conduz à noção de *derivada*; o estudo das somas com muitas pequenas parcelas conduz à noção de *integral*.
> As duas noções têm a ver, em suma, com a aproximação de curvas por retas, um procedimento necessário em muitas situações concretas. O processo através do qual uma curva é aproximada por uma reta tangente é a *diferenciação* ou *derivação*; a aproximação de curvas por retas, tendo em vista, por exemplo, o cálculo de áreas, dá origem ao processo de *integração*.

De acordo com Rezende (2003), a argumentação elaborada por Machado (1988) resume os problemas tratados pelo Cálculo em duas categorias centrais: o problema da variabilidade e o problema da unidade na multiplicidade. Para a resolução das referidas problemáticas, tornam-se necessários os conceitos de derivada e integral constituídos sobre noções conceituais fundamentais como variável, função, taxa de variação e acumulação (Thompson; Harel, 2021). Nota-se que o quadro no qual se forma o sistema conceitual do Cálculo é sistematizado com base em uma relação que caracteriza a sua essência: o estudo da **relação de variação e acumulação de relações quantitativas entre grandezas variáveis em geral**. Isso se vincula ao objeto da Análise[23], descrito por Prado Júnior (1963, p. 240) como "*relações de relações*, ou o relacionamento generalizado". Nessa mesma direção, Aleksandrov

[22] Exceção feita ao conceito de infinitésimo na *Análise standard*, que se vê expurgado do Cálculo com o movimento de aritmetização da Análise. Aprofundaremos essas questões nas seções 5 e 6 do terceiro capítulo.
[23] A Análise constitui-se como desdobramento dos problemas oriundos do Cálculo, tema que será desenvolvido na seção 6 do capítulo 3. Entretanto, as caracterizações dos autores citados são de grande valia para o desvelamento da essência do Cálculo e de sua particularidade.

(1973, p. 68) descreve que o objeto da Análise são “as dependências entre grandezas variáveis, não entre uma grandeza concreta e outra, senão entre variáveis em geral, com abstração de seu conteúdo”. Por sua vez, o objeto do Cálculo seria “as propriedades das funções mesmas” (Aleksandrov, 1973, p. 71), o que é praticamente um sinônimo, caso consideremos como propriedades específicas a variação e a acumulação. Ou seja, o Cálculo tem como objeto relações – a variação e a acumulação – de relações quantitativas entre grandezas variáveis de forma geral – funções – para fins de avaliação e/ou quantificação do modo pelo qual ocorre a variação dessa relação – taxa de variação e/ou o processo de acumulação. Dessa maneira, a opção pelo recorte dos conceitos de derivada e integral obedece a critérios ontológicos em detrimento de critérios lógicos.

O anúncio do objeto do Cálculo indica uma abstração essencial para o presente estudo, pois nos ajuda a descortinar elementos teórico-ontológicos que guiarão nosso itinerário analítico e expositivo. Ele será um dos elementos centrais da análise referente à manifestação do objeto de ensino em sua objetivação. Entretanto, sua simples menção não é suficiente para os fins propostos em nossa pesquisa, o que torna necessária, dentre outras ações, a investigação, de caráter teórico, da natureza do conhecimento matemático em geral e do conhecimento do Cálculo, em específico, assim como a exposição de seus resultados. Tal investigação, ancorada em produções de pensadores embasados no materialismo histórico e dialético bem como em pesquisas sobre a história e a filosofia da matemática, analisadas através das lentes de nosso referencial, permitiu, além de atingir o referido objetivo, capturar a abstração substancial e os nexos conceituais que estruturam o sistema conceitual do Cálculo.

Outra ação investigativa desta pesquisa, também de caráter teórico, teve como norte o estudo da natureza do objeto de ensino do Cálculo. Tal ação foi sustentada nas produções de autores que investigam a educação matemática e se ancoram nos pressupostos da teoria histórico-cultural, em especial pesquisadores associados à teoria de ensino desenvolvimental – como por exemplo Davídov (1988) e Davýdov [198-?] –, à teoria da objetivação – como por exemplo, Radford (2021a) –, assim como autores que compõem o GEPAPe – como por exemplo, Panossian (2014).

O referido quadro teórico-conceitual permite apreender os determinantes gerais do objeto de ensino do Cálculo como fenômeno do complexo da educação. Porém, com a intenção de nos apropriarmos do modo de manifestação desses determinantes em seu movimento, realizamos outra ação investigativa, buscando analisar o conteúdo do conhecimento do Cálculo que se manifesta na forma de objeto de ensino em propostas de ensino particulares. Tal movimento impeliu-nos a uma nova delimitação, ou seja, a determinação de um novo isolado

para a realização dessa ação. Esse, por sua vez, será a manifestação do objeto de ensino em teses que abordem o ensino de Cálculo, em particular aquelas que apresentam uma proposta de organização de ensino e que se anunciam embasadas na teoria histórico-cultural. Isso se justifica pelas limitações como pesquisador e pelas incertezas geradas no período da pandemia, que restringiram a análise a formas particulares e não necessariamente prevalecentes da manifestação do objeto.

A determinação desse novo isolado – pesquisas baseadas em princípios teóricos comungados por nós – permite entender mais profundamente os limites e potencialidades da manifestação da relação entre objeto do Cálculo e seu objeto de ensino na objetivação do ensino. De tal maneira, os possíveis resultados podem se constituir como elementos auxiliadores na elaboração de modos de organização do ensino que permitam a formação integral do estudante, em especial que forneçam condições de desenvolvimento do pensamento teórico com base nos conceitos científicos que aqui serão objetos de análise. Além disso, a opção pelas teses parte do pressuposto de que elas são sínteses de estudos inseridos no campo de programas voltados à formação de pesquisadores que cumprem determinados preceitos formais e legais. Esses se configuram como elementos de um contexto que possibilita a formação de condições que podem influenciar na qualidade dos resultados apresentados, como: maior tempo de realização da pesquisa – na média de quatro anos no Brasil; orientação por docente que cumpre certos requisitos, como título de doutor e produção relevante na área de atuação; processo de qualificação, validação e avaliação da pesquisa por pesquisadores partícipes das bancas de qualificação e defesa do trabalho. Acrescentamos que a opção pelas teses nos permite realizar o debate com pares com mesmo nível de formação que o nosso.

Além do critério de escolha das teses que lidam com o ensino dos conceitos de derivada e integral, restringimos os resultados àquelas pesquisas com foco exclusivo no ensino de conceitos relativos ao Cálculo em nível de graduação, pós-graduação ou de cursos de extensão e formação continuada para professores. Essa delimitação decorre de nossa vivência pessoal e do foco da pesquisa, pois o trabalho com conceitos do Cálculo em outros níveis de ensino traz em seu bojo outras problemáticas que, devido às limitações da pesquisa, não teriam a devida atenção.

A busca pelos dados ocorreu na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD)[24] e no Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de

[24] Consulta realizada no dia 28 de fevereiro de 2023 em: https://bdtd.ibict.br/vufind/

Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)[25]. Na BDTD, recorremos à ferramenta "*busca avançada*" e realizamos a pesquisa empregando, simultaneamente, os termos "*ensino*", "*cálculo*", "*diferencial*" e "*integral*", com resultados limitados a teses. Identificamos 66 trabalhos, dos quais 4 eram duplicados, resultando, após a exclusão, 62 teses. Na mesma biblioteca digital, repetimos a busca utilizando um novo conjunto de termos oriundos da substituição de "*diferencial*" e "*integral*" por "*infinitesimal*", o que nos propiciou um resultado com 3 trabalhos, dos quais 1 havia aparecido na busca anterior. No Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, realizamos a busca pela expressão "*ensino de cálculo diferencial e integral*", obtendo, após a restrição dos resultados a teses, 8 trabalhos, dos quais 1 aparece duplicado na própria busca, e outros 5 haviam aparecido nas pesquisas anteriores, gerando, portanto, 2 novos trabalhos. Em uma nova sondagem utilizando a expressão "*ensino de cálculo diferencial e integral*", com a restrição dos resultados apenas a teses, obtivemos 2 trabalhos que haviam constado nas buscas anteriores. Por fim, ainda no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, realizamos uma busca empregando a expressão "*ensino de cálculo infinitesimal*", o que não nos forneceu nenhum resultado. Em resumo, no total foram encontradas 66 teses que obedeciam aos critérios iniciais estabelecidos.

De posse dos referidos dados, fizemos a leitura dos resumos em busca de indicações sobre a presença ou não de uma proposta de ensino de Cálculo, que resultou em um subgrupo de 30 teses. Dentre elas, algumas exigiram uma leitura adicional da introdução e dos procedimentos metodológicos, pois não encontrarmos, no resumo, a metodologia empregada ou uma clara descrição da proposta do trabalho. O movimento seguinte ocorreu por uma nova leitura dos resumos – quando necessário da introdução, metodologia e do sumário – buscando os referenciais teórico-metodológicos que orientaram a elaboração das propostas de ensino, com o intuito de identificar aquelas que se anunciavam fundamentadas na teoria histórico-cultural. Identificamos 3 teses que atendiam a esses requisitos: a) Farias (2015), que adota como aporte teórico a Teoria da Atividade e o conceito de Comunidade de Práticas na busca por evidências das implicações para a prática do professor que ensina matemática quando ocorre uma inter-relação entre as noções de Cálculo Diferencial e Integral no ensino de Funções no Ensino Médio com a utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação; b) Bezerra (2016), que busca analisar as contribuições para a aprendizagem dos conceitos de limite, derivada e integral de estudantes de Licenciatura em Matemática oriundas de uma organização do ensino com base nos pressupostos da Teoria da Formação por Etapas das Ações Mentais,

[25] Consulta realizada no dia 28 de fevereiro de 2023 em: https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/

elaborada por Galperin; e c) Prevot (2019), que formula uma abordagem metodológica de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral fundamentada na Aprendizagem Baseada em Problemas e na Modelagem Matemática envolvendo *m-learning* – alicerçada na Teoria da Atividade – e uso de aplicativos matemáticos na solução de problemas da área da Engenharia.

Contudo, para além desses trabalhos, entramos em contato, por meio das leituras realizadas para a fundamentação teórica, com uma pesquisa que não apareceu em nossa busca nas bases de dados. Referimo-nos a Oliveira (2021), que analisa possíveis contribuições da Atividade de Situações Problema Discente (ASPD) como um modo de ensino com vistas à reformulação da orientação da habilidade de resolver problemas no contexto do Cálculo Diferencial e Integral de estudantes de licenciatura. Para tal, utiliza-se do conceito de problema desenvolvido por Majmutov, da Teoria da Formação por Etapas das Ações Mentais de Galperin e da Teoria de Direção da Atividade de Estudo formulada por Talízina. Desse modo, nossos dados são constituídos por 4 teses: Farias (2015), Bezerra (2016), Prevot (2019) e Oliveira (2021).

Ao nos debruçarmos sobre as teses, buscamos capturar o modo como as relações entre o objeto do Cálculo e o objeto de seu ensino se manifestam nas tarefas que compõem a sua proposição de ensino. Essa escolha se deve ao fato de as tarefas se constituírem como uma síntese das finalidades propostas pelo professor/pesquisador e das condições de realização pelos estudantes. No entanto, uma ressalva deve ser realizada. Apesar de as tarefas representarem aspectos determinantes dos trabalhos que analisamos, elas não se apresentam como elementos isolados. Isso necessitou que suas análises fossem realizadas sem perder de vista os referenciais teóricos que sustentam as suas proposições. Porém, nem sempre elas explicitam diferentes aspectos que consideramos basilares para a apreensão da relação citada, o que nos conduziu, em alguns pontos, à busca dos indícios que nos auxiliaram na empreitada anunciada. No contexto de nossa pesquisa, e seguindo as indicações de Pino (2005), entendemos que a busca por indícios, diferentemente da procura por relações causais, é uma tentativa de encontrar elementos e suas determinações observáveis que permitam inferir a presença do objeto que perseguimos por meio de uma relação lógica.

De posse dos conjuntos de tarefas explicitadas nas teses que compõem o conjunto dos dados de uma das ações da pesquisa, o movimento de estudo ocorreu por meio de leituras focadas na identificação do seu objeto, bem como suas intenções, finalidades, o referencial teórico que os sustentam e o processo de desenvolvimento almejado pelos pesquisadores. Decorrente das particularidades de cada pesquisa, não foi possível utilizar um único

instrumento, situação que mobilizou a realização de um movimento de análise e síntese de cada produção para capturar os aspectos gerais das proposições de suas tarefas e suas especificidades.

O conjunto de determinantes apropriados pelo processo de pesquisa, orientado pela análise ontológico-genética[26] do objeto de ensino do Cálculo que se sustenta no método marxiano das duas vias (Lukács, 2013; Marx, 2011) – decomposição, pela via analítico-abstrativa, do complexo para então retornar a ele compreendido como totalidade real –, possibilitou-nos apreender o movimento de constituição do objeto de ensino no seu processo de objetivação. Porém, como destacado, o movimento de ascensão e síntese, isto é, o caminho em direção à reconstrução do objeto e o modo da exposição das múltiplas determinações que permitem a sua captura de modo concreto exige que lancemos mão de procedimentos expositivos que atendam a tal ensejo. Em outros termos, com a distinção marxiana do processo de investigação e exposição do concreto pelo pensamento (Marx, 1984) norteando nossa pesquisa, estruturamos a apresentação dos resultados de modo a representar, em sua tessitura, o movimento de concreção do processo analítico-sintético como forma de objetivação do método marxiano das duas vias (Lukács, 2013; Marx, 2011).

Com tal intuito, no segundo capítulo, discorremos sobre a concepção da natureza do conhecimento matemático como forma de reflexo da realidade objetiva, o que necessita de uma abordagem preliminar acerca de categorias como realidade, totalidade, trabalho e conhecimento. Propomo-nos a considerar esses aspectos a fim de apontar para as condições que possibilitam a emergência do conhecimento matemático entre os seres humanos, o que contribui para a sustentação da apropriação da sua natureza.

No terceiro capítulo dedicamo-nos à análise da gênese e desenvolvimento do Cálculo com base na particularidade do conhecimento matemático. Além disso, ancoramo-nos em eventos históricos singulares para mostrar que os aspectos gerais se apresentam como manifestação das problemáticas relativas ao Cálculo, especificamente no que se refere à relação entre fluência e permanência e entre unidade e multiplicidade como expressões do estudo do movimento. Na última seção do capítulo, fundamentado na análise da forma atual do objeto do conhecimento, destacamos os nexos conceituais que sintetizam as necessidades e respostas

[26] A referência de método *ontológico-genético* é o utilizado por Lukács em suas obras sínteses (Lukács 1966, 2010, 2012, 2013). Por sua vez, o termo adotado para caracterizar o referido método é tomado emprestado de Tertulian (2009), para quem o modo pelo qual Lukács procede pode ser definido como *ontológico-genético*, pois "procura mostrar a estratificação progressiva das atividades do sujeito [...], indicando as transições e mediações, até circunscrever a especificidade de cada uma em função do papel que desempenham na sua fenomenologia da vida social" (Tertulian, 2009, p. 376). Conforme o autor, a questão da gênese possui lugar de destaque, pois "o surgimento de diferentes níveis com suas categorias específicas intervém a partir da dialética interna dos níveis anteriores" (Tertulian, 2009, p. 383).

elaboradas nesse campo de conhecimentos. A abordagem da natureza do conhecimento matemático também será atravessada pela forma com que majoritariamente é realizado, isto é, como um processo de *entificação* (Prado Júnior, 1963). Isso ocorre por consequência de aspectos da realidade social que extrapolam os complexos ligados diretamente à produção dos conhecimentos matemáticos.

Como esse conhecimento é produzido com finalidades – em última análise, conectadas às esferas de reprodução material da vida humana –, sua necessidade de apropriação, pelos indivíduos singulares, diferencia-se em diversas etapas históricas e entre as distintas formas de organizações sociais. Colocam-se, portanto, as relações entre o processo de sua constituição e o modo como, na atualidade, ele é apropriado pelos indivíduos por meio do ensino. Emerge disso o que se tem denominado de *movimento lógico-histórico* de constituição do conceito como um princípio da atividade em contexto de ensino (Moura *et al*., 2016; Panossian; Souza; Moura, 2017). O relacionamento entre essas categorias – o lógico e o histórico – não é consensual entre os autores que alicerçam suas pesquisas no materialismo histórico e dialético. Assim, no quarto capítulo nos dedicamos a um estudo sobre duas formas de entender o relacionamento entre as referidas categorias. Uma delas é encampada por autores fundamentados na concepção inaugurada por Engels (1982, 2017), como Kopnin (1978), Rosental (1960), Ilienkov (1960) e Ilyenkov (2008). A outra pode ser encontrada, principalmente, nas elaborações de Lukács (2010, 2012, 2013).

O quinto capítulo tem por finalidade concretizar a discussão teórica do capítulo anterior no âmbito da atividade coletiva de estudo escolar, guiado pela relação dialética entre ontogênese e filogênese. Iniciamos o capítulo com a abordagem de algumas formas de conceber tal relação. Na sequência, introduzimos a categoria do ideal conforme elaborada por Ilienkov (2016a, 2016b) e Iliénkov (1977), pois é com base nela que se pode encontrar uma solução para a problemática em tela. Além disso, tal categoria permite entender a natureza dos objetos matemáticos e, portanto, também a sua contribuição para os indivíduos. Essa incursão culmina com a discussão da natureza ontológica do objeto de ensino no contexto da atividade coletiva de estudo escolar.

Seguindo o movimento de especificação, movimento herdado de Marx (1984, 2011), realizamos, no sexto capítulo, a exposição e análise de tarefas que compõem a organização de ensino de pesquisas sobre ensino de Cálculo, com o objetivo de capturar o conteúdo do conhecimento do Cálculo que elas expressam. Tal movimento, antecedido da exposição do contexto teórico-metodológico em que estão inseridas as tarefas, permite

evidenciar os determinantes do processo de objetivação do ensino de Cálculo que, em sua forma atual, dão suporte às atividades de ensino dos professores.

Nas considerações finais, apontamos nosso entendimento a respeito das principais contribuições da presente tese para a pesquisa em educação em geral, e para a pesquisa em educação matemática em particular. Além disso, indicamos seus limites e possibilidades, o que pode servir de material para a emergência de novas pesquisas.

2 ELEMENTOS ONTOLÓGICOS GERAIS DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO

Ao elegermos o objeto de ensino do Cálculo como centralidade de estudo e a análise ontológico-genética – caminho metodológico –, tornou-se necessária a apreensão da unidade como forma de ser dos elementos que constituem um complexo mais amplo, a saber: o complexo da educação que, por sua vez, reproduz a esfera do ser social. A análise da educação como momento do processo de reprodução do ser social remete-nos a outros diferentes aspectos constitutivos de sua forma de ser que se materializam como particularidades do complexo educativo, dentre outras formas: na educação escolar, no ensino da matemática e no ensino do Cálculo. Entre esses elementos constitutivos, vinculados ao nosso objeto de análise, destacamos a natureza e função do conhecimento matemático para a reprodução social. Isso se articula com a problemática da relação entre objetivação e apropriação das formas de atividades espirituais do ser humano, entendidas como diversidades de bases pelas quais organizam sua interação com o mundo circundante (Lukács, 2014). Nesse sentido, entendemos que a abordagem do objeto de ensino do Cálculo necessita ser precedida de uma excursão analítica que descortine o movimento genético da constituição de uma forma de atividade espiritual, a atividade matemática, e seu produto, os saberes e conhecimentos matemáticos como reflexos da realidade. Um processo de análise interessado nessa problemática não é possível de ser desenvolvido senão com base em um ponto de vista ontológico.

Bhaskar (2008) considera que, na discussão acerca da filosofia das ciências, há uma *falácia epistêmica*, ou seja, uma visão difundida de que as proposições sobre o ser são passíveis de redução ou analisadas em termos de proposições sobre o conhecimento. O autor entende que o centro do debate passa a se deslocar da análise ontológica para a epistemológica, influenciada pela ontologia humeniana,[27] implícita nas principais correntes que discutem a filosofia da ciência. Cabe, portanto, perguntar: quais as diferenças relativas às formas de abordagem do objeto com base na ontologia e na gnosiologia?

Tonet (2018), ao distinguir a análise gnosiológica da análise ontológica, considera que a problemática do conhecimento pode ser resumida pela relação entre sujeito e objeto. De acordo com o autor (2018), caso a prioridade ou o polo regente do processo seja o sujeito – como centro do sistema que não é apenas ativo na análise do objeto, mas que o constrói

[27] David Hume (1711-1776) – pensador britânico nascido na Escócia. É considerado um dos expoentes do empirismo britânico. Conforme Bhaskar (2008), a ontologia implícita na filosofia de Hume concebe os objetos do conhecimento como atomísticos, e a ciência é como uma resposta automática ou comportamental aos estímulos e fatos dados e experimentados sensorialmente.

(teoricamente) –, essa análise será gnosiológica. Nela, o sujeito, como polo regente, age centrado em análises que requisitam coleta e organização dos dados, bem como a relação entre eles de modo a construir o objeto. Aqui, o pressuposto é que o sujeito possui a razão como faculdade essencial para a realização de tal empreitada. Essa faculdade, portanto, é a posição inicial do caminho percorrido pelo ponto de vista gnosiológico, pois estabelece as possibilidades e os limites do sujeito na construção do objeto.

Por outro lado, no ponto de vista ontológico, o polo regente do processo é o objeto. Assim, "não cabe ao sujeito criar – teoricamente – o objeto, mas traduzir, sob a forma de conceitos, a realidade do próprio objeto" (Tonet, 2018, p. 14). Da centralidade do objeto desdobra-se a primeira preocupação do ponto de vista ontológico sobre o conhecimento, que não se refere mais ao modo pelo qual se conhece o ser, mas sim ao que ele é. Essa atitude de se voltar para o ser – e não para a forma pela qual é possível conhecê-lo – constitui-se em guia para o sujeito no processo do conhecimento.

Tonet (2018) nos lembra que o ponto de vista ontológico pode buscar o conhecimento do ser com base em uma visão metafísica ou histórico-social. Essas formas indicam como se entende o que é a realidade e, por consequência, o modo pelo qual ela se converte em objeto do conhecimento, assim como os limites e possibilidades da atuação do sujeito nessa relação.

Na presente pesquisa, partimos do ponto de vista ontológico sobre o objeto de ensino do Cálculo, com o entendimento de que é histórico-social. Esse pressuposto é decorrente da historicidade como propriedade ontológica do ser, o que se estende a todos os seus complexos constitutivos. Tal posicionamento faz-se necessário na medida em que, no decurso de nossa exposição, os aspectos voltados à teoria do conhecimento serão abordados no contexto da análise ontológica. Desse modo, traz o pressuposto da necessidade de uma explicação sobre a natureza social do conhecimento.

A escolha da referida abordagem requer uma pergunta inicial sobre a realidade, uma vez que:

> O conhecimento da realidade, o modo e a possibilidade de conhecer a realidade dependem, afinal, de uma concepção da realidade, explícita ou implícita. A questão: como se pode conhecer a realidade? é sempre precedida por uma questão mais fundamental: que é a realidade? (Kosik, 1976, p. 35).

De tal modo, a análise aqui almejada suscita que a resposta seja antecedida por outra que busque desvelar a natureza dos objetos da matemática em geral e do Cálculo em específico.

O presente capítulo tem como incumbência percorrer a concepção ontológica sobre a realidade entendida como totalidade estruturada e diferenciada que, processualmente, desdobrou-se em esferas ontológicas com naturezas distintas, nas quais se criam as bases que possibilitaram o surgimento da atividade matemática. Esse caminho expositivo nos possibilitará abordar a gênese do conhecimento matemático e sua natureza como forma específica de reflexo da realidade, com base nas puras relações quantitativas e nas formas espaciais (Lukács, 2012). Essas, devido às necessidades enfrentadas pelos seres humanos no processo de desenvolvimento do ser social, especificam-se em relações cada vez mais diferenciadas até a análise do movimento, cuja essência é a sua apreensão por meio da relação de variação e acumulação de relações quantitativas entre grandezas variáveis em geral, o que entendemos como constituinte da essência do Cálculo.

Assim, na primeira seção do presente capítulo, abordaremos o conceito de totalidade e realidade com o objetivo de descrever sua estrutura, uma vez que é na relação entre o ser humano e a realidade, da qual ele é parte constituinte, que surge o conhecimento matemático. Por sua vez, essa assertiva traz em seu bojo que o conhecimento matemático emerge como uma forma de ação diante da realidade, com o intuito de satisfazer suas necessidades. Isso nos conduz à análise genética do conhecimento em geral e das especificidades do conhecimento matemático.

2.1 TOTALIDADE E REALIDADE

Um primeiro movimento em direção à análise do objeto de ensino do Cálculo é compreendê-lo com base na totalidade de relações nas quais se insere. Ou seja, como um aspecto da totalidade que permite capturar a função da atividade matemática dentro da esfera do ser social. Temos como premissa – por sinal, um posicionamento filosófico sobre a ontologia dos objetos matemáticos – que o conhecimento matemático é um modo situado dos indivíduos humanos compreenderem, agirem e reagirem diante da realidade ao seu entorno. Aqui se apresenta a questão: o que é essa realidade, na qual existem seres humanos que agem e reagem perante o mundo, mediados pelas relações com outros seres humanos e, nesse processo, elaboraram uma forma específica de se relacionar entre si e com o mundo que é a atividade matemática? Portanto, estamos diante do objeto da ontologia que, segundo Bhaskar (2008, p. 26), é o mundo "[...] considerado do ponto de vista do que pode ser demonstrado sobre ele por meio do argumento filosófico. [...] A ontologia filosófica indaga como o mundo tem de ser para a ciência ser possível; e suas premissas são as atividades científicas reconhecidas de modo

geral"[28]. Ao trazer para o nosso contexto, consideramos que a ontologia filosófica, em particular aquela que se ocupa em estudar o objeto do conhecimento matemático, indaga como o mundo deve ser para que a matemática seja possível, uma vez que ela existe. Isso nos conduz à afirmação de que as suas premissas são as atividades que envolvem objetos da matemática reconhecidos de modo geral e que, por serem oriundos de atividades, pressupõem seres humanos em condições de agir e reagir. Dessa maneira, eles se constituem, elaboram e objetivam objetos e, ao mesmo tempo, reproduzem-se, o que, para tal, necessitam conhecer as legalidades da realidade, contexto em que o conhecimento matemático vem à tona.

Se há uma realidade em que a atividade matemática existe, devemos, para que a exposição seja mais clara, explicitar o que entendemos por ela. Para Kosik (1976), a realidade pode ser compreendida como um conjunto de todos os *fatos*, o que implica que a "totalidade" a que ela se refere não é cognoscível, posto que o conhecimento humano nunca será capaz de abranger todos os seus elementos. Por decorrência, a concepção de totalidade ou concreticidade será considerada mística. Por outro lado, para o autor, uma alternativa é entender a realidade como totalidade concreta. Ou seja, "um todo estruturado, dialético, no qual ou do qual um fato *qualquer* (classes de fatos, conjunto de fatos) pode vir a ser racionalmente compreendido" (Kosik, 1976, p. 35). Os fatos, desse modo, são concebidos como partes estruturais da totalidade concreta. Ao aceitar que a realidade é uma totalidade estruturada, concreta e dialética, acolhe-se, também, sua mutabilidade e sua natureza não aleatória e não caótica; em suma, sua unidade. Nessa direção, Lukács (2014, p. 86) afirma que "a realidade é unitária no sentido de que todos os fenômenos da realidade (sejam eles inorgânicos ou sociais) se desenvolvem segundo certos nexos causais em certos complexos, com ações recíprocas em seu interior e ações recíprocas de um complexo em relação ao outro". Essas primeiras aproximações à apreensão da realidade nos conduzem diretamente à categoria da totalidade, que é um ponto de partida para a ontologia materialista-dialética.

Lukács (2009a), ao tratar da categoria da totalidade, defende que a sua abordagem pela filosofia burguesa tem sido realizada nas seguintes direções: 1) enrijecida ou tornada absoluta; 2) seccionada da causalidade; ou 3) posicionada como polo extremo oposto às transformações históricas. Entretanto, para o autor,

> A verdadeira totalidade, a totalidade do materialismo dialético, ao contrário, é uma unidade concreta de forças opostas em uma luta recíproca; isto significa que, sem

[28] "[...] considered from the point of view of what can be established about it by philosophical argument. […] Philosophical ontology asks what the world must be like for science to be possible; and its premises are generally recognized scientific activities".

> causalidade, nenhuma totalidade viva é possível e, ademais, que cada totalidade é relativa; significa que, quer em face de um nível mais alto, quer em face de um nível mais baixo, ela resulta de totalidades subordinadas e, por seu turno, é função de uma totalidade e de uma ordem superiores; segue-se, pois, que esta função é igualmente relativa. Enfim, cada totalidade é relativa e mutável, mesmo historicamente: ela pode esgotar-se e destruir-se – seu caráter de totalidade subsiste apenas no marco de circunstâncias históricas determinadas e concretas (Lukács, 2009a, p. 59).

De modo sucinto, o autor afirma três determinações essenciais da totalidade. A primeira é atinente ao fato de que abordar o objeto como totalidade complexa significa considerá-lo como mais que a simples *soma das partes* ou, em outras palavras, um *todo* constituído por *partes*. Em contrapartida, a concepção de totalidade concreta apreende a realidade sob a perspectiva de que ela seja macroscópica e inclusiva, de maior complexidade, constituída por outras de menor complexidade (Netto, 2011). Resumidamente, ela é uma totalidade de outra, ou, como expressa Lukács (2010, 2012, 2013) no âmbito da análise do ser social, um complexo formado por outros que se distinguem entre si por seus graus de complexidades. No geral, a totalidade é dinâmica, composta pela inter-relação entre seus elementos constitutivos, em que seu movimento é resultado do caráter contraditório de todas as interações entre elas.

Uma segunda característica apontada pelo filósofo magiar no excerto supracitado, é que o movimento, na forma de automovimento, por sua vez, não é resultado de qualquer *télos* – o que Aristóteles (2012) concebe como primeiro motor imóvel –, mas ocorre necessariamente em sua historicidade, ou seja, sua relatividade e mutabilidade determinadas por circunstâncias histórico-concretas.

Por fim, a constante interação entre forças opostas em luta recíproca são os meios pelos quais a totalidade se desenvolve. No que se refere à apreensão desse movimento, Netto (2011, p. 57) chama-nos a atenção para o fato de que a natureza das "contradições, seus ritmos, as condições de seus limites, controles e soluções dependem da estrutura de cada totalidade". Logo, é possível considerar que não há formas ou fórmulas *a priori* para determiná-las. As relações estabelecidas entre as totalidades constitutivas em sua heterogeneidade e entre elas e aquela que as abrange não são diretas, mas mediadas pela estrutura particular de cada uma delas. Essa heterogeneidade entre as totalidades constitutivas é o que leva Marx (2011, p. 54) à concepção de que o "concreto é concreto porque é síntese de múltiplas determinações, portanto, unidade do diverso". Com base na articulação entre essas três categorias, *totalidade*, *contradição* e *mediação*, segundo Netto (2011), ergue-se o edifício teórico marxiano.

Com o intuito de aprofundarmos essa discussão, vale a pena entender como Lukács concebe a totalidade em um de seus últimos escritos. Ao tratar do processo de constituição da

história como uma ciência particular e a consequente diminuição da influência da historicidade como ponto de vista universal na abordagem da realidade, o autor indica algumas características da totalidade em articulação com a historicidade, na forma de categorias universais do ser.

> Historicidade no sentido de Marx é, em contrapartida, um princípio universal, chamado não apenas a apreender aquele tratamento científico do ser, especialmente do ser social, mas também, e sobretudo, a influenciar, dirigir, de modo correspondente, as atividades humanas. Ela é fundamentada pela ideia de que, de um lado, tudo – também o dado material – "coisal" – em seu verdadeiro ser é um processo irreversível de complexos; de outro lado, que tais processos nunca podem possuir um ser isolado, "precisamente" separável de outros processos, que entre eles sempre vigoram influências recíprocas intensas ou extensas, fortes ou fracas, de modo que a autêntica constituição do seu ser apenas pode ser concebida de maneira adequada no contexto do processo em seu conjunto em que ontologicamente se sintetiza, e também no interior da sociedade em seu conjunto como totalidade processual. Desejamos acentuar aqui mais uma vez: a totalidade em Marx é sempre uma totalidade de totalidades, motivo pelo qual também cada deter-se – muitas vezes inevitável do ponto de vista do conhecimento – numa tal totalidade em certo sentido tem de permanecer, sempre, apenas relativo, na medida em que, muitas vezes por razões de fundamentos do conhecimento, se renuncia conscientemente ao exame de totalidades mais abrangentes. Assim, por exemplo, o desenvolvimento do ser social impôs, por dinamismo próprio, que ele só pode ser entendido como movimento para a totalidade autêntica da espécie humana. O contexto cósmico, o efeito de nosso destino planetário sobre o do gênero humano, permanece ligado e operante ontologicamente (assim como o do sistema solar sobre o de nossos planetas etc.), mas, devido às gigantescas quantidades de tempo que leva para atingir a eficácia real, pode ser concretamente negligenciado sem prejuízos no tratamento teórico do gênero humano (Lukács, 2010, p. 291-292).

Nesse excerto, Lukács fornece-nos, além de determinações da categoria da totalidade, alguns indícios acerca do modo como o sujeito deve concebê-la no processo de conhecimento. Um ponto é que, nesse processo, a abordagem de um objeto como totalidade deve levar em conta sua relatividade, isto é, o fato de ser constituída de outras totalidades e de que, em sua relação com outros objetos, constitui, também, outras totalidades. No entanto, não é sempre possível, por "razões de fundamentos do conhecimento", o exame consciente de todos os elementos mais abrangentes. No processo de investigação, ao capturar determinado momento da totalidade, o sujeito pode ter a ilusão de entender que o objeto, como concreto a ser conhecido, é totalmente independente do restante da realidade, uma vez que foi recortado e isolado dos demais. Com base nisso, o conceito de isolado, elaborado por Caraça (2003), pode se tornar também um obstáculo para a correta apreensão do método marxiano de apropriação da realidade na totalidade, não pelo conteúdo que carrega, mas pelo termo que, em sua significação cotidiana, expressa um conteúdo que esconde a intrínseca dialética impressa pelo autor. Como antecipamos anteriormente, entendemos o conceito de isolado de Caraça (2003) como equivalente ao de uma totalidade "isolada", mas que sempre pressupõe a sua relação com

a totalidade de que é partícipe. E é nesse sentido e para não deixar dúvidas do aspecto dialético do seu instrumental conceitual, que Caraça (2003) nos chama a atenção sobre o que considera uma das características essenciais da realidade, a *interdependência*. Segundo o autor, o conceito de interdependência expressa que: "Todas as coisas estão relacionadas umas com as outras; o Mundo, toda esta *Realidade* em que estamos mergulhados, é um organismo vivo, uno, cujos compartimentos comunicam e participam, todos, da vida uns dos outros" (Caraça, 2003, p. 103).

Apesar de o matemático português traduzir a relação entre os objetos/totalidades pelo conceito de interdependência, é necessário torná-lo mais preciso, a fim de avançar para superar a noção banalizada de que o todo é mais que a soma das partes e que tudo está relacionado com tudo (Kosik, 1976). Não queremos afirmar que esse é o tratamento existente em Caraça (2003), uma vez que a obra, em seu conjunto, desautorizar-nos-ia a adotar essa interpretação. No entanto, a definição apresentada anteriormente necessita ser mais bem delimitada para atingir os propósitos do presente trabalho.

Realizaremos esse movimento com auxílio das supracitadas palavras de Lukács (2010). O autor ressalta que as influências recíprocas entre as totalidades constitutivas não exercem sempre o mesmo impacto sobre o movimento do ser em todos os seus momentos. Nessa diferenciação das influências recíprocas, o conceito marxiano de momento predominante ganha relevância. O processo de interação entre as totalidades e a transformação da realidade possuem, portanto, sempre um momento predominante. Conforme o filósofo húngaro (2012), Hegel havia apreendido corretamente que, em todo processo, está presente a contradição, mas que não é suficiente para descrever um processo evolutivo e, portanto, diferenciador do ser em sua processualidade. Para Lukács (2012), em Hegel a contraditoriedade é uma forma de passagem de um estágio a outro, que surge como uma consequência lógica de uma contraditoriedade abstrata. Por outro lado, em Marx, a contradição teria um papel de força diretora de um processo que também pode ser normal. Ao analisar a interação entre a categoria da forma em sua determinação de reflexão com outras – como essência, matéria e conteúdo –, Lukács (2012, p. 263) identifica essa fragilidade do sistema hegeliano:

> [...] a profunda e geralmente correta concepção hegeliana da interação padece também em um ponto importante das tendências deformantes do sistema. Como o sistema pode atribuir um papel ontológico realmente decisivo e norteador apenas à própria ideia, a interação deve constituir uma espécie de equilíbrio entre forças fundamentalmente equivalentes e, portanto, uma espécie de síntese estática de forças dinâmicas. Sem dúvida existem casos em que isso corresponde aos fatos; mas, para o desenvolvimento real, para o desenvolvimento ontologicamente significativo, têm importância sobretudo as interações nas quais vigora o que Marx mais tarde chamará de "momento predominante [*übergreifendes Moment*]". Esse papel, porém, é atribuído por Hegel

> apenas à própria ideia, de modo que é levado a desvalorizar no plano ontológico a interação que, de resto, ele compreendeu tão bem.

Nessa mesma direção, o autor sublinha que "a simples interação levaria a um estado estacionário e, em última análise, estático; caso se queira dar expressão conceitual à dinâmica viva do ser, ao seu desenvolvimento, é preciso indicar onde, na referida interação, pode ser encontrado o momento predominante" (Lukács, 2013, p. 253). Desse modo, entende-se que o momento predominante é aquele que rearticula e organiza os elementos em torno de si, ou seja, é a relação que reestrutura as totalidades constitutivas sob sua forma de regência, que imprime a direção do desenvolvimento. Ele é "todavia não a sua simples ação, mas simultaneamente as resistências com que se depara, que ele mesmo provoca etc. – que dá à interação, de resto estática, apesar de toda a mobilidade parcial, um direcionamento, uma linha de desenvolvimento" (Lukács, 2013, p. 253).

Essas poucas considerações sobre o conceito de momento predominante são suficientes para que possamos continuar nossa exposição, mas sublinhamos que essa categoria será evocada quando abordarmos o movimento de diferenciação e produção de novas esferas da realidade.

Antes de continuarmos a percorrer o caminho aqui traçado, convém reestabelecer o quadro analítico até então elaborado. Partimos da concepção da realidade como totalidade. Esta é, por sua vez, composta por outras que são relativas, tanto no sentido ascendente como descendente. A totalidade inclusiva e macroscópica (Netto, 2011) tem seu desenvolvimento, que é histórico e dependente das condições de existência em que se encontra, realizado por meio do processo de interação e relacionamento, em geral contraditório, das suas totalidades constitutivas. Todavia, essa interação entre as totalidades parciais não é uma simples síntese, mas uma afirmação e imposição de umas sobre outras. Isso significa que as interações se dão de modo que há sempre um momento predominante no processo, que imprime uma orientação em detrimento de outras possíveis. Esse traço é uma garantia de que o desdobramento do ser é sempre oriundo de processos causais, nos quais alguns têm maior peso que outros. Assim, o quadro descrito é da realidade como uma totalidade articulada e diferenciada em formas de existência heterogêneas e com graus de complexidade distintas, quadro em que concebemos o conceito de *interdependência* (Caraça, 2003).

Convém pôr em relevo que somente partindo da dinâmica constitutiva da realidade como totalidade – formada por momentos heterogêneos e contraditórios, em seu autodesenvolvimento –, com base na análise do ser social, pode-se compreender a essência da atividade matemática, do conhecimento matemático e do Cálculo como particularidade dessa

forma de apreender a realidade. Como forma de apreender as nuances e os elementos necessários para desvelar a gênese do conhecimento matemático, é impreterível que nossa análise parta da distinção entre as diversas esferas de ser, com a identificação de seus momentos predominantes.

O ser social, de acordo com Lukács (2009b, 2010, 2012, 2013), só pode emergir do ser orgânico. Este, por sua vez, tem como base de sua constituição e surgimento o ser inorgânico. Essa última esfera do ser possui como característica principal o simples tornar-se-outro, em contraposição ao ser orgânico, que se particulariza pela reprodução do mesmo, a reprodução da vida. No ser social, entretanto, surge algo totalmente distinto e sem nenhuma analogia com qualquer outra forma de ser: o que se constata não é uma simples reprodução do mesmo – reprodução da vida –, mas uma ativa produção do novo. Contrapõe-se, portanto, à adaptação passiva ao ambiente a adaptação ativa, a modificação consciente do entorno. Entre a esfera do ser orgânico e a do ser inorgânico, bem como entre essas e a esfera do ser social, há rupturas na forma de ser deste. Portanto, torna-se inexequível que a gênese das esferas mais complexas seja deduzida das mais simples pelas quais se erguem. Em suma, não há nada de indicativo no ser orgânico de que se possa deduzir o surgimento do ser social com as determinações constatadas atualmente.

O surgimento das esferas mais complexas somente ocorre por meio da ruptura com a sua forma de existência, como negação do seu modo de ser e afirmação de uma nova objetividade (Lessa, 2016a). A esse momento de ruptura, Lukács (2013) denomina de salto ontológico. O filósofo magiar explica que o conceito de salto não está ligado à duração do processo de diferenciação das esferas, mas sim à ruptura substancial entre elas como formas de ser. Desse modo,

> todo salto implica uma mudança qualitativa e estrutural do ser, onde a fase inicial certamente contém em si determinadas condições e possibilidades das fases sucessivas e superiores, mas estas não podem se desenvolver a partir daquela numa simples e retilínea continuidade. A essência do salto é constituída por essa ruptura com a continuidade normal do desenvolvimento e não pelo nascimento, de forma súbita ou gradativa, no tempo, da nova forma de ser (Lukács, 2013, p. 46).

A ruptura que ocorre entre o ser inorgânico e o orgânico não significa uma independência entre essas esferas. O ser orgânico se articula sobre a base do inorgânico que, por sua vez, opera de acordo com as suas legalidades no organismo do qual é parte integrante, mas agora rearticulado, não no mero tornar-se-outro, mas no movimento de reprodução da vida, de si mesmo. Esse é o motivo para que a reprodução da vida seja considerada o “momento

predominante" da interação entre as formas do ser inorgânico no complexo do organismo. De modo similar, o momento predominante no ser social é a reprodução do novo, sua adaptação ativa – a atividade. Tal característica faz com que as interações entre as formas de ser inorgânicas e orgânicas, em um movimento progressivo – relativamente contínuo – de autodiferenciação das esferas de ser, sejam rearticuladas e, cada vez mais, sejam momentos subsumidos a formas e expressões sociais. É nesse sentido que Marx (2011, p. 47), ao abordar a relação dialética entre consumo e produção, escreve que "Fome é fome, mas a fome que se sacia de carne cozida, comida com garfo e faca, é uma fome diversa da fome que devora carne crua com mão, unha e dente". Ou seja, os momentos "naturais" do processo de reprodução biológica – a necessidade de reposição dos nutrientes para a contínua reprodução biológica que se expressa no alerta/sinalização dado pelo organismo (fome) – continuam a existir. Contudo, são subordinados ao modo de sua saciedade, isto é, ganham uma nova qualidade decorrente do caráter progressivamente mediado pela relação do indivíduo com o ser social em sua totalidade. Relacionada a essa questão, é que Marx cita uma tendência constante de recuo das barreiras naturais, que objetiva o tornar-se-sempre-mais-social do ser humano.

Realizados esses esclarecimentos – sobre a perspectiva de abordagem da realidade como totalidade em automovimento, estruturada, articulada e diferenciada – convém adentrarmos nas especificidades da relação estabelecida, nesse movimento de adaptação ativa do ser humano por meio da produção do novo, que possibilita o surgimento do conhecimento matemático.

2.2 ASPECTOS ONTOLÓGICOS RELATIVOS AO CONHECIMENTO EM GERAL E AO CONHECIMENTO MATEMÁTICO EM PARTICULAR

A relação ativa entre o ser humano e a realidade para sua transformação e satisfação das necessidades humanas é o momento predominante no ser social. Estar em atividade é, portanto, um aspecto geral da relação entre o ser humano e a natureza e da relação entre os próprios seres humanos. Leontiev (2021, p. 103), com base na pergunta retórica "o que é a vida humana?", nos oferece a seguinte reflexão:

> É o conjunto, ou melhor, um sistema de atividades que se sucedem. É na atividade que ocorre a transformação do objeto em sua forma subjetiva, em imagem; além disso, na atividade se realiza também a transformação da atividade em seus resultados objetivos, em seus produtos. Tomada a partir desse ponto de vista, a atividade aparece como processo no qual se realizam transformações mútuas entre os polos "sujeito-objeto".

As palavras do psicólogo soviético nos alertam para o caráter essencialmente ativo do ser humano. Essa atividade, por sua vez, realiza-se sempre mediada pelos instrumentos e pela relação com os outros seres humanos (Leontiev, 2004). Entretanto, como bem destacado pelos pressupostos da ontologia materialista-dialética, há uma atividade que ocupa lugar privilegiado na análise do processo e no salto da gênese do ser social: o trabalho. Essa, de acordo com Lukács (2013), é, entre todas as outras categorias desse ser, a que possui caráter de transição, ou seja, que articula sociedade e natureza, tanto orgânica como inorgânica. É a única categoria que não possui, em sua essência, um caráter puramente social, isto é, que não pressupõe o salto já realizado e o ser social já constituído. Essa característica conduz à distinção entre o trabalho e outras atividades na relação entre uma categoria geral e outra particular.

O trabalho possui prioridade ontológica na explicação do ser social, o que se constitui como modelo para as outras atividades, a despeito de sua não identificação com elas. Desse entendimento desdobra-se outro, de cunho metodológico, de que não é interessante, para análise teórica de uma atividade especificamente diferenciada, uma analogia direta com o trabalho. Por exemplo, para explicar a atividade de estudo do estudante ou a atividade coletiva de estudo escolar – que envolve estudante e professor – é importante esclarecer seu movimento como processo concreto e específico, em vez de escorar-se em uma analogia com a atividade de trabalho. Em nosso entendimento, essa redução e identidade só contribuem para generalizações formais que não auxiliam na apropriação do concreto em sua essência e diferenciação.

É possível, geralmente por meio de diversas mediações, estabelecer relações do trabalho com as demais categorias do ser social. Nessa atividade pode ser encontrada, por exemplo, a gênese do conhecimento científico em geral e do conhecimento matemático em particular. Para realizar tal explanação destacaremos, com base em Lukács (2013), as categorias que nos ajudam a compreender o processo de formação do conhecimento científico em geral e do conhecimento matemático em particular.

A categoria ontológica do trabalho é assim definida por Lukács (2013, p. 47):

> [...] através dele realiza-se, no âmbito do ser material, um pôr teleológico enquanto surgimento de uma nova objetividade. Assim, o trabalho se torna modelo de toda práxis social, na qual, com efeito – mesmo através de mediações às vezes muito complexas –, sempre se realizam pores teleológicos, em última análise, de ordem material.

A subjetividade e a objetividade bem como o pôr teleológico e a causalidade são momentos articulados no processo de trabalho. Para o filósofo húngaro (2013, p. 48), a causalidade é "um princípio de automovimento que repousa sobre si próprio e mantém esse caráter mesmo quando uma cadeia causal tenha o seu ponto de partida num ato de consciência". A teleologia é sempre uma categoria posta que implica pôr um fim, ou seja, uma consciência que põe finalidades.[29] Essas duas categorias são heterogêneas e opostas, mas no interior do processo de trabalho interagem em um processo real e unitário (Lukács, 2013).

Na análise dos momentos que compõem o processo de trabalho, Lukács (2013) defende que Aristóteles havia identificado dois componentes essenciais: a *nóesis* (o pensar) e a *poíesis* (o produzir). Hartmann[30], por sua vez, teria seccionado analiticamente o primeiro componente em dois outros: o pôr dos fins e a investigação dos meios. Na relação entre esses componentes é que se revela a inseparabilidade entre causalidade e teleologia, pois "a investigação dos meios para a realização do pôr do fim não pode deixar de implicar um conhecimento objetivo da gênese causal das objetividades e dos processos cujo andamento pode levar a alcançar o fim posto" (Lukács, 2013, p. 54). A investigação cumpriria uma dupla função: evidenciar aquilo que governa em si os objetos de maneira independente da consciência; encontrar novas conexões e possibilidades em que o pôr-em-movimento possibilita a efetivação do fim teleologicamente posto.

O conhecimento aproximado das propriedades do objeto, pelo sujeito, é um requisito para a realização concreta do pôr fim do trabalho. Essa característica de mera aproximação é um dado ontológico, uma vez que não é possível para o indivíduo prever todas as consequências que o ato do pôr desencadeará, ao que Leontiev (2021, p. 149) corrobora afirmando que a "atividade realizada é mais rica e mais verdadeira do que a consciência que a precede". Esse aspecto é evidenciado naquelas posições teleológicas que são secundárias em relação ao trabalho imediato, isto é, que possuem como objeto não "algo puramente material, mas a consciência de um grupo humano" (Lukács, 2013, p. 84).

Abrimos aqui um parêntese para tratar de duas questões que ainda não foram elucidadas e que se encontram na relação da teleologia com a causalidade: a questão da necessidade e da substância social. Lukács (2013), no início do capítulo dedicado à categoria trabalho, alerta que a considerará como uma abstração, pois ela será reduzida aos seus

---

[29] Com fins de ilustração, basta lembrar a famosa distinção realizada por Marx (1984, p. 202) entre a "abelha" e o "pior arquiteto".

[30] Nicolai Hartmann (1882-1950) – filósofo germano-báltico importante para o "ressurgimento" da ontologia na filosofia no século XX.

momentos singulares. Essa abstração possibilita que o autor aborde os elementos envolvidos nos processos de trabalhos singulares, com o intuito de analisá-los como aspectos universais presentes na sua objetivação, ao serem acatados na totalidade das relações sociais. Como o próprio autor assinala, é importante considerar que o trabalho surge conjuntamente a outras características sociais, como a sociabilidade, o que torna impossível a cisão entre o trabalho individual, a atividade humana em geral e a sociabilidade. É por isso que, como afirma Marx (2010, p. 107):

> A atividade social e a fruição social de modo nenhum existem *unicamente* na forma de uma atividade *imediatamente* comunitária e de uma fruição imediatamente *comunitária* [...]. Posto que também sou *cientificamente* ativo etc., uma atividade que raramente posso realizar em comunidade imediata com outros, então sou ativo *socialmente* porque [o sou] enquanto *homem*. Não apenas o material da minha atividade – como a própria língua na qual o pensador é ativo – me é dado como produto social, a minha *própria* existência *é* atividade social; por isso, o que faço a partir de mim, faço a partir de mim para a sociedade, e com a consciência de mim como um ser social. [...] O indivíduo *é* o *ser social*. Sua manifestação de vida – mesmo que ela também não apareça na forma imediata de uma manifestação *comunitária* de vida, realizada simultaneamente com outros – *é*, por isso, uma externação e confirmação da *vida social*. A vida individual e a vida genérica do homem não são *diversas*, por mais que também – e isto necessariamente – o modo de existência da vida individual seja um modo mais *particular* ou mais *universal* da vida genérica, ou quanto mais que a vida genérica seja uma vida individual mais *particular* ou mais *universal*.

Anteriormente citamos essa relação entre o social e o individual na relação entre produção e consumo. Destacamos que nos dois casos há uma imbricação e influências recíprocas, tanto na criação da necessidade como em sua satisfação. Mesmo as necessidades biológicas alteram sua forma e conteúdo graças ao momento predominante do ser social. Ademais, a própria sociedade, devido à sua prioridade ontológica diante do indivíduo, possui suas próprias necessidades e exerce influência direta sobre os modos de agir dos indivíduos, pois impõe pressões sobre eles para que atuem de determinado modo, em determinada direção (Lukács, 2009b).

Nesse contexto, é importante sublinhar, no que é atinente à gênese da ciência, que a dupla socialização do pôr fim – engendrada por uma necessidade social e a sua imprescindível satisfação – objetiva a heterogeneidade entre o meio e o fim. A objetivação do pôr, a realização do fim como homogeneização do fim e do meio, não é uma simples subordinação deste àquele. A realização ou fracasso do pôr do fim depende do grau com que, na investigação dos meios, tenha-se conseguido transformar a causalidade dada em causalidade posta. É desse modo que, no processo de investigação dos meios, localiza-se a gênese do pensamento científico (Lukács, 2013). Isso ocorre pois, entre a realização do trabalho singular e a reprodução do ser social, há

uma inversão do peso entre o meio e o fim. No primeiro processo há uma primazia do fim decorrente da necessidade de sua realização para satisfação de uma necessidade particular que regula o processo de trabalho como um todo, enquanto para a continuidade do ser social isso se inverte. Para a sociedade, a investigação dos meios como elemento indispensável do processo transforma-se na principal forma de fixação e garantia do trabalho na continuidade de seu desenvolvimento. Por esse motivo, "o conhecimento mais adequado que fundamenta os meios (ferramentas etc.) é, muitas vezes, para o ser social, mais importante do que a satisfação daquela necessidade (pôr do fim)" (Lukács, 2013, p. 57). Esse processo só é possível porque a investigação dos meios possibilita uma generalização da experiência expandindo-a para outras situações similares.

Na investigação dos meios, de acordo com Lukács (2013), realiza-se o processo de apreensão da realidade, pelo sujeito, na forma de reflexo[31]. O pôr das cadeias causais até então apropriadas na consciência, em conjunto com o reflexo, formam, apesar da heterogeneidade, a base da particularidade ontológica do ser social. Nessa relação, explicita-se a distinção entre sujeito e objeto no processo de trabalho. Principiar

> a análise com o espelhamento mostra uma separação precisa entre objetos que existem independentemente do sujeito e sujeitos que figuram esses objetos, por meio de atos de consciência, com um grau maior ou menor de aproximação, e que podem convertê-los em uma possessão espiritual própria. [...] Se o sujeito, enquanto separado na consciência do mundo objetivo, não fosse capaz de observar e de reproduzir no seu ser-em-si este último, jamais aquele pôr do fim, que é o fundamento do trabalho, mesmo mais primitivo, poderia realizar-se (Lukács, 2013, p. 65).

[31] Nas versões utilizadas no presente texto (Lukács, 2010, 2012, 2013), o termo *widerspiegelung* foi traduzido como *espelhamento.* No entanto, utilizaremos, no decurso de nossa exposição, o termo *reflexo*, conforme a tradução presente em Lukács (2018a, 2018b). Isso se deve, primeiramente, pois, de acordo com Irmen (1980), dicionário de alemão-português, *widerspiegeln* é traduzido como *refletir*, apesar de *spiegel* significar *espelho* e *wider* dizer respeito à ação de *ir contra*. O segundo motivo diz respeito ao fato de o termo *reflexo* se referir a uma categoria presente na tradição marxista de que Lukács (2010, 2012, 2013) se apropria e interpreta de modo particular. Lessa (2016b), por exemplo, defende que na *Ontologia do ser social*, bem como na *Estética*, o filósofo magiar recusa peremptoriamente o significado atribuído pelo marxismo vulgar a essa categoria, considerando-a como decisiva para a consciência e, portanto, impossível de ser reduzida à mera cópia do real pela subjetividade. Convém, porém, apontar que, apesar de utilizarmos o termo *reflexo* nas análises que realizaremos, o temos interpretado, no âmbito da formação do indivíduo, em linha com Radford (2023), Ilienkov (2008) e Vigotski (2018) e, de certa maneira, com Lukács (2010, 2012, 2013), próximo ao significado de *refração*, o que despe de passividade a postura do sujeito na unidade que é ser constitutivo e constituído. Nesse sentido, convém citar as palavras de Vigotski (2018, p. 77, itálico nosso) que, ao lidar com a relação entre o desenvolvimento e o meio, considera: "se a **pedologia** não estuda o meio enquanto tal, independentemente da criança, mas o seu papel e influência no curso do desenvolvimento, então ela deveria encontrar o *prisma* que *refrata* a influência do meio sobre a criança. Ou seja, ela **deveria saber encontrar a relação existente entre a criança e o meio, a vivência da criança**, como ela toma consciência, atribui sentido e se relaciona afetivamente com um determinado acontecimento. Digamos que esse seja o '*prisma*' que define o papel e a influência do meio no desenvolvimento do caráter da criança, no seu desenvolvimento psicológico e assim por diante".

Desse modo, por meio do movimento aproximativo de captura do real, concretiza-se na consciência do sujeito, pelo reflexo, uma separação do ser humano e de seu ambiente, um distanciamento que manifesta a confrontação do sujeito com o objeto. “Reflexo e ser-precisamente-assim existente, categorias pensadas e categorias reais são, para Lukács, polos entre si irredutíveis de uma dualidade posta e inerente ao distanciamento entre sujeito e objeto fundado pela atividade de reflexão do real pela consciência” (Lessa, 2016b, p. 106).

A conexão entre o reflexo da realidade e a realização dos fins é uma expressão da relação heterogênea entre a objetividade posta e a subjetividade que se forma nesse processo, em que ambas se influenciam e se determinam de modo recíproco. Tal relação é um desdobramento de outra, entre causalidade e teleologia, na qual se funda uma distinção ontológica, na esfera gnosiológica, entre objeto e sujeito. Este se põe a finalidade de captar na consciência as legalidades do fenômeno por meio de um processo aproximativo que jamais se tornará uma identidade entre ambos. As seguintes palavras de Lukács (2013, p. 66) são esclarecedoras e resumem o que tratamos até aqui:

> [...] no espelhamento da realidade como condição para o fim e o meio do trabalho, se realiza uma separação, uma dissociação entre o homem e seu ambiente, um distanciamento que se manifesta claramente na confrontação entre sujeito e objeto. No espelhamento da realidade a reprodução se destaca da realidade reproduzida, coagulando-se numa “realidade” própria na consciência. Pusemos entre aspas a palavra realidade porque, na consciência, ela é apenas reproduzida; nasce uma nova forma de objetividade, mas não uma realidade, e – exatamente em sentido ontológico – não é possível que a reprodução seja semelhante àquilo que ela reproduz e muito menos idêntica a isso. Pelo contrário, no plano ontológico o ser social se subdivide em dois momentos heterogêneos, que do ponto de vista do ser não só estão diante um do outro como heterogêneos, mas são até mesmo opostos: o ser e o seu espelhamento na consciência.

Essa duplicidade que promove a distinção e afastamento de sujeito e objeto, na esfera gnosiológica, é a raiz da possibilidade de uma reprodução errônea da realidade na consciência. O reflexo exige o distanciamento ante o objeto – que é uma totalidade intensivamente infinita –, o que pode gerar uma apropriação equivocada do seu ser-precisamente-assim. O conteúdo da determinação do reflexo é dado pelo objeto, no entanto, o ato de reflexão é uma atividade teleologicamente orientada (Lessa, 2016b). Dessa maneira, a teleologia operante exerce influência sobre o conteúdo refletido na totalidade dos conhecimentos e faz com que o modo pelo qual a realidade é apreendida sofra influência, ao longo da história, das diversas formas com que se organiza a sociedade para a sua reprodução. Para Lukács (2013), quanto mais a sociedade se põe no caminho de apropriação do objeto em

seu ser-precisamente-assim, mais cria sistemas de mediação auxiliares, em si homogêneos, que auxiliam nesse processo.

Por intermédio do progressivo distanciamento entre o objeto e o seu reflexo, oriundo dos sistemas de mediação, surge como consequência, por um lado, a impossibilidade da reprodução da realidade pela consciência – proveniente da atividade reflexiva – ser resumida à mera cópia ou fotografia fiel da realidade. Por outro lado, essa reprodução progressivamente sofre influências capitais de distintos complexos do ser social, como por exemplo, da ideologia.

Nesse contexto, consideramos que do enlace entre causalidade e teleologia oriunda do trabalho – que se expande para além de sua esfera de atuação e se insere em outras formas de relações entre os seres humanos e entre eles e a realidade natural – é que o conhecimento matemático tem seu impulso inicial. Pode-se entender, com base em Lukács (2013), que o conhecimento matemático não é unilateralmente uma "descoberta" direta absorvida da própria realidade ou de outro reino – conforme se encontra em Platão –, muito menos uma "invenção" provinda diretamente da mente humana, questão que, segundo Ernest (1999), tem gerado disputas no âmbito das pesquisas sobre a natureza da matemática. Esse entendimento se vincula a outro, o da relação entre o conhecimento – em geral, e o matemático, em particular – e a realidade, bem como entre o sujeito e o objeto. Nesse ponto, é peremptória a exposição, de modo suscinto, de algumas respostas formuladas historicamente, assim como a verificação da sua dependência, mesmo relativa, dos modos de estruturação das sociedades, para que nosso posicionamento fique nítido. Para tal intento, distinguiremos as visões com base na sua concepção ontológica do objeto, com fundamentos em certas manifestações históricas singulares.[32]

Podem-se extrair elementos de uma ontologia dos objetos da matemática na concepção dos pitagóricos.[33] De acordo com Roque (2012, p. 104), para eles "[...] o mundo é determinado, antes de tudo, por um arranjo bem-ordenado e tal ordem se baseia no fato de que as coisas são delimitadas e podem ser distinguidas umas das outras". Caraça (2003) considera essa ideia fecunda, pois nela se encontra implícita a admissão da existência de uma ordenação

---

[32] Shapiro (2016) defende que há diversas graduações acerca da concepção de objetos matemáticos no âmbito da filosofia da matemática. Nesse sentido, nossa exposição não será exaustiva, mas servirá apenas como uma ilustração em forma retórica que serve de esclarecimento da posição adotada na presente tese sobre esse complexo de questões.

[33] A falta de fontes e o enviesamento dos textos ainda disponíveis são aspectos que, segundo Roque (2012), podem gerar incertezas acerca da existência de um matemático chamado *Pitágoras*. Assim, decidimos referenciar os *pitagóricos* como aquela escola e/ou seita grega que possuía objetivos místicos e científicos e que exerceu enorme influência na Grécia a partir do século VI a.E.C. Tal escola findou-se em um trágico evento, alvo de uma revolta popular que se instalou em Crotona, região que hoje faz parte da Itália. Conforme Caraça (2003), essa revolta teve como principal motivo o caráter aristocrático da referida escola.

do Universo, na qual suas leis traduziriam uma harmonia universal. Por outro lado, para o autor português (2003), dessa ideia fecunda surge outra muito menos promissora: a de que todas as coisas são números. A fundamentação dessa assertiva pode ser encontrada na ideia de que a matéria possuiria uma estrutura passível de ser explicada matematicamente, visão decorrente do fato de que "tudo" no universo poder ser contado (Roque, 2012). Desse ponto de partida, passam à defesa de que a matéria é formada por:

> [...] corpúsculos cósmicos, de extensão não nula, embora pequena, os quais reunidos em certa quantidade e ordem, produziam os corpos; cada um de tais corpúsculos – *mónada*[34] – era assimilado à *unidade* numérica e, assim, os corpos se formavam por *quantidade* e *arranjo de mónadas* como os números se formam por *quantidade* e *arranjo de unidades* (Caraça, 2003, p. 70).

A postulação desses "corpúsculos cósmicos de extensão não nula" que formam os corpos pode ser identificada no conceito de indivisíveis, apesar de que, conforme Boyer (1959), não temos conhecimento sobre a utilização ou não do conceito do infinitamente pequeno pelos pitagóricos. Outro aspecto da ontologia cosmológica pitagórica é a imbricação e confusão atinentes à relação entre a matéria e os números, o que os conduzia, por um lado, a antropomorfizar os números, conferindo-lhes qualidades externas e, por outro, a imprimir aos objetos um selo numérico, isto é, a atribuir uma inseparabilidade entre números e corporeidades.

A ordenação dos números constituiria a gênese do universo, na qual o par e o ímpar, como representações do limitado e do ilimitado, uniam-se – de modo análogo a um casamento – para dar origem ao universo (Roque, 2012). Para Prado Júnior (1963), essa escola de pensamento é, de certa maneira, a precursora do processo de *entificação* dos objetos matemáticos, visão que atuou hegemonicamente por séculos no pensamento ocidental. Conforme o autor, no processo de entificação se atribui aos objetos matemáticos uma existência como "individualidades", "coisas" ou "mónadas". Para os pitagóricos, essa entificação era central, pois possibilitava a passagem da composição dos objetos – matemáticos e, por consequência, reais – à regência e à forma de funcionamento do Universo. Ademais, essa propriedade se evidencia principalmente no modo pelo qual os pitagóricos lidavam com os números, por meio da "aritmética de pontinhos" (Roque, 2012, p. 103). Nesse caso, os pontos discretos eram organizados de uma determinada maneira para o estudo de suas propriedades.

---

[34] Segundo Japiassú e Marcondes (2001), o termo *mónada* foi utilizado na filosofia antiga para designar aqueles tipos de elementos simples, segundo os quais o Universo é composto. Por sua vez, Platão utilizou-o relacionado às ideias ou às formas. No começo do pensamento moderno, o termo foi retomado e passou a ocupar uma posição central no pensamento de Leibniz.

Importante destacar que, mesmo com as críticas direcionadas à sua concepção mais geral ou ainda a suposta derrocada da escola pitagórica com a descoberta do fenômeno da incomensurabilidade[35], sua influência foi sentida na Grécia e pode ser encontrada nos escritos de Platão, que alterou substancialmente as concepções herdadas dessa escola.

Para Platão, os objetos matemáticos eram considerados entes eternos que habitam uma realidade independente dos indivíduos e suas atividades. Ou seja, o filósofo grego admite a existência de uma separação entre os números e o mundo físico. Para ele, entes matemáticos, como pontos, retas, planos, sólidos e números apresentavam existência própria, sem relação com os indivíduos. O matemático apareceria como um descobridor das relações que expressam verdades que independem dele, mas que decorrem da objetividade de um mundo supratemporal e independente da percepção, o mundo das Ideias (Machado, 2013). Assim, para o filósofo grego, aquilo que é refere-se ao que pode ser conhecido (Smith, 2000), que, por sua vez, não se altera. Isto é, "o conhecimento... tem a ver com ser e realidade, e similaridade e imutabilidade" (Platão, 1953 *apud* Radford, 2011, p. 292). A atividade matemática desempenharia um papel específico: ocupar-se das *Formas,* que possuem posição intermediária entre as Ideias e as coisas do mundo físico. Para Platão, as "formas, os objetos matemáticos por excelência, habitam, [...] um lugar celeste fora deste mundo imperfeito, fora do espaço e do tempo, e assim imunes à geração e à degradação. Preexistem, portanto, à atividade matemática." (Silva, 2007, p. 42).

Nesses termos, para Silva (2007), a concepção filosófica da matemática em Platão pode ser entendida como um *realismo ontológico transcendente,* porquanto afirma a existência independente dos objetos matemáticos em um mundo externo ao nosso. Radford (2011) evidencia que essa teoria tem por base um compromisso com os questionamentos dos princípios sociopolíticos populistas de Péricles[36], que eram lidos, na época, como uma das causas da derrota de Atenas na guerra do Peloponeso[37]. Assim, a filosofia de Platão foi politicamente formulada como uma forma de racionalidade que se contrapõe às mudanças, com forte viés aristocrático e busca de uma constituição hierárquica e imutável das estruturas sociais. A teoria das Formas teria um papel fundamental, nessa visão de mundo, ao procurar salvar os antigos valores aristocráticos. Por decorrência, a matemática também não escaparia desse quadro

[35] É comum encontrar em muitas historiografias uma vinculação entre a incomensurabilidade e o processo de decadência da escola pitagórica. Contudo, para Roque (2012), é pouco provável que isso tenha ocorrido, porquanto, além de não haver uma relação direta entre as triplas pitagóricas e a incomensurabilidade, a matemática pitagórica privilegiava a aritmética.

[36] Péricles (490-429 a.E.C.) – foi um político e governante ateniense.

[37] A guerra do Peloponeso foi um conflito militar armado entre as cidades gregas de Atenas e Esparta que se estendeu entre os anos de 431 a.E.C. até 404 a.E.C.

conceitual, constituindo-se como um exemplo destacado do imutável, permanente e eterno (Radford, 2011).

No próximo capítulo, abordaremos com maior profundidade a relação entre a fluência/movimento e a permanência, temáticas que guiaram o pensamento ocidental por séculos. Importa assinalar que a visão de Platão tem influência até hoje e, geralmente, confunde-se com uma visão realista da matemática, decorrente do pressuposto de que a existência dos objetos matemáticos independente dos seres humanos. No entanto, é mister diferenciar o platonismo na Filosofia da Matemática, muitas vezes confundido com o realismo da filosofia da matemática de Platão. Na língua inglesa, essa distinção ocorre por intermédio da grafia, na qual as concepções que admitem a independência dos objetos matemáticos em relação ao sujeito são escritas com a letra inicial minúscula – *platonism.* Por sua vez, a concepção de matemática oriunda dos próprios escritos de Platão é grafada com a letra inicial maiúscula – *Platonism* (Shapiro, 2016). Desse modo, "os matemáticos que consideram a si mesmos descobridores de verdades em um mundo onde os entes matemáticos têm uma existência objetiva, prescindindo de qualquer ato preliminar de construção, esses matemáticos têm no platonismo a matriz básica de suas concepções" (Machado, 2013, p. 35).[38]

De acordo com Shapiro (2016), haveria, entre os realistas ontológicos em matemática, uma certa preocupação com a delimitação do que pode ser considerado como conhecimento *a priori*. Esses, grosso modo, conceberiam tal forma de conhecimento como resultado de uma aproximação do ser humano com a realidade matemática por meio da "intuição matemática". Isso levaria, supostamente, ao conhecimento de proposições matemáticas básicas como os axiomas de várias teorias. Para explicar essa relação, estabelecer-se-ia uma analogia entre essa intuição matemática e a realidade dos seus objetos, bem como entre a percepção sensorial e o conhecimento do mundo externo.[39]

Outra forma de conceber a matemática é considerá-la como uma invenção da mente humana, sem relação alguma com a realidade externa. Essa posição ontológica pode ser nomeada de *antirrealismo*. Para Shapiro (2016, p. 53), a referida corrente considera que

> [...] se os números, por exemplo, forem criações da mente humana ou forem inerentes ao pensamento humano, então o conhecimento matemático é, em algum sentido,

[38] Na atualidade, muitos matemáticos tangenciam essa concepção. Cabe assinalar que até mesmo Davydov (1975, p. 90, grifo nosso) flerta com essa vertente ao entender que "relações matemáticas são uma realidade objetiva, relações entre coisas realmente existentes. **A atividade da mente apenas as descobre**, e à medida que descobre seu conteúdo ela mesma se desenvolve".

[39] Shapiro (2016) aponta que Kurt Gödel (1906-1978) sugeriria isso quando afirma que determinados princípios da teoria dos conjuntos seriam impostos a nós como verdades.

> conhecimento das nossas próprias mentes. A matemática seria *a priori* na medida em que este auto-conhecimento é independente da experiência sensorial.

Uma outra variação é a de que os objetos matemáticos são construídos com base em itens linguísticos, o que reduz e identifica o conhecimento da matemática com o da linguagem. Isso pode ser visto em uma versão do formalismo que relaciona a prática matemática com um jogo desenvolvido com caracteres linguísticos. Aqui, os símbolos não possuiriam sentido e as proposições matemáticas não expressariam nenhum valor de verdade ou falsidade perante qualquer assunto. "O 'conteúdo' da matemática esgota-se nas regras para operar com a sua linguagem" (Shapiro, 2016, p. 209).

Uma questão que deve ser enfrentada por quem adota esse posicionamento é em relação à "irracional efetividade da matemática nas ciências naturais" (Wigner, 1960). Segundo Azeri (2021), esse espanto deve-se a uma perspectiva matemática baseada na cisão e dicotomia entre o sujeito e o objeto no processo de conhecimento. Tal desassociação não é atinente às diferenças ontológicas e à heterogeneidade desses polos no referido processo. Em vez disso, trata-se de uma distinção originada em um modelo que desconsidera essa relação como integrante da unidade constituída pela atividade humana. Portanto, tendencialmente prioriza um polo em relação a outro sem especificar e precisar as inter-relações. Além disso, podemos destacar que é escamoteada a relação entre os *objetos transitivos* e *intransitivos* no contexto da matemática. Para Bhaskar (2008) os objetos intransitivos são aqueles objetos e estruturas reais, mecanismos e processos que independem do conhecimento humano. Por sua vez, os objetos transitivos têm como função explorar a natureza intransitiva do mundo, ou seja, sem eles a ciência não existe.

A discussão apresentada mostra que essas duas dimensões não são bem delimitadas no âmbito do conhecimento matemático. Por um lado, há uma tendencial em tornar independente do ser humano o conhecimento matemático. Por outro, não se admite que ele, mesmo sendo algo que não existe fora do ser social, trate de relações objetivas da realidade. O que defendemos é um *tertium datur* que tem como base a natureza do reflexo matemático, entendido como uma forma de objetivação da atividade humana no contexto da apropriação e transformação da realidade. Isso lhe confere uma ligação inicial com essa mesma realidade, mesmo que, no processo de seu desenvolvimento, venha a depurá-la dessa realidade e criar um quadro homogêneo com que se torne possível referir-se a ela por meio de uma extensa cadeia de mediações. Ao mesmo tempo, não se identifica com essa realidade devido à sua natureza de reflexo.

O presente capítulo se propôs a afirmar como os pressupostos para esta pesquisa podem ser resumidos da seguinte forma: 1) a necessidade de um ponto de vista ontológico, sob a perspectiva histórico-social, para a análise do objeto na sua relação com o sujeito; 2) a admissão da existência e da prioridade da realidade que, concebida como totalidade concreta, possui as características ontológicas em que sua estrutura, estratificação e historicidade independem do sujeito que conhece; 3) a afirmação de que a natureza do conhecimento matemático tem sua gênese no momento de investigação dos meios – busca pela apropriação da realidade realizada pelo seu reflexo – para a produção do novo, momento predominante do ser social; 4) a relação entre teleologia e causalidade, essencial para a transformação da realidade pelo ser humano, possibilita e exige uma distinção entre o sujeito e o objeto, bem como entre o ser-precisamente-assim e seu reflexo, o que confere ao conhecimento matemático uma existência vinculada à realidade, contudo não permite sua direta identificação com ela.

No próximo capítulo, nossa exposição focará o modo como entendemos a matemática nessa cadeia de relações, com base na dialética entre sujeito e realidade. Também realizaremos uma exposição teórico-analítica, a fim de descrever os elementos conceituais em situações históricas singulares, representativas e importantes para a compreensão da essência do objeto do Cálculo.

3 ANÁLISE ONTOLÓGICO-GENÉTICA DO CÁLCULO

A reflexão realizada no capítulo anterior permite considerar o objeto do Cálculo como um objeto particular da matemática que, por sua vez, se caracteriza como um conhecimento humano que tem sua gênese histórica na atividade de transformação da realidade em realidade humanizada por meio da atividade de trabalho. Na busca por satisfazer suas necessidades e garantir a continuidade do ser social, torna-se imprescindível que o ser humano apreenda as legalidades do movimento de desenvolvimento da realidade. A matemática surge como uma forma específica de reflexo desse movimento, que tem seu lugar original na preparação dos fins do trabalho, mas que, assim como grande parte dos processos e objetos que se originam dessa atividade, desprende-se dele e ganha uma autonomia relativa. O Cálculo apresenta essa mesma natureza ao se objetivar como uma forma específica de reflexo matemático. Para uma análise multilateral de nossa centralidade de estudo, é imprescindível destacar os objetos e relações da realidade dos quais o conhecimento matemático se constitui como reflexo. Isso é importantíssimo para a compreensão do papel da matemática, em geral, e do Cálculo, em particular, na reprodução do ser social. Nessa direção, Davydov (1975, p. 72) explicita:

> O problema da natureza dos objetos da matemática, assim como das outras ciências, tem aspectos filosóficos específicos que devem ser levados em consideração quando se busca resolver o problema como um todo. O mais importante deles é o reconhecimento da existência objetiva, independente da posição do investigador, de muitas propriedades, qualidades e relações das coisas que estão sendo estudadas e que são apenas refletidas no sistema de conhecimentos científicos. Neste plano é bastante necessário perguntar o que a matemática reflete no mundo real, e quais propriedades das coisas ela distingue, designa e investiga, isso é, qual é a natureza do seu material (e este aspecto da questão não pode ser descartado com algum argumento sobre o alegado caráter "metafísico" dos problemas que aqui surgem). O que é estudado por qualquer ciência particular, incluindo a matemática, não são as coisas em si ou fora de si mesmas, não objetos com todas as suas propriedades e facetas intactas, mas certos aspectos, pontos, relações e conexões entre coisas reais. As estruturas estudadas pela matemática devem ser uma instância particular dessas relações.[40]

[40] "The problem of the nature of the subject of mathematics, as well as of the other sciences, has specific philosophical aspects which must be taken into consideration if the whole problem is to be resolved. The most important of these is the recognition of the objective existence, independent of the position of the investigator, of the very properties, qualities, and relationships of the things being studied which are only reflected in the system of scientific knowledge. On this plane it is quite accurate to ask what mathematics reflects in the real world, and what properties of things it distinguishes, designates, and investigates, that is, what the nature of its material is (and this aspect of the matter cannot be dismissed with any arguments about the allegedly 'metaphysical' character of the problems occurring here). What is studied by any particular science, including mathematics, is not things in and of themselves', not objects with all their properties and facets intact, but certain aspects, points, relationships, and connections among real things. The structures studied by mathematics might be a particular instance of such relationships".

Lukács (2012) tem uma compreensão similar, mas especifica quais são esses "aspectos, pontos, relações e conexões entre coisas reais" que a matemática estuda e reflete na forma de conhecimentos científicos. Para o filósofo húngaro,

> [...] tanto a geometria quanto a matemática constituem espelhamento, e não partes, nem "elementos" etc. da realidade física. Por espelharem momentos importantes e fundamentais, puras relações espaciais e puras relações quantitativas respectivamente, a geometria e a matemática são excelentes instrumentos para conhecer toda a realidade cuja essência consiste de relações espaciais ou quantitativas. Mas a despeito de todos esses brilhantes resultados não se deve esquecer a singela verdade de que espelhamentos desse tipo podem espelhar somente determinados momentos da realidade, enquanto a realidade existente em si possui uma infinidade de outros componentes (Lukács, 2012, p. 65-66).

Encontram-se, nas palavras do filósofo magiar, duas questões importantes. A primeira delas, que também está presente no supracitado excerto de Davydov (1975), refere-se ao fato de que a matemática – e a geometria, que entendemos ser uma parte da matemática – tem função e papel determinados no conjunto de conhecimento humano. Sua especificidade é encontrada na sua objetivação como "puras relações quantitativas" e "puras relações espaciais" da realidade da qual são reflexos. Nessa mesma direção, Aleksandrov (1973) defende que o objeto da geometria são "as formas espaciais e as relações dos corpos reais, eliminando delas as restantes propriedades, e considerando-as desde o ponto de vista puramente abstrato"[41] (Aleksandrov, 1991, p. 41). Por sua vez, o objeto da aritmética é "o sistema de números com suas relações mútuas e suas regras"[42] (Aleksandrov, 1973, p. 27) que, por decorrência, exige que o número seja tratado na relação com outros números para que suas propriedades sejam apropriadamente estudadas. Esse entendimento de Aleksandrov (1973, p. 34) o conduz a conceber que "a matemática tem como objeto não somente as relações quantitativas dadas, senão todas as possíveis relações quantitativas, e entre elas o infinito".[43]

Com base nessas considerações, põe-se em primeiro plano a concepção da matemática como um campo de conhecimento atinente ao estudo das *relações* mais gerais existentes na realidade (Prado Júnior, 1963; Lukács, 2012). A outra questão que vem à luz remete à natureza desse reflexo, ao possuir como propriedade a homogeneização de relações. Essas, sintomaticamente, possuem potencialidade arraigada nas formas de organização da produção e reprodução da realidade humanizada, de conduzir a uma inversão das polaridades

---

[41] "[…] las formas espaciales y las relaciones de los cuerpos reales, eliminando de ellos las restantes propiedades, y considerándolos desde un punto de vista puramente abstracto".
[42] "[…] el sistema de números con sus relaciones mutuas y sus reglas".
[43] "[…] la matemática tiene como objeto no sólo relaciones cuantitativas, y entre ellas el infinito."

ontológicas e dos objetos transitivos e intransitivos, constituintes de uma forma de ontologia que autonomiza os objetos matemáticos, depurados da sua base genética.

A particularidade e potencialidade dos conhecimentos matemáticos se consubstanciam na apropriação e reprodução da realidade por meios conceituais – que no quadro histórico tornam-se progressivamente homogêneos –, de forma distinta de outras ciências. Ao lidar com o papel da matemática nas pesquisas físicas, Lukács (2012, p. 49) defende que

> [...] o físico pode investigar criticamente, em cada caso, que propriedades quantitativas são expressas matematicamente e a que se referem concretamente. Desse modo, estará em condições de perceber e esclarecer, no interior da necessária homogeneidade metodológica do espelhamento matemático, as diferenças de objetividade qualitativa efetivamente presentes na realidade existente em si. Só desse modo o espelhamento matemático torna-se o veículo realmente adequado para uma reprodução ideal a mais correta possível da própria realidade: ele permite compreender, coisa de outra forma inatingível, o caráter e a relação quantitativos, estáticos e dinâmicos, dos objetos e processos, ao passo que, por tal mediação, as espécies de objetividade e as relações não quantitativas podem igualmente receber um espelhamento correto por tal mediação da matemática criticamente operada.

Esclarecida essa particularidade do conhecimento matemático, torna-se importante, para uma exposição mais aprofundada da essência de nosso objeto, trazer elementos teórico-conceituais da especificidade do Cálculo por meio de uma análise ontológico-genética. Nosso entendimento é de que essa forma de análise se aproxima da análise histórico-epistemológica (Radford, 1997). Desse modo, cumpre o papel de elaboração de um ponto de vista teórico que relacione o desenvolvimento histórico e moderno do conhecimento, mas com destaque para a natureza e função do conhecimento nos contextos históricos singulares da investigação.

De tal maneira, é importante destacar que, segundo Radford (1997), aquilo que encontramos e visualizamos no passado é mediado por nossos conceitos social e culturalmente constituídos. Também pela concepção, acerca do objeto, daqueles que escrevem as historiografias – no caso do acesso a essas ideias ser realizado por meio de bibliografias secundárias. Sendo assim, "nós temos que fazer uma escolha epistemológica a respeito daquilo que se vê no passado"[44] (Radford, 1997, p. 27). A nossa escolha e direcionamento para "o que olhar" foi estabelecida pelo objeto em seu desenvolvimento atual com o objetivo de apanhar as suas legalidades históricas em seu processo de constituição e transformação. Essa postura se alicerça nos fundamentos filosóficos da ontologia materialista-dialética que possuem como representativas as palavras de Marx (2011, p. 58):

[44] "[…] we make the fortunate epistemological choice concerning what to see in the past".

> A sociedade burguesa é a mais desenvolvida e diversificada organização histórica da produção. Por essa razão, as categorias que expressam suas relações e a compreensão de sua estrutura permitem simultaneamente compreender a organização e as relações de produção de todas as formas de sociedade desaparecidas, com cujos escombros e elementos edificou-se, parte dos quais ainda carrega consigo como resíduos não superados, parte [que] nela se desenvolvem de meros indícios em significações plenas etc. A anatomia do homem é uma chave para a anatomia do macaco. Por outro lado, os indícios de formas superiores nas espécies animais inferiores só podem ser compreendidos quando a própria forma superior já é conhecida. Do mesmo modo, a economia burguesa fornece a chave da economia antiga etc.

Dessa passagem relativa a aspectos ontológicos e metodológicos-investigativos, não há nada que autorize qualquer inferência ao determinismo, isto é, não são encontradas alusões a qualquer linearidade conceitual do desenvolvimento humano. Assim também não é referenciado qualquer caminho retilíneo e necessário do passado em direção ao nosso atual estágio de desenvolvimento, conforme será mais bem desenvolvido no quarto capítulo do presente trabalho. O que é posto em relevo é a irreversibilidade processual e a infinidade intensiva dos componentes da realidade que possuem possibilidade de vir a ser operantes no âmbito do ser social, o que implica que o conhecimento acerca do seu ser, como síntese de processos causais, só poder ser corretamente compreendido *post festum* (Lukács, 2010). Ou seja, não se pode deduzir de uma forma de ser ontológica fundante as características próprias do fundado antes dos encadeamentos causais conduzirem a formação dessa nova forma de ser. O salto ontológico só se constitui como tal porque nega a forma de ser existente e rearticula suas determinações, de modo que se diferencia substancialmente do fundante. Entretanto, o objetivo da análise ontológico-genética é encontrar no fundante os elementos e condições que, no autodesenvolvimento da realidade, conduziram a seu estágio atual da maneira como ocorreu, e não de forma distinta, por meio da apropriação das conexões dinâmico-causais necessárias que, em conjunto com outras relações casuais, levaram a objetivar o seu nível atual. Isso só é possível ao se considerar as determinações do fundado, suas determinações essenciais e categorias simples que somente se tornam centrais em uma forma de ser mais complexa.

Com base nesses preceitos teórico-metodológicos, a análise será realizada por um movimento que combina uma reflexão de análise diacrônica, referente ao estudo da gênese e desenvolvimento das categorias, com uma análise sincrônica, relativa à estrutura e função no estado atual (Netto, 2011). Esse procedimento emerge da insuficiência de análise da gênese histórica de uma categoria ou processo na explicação da estrutura e função que o objeto possui na atualidade (Netto, 2011). Desse modo, na sequência do capítulo, ocupar-nos-emos, na parte inicial, dos aspectos ontológicos gerais do conhecimento matemático seguidos de uma análise

histórico-epistemológica, guiada pelas relações entre fluência/movimento e a permanência e multiplicidade/unidade do desenvolvimento de noções e conceitos que constituem o objeto do Cálculo. Esse movimento analítico-expositivo culminará com uma abordagem da estrutura e função desse objeto, na forma que atualmente é prevalente, destacando suas características ontológicas e conceituais.

3.1 A GÊNESE DO SABER E DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO

A matemática, como forma teórica de reflexo da realidade, tem como objeto a expressão de relacionamentos dessa realidade, com foco não em quaisquer relações, mas naquelas puras relações espaciais e quantitativas (Lukács, 2012). Esse processo, historicamente, surge como uma tentativa de, no trabalho, em especial no momento de investigação dos meios, apropriar-se da realidade para sua consequente e efetiva transformação. No movimento de reprodução do ser social, para que o trabalho coletivo seja mais eficaz, torna-se imprescindível a comunicação das propriedades e nexos causais da realidade apropriada. Ou seja, do distanciamento entre o sujeito e o objeto, bem como da necessidade de execução do processo, oriunda do trabalho singular, a renovação das capacidades executivas e possibilidades em âmbito subjetivo apreendidas em nível da sociabilidade propulsionam o surgimento da comunicação, mais especificamente da linguagem. Para Engels (2013, p. 17),

> [...] o desenvolvimento do trabalho, ao multiplicar os casos de ajuda mútua e de atividade conjunta, e ao mostrar assim as vantagens dessa atividade conjunta para cada indivíduo, tinha de contribuir forçosamente para agrupar ainda mais os membros da sociedade. Em resumo, os homens em formação chegaram a um ponto em que tiveram a necessidade de dizer algo uns aos outros.

A linguagem, como forma de comunicação entre os seres humanos, distingue-se das comunicações dos animais simplesmente, pois, o ser humano fala sempre sobre algo determinado. Conforme Lukács (2013), essa especificidade do referente é extraída da existência imediata em duplo sentido: 1) na comunicação, um objeto tem extraído de si algo de sua existência singular que passa a ser uma referência a ele, mas que possui existência independente; 2) o objetivo da comunicação é evidenciar o respectivo objeto como concreto, específico. Assim, são separados o representado, no signo linguístico, do objeto que representa, bem como do sujeito que comunica a ideia.

> Não se deve esquecer de que a mais simples, a mais cotidiana das palavras sempre expressa a universalidade do objeto, o gênero, a espécie, não o exemplar singular, de que, no plano da linguagem, é pura e simplesmente impossível encontrar uma palavra que designe inequivocamente a singularidade de qualquer objeto (Lukács, 2013, p. 217).

Vigotski (2001, p. 9) segue nessa direção quando afirma que a "palavra nunca se refere a um objeto isolado, mas a todo um grupo ou classe de objetos. Por essa razão, cada palavra é uma generalização latente, toda palavra já generaliza e, em termos psicológicos, é antes de tudo uma generalização". Pela linguagem é possível, portanto, distanciamento intelectual diante dos objetos e sua comunicação, o que possibilita, pela primeira vez, torná-los comuns e fixar as apreensões da realidade como patrimônio compartilhado da sociedade.

Lukács (2013) argumenta que a linguagem, em um processo de desenvolvimento simultâneo ao do trabalho – divisão do trabalho e da cooperação –, é impulsionada a se complexificar. Logo, torna-se cada vez mais diferenciada e flexível, além de possibilitar que as novas relações e objetos – com que os seres humanos se deparam em suas vidas – possam ser compartilhados por meio da comunicação. Quanto mais diferenciada torna-se a realidade social, isto é, quanto maior é a tendência do tornar-se-sempre-mais-social do ser humano, maior é a pressão exercida pelos demais complexos sobre o complexo da linguagem, o que o impulsiona a um enriquecimento e a um amplo processo de diferenciação. Em outras palavras, devido ao caráter progressivo do desenvolvimento do ser humano, e, como consequência, da criação do novo – lembremo-nos que a criação do novo é o traço distintivo da esfera do ser social em relação às demais esferas do ser –, amplifica-se a necessidade de conceituação e expressão desse novo como condição imprescindível da reprodução do ser social. A linguagem e, portanto, a conceituação da realidade, complexificam-se enlaçadas à ampliação e à diferenciação intensiva e extensiva da atividade humana. Esta pressupõe a discriminação e identificação de objetos, processos e relações da realidade para a correta realização de suas finalidades. Tal processo ocorre pela identificação da qualidade[45] do que está sendo analisado.

Para a realização efetiva do comunicar e agir, pressupõe-se, conforme grifado anteriormente, uma distinção dos traços característicos dos objetos e fenômenos da realidade, da apropriação de sua qualidade. Contudo, como a realidade é multifacetada e intensivamente infinita, a distinção e identificação pela qualidade não é suficiente. Nesse movimento, surge, estaqueado nas propriedades ontológicas do real, o relacionamento da qualidade consigo

[45] Por qualidade entendemos aquilo que compõe o "conjunto das propriedades que indicam o que uma coisa dada representa e o que ela é" (Cheptulin, 2004, p. 203), refletindo a similaridade e diferença em relação ao restante.

mesma, isto é, a distinção e identificação quantitativa. Para Prado Júnior (1963, p. 198), a quantidade "destina-se a realizar discriminação no *interior* das qualidades". Isso permite que o ser humano discrimine e identifique a realidade de forma mais precisa, qualificando a própria qualidade. Nessa direção, para Caraça (2003, p. 108), aquelas qualidades "*a respeito das quais se podem fazer juízos de mais que, menos que, maior que, menor que, diremos que admitem variação segundo a quantidade.* A quantidade aparece-nos, assim, como um atributo da qualidade".

Nesse contexto, os objetos e fenômenos similares passam a ser apreendidos não mais como um todo caótico, como singularidades soltas, mas inicia-se um processo de evidenciação da distinção entre propriedades similares de objetos e fenômenos semelhantes e, também, distintos. O ser humano, portanto, ao invés de separar qualidades próprias, coloca-as sob a mesma rubrica, que as distingue no seu próprio interior sob outro critério. Esse processo permite que se consiga estabelecer relações entre a multiplicidade e unidade do existente, assim como de sua variabilidade.

O processo de complexificação das relações quantitativas e qualitativas da realidade não apaga o fato, mais do que sintomático, de que quantidade e qualidade são categorias indissociáveis, isto é, categorias reflexivas. Enquanto tal, só podem ser separadas no processo abstrativo que, no plano histórico, antecede sua apreensão como unidade dialética. Segundo Lukács (2012, p. 273):

> Quantidade e qualidade, em sua essência ontológica, são típicas determinações de reflexão. Justamente nesse ponto tal constatação ontológica pode ser corroborada pelos fatos relativos a estágios primitivos de desenvolvimento. Há muito sabemos, graças à etnografia, que bem antes que se começasse a contar, a apreender quantitativamente os objetos, os seres humanos davam conta, na prática, com meios puramente qualitativos, sobre a base de percepções qualitativas, de complexos de fatos que somos hoje habituados a captar em termos quantitativos. Os pastores, por exemplo, não contavam os seus rebanhos, mas conheciam todos os animais individualmente, de modo que conseguiam perceber sua perda de imediato e com extrema precisão, sem necessidade de contá-los. Os experimentos de Pavlov[46] mostram que os cães são capazes de reagir exatamente a 30, 60, 120 etc. batidas do metrônomo, entendidas como qualidades diversas, sendo que não há a menor possibilidade de se cogitar aqui a capacidade de contar. Nesse sentido, podemos dizer que o nível da compreensão das determinações de reflexão como algo separado não é apenas um estágio que precede sua unificação dialética por meio da razão, mas constitui também um progresso da civilização com relação à percepção primitiva imediatamente unitária.

[46] Ivan Petrovich Pavlov (1849-1936) – fisiologista russo bastante conhecido por seu trabalho acerca do papel dos reflexos condicionados no comportamento.

A unificação dialética dessas categorias, estabelecida pela razão, é antecedida, no plano histórico, de sua separação e do enriquecimento das distinções e identificações qualitativas e quantitativas. No caso da quantidade, para uma diferenciação e gradação das qualidades aferidas, tornou-se imprescindível um critério mediador que, no contexto requerido, possuísse a propriedade de realizar comparações mais gerais. Esse é, por sua vez, o critério da *grandeza*, o conceito inicial originário da conceituação matemática (Prado Júnior, 1963).

De acordo com Prado Júnior (1963), a noção de grandeza tem um caminho que inicia pela representação da intensidade de uma qualidade por meio de uma noção intuitiva, com a distinção das suas direções (mais, menos; maior, menor). Em um segundo momento, há um movimento de caracterização conceitual das diferenças de intensidade, de modo que, em cada caso particular, seja possível confrontar as diferentes intuições sensíveis. "Nessa altura, a noção de *grandeza* começa a se configurar mais nitidamente em consequência daquele confronto e relacionamento de intuições em que a *grandeza* se apresenta como elemento comum e de interligação do conjunto" (Prado Júnior, 1963, p. 200-201). Em um terceiro momento, surge a conceituação quantitativa que origina uma escala de intensidade que, hodiernamente, é o padrão empregado: um conjunto ordenado de números. Ao se considerar sob o ponto de vista da totalidade, cada número, na análise de uma determinada qualidade, representa, na escala de intensidade, um grau específico de uma certa qualidade. Em outras palavras, os números, dispostos em sucessão, estão ontologicamente ligados à representação de quantidades de uma determinada qualidade segundo sua intensidade (maior ou menor), o que gera, nesse contexto, a grandeza numérica.

É importante destacar que tal processo não é oriundo da mera contemplação da realidade, mas da atividade do ser humano, no caso específico, de sua necessidade de controle de quantidades (Panossian, 2014). Esse controle estabelece uma relação entre a escala de números e a intensidade (maior ou menor) de um grupo de objetos ou de uma quantidade determinada de certa qualidade (peso, altura, temperatura etc.). É nesse sentido, portanto, que afirmamos: a matemática reflete e é constituída por relações.

Esse ponto de partida ontológico possui implicações didático-pedagógicas, conforme é possível constatar em Coles (2017)[47] e nos trabalhos de Davídov (1988). O psicólogo e didata soviético (1988), ao adotar por base uma *ontologia relacional* (Coles, 2021),

[47] No referido trabalho, Coles (2017) defende que não se desdobra, necessariamente, da concepção dos conceitos matemáticos como relações, uma defesa de um ponto de vista ontológico sobre a matemática. Sua argumentação segue a linha de que a abordagem relacional, comparada àquela considerada objetal, é mais benéfica para o desenvolvimento de uma forma de pensamento não empírica.

propõe uma forma de organização do ensino do conceito de números reais fundamentada na relação entre grandezas. Para tanto, explora-a sob o prisma das relações de igualdade e desigualdade direta que, em um segundo momento, passam a ser mediadas por uma unidade de medida intermediária, isto é, pela atribuição do papel de unidade de medida para uma das grandezas. O objetivo é que o estudante se aproprie do procedimento geral de comparação mediada das grandezas apoiado em múltiplas comparações, em que o conceito de número passa a ser a representação de um caso particular das relações entre grandezas em geral. O número, portanto, é apropriado como expressão do processo de comparação entre duas grandezas que, em momento seguinte, necessita da adoção de uma unidade de medida que se transforma em elemento para a construção do sistema dos números, o que explicita sua natureza relacional oriunda de uma qualificação da qualidade.

Entretanto, historicamente, ocorre um processo de entificação que escamoteia a produção e a natureza explicitamente relacional da matemática. Sfard (1991), por exemplo, realiza uma leitura da história do desenvolvimento dos conceitos matemáticos que identifica uma tendência de surgimento dos conceitos primeiramente como processo que tende a se transformar em objeto passível de ser elemento para operações, o que leva ao surgimento de outros processos conceituais em nível mais alto. Independente da concordância ou não dessa leitura, o que se explicita é a necessidade do método ontológico-genético para descortinar o caráter relacional do conhecimento e, de tal maneira, auxiliar na identificação da relação essencial dos conceitos matemáticos em geral. Na análise psicológica, Vigotski (2021a) chamou-nos a atenção para fenômeno similar no tratamento dos *comportamentos fossilizados*, isto é, aqueles comportamentos que, devido ao seu longo processo de repetição e aperfeiçoamento, passam a ser automáticos e, por consequência, ocultam sua forma inicial. Para contornar esse problema, o autor defende que o pesquisador converta o fóssil em processo – no nosso caso, converta os objetos em relações – pela análise do seu desdobramento dinâmico, pela observação da gênese. Para Vigotski (2021a, p. 135-136),

> [...] o que nos interessa não é o resultado acabado nem a soma ou o produto do desenvolvimento, mas o verdadeiro processo de gênese ou estabelecimento da forma superior captado em seu aspecto dinâmico. Por isso, o pesquisador deve frequentemente transformar o caráter automático, mecânico e fossilizado da forma superior e voltar para seu desenvolvimento histórico, retornar experimentalmente à forma inicial que nos interessa, a fim de tornar possível traçar o processo de sua gênese.

Nesse cenário, os pressupostos ontológicos do materialismo histórico e dialético permitem-nos afirmar que a entificação é um elemento processual ligado ao contexto

socioglobal de determinados momentos históricos – basta lembrar da filosofia da matemática de Platão. Sob esse ponto de vista, a geometria grega é outro caso exemplar, porquanto os gregos pensavam lidar com figuras e objetos dados, postura constatada nas construções euclidianas em que as figuras, em sua integralidade, guiavam o seu próprio processo construtivo. Entretanto, uma perspectiva relacional ante a atividade matemática mostra que as figuras geométricas não possuem individualidade própria em relação à forma global ou em relação às suas subfiguras. "Toda figura, ao mesmo tempo que determina ou condiciona as partes que a constituem, é determinada por essas partes; e essas por seu turno se determinam mútua e reciprocamente. [...] o *todo* e as *partes* existem em simbiose integral e completa, e subsistem apenas no conjunto" (Prado Júnior, 1963, p. 212). Cita-se o exemplo do círculo, que não existe sem suas partes, assim como suas partes não fazem sentido sem a figura global. Ou seja, o raio só é raio, assim como os demais elementos na relação com o ponto central e com a infinidade dos demais pontos equidistantes que, em conjunto, formam a circunferência e constituem o círculo.

As determinações da matemática surgem no contexto do trabalho como uma forma de conhecimento desantropomorfizador e adquirem uma relativa independência das vontades dos seres humanos. Entretanto, a própria impossibilidade da apropriação das legalidades da realidade em sua totalidade – decorrente de sua infinidade extensiva e intensiva –, muitas vezes, propicia um processo inverso de antropomorfização das relações expressas pela matemática, o que pode se tornar guia das vidas dos seres humanos. Não é por acaso que os pitagóricos e a astrologia são guiados pelos números. Interessa destacar que na astrologia o produto do seu conhecimento e as expressões matemáticas de suas conexões, em essência conhecimentos desantropomorfizantes, convertem-se em expressões antropomorfizadas da realidade na medida em que enlaçam, de modo arbitrário, o destino dos seres humanos singulares e o estado do mundo estelar em geral (Lukács, 2013). O exemplo põe em relevo a influência que exercem as relações sociais sobre as concepções de mundo e de ciência. Nesse sentido, a cotidianidade, como esfera da reprodução direta dos indivíduos singulares, inter-relaciona-se com as demais esferas da vida social, estabelecendo-se influências recíprocas. A realidade refletida na vida cotidiana e na ciência – esfera que mais nos interessa na presente tese, apesar da impossibilidade de se erguer qualquer linha divisória e definitória estática entre essas esferas da vida humana – apresenta diferenças qualitativas que distinguem a forma e o grau de mediação em que essa reflexão se realiza (Lukács, 2023).

Não obstante a qualidade decorrente do grau de complexidade das objetivações oriundas da esfera da ciência, a prioridade ontológica é da vida cotidiana que, em geral, aponta

as problemáticas emergentes como necessidades a serem superadas, pois é do seu solo que brotam as possibilidades de sua suspensão temporária (Lukács, 2023). É nessa esfera da vida que o ser humano enfrenta diferentes problemas que – a partir de um determinado período no qual o excedente de produção, gerado pelo trabalho, possa ser destinado à sustentação de alguns indivíduos que exercem atividades não vinculadas diretamente a ele – exigem uma formulação que apreenda os nexos causais de maneira multilateral, ou seja, exige uma abordagem que desvele e se aproprie do objeto em suas múltiplas determinações. Entre essas problemáticas, emergem algumas enfrentadas pelo ser humano no processo de trabalho: por qual razão algumas relações, fenômenos e fatos ocorrem sempre do mesmo modo e outras sempre se alteram? Qual a relação entre as partes e a totalidade, entre os elementos que compõem um objeto ou fenômeno e eles próprios? Desses questionamentos, percebe-se a relação entre fluência e permanência e entre a multiplicidade na unidade como expressões da análise matemática do movimento. Essas serão os fios condutores da continuidade de nossa análise ontológico-genética do objeto do Cálculo, porquanto em torno deles o pensamento dos seres humanos e os conceitos por nós analisados, derivada e integral, têm orbitado.

Uma questão relativa à divisão da exposição precisa ser esclarecida neste ponto, em especial ao que se refere à periodização realizada nas seções seguintes. Ríbnikov (1978, p. 16) afirma:

> Na história das matemáticas podem se distinguir períodos isolados, diferenciados um do outro por uma série de particularidades características. A periodização é necessária para poder orientar-se com maior facilidade em toda a riqueza de fatos que apresenta o desenvolvimento histórico das matemáticas. Existem muitas tentativas de periodização da história das matemáticas. A periodização se efetua por países, por formações socioeconômicas, por descobrimentos relevantes, os quais determinaram até certo ponto o caráter do desenvolvimento das matemáticas, etc. As discussões sobre as periodizações são intermináveis. No entanto, segundo nosso critério, o papel das periodizações é puramente auxiliar e se determina pelas necessidades do objetivo fundamental: o descobrimento das leis do desenvolvimento objetivo das matemáticas.[48]

Tendemos a concordar com a importância da periodização como forma auxiliar de exposição da busca pelas leis do desenvolvimento objetivo da matemática, destacada por

[48] "En la historia de las matemáticas pueden distinguirse períodos aislados, diferenciados uno del otro por una serie de particularidades características. La periodización es necesaria para poder orientarse con mayor facilidad en toda la riqueza de hechos que presenta el desarrollo histórico de las matemáticas. Existen muchos intentos de periodización de la historia de las matemáticas. La periodización se efectúa por países, por formaciones socioeconómicas, por descubrimientos relevantes, los cuales determinaron hasta cierto punto el carácter del desarrollo de las matemáticas, etc. Las discusiones sobre las periodizaciones son interminables. Sin embargo, según nuestro criterio, el papel de las periodizaciones es puramente auxiliar y se determina por las necesidades del objetivo fundamental: el descubrimiento de las leyes del desarrollo objetivo de las matemáticas".

Ríbnikov (1987). No entanto, não seguiremos a periodização sugerida pelo autor[49]. Em primeiro lugar, porque não temos como objetivo a análise e exposição exaustiva da história do Cálculo; em segundo lugar, devido ao fato de que nosso objeto, apesar de sua intricada relação com o desenvolvimento da matemática em geral, possui especificidades.

O estaqueamento teórico que realizamos nesta seção permite que nos debrucemos, nas próximas, em eventos históricos singulares que representam pontos importantes de emergência de ideias que estão nas bases do corpus teórico do Cálculo. Por consequência, devido ao nosso foco nos conceitos de derivada e integral, é possível notar certas omissões e aligeiramentos na exposição de alguns aspectos. Notar-se-á que o foco estará voltado, majoritariamente, para o desenvolvimento de nosso objeto na Europa Ocidental, pois é a base para a sua compreensão em seu estado atual.[50]

3.2 O DEBATE GREGO SOBRE A RELAÇÃO ENTRE FLUÊNCIA E PERMANÊNCIA E UNIDADE E MULTIPLICIDADE

Grande parte das civilizações antigas tinham em sua posse alguma forma de conhecimento matemático, mas, em geral, vinculavam-se a atividades práticas imediatas (Aleksandrov, 1973). No que hoje denominamos como Grécia Antiga, criaram-se bases para que esses conhecimentos ganhassem nova forma e conteúdo, que se diferenciavam da matemática praticada em diferentes locais e contextos culturais naquela época. Uma das particularidades da matemática, na referida sociedade, é o seu caráter sistemático e a apresentação de uma nova forma de rigor. Raízes dessa qualidade podem ser encontradas no contexto em que se difundiram e se desenvolveram esses conhecimentos na Grécia Antiga. Bicudo (1998) considera que os conhecimentos matemáticos, ao serem levados de outras civilizações à Grécia, encontraram um solo fértil para o desenvolvimento de uma forma livre de ciência, não mais relacionada diretamente com as atividades práticas imediatas. Isso, segundo o autor, decorre da não ascendência de uma classe sacerdotal fortemente estabelecida

---

[49] Ríbnikov (1987) utiliza-se da seguinte periodização elaborada por Kolmogórov (2006): 1) *nascimento das matemáticas*; 2) *o período das matemáticas elementares*; 3) *período de formação das matemáticas das grandezas variáveis*; 4) *período das matemáticas contemporâneas*. Periodização similar pode ser encontrada em Aleksandrov (1973). A utilização desse modelo pode ser entendida como manifestação de uma possível hegemonia conquistada pela elaboração de Kolmogórov (2006) entre os pesquisadores soviéticos que tinham como objeto de pesquisa a história da matemática (Scriba; Dauben, 2002). Basta-nos, neste ponto, anunciar essa periodização, uma vez que no quinto capítulo ela será evocada quando analisaremos o modo como Aleksandrov (1973) a utilizará como parâmetro para o estabelecimento de uma analogia entre filogênese e ontogênese.

[50] Isso não significa negar a existência de expressões de elementos dos conceitos aqui abordados em outros tempos e espaços. Para exemplos, basta consultar Smith (1958) e Bediente (1992a, 1992b).

e que pudesse centralizar e monopolizar o conhecimento. Portanto, emergiu uma necessidade de convencimento dos demais acerca da verdade de afirmações gerais sobre o mundo, de modo a influenciar as teleologias e, por consequência, as tomadas de decisões no âmbito social. Tal necessidade tornava-se mais premente à medida que o senso comum era contrariado pelo pensamento científico e filosófico. Desse modo, a justificação dos resultados entre eles aqueles provenientes da atividade que lidava com objetos matemáticos torna-se um dos objetivos perseguidos pelos filósofos. O conhecer e o justificar se unem, assim como a busca por responder ao "*como*" e ao "*porquê*" de determinado fenômeno ocorrer de uma maneira e não de outra.

As bases para o florescimento dessa postura com a realidade encontram-se nas condições gerais da sociedade grega daquela época. Conforme Caraça (2003), o despontar da ciência no mundo ocidental parece ter encontrado pela primeira vez, entre os séculos VII a.E.C.[51] e VI a.E.C., condições para seu surgimento no mundo grego, especificamente nas suas colônias do litoral da Ásia Menor. Tais circunstâncias se relacionam ao comércio praticado nessa região, em especial ao de vinho, azeite e produtos têxteis, que impulsionaram acentuadamente o desenvolvimento econômico. Segundo Struik (1989), nessas cidades comerciais havia uma disputa entre os antigos senhores feudais – proprietários de terras – e a classe dos mercadores independentes. No período anteriormente destacado, os mercadores ganham forte influência e confrontam os artesãos e pequenos comerciantes, o que resulta na ascensão da *polis* – cidade-estado – grega como nova forma de organização social.

O desenvolvimento dessa inédita organização social engendra formas também originais de compreensão da realidade, pois a visão mítica não atendia, de modo seguro, às novas necessidades emergentes. A visão estática da divindade, bem como do mundo, começava a entrar em contradição com uma concepção considerada mais racional, que tinha o intento de justificar o universo não mais pela vontade ou vínculo com as divindades, mas fundamentada nos elementos da própria realidade. Não por acaso, surgem, nesse período, as contribuições de Tales de Mileto (625/4-558 a.E.C.)[52], seguido por diversos outros filósofos que buscavam uma explicação do mundo sem recorrer às concepções míticas. Ao compartilhar do mesmo embasamento metodológico, a matemática grega começa a ser norteada por um objetivo

[51] Utilizamos a abreviação a.E.C. (antes da Era Comum) ao período que equivale, no calendário cristão, aos anos *antes do nascimento de Cristo*. Quando nos referirmos à *Era Comum*, que equivale, no calendário cristão, ao período *depois do nascimento de Cristo*, utilizaremos apenas os números romanos para nos referirmos ao século em questão ou grifaremos a data específica com algarismos hindu-arábicos.

[52] Os dados biográficos dos filósofos pré-socráticos têm como base o livro *Os Pensadores: Pré-socráticos* (Os Pensadores, 1996).

principal: “compreender o lugar do homem no universo de acordo com um esquema racional. A matemática ajudava a ordenar o caos, a ordenar as ideias em sequências lógicas, a encontrar princípios fundamentais” (Struik, 1989, p. 73).

Nesse contexto, os gregos buscavam um princípio único que pudesse explicar a relação entre o efêmero e o eterno, percebida cotidianamente na repetição constante de determinados processos da realidade, concomitante a outros relativamente caóticos, isto é, em contínua transformação. Esse movimento de explicação da fluência e da permanência se vinculava à questão da diversidade e pluralidade do aparente (Caraça, 2003). A atmosfera filosófica de procura pela natureza da dinâmica de desenvolvimento da realidade, em especial pelo confronto de uma concepção de realidade fluida com outra estática, é o ambiente em que os paradoxos[53] de Zenão sobre o movimento são elaborados.

Zenão (504/1-? a.E.C.) contrapunha-se àqueles que consideram o movimento como elemento ontológico da realidade, sendo Heráclito (540-470 a.E.C.) o mais proeminente representante dessa corrente. Este filósofo pré-socrático concebia a realidade como um processo constante de devir, ou seja, um permanente processo de transformação, de vir-a-ser. Em meio a esses pressupostos, para Heráclito, a principal propriedade que a razão deve considerar para uma explicação racional da realidade é a constante mudança. Ou seja, os elementos da realidade estão em um contínuo processo de transformação de uns nos outros. Nesse ponto é que invoca uma de suas conhecidas máximas: “tu não podes descer duas vezes ao mesmo rio, porque novas águas correm sobre ti” (Caraça, 2003, p. 65). Lukács (2012) chama-nos a atenção de que, nessa máxima heraclitiana, há um elemento não destacado pelo filósofo pré-socrático que pode conduzir a paradoxos impossíveis de serem solucionados na imediaticidade, a saber: o elemento que se mantém constante no movimento de transformação. Essa concepção

> [...] conduz inevitavelmente a paradoxos fecundos, mas insolúveis em sua imediatidade. Com efeito, também a processualidade da realidade é contraditória, tem caráter dialético e, por conseguinte, seu modo de manifestação objetivamente condicionado é a desigualdade. Decerto é verdade que ninguém pode entrar duas vezes no mesmo rio, mas também é verdade que o rio, precisamente em sua mudança ininterrupta, em sua ininterrupta anulação da identidade originária, reproduz ininterruptamente essa mesma identidade (Lukács, 2012, p. 236).

[53] Segundo Chauí (1994), os argumentos de Zenão não pretendiam a demonstração da verdade de uma teoria, mas explicitar os absurdos de uma outra teoria. Baseavam-se no que os gregos chamavam de *aporia*, isto é, uma forma de argumentação para tornar explícitas certas dificuldades que impossibilitam objetivamente a obtenção de uma resposta em dado momento concreto.

Tendo em mente as palavras de Lukács (2012) – referentes à permanência na mudança, isto é, à continuidade na transformação – é que interpretamos o conceito de *fluência* presente em Caraça (2003). Consideramos que essa é uma especificação necessária, uma vez que a fluência é um elemento universal da realidade, pois, com base em nossos pressupostos teóricos, é impossível advogar a existência de algo que possua uma essência a-histórica. No processo do conhecimento, a identificação de momentos e elementos de continuidade, na fluência, é imprescindível para a apropriação da realidade. Essa, por sua vez, ocorre no movimento e relação entre o objeto e a totalidade, no entendimento desse objeto como processo resultante de um conjunto de elementos inter-relacionados interna e externamente, ou seja, de uma autêntica relação entre os elementos e a totalidade. Ao analisar o mesmo exemplo, Lukács (2010, p. 134) afirma:

> [...] vale dizer que na declaração dos discípulos de Heráclito, segundo a qual não se pode entrar nem uma só vez no mesmo rio, mostra quão pouco a prioridade ontológica do processo em si, que permanece abstrata (e por isso isolada), está em condições de propor uma alternativa que supere verdadeiramente, isto é, realmente no plano ontológico, a "coisidade" estática. Isso só seria possível se o momento de ultrapassagem, aqui só aparente, para além da estática da coisidade, fosse uma verdadeira elevação, se por isso também fosse capaz de mostrar que a coisidade mesma precisa superar-se, de modo objetivo-ontológico, numa processualidade. Mas aqui ainda não é possível falar disso. O rio como objetividade processual, em que os elementos que parecem coisas se tornam componentes do processo global (da objetividade proclamada como autêntica), ainda está totalmente ausente aqui. Com efeito, nunca podemos tocar, no mesmo rio, mais do que uma vez a mesma gota-d'água (pensada como coisa), e esse paradoxo – aparentemente – também se mostra no ato irrepetível. Porém, isso não incide minimamente no caráter sintético, criador de formas objetivas, da processualidade.

Essa problemática é enfrentada por Heráclito no quadro teórico-conceitual de sua época. Segundo Lessa (2016c), a superação dela é engenhosa e se objetiva na articulação entre a permanência e a mudança, quando o filósofo pré-socrático afirma que existe um ciclo eterno de transformação: o fogo se transforma em água que, em seguida, torna-se terra, que volta a ser água e, ao evaporar, converte-se novamente em fogo. Obviamente o filósofo, apesar de não capturar corretamente a questão da essência na relação de continuidade na mudança, inaugura uma tradição no movimento da filosofia e da ciência que perdura quase dois mil anos. Isso se refere à sua afirmação: "o que é eterno permanece eterno e continua determinante do efêmero; este, por seu lado, não possui a potência necessária para retroagir sobre o essencial. A historicidade pode englobar, apenas e tão somente, o que é fenomênico, jamais o essencial" (Lessa, 2016c, p. 319-320).

Contraposta a essa teoria, apresenta-se aquela desenvolvida por Parmênides (530-460 a.E.C.), em que defende que *o ser é*, enquanto *o não ser não é*, sendo impossível haver uma alternativa entre as duas assertivas. A afirmação, aparentemente despretensiosa, tem consequências bastante importantes, uma vez que

> [...] como a transformação implica sempre em se negar um momento presente para afirmar um momento futuro, ela implicaria sempre em uma articulação entre o que existe (o ser) e o que não existe mas, ainda, vai existir (o não ser). Como o não ser não existe, então, concluem os seguidores de Parmênides, esta articulação não é possível – e, portanto, a história, a transformação, é uma mera ilusão trazida pelos sentidos. Não há história, o "velho" não se transforma em novo: o que existe é eternamente, sem qualquer mudança (Lessa, 2016c, p. 319).

Dentro desse quadro teórico é que são elaborados os quatro famosos paradoxos de Zenão: *Dicotomia*; *Aquiles e a tartaruga; A flecha; O Estádio*. Utilizaremos as palavras de Aristóteles (*apud* Dantzig, 1970, p. 114-115) para expô-los em forma de argumentos:

> *Dicotomia: "*O primeiro é sóbre a não-existência de movimento, baseado em que o que se move deve sempre alcançar o ponto médio antes do ponto final."
> *Aquiles e a tartaruga*: "O segundo é chamado de Aquiles. Consiste em que o mais lento nunca será ultrapassado em sua corrida pelo mais rápido, pois o perseguidor deverá sempre alcançar primeiramente o ponto de que o perseguidor acabou de sair, de modo que o mais lento deve estar sempre mais ou menos adiantado."
> *A flecha*: "Se tudo, quando se comporta de maneira uniforme, está continuamente movendo-se ou em repouso, mas o que se move está sempre no instante atual, então a flecha em movimento não se move."
> *O Estádio*: "O quarto refere-se a duas fileiras, cada uma delas composta de um número igual de corpos de igual tamanho, passando um pelo outro numa corrida, à medida que se dirigem com velocidades iguais em direções opostas; a primeira fileira ocupa inicialmente o espaço entre a meta e o ponto médio da corrida e a outra entre o ponto médio e o ponto inicial. Isso, acha êle, implica a conclusão de que metade de um tempo dado é igual ao dôbro dêsse tempo."

É importante sublinhar que a motivação e a finalidade da elaboração dos argumentos têm sido interpretadas de diversas maneiras. Conforme Dantzig (1970), há basicamente duas formas de interpretação. Por um lado, estão aqueles que possuem inclinações metafísicas e compreendem que os paradoxos são uma refutação à realidade do movimento. Por outro, estão os defensores da afirmação de que eles mostram as contradições flagrantes entre noções de espaço, tempo e continuidade, ou seja, remetem-se mais diretamente ao modo pelo qual organizamos e interpretamos o movimento de forma racional. Dessa segunda interpretação, desdobra-se a impossibilidade do entendimento das noções envolvidas – espaço, tempo e continuidade – como "co-extensivos aos conceitos matemáticos de mesmo nome" (Dantzig, 1970, p. 115). Para o objetivo do presente trabalho, mais importante do que a

intepretação da motivação do filósofo grego, é a análise dos aspectos teórico-conceituais, bem como de seus desdobramentos para a discussão acerca do conhecimento.

Em *Aquiles e a tartaruga* e *Dicotomia,* o argumento é que conceber a divisão do tempo e do espaço implica que o movimento é impossível. Por sua vez, em *A flecha* e em *O Estádio,* Zenão se contrapõe à abordagem do tempo e do espaço como indivisíveis (Baron, 1985a). Analisaremos apenas *Aquiles e a tartaruga* e a *A flecha,* pois os demais são abordagens distintas para as mesmas problemáticas inseridas nesses dois argumentos. Em *Aquiles e a tartaruga,* Zenão delineia uma situação em que, ao ter por base o pressuposto de que o espaço é divisível, Aquiles, para alcançar a tartaruga, deverá antes percorrer metade da distância entre os dois, seguida da metade da metade da distância restante e, assim, *ad infinitum*, de modo que a tartaruga estará sempre à sua frente. A conclusão a que o filósofo eleático chega é que, "por mais vagaroso que seja um movimento num espaço divisível, o movimento mais rápido nunca pode alcançá-lo, porque precisa vencer uma distância infinita de pontos; [logo] a finitude do tempo e a infinitude da divisibilidade espacial são incompatíveis" (Chauí, 1994, p. 79). Zenão, portanto, nega a possibilidade da divisão infinita do espaço.

Nos outros dois paradoxos – *A flecha* e *O Estádio* –, o filósofo eleata elege como ponto de partida uma hipótese diametralmente oposta: a possibilidade de dividir o espaço em elementos indivisíveis. Em *A flecha*, Zenão parte de um cenário no qual uma flecha percorre um segmento de reta em que a ponta ocupa, em cada instante de tempo, uma posição correspondente ao que os pitagóricos chamaram de mónada. Entre uma e outra consecutiva não há nada, o que impossibilita afirmar algo sobre o movimento que ocorre onde nada existe. Isso conduz à conclusão de que o movimento da flecha é uma sucessão de imobilidades (Caraça, 2003). Dito de outro modo, enquanto a sucessão do movimento da flecha deve ser considerada em termos de linhas espaciais, o tempo não pode ser constituído por instantes, pontos. Esse argumento, de acordo com Rezende (2003), também se volta contra a concepção dos indivisíveis, na matemática. Nesse sentido, Zenão se volta contra a escola de Abdera, caracterizada por sua concepção atomística, que também apresentou contribuições para a matemática.

É no mínimo curioso que a introdução dos infinitesimais está vinculada às teorias relacionadas à doutrina materialista da física atomista da escola de Abdera (Boyer, 1959). O pressuposto que embasa a explicação do universo era, para essa escola, a composição de toda a realidade por átomos, partículas muitíssimo pequenas e indivisíveis, que se moviam no espaço. E, a depender do modo de sua articulação, formavam uma realidade existente internamente diferenciada. Um dos seus mais conhecidos representantes, Demócrito (460-370 a.E.C.), lidava

conjuntamente com essa concepção de realidade e a noção de infinitésimo. Conforme Boyer (1959), há indícios de que Demócrito distinguia claramente os átomos em matemática e no mundo físico. Os átomos matemáticos eram considerados, do ponto de vista dos infinitesimais, um tipo especial de indivisíveis matemáticos. Estes poderiam ser divididos em partes menores *ad infinitum*, sem que perdessem as propriedades essenciais do todo que compunham. Provavelmente foi "este processo mitótico que tornou possível Demócrito inferir dos indivisíveis o seu conceito de infinitesimal, afinal: os indivisíveis também são quantidades 'infinitamente' (muito) pequenas" (Rezende, 2003, p. 93).

Destacamos que as aporias de Zenão vão de encontro seja com a concepção de infinitésimo, seja com a de indivisível. Além disso, nos argumentos, é possível encontrar pares conceituais reflexivos imprescindíveis para a compreensão do Cálculo, tais como a relação entre: finito/infinito, infinitamente pequeno/infinitamente grande, discreto/contínuo, local/global, unidade/multiplicidade e variabilidade/permanência no contexto da análise das grandezas tempo e espaço. Cabe salientar que, do fato de estabelecermos os paradoxos elaborados por Zenão como um episódio expressivo e auxiliar para a apreensão de nexos conceituais que compõem o Cálculo na atualidade, não é legítimo deduzir que, supostamente, projetaríamos a existência de preocupações relativas a procedimentos infinitesimais nessas aporias (Roque, 2012).

A interpretação adotada em nosso trabalho, pautada neste capítulo pelo objeto do Cálculo – logo, por um desenvolvimento *a posteriori* do episódio tratado e mediado por um aparato conceitual distinto –, encontra, nos referidos paradoxos, elementos que, em estágio embrionário, podem auxiliar-nos na apreensão da essência do sistema conceitual que compõe o Cálculo. Pode-se verificar, por exemplo, como *Aquiles e a tartaruga* reflete a dificuldade da realização de uma soma de infinitas quantidades que se tornam sucessivamente menores e possuem como resultado uma grandeza finita. Atualmente, isso pode ser sintetizado como um problema relativo às séries – no caso analisado: $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n = (\frac{1}{2})^1 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + \cdots = 1$ (Roque, 2012). Esse é o contexto tomado como referência, por Boyer (1959), a fim de afirmar que as respostas para esses paradoxos envolvem noções, atualmente conhecidas como continuidade, limite e somas infinitas, conceitos não elaborados pelos gregos naquela época, e que estão embrionariamente ligados com o conceito de número.

Conforme Roque (2012), é possível questionar que as aporias apresentaram alguma relevância para o desenvolvimento da matemática, para além de seu papel filosófico. A autora considera, por exemplo, que a vinculação, presente em textos que versam sobre a história da

matemática, deve-se à aproximação existente entre matemáticos e filósofos gregos. Essa proximidade levaria os historiadores a projetar motivações de cunho filosófico na elaboração da matemática quando, na verdade, o que colocava os matemáticos gregos em movimento era a busca de técnicas para a resolução de problemas geométricos. Consideramos que seja difícil supor uma independência entre o desenvolvimento da matemática e da filosofia, pois, a despeito de seus objetos específicos, eram campos de pesquisa que, muitas vezes, possuíam intersecções. Nessa direção, Boyer (1959) defende que a inabilidade dos matemáticos gregos em dar uma resposta satisfatória aos paradoxos impactou e, de certo modo, tornou-se uma barreira para que pudesse ser estabelecida uma explicação quantitativa do fenômeno do movimento e da variabilidade. Isso culminaria no abandono do esforço pitagórico de identificar os domínios dos números com o da geometria, bem como na renúncia da tentativa de explicar o contínuo em termos discretos, como havia tentado Demócrito.

Independentemente da direta vinculação ou não dos paradoxos com o desenvolvimento da matemática grega em sua totalidade, é possível verificar, *a posteriori*, indícios de possíveis consequências como, por exemplo, a tentativa de evitar o infinito na matemática.[54] Esse cuidado pode ser visto em diferentes momentos, mas citamos aqueles que possuem relação direta com nosso objeto, em especial o "lema da exaustão". Esse é encontrado em Euclides (2009, p. 354) – "*Livro X, Teorema 1"* – com as seguintes palavras: "Sendo expostas duas magnitudes desiguais, caso da maior seja subtraída uma maior do que a metade e, da que é deixada, uma maior do que a metade, e isso aconteça sempre, alguma magnitude será deixada, a qual será menor do que a menor magnitude exposta". A demonstração, realizada por Euclides, utiliza-se da definição 4 do livro V, conhecida como "*axioma de Arquimedes"* ou "*axioma de Arquimedes-Eudoxo*" (Baron, 1985a). Por razões de clareza expositiva, citaremos as definições 3 e 4 do livro V:

> 3. Uma razão é a relação de certo tipo concernente ao tamanho de duas magnitudes de mesmo gênero.
> 4. Magnitudes são ditas ter uma razão entre si, aquelas que multiplicadas podem exceder uma a outra (Euclides, 2009, p. 205).

O "*axioma de Arquimedes*" nos permite afirmar que, dadas duas magnitudes a e b em que supomos $a > b$, existirá magnitudes n e m de modo que $nb > a$ e $a - mb < b$ (Baron,

[54] Possivelmente, os paradoxos de Zenão, em conjunto com a descoberta dos incomensuráveis, desencadeou um abandono do uso do conceito de infinito em matemática. Para Caraça (2003), o cuidado com a utilização desse conceito deve-se não ao seu banimento da filosofia, mas à recusa de seu estudo quantitativo devido a uma preponderância das leituras qualitativas dos fenômenos naturais.

1985a). No teorema 1 do livro X, isso é usado para mostrar que, dadas duas magnitudes desiguais, é sempre possível fazer com que a maior se torne menor que a magnitude menor, independente da sua extensão. Segundo Baron (1985a), esse teorema evita a utilização de qualquer noção de infinito que opere com ideias similares à de limite sem requerer nenhum tipo de formalização. Boyer (1992), ao utilizar a notação moderna, entende que o processo realizado se resume ao que hoje entendemos como limite. Nela, dadas duas grandezas, *a* e *A*, em que $a < A$, e se $u_n = \frac{A}{2^n}$, então $\lim_{n\to\infty} u_n = 0 < a$. É preciso, aqui, ter muitas ressalvas à aproximação entre teorema exposto por Euclides (2009) e a exposição realizada por Boyer (1992). Essa falsa aparência decorre da modernização do modo de exposição, da utilização de um aparato conceitual e símbolos estranhos à natureza geométrica da matemática grega, assim como pelo uso explícito de noções não elaboradas e definidas, que são intuitivamente utilizadas pelos gregos, como por exemplo, a noção de infinito. Com essas ponderações, não queremos dizer que nossa preocupação é com a identificação de algum "defeito" ou "lacuna" da matemática grega. Em vez disso, a preocupação é com a ênfase na sua particularidade em comparação com outras formas de expressão matemática.[55]

O teorema supracitado – *Livro X, teorema 1* (Euclides, 2009) – é elaborado com o intuito de ser utilizado na prova do teorema 2 do Livro XII, o qual afirma: "Os círculos estão entre si como os quadrados sobre os diâmetros" (Euclides, 2009, p. 528). Não traremos aqui a exposição de sua demonstração devido à sua extensão, mas convém sublinhar que se trata de um exemplo do conhecido *método da exaustão*[56] de Eudoxo (408-355 a.E.C.). Esse método é amplamente utilizado por Arquimedes (287-212 a.E.C.) em seus trabalhos. Citemos algumas proposições desenvolvidas pelo matemático grego – *Medição do círculo*, *proposição 1* e *Sobre esferoides e conoides*, *proposições 21 e 22* –, pois nelas encontramos mais indícios de problemas que, atualmente, utilizamos conhecimentos do Cálculo para solucionar.

---

[55] Conforme Radford (2011), essa leitura da matemática de culturas distintas no passado como sendo deficientes pode ser encontrada em muitas historiografias, como por exemplo, em Cajori (2007). Esse autor, ao apontar uma falta de métodos gerais na *Arithmetica* de Diophantus, toma como ponto de referência da análise a matemática em seu estado atual. Como decorrência, isso leva à concepção segundo a qual, toda a matemática realizada historicamente tinha como objetivo se desenvolver em direção ao seu estado atual, o que não é um fato, pois em determinadas épocas havia objetivos sociais aos quais a matemática cumpria papel e função social específicas. Tal fato também pode ser identificado em Boyer (1959, p. 45), ao defender, por exemplo, que a concepção vaga de continuidade de Aristóteles – baseada na percepção e nos instintos –, teria "retardado o avanço da ciência e matemáticas" por dois mil anos.

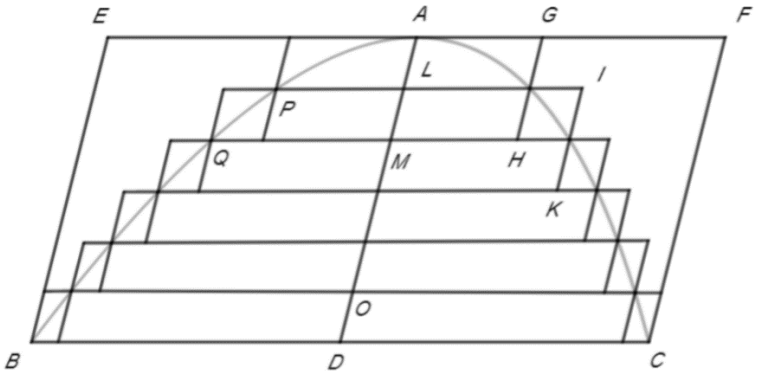
[56] Conforme Baron (1985a), o termo *exaustão*, como forma de identificação desse método, foi introduzido pela primeira vez por Grégoire de Saint-Vicent (1584-1667), um matemático e religioso jesuíta, em 1647. Para Roque (2012, p. 204), esse termo não é o mais adequado, pois "o infinito não pode ser levado à exaustão, isto é, não admite ser exaurido – pois por mais que nos aproximemos, nunca chegaremos até ele".

> Medição do círculo, proposição 1
> A área de qualquer círculo é igual à área de um triângulo retângulo, no qual um dos lados, partindo do vértice cujo ângulo é reto, é igual ao raio, e o outro é igual à circunferência do círculo.
> Seja ABCD o círculo, e K o triângulo em questão.
> Então, se o círculo não for igual a K, ele deve ser maior ou menor.
> Suponhamos que o círculo seja maior do que K.
> Inscreva um quadrado ABCD, divida AB, BC, CD, DA ao meio, depois (se necessário) suas metades e assim por diante, até que os lados do polígono inscrito, cujos pontos angulares são os pontos da divisão, contenham segmentos cuja soma seja menor do que o excesso da área do círculo, menos K.
> Assim, a área do polígono é maior do que K.
> Seja AE qualquer lado dele, e ON a perpendicular baixada sobre AE do centro O.
> Então, *ON* é menor do que o raio do círculo, portanto menor do que o lado oposto ao ângulo reto de *K*. Também o perímetro do polígono é menor do que a circunferência do círculo, isto é, menor do que o outro lado adjacente ao ângulo reto de *K*.
> Assim, a área do círculo não pode ser maior do que *K*.
> Se possível, seja o círculo menor do que *K*.
> Circunscreva um quadrado, e trace dois lados adjacentes, tocando o círculo nos pontos *E* e *H* encontrando-se em *T*. Divida os arcos ao meio, entre os pontos adjacentes de contato, e tome as tangentes aos pontos da divisão.
> Seja *A* o ponto médio do arco *EH* e *FAG* a tangente em *A*.
> Então, o ângulo *TAG* é um ângulo reto.
> Logo, *TG* > *GA*
> > *GH*
> Segue que o triângulo FTG é maior do que a metade da área *TEAH*. Do mesmo modo, se o arco *AH* é dividido ao meio e a tangente ao ponto da divisão é tomada, ela cortará mais da metade da área de *GAH*.
> Continuando assim o processo, chegamos finalmente a um polígono circunscrito cujos espaços entre ele e o círculo, somados, serão menores do que o excesso entre *K* e a área do círculo.
> Logo, a área do polígono será menor do que *K*.
> Como a perpendicular de *O* sobre qualquer lado do polígono é igual ao raio do círculo, enquanto o perímetro do polígono é maior do que a circunferência do círculo, segue-se que a área do polígono é maior do que o triângulo *K*, o que é impossível.
> Portanto, a área do círculo não é menor do que *K*.
> Como a área do círculo não é maior e nem menor do que *K*, só pode ser igual a *K* (Arquimedes *apud* Baron, 1985a, p. 34-35).

Nessa proposição, Arquimedes vale-se de áreas de polígonos inscritos e circunscritos para determinar a área de uma circunferência. O processo é iniciado com a inscrição e circunscrição de polígonos – quadrados – que, na sequência, dão lugar a outros com mais lados, de modo que as áreas dos inscritos e circunscritos convergem para a área do círculo à medida que os números de lados aumentam cada vez mais. A conclusão é que, quanto mais aumenta o número de lados dos polígonos, maior será sua área, no caso do polígono inscrito, e menor, no caso do circunscrito, isto é, aproxima-os da área do círculo. Como o polígono inscrito possui área sempre menor que a área de *K* – triângulo retângulo com catetos iguais ao raio do círculo e a sua circunferência –, enquanto o polígono circunscrito possui área sempre maior que *K*, e como esses se aproximam da circunferência, a área deve ser igual a *K*. Essa forma de demonstração, chamada de *redução ao absurdo*, foi modificada no contexto do método de exaustão com a utilização de polígonos inscritos e circunscritos.

Vejamos outro exemplo de processos similares, no trabalho de Arquimedes: *proposições 21 e 22* de *Sobre Conoides e esferoides*. Devido à extensão das proposições e de sua demonstração, optamos pela descrição do processo de prova e dos elementos envolvidos[57], ao invés de uma citação direta. Arquimedes intenta, nessas proposições, provar que um paraboloide de revolução *ABC,* inscrita em um cilindro *BCEF,* com mesmo eixo e mesma base, possui metade do volume de *BCEF*. Inicia com a descrição do conoide *ABC* e um cilindro *BCEF,* com eixo *AD* e raio da base *BD* iguais ao da paraboloide. Ele divide o eixo *AD* em *n* partes iguais com altura equivalentes a *h*. Nos pontos em que se realizaram as divisões, o matemático grego os corta com planos paralelos à base. Entre as secções da parábola, constrói cilindros inscritos e circunscritos a ela, conforme é possível ser visualizado na Figura 1.

Figura 1 – Demonstração da proposição 21 e 22 de "Sobre Conoides e Esferoides" de Arquimedes



Fonte: Baron (1985a, p. 44).

Esse processo permite que Arquimedes estabeleça proporções equivalentes:

$$\frac{Cilindro\ BCEF}{Figura\ inscrita} = \frac{n^2h}{h+2h+\cdots+(n-1)h} \text{ e } \frac{Cilindro\ BCEF}{Figura\ circunscrita} = \frac{n^2h}{h+2h+\cdots+nh}$$

Como havia provado na proposição 10 de *Sobre as espirais* que $h + 2h + \cdots + (n-1)h < \frac{1}{2}n^2h$ e $h + 2h + \cdots + nh > \frac{1}{2}n^2h$, foi possível que concluísse que $\frac{Cilindro\ BCEF}{Figura\ inscrita} > 2$ e $\frac{Cilindro\ BCEF}{Figura\ circunscrita} < 2$. Desse modo, pelo método de prova de redução ao absurdo, afirma que o segmento paraboloide não pode ser maior, nem menor, restando apenas a possibilidade de que seja igual à metade do cilindro *BCEF*.

[57] As proposições e suas demonstrações podem ser encontradas em Baron (1985a, p. 44-45). Baseamo-nos em Boyer (1959) para realizar a exposição e demonstração das referidas proposições.

O método aqui utilizado, e que pode ser estendido para o cálculo do volume de outros sólidos de revolução, consiste em dividir o corpo do sólido em partes e, em cada uma delas, aproximar corpos inscritos e circunscritos que tenham o volume conhecido. Como a soma dos volumes dos sólidos circunscritos excede o sólido de revolução, enquanto a dos sólidos inscritos será sempre menor que esse volume, podemos dividir o sólido de revolução em quantas partes quisermos de modo que, ao aumentarmos o número de partes, a diferença entre os sólidos inscritos e circunscritos se tornará cada vez menor e convergirá para o volume do sólido de revolução (Ríbnikov, 1987).

Novamente, destacamos as diferenças entre os métodos gregos e os atuais. Boyer (1959) entende que a principal razão dessas diferenças está ligada ao fato de que o pensamento geométrico grego está largamente preocupado com as formas e não com a variação. Torna-se, portanto, incorreto afirmar que os processos realizados por Arquimedes e por Eudoxo podem ser considerados como processos de integração, utilizando-se os parâmetros atuais de definição desses conceitos. Isso se deve ao fato que:

> A integral definida requer para sua correta formulação uma apreciação das noções de variabilidade e funcionalidade, a formação da soma característica $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$, e a aplicação do conceito de limite da sequência infinita obtida desta soma ao deixar n aumentar definidamente quando Δx_i se torna indefinidamente pequeno. Esses aspectos essenciais da integral, é claro, não estão presentes no trabalho de Arquimedes, pois eram externos a todo o pensamento matemático grego[58] (Boyer, 1959, p. 55).

Outro ponto a ser destacado é que o pensamento grego estaria preso a um tipo de realismo ingênuo, pois o pensamento era entendido como uma cópia exata do mundo externo (Boyer, 1959). O método da exaustão, por exemplo, erguia-se sobre uma intuição de espaço, na qual os processos eram descritos na forma de figuras mentais oriundas da percepção. É por meio desses termos, assim como da problemática que entra no pensamento grego com a descoberta dos indivisíveis, que é possível entender a eliminação quase completa de toda menção ao infinito. Aristóteles (*apud* Baron, 1985a, p. 27), por exemplo, além de negar a necessidade do infinitamente grande e do infinitamente pequeno, concebe como única forma de infinito possível o infinito potencial:

---

[58] "The definite integral requires for its correct formulation an appreciation of the notions of variability and functionality, the formation of the characteristic sum $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$, and the application of the concept of the limit of the infinite sequence obtained from this sum by allowing n to increase indefinitely as Δx_i becomes indefinitely small. These essential aspects of the integral are, of course, at no place indicated in the work of Archimedes, for they were extrinsic to the whole of Greek mathematical thought".

> Na realidade, eles [os matemáticos] não precisam e nem usam o infinito. Eles apenas postulam que a linha reta pode ser estendida como quiserem.
> Se adicionarmos continuamente a uma quantidade finita, excederemos qualquer grandeza dada e, do mesmo modo, se subtrairmos continuamente dela chegaremos a alguma coisa menor do que ela.

Diferentemente de Platão – para quem a linguagem dinâmica dos matemáticos, dirigida à ação, não faz sentido devido à existência eterna dos objetos matemáticos, portanto, não estão submetidas à ação –, Aristóteles entende que a matemática lida com objetos físicos ou abstrações diretas desses objetos. Isso o autoriza a empregar uma linguagem referente à ação sobre eles (Shapiro, 2016). Esse é um elemento que pode ser encontrado em Eudoxo e Arquimedes. Entretanto, a atividade matemática de Arquimedes carrega em seu bojo os aspectos gerais do fazer matemático dos gregos, ao mesmo tempo que se distancia deles. Um ponto destoante é o uso da mecânica em seu método de elaboração de novas ideias que, posteriormente, era provado, na sua maioria, pelo método de redução ao absurdo, conforme abordado anteriormente. Além disso, ele utilizou noções da cinemática para descrever a espiral como a trajetória de um ponto que realiza dois movimentos uniformes simultâneos: o movimento do ponto em relação ao raio, desde o centro, e o movimento do raio ao redor do ponto (Ríbnikov, 1987). Esses dois aspectos caminham lado a lado, pois, apesar de o método da exaustão ser uma forma bastante sofisticada e rigorosa de demonstração dos resultados, possuía a desvantagem de requerer que uma propriedade ou resultado fossem conhecidos antes de ser provados.

O modo dual do procedimento arquimediano – método de descoberta e método de demonstração – aproveitava-se de concepções divergentes no que tange à filosofia e à matemática. Citamos, a título de exemplo, a relação de competição entre a escola associada ao nome de Demócrito e a escola de Eudoxo. Na escola de Demócrito, encontramos a noção de *átomo geométrico*. Para Struik (1989), essa escola concebia um segmento de reta, uma área ou volume como compostos por um número muito grande, mas finito, de átomos indivisíveis. Tal entendimento é corroborado por Boyer (1959) que, por um lado, ao se referir a Demócrito como um grande matemático, entende, por isso, que ele desconsideraria teorias como a das linhas indivisíveis, por outro lado, pensa ser difícil de imaginar como o átomo matemático é concebido senão por meio de um indivisível. Voltando ao ponto central da questão, o uso do infinitésimo facilitava a descoberta, mas não obtinha respaldo na comunidade dos matemáticos, conforme pode-se perceber nos textos matemáticos que chegaram até nós. Para Struik (1989, p. 88), o predomínio, entre os gregos, da exposição fundamentada no método da exaustão de Eudoxo pode estar relacionada

> [...] com o facto de a matemática se ter tornado um passatempo da classe ociosa, que se apoiava na escravatura, indiferente às invenções e interessada na contemplação. Pode ser também o reflexo da vitória do idealismo platônico em relação ao materialismo de Demócrito no domínio da filosofia matemática.

Entretanto, em Arquimedes, a descoberta e a demonstração rigorosa – aos padrões da época – conviveram como formas distintas e combinadas da atividade matemática. A relação entre o estabelecido e o novo aparece, na atividade e na obra do pensador, de modo latente. Nesse sentido, Ríbnikov (1987, p. 89) afirma que os métodos infinitesimais[59] entre os gregos

> [...] saíam dos limites dos sistemas matemáticos fechados daquela época, construídos sobre a base de um número mínimo de condições iniciais. Nos métodos infinitesimais se manifestaram pela primeira vez os elementos dos novos recursos matemáticos, os quais conduziram à criação da análise infinitesimal. A relação de contradição entre o conjunto de semelhantes métodos e os sistemas lógico-matemáticos fechados na Grécia Antiga constituem um dos exemplos históricos de contradições, as quais têm a força motriz do desenvolvimento das ciências matemáticas.[60]

Nesse contexto, pode-se afirmar que existiam elementos, entre os gregos, do que hoje concebemos como Cálculo, mas com forma e conteúdo bastante distintos, o que impossibilita sua direta identificação. As contradições entre multiplicidade e unicidade, fluência e permanência surgem como aspectos centrais do pensamento grego geral e adentram no pensamento matemático de modo difuso. Inspirados nos três problemas clássicos da matemática grega[61], a investigação dos matemáticos moldava-se ao espírito daquele povo, naquela época. A variabilidade como processo é tida como secundária, praticamente ausente, pois os gregos optam pelas formas e desenvolvem sua matemática sobre as bases da geometria. *A posteriori,* essas relações podem ser encontradas nos paradoxos de Zenão. O movimento, bem como a variabilidade, não é preponderante em sua estrutura formal, cuja exceção é a espiral arquimediana (Baron, 1985a).

---

[59] O autor considera como métodos infinitesimais dos gregos antigos um conjunto específico de problemas que exigiam a investigação do que entendemos, hoje, como passagem ao limite, processos infinitos e continuidade.

[60] "Ellos salían de los límites de los sistemas matemáticos cerrados formados en aquella época, construidos sobre la base de un número mínimo de condiciones iniciales. En los métodos infinitesimales obtuvieron la primera manifestación los elementos de los nuevos recursos matemáticos, los cuales condujeron a la creación del análisis infinitesimal. La relación de contradicción entre el conjunto de semejantes métodos y los sistemas lógico-matemáticos cerrados en la Grecia Antigua constituyen uno de los ejemplos históricos de contradicciones, las cuales han sido la fuerza motriz del desarrollo de las ciencias matemáticas".

[61] São esses problemas: a duplicação do cubo; a quadratura do círculo e a trissecção do ângulo. A problemática inserida aqui é que a ideia de área não estava vinculada ao conceito de número e eram aceitos, basicamente, meios construtivos com a utilização da régua não graduada e compasso.

Em suma, entre os gregos houve um amplo debate atinente à relação entre a fluência e a permanência, o múltiplo e o unitário, o finito e o infinito (potencial ou atual), o discreto e o contínuo e o divisível e o indivisível, apesar desses conceitos, em sua maioria, possuírem conteúdos distintos daqueles que hoje temos em mente.

Mediados por nossa compreensão atual, pode-se afirmar que há elementos embrionários contidos em conceitos como o de série, limite e integral. Nos paradoxos de Zenão é objetivada a possibilidade de refletir sobre o movimento no pensamento. Em nosso entendimento, eles evidenciam a impossibilidade de separação arbitrária e análise individualizada dos elementos do movimento, coerentes apenas em unidade. No que tange aos métodos matemáticos, independentemente de sua influência direta, percebe-se um cuidado em evitar o uso de procedimentos infinitesimais nas demonstrações, o que não impediu a Arquimedes a sua utilização no processo de descobertas. Destaca-se que, ao espírito da época, o matemático de Siracusa lidou com provas em contextos geométricos e, portanto, a determinação de áreas e volumes foi bastante explorada. Pode-se identificar, em suas obras, a existência de diversas relações que atualmente entendemos como conceitos que compõem o sistema conceitual do Cálculo – interdependência, variabilidade, séries –, na forma de entes, porém compreendidos e manipulados de modo estático. Na próxima seção, abordaremos o processo pelo qual o movimento emerge como objeto de estudo específico, o que cria condições para o surgimento das bases do Cálculo.

3.3 "A REALIDADE GRITA": O MOVIMENTO SE IMPÕE[62]

Temos o intuito, na presente seção, de abordar aspectos atinentes ao aumento de métodos para apreender nexos específicos da realidade que apresentam indícios de noções ligadas aos conceitos de derivada e integral. Aquilo que, em geral, torna-se substancial a esses métodos, oscila entre concepções estáticas e dinâmicas. Ou seja, torna-se resultado de um processo de disputa entre uma cosmovisão da realidade regida pela fluência, contraposta à outra, regida pela permanência. Conforme exposto na seção anterior, na Grécia Antiga, em geral, imperava um dualismo com prevalência da esfera da permanência, que encarnaria o essencial. No âmbito dos conhecimentos matemáticos, isso se expressa na tentativa de expurgo de qualquer ideia que pudesse explicitar alguma forma de movimento. Nesse sentido,

[62] O título desta seção é inspirado no título do segundo capítulo da tese de Ortigara (2002). Esse, por sua vez, menciona que a expressão "*a realidade grita"* era utilizada por Maria Célia Marcondes de Moraes em encontros de estudo.

"Aristóteles se referiu à matemática como algo relacionado a 'coisa que não envolve movimento, e sustentou que os matemáticos estudam objetos '*qua' contínuo*, os físicos *'qua' movendo*, e a filosofia *'qua' sendo*" (Rezende, 2003, p. 127).

Uma mudança qualitativa ocorre com a dissolução do Império Romano, resultante do esgotamento de condições objetivas de sua reprodução, oriundas das próprias contradições internas do sistema escravagista: necessidade de conquista de outros territórios e civilizações em constante expansão, contraditoriamente com o aumento do custo das campanhas militares para objetivação desse processo. À medida que se agudizam essas contradições, emergem, entre os povos oprimidos pelo Império, novas formas de religiosidade, entre as quais pode-se destacar a religião cristã que, progressivamente, ganha capilaridade até adquirir status de religião oficial do Império, em processo de dissolução. De acordo com Lukács (2012, p. 35), a atmosfera que cria o cristianismo

> [...] se dá nesse ambiente da cultura antiga em dissolução, no qual, também para a filosofia, a satisfação mágico-mística da necessidade de redenção constitui o motivo primário e no qual surge uma enorme quantidade de seitas dedicadas ao atendimento imediato de tais desejos de salvação pessoal da alma.

O cristianismo daquela época apresentava duas características que foram decisivas para a sua aderência entre os povos sob influência e dominação do Império Romano: a espera pela volta de Cristo ressuscitado, e a iminência do fim do mundo como um evento que poderá ser experimentado pessoalmente (Lukács, 2012). De tal modo, a religiosidade cristã passa a se caracterizar por uma nova qualidade, no ambiente destacado, que rejeitava

> [...] com ousada radicalidade a imagem de mundo então difundida – muito embora ainda problemática no plano científico – e afirma como única realidade a objetivação do anseio religioso resultante da desesperança de um sentido terreno para a vida pessoal, não apenas entre os judeus subjugados, mas em todo império, sobretudo entre os pobres (Lukács, 2012, p. 36).

Essa visão de mundo nascente conservava uma estrutura bimundana que remonta à filosofia de Platão ao interpretar o mundo dos seres humanos como teleologicamente fundado, porém distancia-se da concepção do filósofo grego pela condicionalidade da salvação ou danação individual, a depender do comportamento. Além disso, distingue-se por conceber uma realidade teleologicamente superior da divindade que, por consequência, faz do cosmo seu "fundamento ontológico e objeto visível do poder de Deus" (Lukács, p. 2012, p. 37). A variabilidade, mudança e transformação são expressões de uma teleologia permanente

representada pelos anseios da divindade, ou seja, o cosmos e a história são teleologicamente guiados pela vontade divina.

No entanto, o fim do Império Romano não significou o fim do mundo, temor recorrente dos indivíduos naquele contexto, mas a substituição dessa forma de organização social por outros modos de relacionamento social. Vale destacar que a parte ocidental do Império Romano, menos desenvolvida econômica e culturalmente do que a parte oriental, manteve sua formação estática durante muitos séculos (Struik, 1989). Nos reinos germânicos, com exceção da Grã-Bretanha, a base da vida econômica e intelectual se mantinha arraigada àquela do declínio do Império Romano. Em relação à divisão do trabalho, gradualmente os rendeiros e agricultores substituíram os escravos, ao mesmo tempo que a esfera do poder político, econômico e militar se objetivaria em uma autoridade central partilhada pelo imperador de Constantinopla e pelos papas de Roma.

Com a ampliação dos territórios conquistados pelos árabes no Ocidente e em muitas regiões do antigo Império Romano oriental, durante séculos, as relações comerciais entre o Oriente e o Ocidente foram dificultadas. Isso se relaciona, em muitas regiões do Império Romano ocidental, com o desaparecimento da economia de grande escala que provocou a decadência das cidades na Gália dos Francos e outras regiões do antigo Império Romano.

> A Europa ocidental, em suma, foi reduzida ao estado de uma semibarbárie. A aristocracia terratenente ganhou importância com o declínio do comércio; os senhores feudais francos do Norte, chefiados pelos carolíngios, tornaram-se o poder dominante no reino dos Francos. O centro económico e cultural deslocou-se para o Norte da França e para a Grã-Bretanha. A separação entre Ocidente e Oriente limitou a autoridade efectiva do papa, levando o papado a aliar-se com os carolíngios [...]. A sociedade ocidental tornou-se feudal e eclesiástica e sua orientação tornou-se germânica e nórdica. Este facto quebrou a tradição estática herdada do Império Romano (Struik, 1989, p. 135).

Na sociedade feudal nascente na Europa Ocidental, devido à agricultura extensiva e às condições impróprias para o fornecimento e exploração da mão de obra escrava, os grandes sistemas burocráticos se tornaram supérfluos. Por consequência, as aldeias, em processo de crescimento e desenvolvimento, transformam-se em burgos que, em seguida, desenvolveram-se como unidades independentes (Struik, 1989). A natureza do sistema feudal, que possuía entre as principais relações a do senhor feudal e do servo, caracterizada pelo fato de este reter uma parte da produção e entregar outra àquele, fazia com que fosse de interesse dos servos um incremento na produtividade do seu trabalho, diferentemente da relação escravagista. Nesse contexto, o mundo decadente do Império Romano era vagarosamente transformado e substituído com a emergência, para grande parte da sociedade que vivia na região, de um

horizonte com possibilidades de prosperidade até então não vivenciadas. A nova configuração da sociedade europeia, somada à expansão do mundo árabe – que tomou a Sicília, o Norte da África e a Espanha –, fez com que um reflexo cada vez mais profundo dos nexos causais da realidade se tornasse imprescindível para a visão de mundo nascente.

Conforme Struik (1989), a Sicília e a Espanha estabeleceram-se como os principais pontos de contato próximos entre o Oriente e o Ocidente, e como locais onde os mercadores e estudantes ocidentais mantinham contato com a civilização islâmica. Essa relação possibilitou que estudiosos europeus passassem a se familiarizar com os clássicos gregos, intermediados pelos árabes. Além disso, na Itália, nos séculos XII e XIII, estabeleceram-se cidades comerciais – como Génova, Pisa, Veneza, Milão e Florença – que mantinham comércio constante com o norte europeu e com o mundo árabe, o que impulsionou a apropriação e divulgação dos conhecimentos indianos e árabes referentes à matemática.

O fenômeno do estabelecimento e desenvolvimento das referidas cidades é uma consequência das contradições germinadas pelo modo de produção feudal. Essa forma de organização social, ao impulsionar o aumento da produtividade, da qualidade de vida e, consequentemente, da expectativa de vida dos indivíduos, em um determinado momento passa a apresentar limites no que se refere à absorção da população nos feudos. Outro aspecto decisivo para o florescimento do comércio e para entender as transformações da sociedade nesse período diz respeito ao fato de a produção dos feudos, ao serem acumuladas pelos senhores feudais, apresentarem excedentes que se deterioravam e se tornavam impróprias para o consumo. Assim, alguns indivíduos sem ligações com os feudos passaram a ser intermediários de trocas entre bacálios que produziam produtos distintos.

Com o desenvolvimento do comércio, os interesses e conhecimentos matemáticos começaram a ser difundidos e alcançaram o norte da Europa ocidental. Em geral, não eram de interesse diretamente prático, o que não significa que a matemática especulativa tinha estagnado na Idade Média[63]. De acordo com Struik (1989), essa forma de conhecimento era desenvolvida por filósofos escolásticos[64] que realizavam especulações sobre a natureza do movimento, do infinito e do contínuo, fundamentados especialmente na obra de Aristóteles[65]. Tais

[63] A Idade Média é um período histórico que tem início no século V, com a queda do Império Romano, e se estende até o século XV, possuindo como marco a conquista de Constantinopla pelo Império Turco-Otomano.
[64] Os escolásticos eram filósofos ligados à igreja, adeptos da filosofia escolástica. Conforme Abbagnano (2007), a escolástica era uma filosofia cristã da Idade Média que apresentava como problema principal o de conduzir o ser humano a entender a "verdade revelada", ou seja, a "verdade religiosa".
[65] Vale ressaltar que, para Aristóteles, o movimento é tudo aquilo que tem potência, isto é, a passagem da potência ao ato. O filósofo grego distinguia quatro formas de movimento: alteração, translação, o movimento substancial – geração ou corrupção – e o movimento quantitativo – aumento ou diminuição (Abbagnano, 2007).

especulações eram, em sua maioria, de natureza qualitativa. No entanto, uma interpretação quantitativa do movimento começava a adentrar o ambiente cultural, por meio da *teoria das formas.*

Conforme Boyer (1959), a teoria das formas, desenvolvida por pensadores do *Merton College*, em Oxford, foi a primeira tentativa séria de formulação quantitativa da variabilidade do movimento, com adoção da ideia de latitude das formas, referente à intensidade das qualidades. Segundo Edward (1979), em Aristóteles as qualidades eram atributos que admitiam intensidade. O filosofo peripatético distinguia qualidades intensiva, ou local, das quantidades extensivas, ou globais. Sobre essa base, a velocidade foi considerada, pelos filósofos do Merton College, como uma qualidade: a intensidade do movimento e sua quantidade constituíam o movimento total. Definiram o movimento uniforme como aquele que percorria distâncias iguais em intervalos de tempos iguais, e a aceleração uniforme como aquela na qual os incrementos das velocidades eram iguais em intervalos de mesmos tempos. Por sua vez, a velocidade instantânea foi definida como a distância que poderia ser percorrida se um objeto se movesse uniformemente por um período de tempo com a mesma velocidade no instante considerado.

Entre os trabalhos desses filósofos, destacamos o de Thomas Bradwardine (1290?-1349), que foi quem considerou as grandezas contínuas como formadas por um número infinito de indivisíveis de mesma natureza, diferentemente do tempo que, decorrente de sua natureza descontínua, era concebido como constituído por infinitésimos (Rezende, 2003). Seu trabalho, sobre proporções, não era atinente a uma investigação referente à latitude das formas, mas a questões relacionadas à mecânica (Boyer, 1959). Por sua vez, Richard Suiseth[66], mencionado em muitas historiografias como *The Calculator*[67], considerou o infinito pelo ponto de vista da sua intensidade ou magnitude, ao invés do ponto de vista de agregados. Um de seus trabalhos – *Liber calculationum* – foi considerado um modelo para os autores escolásticos que estudavam a latitude das formas. Conforme Boyer (1959), em um dos capítulos, ele mostra que a intensidade média de uma forma que possui, em um intervalo de tempo, a taxa de variação constante ou ainda uma forma uniforme no decorrer de cada metade do intervalo, é a média entre a primeira e a última de sua intensidade. Justifica esse enunciado com o argumento que "se à maior intensidade é permitido decrescer uniformemente até a metade enquanto a menor é aumentada com a mesma taxa até essa metade, então o todo não aumentaria nem diminuiria"

[66] Edwards (1979) o apresenta como *Richard Swineshead.*
[67] Assim como Rezende (2003), manteremos a grafia em inglês, pois não entramos em contato com nenhuma bibliografia em língua portuguesa que tenha traduzido esse termo.

(Boyer, 1959 p. 75).[68] Apesar da imprecisão na sua abordagem do conceito de infinito, sua obra apresenta elementos importantes para o estudo da variação em matemática (Boyer, 1959).[69] Destacamos o seguinte problema presente no segundo livro do *Liber calculationum:*

> [...] se ao longo da metade de um dado intervalo de tempo uma variação contínua com uma certa intensidade, ao longo do próximo quarto do intervalo no dobro desta intensidade, ao longo da próxima oitava parte o triplo desta, e assim ad infinitum; então a intensidade média de todo o intervalo será a intensidade da variação durante o segundo intervalo (ou o dobro da intensidade inicial)[70] (Boyer, 1959, p. 76).

Importa aqui mostrar que, mesmo não conscientemente, o matemático inglês se depara com problemáticas presentes nos paradoxos de Zenão, particularmente a subdivisão infinita do tempo. Esse problema, em sua resolução, gera a necessidade do que atualmente conceituamos como séries. Ao adotar a simbologia atual, Rezende (2003, p. 131) didaticamente traduz o problema nos seguintes termos:

> Considerando 't', o intervalo de tempo total, e 'i' a primeira intensidade, temos que o problema descrito acima é equivalente a mostrar que:
> $i\frac{t}{2} + 2i\frac{t}{4} + 3i\frac{t}{8} + 4i\frac{t}{16} + \cdots + ni\frac{t}{2^n} + \cdots = 2it,$
> ou seja, $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2.$

Cabe destacar que, em Arquimedes, também estavam presentes alguns elementos de séries, em contexto geométrico. Não obstante, o matemático grego as manipulava e as entendia sempre como aproximações (Boyer, 1959). Por exemplo, na busca por determinar a quadratura da parábola, formulava que $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}$ se aproximava de $\frac{4}{3}$ à medida que o número de termos – no contexto do problema, eram áreas de triângulos inscritos na parábola – aumentava até um termo arbitrário n, no qual a diferença seja tão pequena quanto

---

[68] "[…] if the greater intensity is allowed to decrease uniformly to the mean while the lesser is increased at the same rate to this mean, then the whole is neither increased at the same rate to this mean, then the whole is neither increased nor decreased".

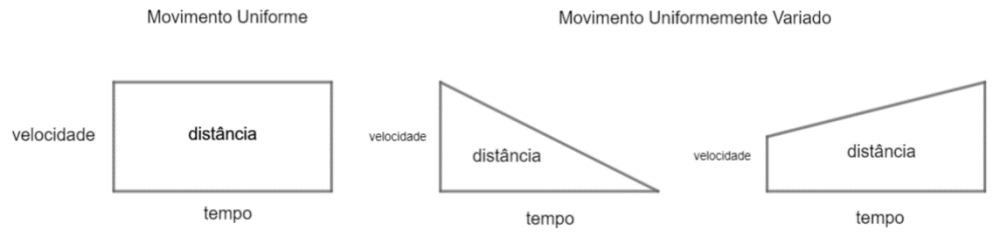
[69] Boyer (1959) defende que os estudos de Suisseth sobre a variação de quantidades teriam "antecipado" a introdução das noções de quantidade variável e derivada, assim como a elaboração científica do conceito de variação. Frisamos que, devido à nossa fundamentação, não consideramos apropriado usar o verbo *antecipação* – recorrentemente utilizado na obra de Boyer (1959) –, pois ele carrega muito de uma visão determinista da história. Entendemos essa elaboração conceitual como uma ideia particular, culturalmente e temporalmente estabelecida, que foi criticada, reelaborada, com alteração de antigos e agregação de novos elementos, durante o desenvolvimento da humanidade, até culminar na forma e conteúdo atuais que também podem se tornar provisórios devido à natureza ontológica da realidade.

[70] "[...] if throughout half of a given time interval a variation continues at a certain intensity, throughout the next quarter of the interval at double this intensity, throughout the following eighth at triple this, and so ad infinitum; then the average intensity for the whole interval will be the intensity of the variation during the second subinterval (or double the initial intensity)".

se queira. Diversamente, Suisseth afirma que o resultado da série supracitada é dois, o que não deixa margem para uma concepção aproximativa.

O trabalho de Suisseth, bem como de outros autores que abordavam a latitude das formas, influenciaram Nicolau de Oresme (1323?-1382), que foi quem introduziu representações gráficas para ilustrar a teoria das formas. Conforme Baron (1985b), Oresme, ao partir de discussões medievais sobre pontos, retas e planos, conclui que sua natureza era ficcional, tornando-se impossível abordá-las como objetos. Baseado nesse pressuposto, representou a intensidade – latitude – e a qualidade – longitude –, assim como a intensidade de qualidade da forma, por meio da área dos polígonos. O movimento uniforme e o uniformemente acelerado foram representados conforme ilustra a Figura 2.

Figura 2 – Representação do movimento uniforme e uniformemente variado com base no trabalho de Oresme



Fonte: Baron (1985b, p. 60).

A representação utilizada pelo matemático francês tornou intuitivo o entendimento das mudanças das formas e, consequentemente, introduziu uma nova qualidade ao estudo do movimento.[71] Uma das consequências foi a possibilidade de expressar o teorema que descrevia a velocidade média[72], elaborado por Suisseth, em termos de área do triângulo ou do trapézio.

Para Edwards (1979), Oresmes introduziu, mesmo que implicitamente, quatro ideias inovadoras: 1) a medição de variáveis físicas de qualidades diversas com adoção de segmentos de linhas; 2) uma noção de relacionamento funcional entre variáveis; 3) a representação diagramática ou gráfica desse relacionamento funcional; 4) um processo conceitual de soma contínua para o cálculo da área do gráfico, que representava velocidade pelo tempo.

[71] Boyer (1959) destaca que os geógrafos gregos utilizam, muito antes de Oresme, um sistema de coordenadas.
[72] $s = \frac{v_i + v_f}{2} t$, em que s é a distância total percorrida, t é o tempo, v_i a velocidade inicial e v_f a velocidade final.

Outro aspecto do desenvolvimento da matemática nesse período, conforme Struik (1989), ocorre nas principais cidades mercantis influenciado pelo seu comércio, navegação, astronomia e agrimensura, com destaque para as cidades italianas e da Europa central. Um acontecimento particularmente importante foi a queda de Constantinopla, em 1453, que representa o fim do Império Bizantino. Identifica-se, como uma de suas consequências, o deslocamento de vários estudiosos que residiam ali para cidades ocidentais, o que impulsionou intercâmbios culturais. Também, nesse período, houve um aumento de interesse pelos textos originais dos matemáticos gregos, bem como a realização de traduções das obras de Arquimedes, dos *Elementos* de Euclides e das *Cônicas* de Apolônio.

Com a invenção da imprensa[73], os textos matemáticos ligados ao ensino de matemática "prática" e com aplicações comerciais passaram a ser mais difundidos. Além disso, devido à constante expansão do mundo conhecido pelos europeus, resultante, principalmente, das grandes navegações, começava a emergir a necessidade de apropriação dos textos clássicos e o desenvolvimento de novos conhecimentos. Como desdobramento, o conhecimento matemático que, por um lado, era especulativo e, por outro, estava ligado às transações comerciais da burguesia mercantil, inicia um deslocamento para o polo de necessidades mais ligadas aos problemas imediatos desse "mundo" em transformação.

Tal movimento origina-se, nesse período, com a formação de novos estados nacionais, geradores da necessidade de desenvolvimento do poderio militar, assim como da ampliação e qualificação das construções civis o que, por sua vez, impulsionou a procura por engenheiros e matemáticos. Além disso, concomitantemente, emergia uma concepção mecanicista de mundo, fundamentada no uso e aperfeiçoamento de máquinas, mais especificamente na produção em geral, na navegação e na guerra. Segundo Struik (1989), as máquinas eram de conhecimento do Oriente e da antiguidade clássica, mas, devido à estrutura social, baseada na escravatura e na inexistência de uma vida urbana economicamente promissora, seu uso não foi disseminado. Além das máquinas, o uso e aperfeiçoamento dos relógios foi um elemento simbólico para essa nova concepção de mundo, uma vez que, no plano individual, representava uma transformação psicológica nos indivíduos ao determinar certos elementos de suas vidas, ao mesmo tempo que se transformou, socialmente, em modelo do universo. Esse processo culmina em uma nova postura diante da realidade e da apropriação de

[73] Aqui nos referimos à construção de um sistema mecânico de tipos móveis realizado por Johannes Gutenberg (1400-1468). É prudente que não consideremos a imprensa de Gutenberg como a primeira do tipo, pois há relatos de que na China já havia existido uma prensa móvel.

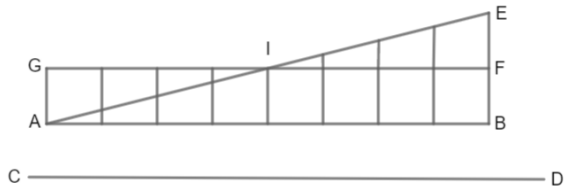
suas legalidades, oriunda de um rearranjo e alteração qualitativa das relações entre as classes que exerciam atividades cujos objetos era o conhecimento.

Conforme Zilsel (2018), o surgimento da ciência moderna tem base na sociedade pré-capitalista, caracterizada e composta pelo comércio e produção de manufaturas que, por intermédio da competição, dissolve a sociedade coletiva feudal e destrói as suas formas de pensamento, promovendo uma ênfase no pensamento individual. Para o autor (2018), no período entre os anos de 1300 e 1600, pode-se distinguir três classes de indivíduos que tinham como principal ocupação a atividade intelectual: os eruditos universitários que, vinculados ao pensamento teológico e escolástico, eram treinados no que se entendia por pensamento racional, predominantemente especulativo e desinteressado em relação aos estudos experimentais; os humanistas, representantes de uma educação secular, que se voltavam também ao pensamento especulativo e discursivo com foco na forma em detrimento do conteúdo; e os artesões superiores, com destaque para os artistas-engenheiros, que se ocupavam sistematicamente da realização de experimentos como forma de apreender a realidade e fundamentar seus trabalhos.

De acordo com Zilsel (2018), a estrutura de classes se reproduz, mesmo dentre aqueles que se ocupavam do trabalho intelectual. Os integrantes das classes mais altas, os dois primeiros grupos, não mantinham contato com a prática experimental e com a instrumentação objetal, enquanto o último grupo não possuía treinamento intelectual específico. Esses dois importantes componentes do método científico se combinam quando, com a expansão comercial, descrita anteriormente, produziu-se a necessidade de ultrapassar o método dos escolásticos, voltados quase que exclusivamente a embates intelectuais e discursivos, substituindo-os por um modo mais efetivo de apropriação dos nexos causais da realidade. Isso ocorre “quando, com o progresso da tecnologia, o método experimental dos artesãos supera o preconceito relativo ao trabalho manual e é adotado por eruditos universitários treinados e racionais” (Zilsel, 2018, p. 115). A culminância desse processo é representada pelos trabalhos de Galileu Galilei (1564-1642).

Muitas foram as inovações de Galileu, mas destacamos, especialmente, o seu estudo sobre o movimento. No teorema I, proposição I de *Discursos e demonstrações matemáticas sobre duas novas ciências*, de 1638, o pesquisador italiano afirma que um corpo inicialmente em repouso percorre um espaço qualquer em movimento uniformemente acelerado em um tempo igual àquele em que o mesmo espaço é percorrido, pelo mesmo corpo, ao se mover com velocidade uniforme igual à média entre a maior velocidade e a velocidade imediatamente anterior à aceleração ter começado. Isso é explicado por meio da Figura 3.

Figura 3 – Diagrama da relação entre movimento uniformemente acelerado e movimento uniforme de Galileu



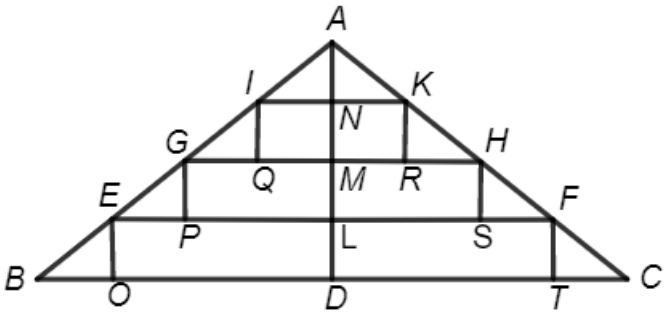
Fonte: Adaptado de Roque (2012, p. 310).[74]

No diagrama, AB representa o tempo que o espaço CD é percorrido, BF é a maior velocidade do objeto em movimento uniformemente acelerado, e a área do triângulo AEB representa o espaço percorrido. O ponto F, que bissecta a reta BE e o retângulo $AGFB$, terá área igual ao triângulo AEB, que representa a distância percorrida no tempo AB. Como as áreas são iguais, os espaços percorridos também serão. É possível perceber, como sublinha Roque (2012), que Galileu expressava as regularidades dos movimentos por meio de proporções entre grandezas geométricas, representadas por diagramas. Importa destacar como o movimento passa a ser mensurado e representado de forma geral, com base em sua especificidade real, de maneira mais aprofundada.

Outro representante desse movimento foi Simon Stevin (1548-1620), um engenheiro que, segundo Struik (1989), tinha uma típica disposição de abandonar o rigor da demonstração arquimediana com o objetivo de obter resultados impossíveis de se produzir pelo método grego. Em um de seus estudos – *Teorema II. Proposição II* – referentes à determinação do centro de gravidade, ele afirma que "O centro de gravidade de qualquer triângulo se encontra na reta traçada do ângulo ao ponto médio do lado" (Baron, 1985b, p. 6). Sua demonstração[75] é baseada na inscrição de um número n de quadriláteros – paralelogramos – com alturas iguais no triângulo ABC (Figura 4), com a conclusão de que o centro de gravidade de um triângulo estará na mediana – no eixo AD.

[74] A disposição do gráfico foi alterada para ficar em uma posição mais familiar ao leitor atual.
[75] A demonstração completa de Stevin pode ser encontrada em Baron (1985b, p. 6-7).

Figura 4 – Ilustração do Teorema II, Proposição II de Stevin



Fonte: Adaptado de Baron (1985b, p. 7).

Primeiramente, é provado que o centro de gravidade de um paralelogramo está na reta que une os pontos médios de lados opostos (Figura 4). Destarte, ao considerarmos o triângulo ABC de área qualquer x e soma das áreas dos quadriláteros inscritos como igual a y, obtemos: $x - y = \frac{x}{2}$ no caso de $n = 2$; $x - y = \frac{x}{3}$ se $n = 3$; e assim por diante, o que leva ao caso geral $x - y = \frac{x}{n}$. Como a diferença entre x e y pode ser feita tão pequena quanto desejarmos, ao dividir o triângulo ABC em duas partes, ADB e ADC, a inscrição das figuras fará com que, ao tomar AD como centro da gravidade, a diferença do peso da parte ADC e da parte ADB seja menor que qualquer figura plana dada. Stevin inicia um silogismo ao partir da afirmação de que entre quaisquer duas gravidades aparentes diferentes é possível sempre estabelecer uma terceira menor que a diferença entre elas. Assim, se ADB e ADC possuem "pesos" diferentes, então será possível encontrar uma diferença entre eles que será fixa. Entretanto, não há essa diferença, pois a soma dos quadriláteros inscritos nos dois triângulos é igual, portanto, podem ser construídos outros de maneira que a diferença entre seus "pesos" seja menor que qualquer quantidade fixa. Isso conduz à conclusão de que ADC e ADB possuem "pesos" iguais, logo, a linha AD é centro de gravidade e contém o centro de gravidade do triângulo ABC. Como destaca Baron (1985b), é possível perceber que nessa demonstração Stevin evita o procedimento de *redução por absurdo* utilizado por Arquimedes.

O movimento de abandono do rigor grego é uma superação das contradições entre as formas de pensamento ancoradas em referenciais ontológicos e epistemológicos constituídos na sociedade grega da antiguidade e os novos anseios sociais da época. Naquele contexto, a concepção de mundo dos europeus se alargava com a transformação e o domínio de certas esferas da realidade que, até então, não conheciam e nem possuíam condições de conhecer. Uma das ciências que ganharam relevância nesse cenário foi a astronomia, impulsionada pela

necessidade, gerada pelo espírito comercial da época, de percorrer distâncias longas em menor tempo. Tal fato impulsionou o desenvolvimento da navegação e, por consequência, as regularidades envolvidas no movimento dos astros passaram a ser centrais para a localização do ser humano no tempo e no espaço, o que gerou um movimento no sentido de sua apropriação.

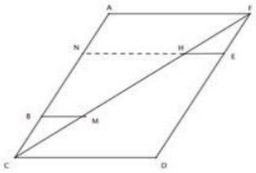
De acordo com Struik (1989, p. 159-160), a captura das legalidades da realidade, no âmbito da astronomia, proporcionou "uma visão inteiramente nova do lugar do homem no universo e do seu poder para explicar os fenómenos da astronomia de modo racional. A possibilidade de a mecânica celeste completar a mecânica terrestre fez crescer o arrojo dos homens da ciência". Nesse contexto, Johannes Kepler (1571-1630) combina os métodos utilizados pelos gregos com os infinitesimais para calcular não somente áreas de figuras planas, mas também áreas de superfícies, assim como volumes de sólidos. Ele considerava o círculo como uma figura composta por uma infinidade de triângulos com vértices no centro e a esfera como um corpo composto por uma infinidade de pirâmides. Seus cálculos surgiram com a necessidade, dentre outras, de determinar áreas de setores. Conforme Baron (1985b), Kepler e Galileu[76] teriam sido os primeiros a abandonar a estrutura de demonstração elaborada por Arquimedes ao adotar o uso dos indivisíveis ou dos infinitésimos.

Entre os métodos que utilizavam indivisíveis, um dos mais populares foi o desenvolvido por Bonaventura Cavalieri (1598-1647). De acordo com Ríbnikov (1987), esse método tinha como objetivo encontrar as medidas de figuras planas e corpos sólidos com base na ideia de que tanto umas como as outras eram compostas por elementos que possuíam uma dimensão a menos. Figuras, portanto, eram formadas por segmentos de retas, em quantidade infinita, traçados paralelamente a uma reta diretriz chamada *regula*. Essas retas estariam compreendidas entre duas tangentes paralelas, das quais a regula poderia ser tomada como uma delas. O mesmo ocorre com corpos geométricos, que seriam compostos por uma infinidade de planos. Ríbnikov (1987, p. 175) entende que a essência da geometria dos indivisíveis em Cavalieri pode ser descrita da seguinte maneira: "as figuras planas e os corpos se relacionam entre si como todos seus indivisíveis tomados em conjunto; se os indivisíveis se encontram em uma mesma relação um com outro, então a relação entre as áreas das figuras correspondentes (ou os volumes dos corpos) é igual a essa relação".[77] Com base nisso, Cavalieri pôde relacionar

[76] É possível citar também Stevin.

[77] "[…] las figuras planas y los cuerpos se relacionan entre sí como todos sus indivisibles tomados en conjunto; si los indivisibles se encuentran em una misma relación uno con otro, entonces la relación entre las áreas de las figuras correspondientes (o los volúmenes de los cuerpos) es igual a esta relación".

as potências dos indivisíveis entre si, conforme a parte IV do livro *Exercitationes geometricae sex – Proposição XXI*. Expomos a referida proposição e demonstração a seguir:

> Proposição XXI. Na mesma figura a mesma regra: todos os cubos do paralelogramo AD serão o quádruplo de todos os cubos de cada um dos ditos triângulos ACF, FDC. Agora a.c.[78] dos AD são o produto de a.l. AD por a.s. AD, e este está para o produto de a.l. de AD por a.s. do triângulo FDC, assim como a.s. do paralelogramo AD está para a.s. do triângulo FDC (pois possuem alturas iguais, a saber a.l. AD), e esta razão é 3. Então, a.c. de AD são iguais a três vezes o produto de a.l. de AD por a.s. do triângulo FDC, e este é igual ao produto de a.l. do triângulo ACF por a.s. do triângulo FDC mais o produto de a.l. do triângulo FDC por a.s. do mesmo triângulo FDC, e este é igual a a.c. do triângulo FDC. Então a.c. de AD será três vezes a soma de a.c. do triângulo FDC e o produto de a.l do triângulo ACD por a.s. do triângulo FDC. Se agora decompormos a.c. de AD em suas partes, então obteremos a.c. de ACF mais a.c. de FDC mais três vezes o produto de a.l. do triângulo FDC por a.s. do triângulo ACF mais três vezes o produto de a.l. do triângulo ACF por a.s. do triângulo FDC. Mas três vezes o produto de a.l. do triângulo ACF por a.s. do triângulo FDC é igual a três vezes o mesmo produto. Se o descartarmos então do que descartamos, ainda permanece. Logo, a.c. de ACF mais a.c. de FDC é igual a três vezes o produto de a.l. do triângulo FDC por a.s. do triângulo FAC são iguais a três vezes a.c. do triângulo FDC. Agora a.c. do triângulo ACF mais a.c. do triângulo FDC são iguais a duas vezes a.c. do triangulo FDC desde que a.c. do triângulo ACF será igual a a.c. do triângulo FCD. Então três vezes o produto de a.l. do triângulo ACF por a.s. do triângulo FCD junto com três vezes o produto de a.l. do triângulo FCD por a.l. do triângulo FAC e a.c. dos triângulos ACF, FDC, que é a.c. do paralelogramo AD, são iguais ao quádruplo de a.c. do triângulo FDC (ou triângulo FAC). Isto é assim porque o produto de a.l. de FDC por a.s. de FDC é igual ao produto de a.l. de FDC por a.s. de ACF, e isto é assim por causa da igualdade de retas e seus quadrados nos triângulos FDC, ACF. Assim três vezes o produto de a.l. de ACF por a.s. de FDC são iguais a três vezes o produto de FDC por a.s. de ACF. Isto torna clara a demonstração (Cavalieri, 1647 *apud* Silva *et al*., 2021, p. 65).[79]
>
> 

Para fins expositivos, adotaremos as indicações de Struik (1986), com adoção da notação atual para descrever o raciocínio utilizado por Cavalieri. O enunciado afirma que a área do paralelogramo $AFCD$ é o dobro da área do triângulo AFC ou CDF. Da figura, é possível concluir que $NE//BM//AF$ e $HE = BM$. Desse modo, HE somado com NH é igual a AF. Consideramos $HE = x$, $NH = y$ e $AF = a$, o que nos leva a afirmar que $x + y = a$. Ao tomarmos todos os segmentos HE e NH, ou seja, NE, entre AF a CD, teremos $\sum x + \sum y = \sum a$. Nota-se que a cada linha NH corresponde apenas um único segmento $(AF - BM)$. Como $HE = BM$, teremos também $\sum x = \sum y$, o que nos leva a conclusão: $\sum x = \frac{1}{2}\sum a$. Além disso,

---

[78] Conforme Silva *et al*. (2021), por a.c., a.l., e a.s. entende-se, respectivamente, *todos os cubos (all cubes), todas as retas (all lines)* e *todos os quadrados (all squares)*. No original, Cavalieri usa a expressão *omnes linae*, referindo-se a todas as linhas, bem como às outras.

[79] Optamos, assim como Silva *et al*. (2021), por posicionar a figura no mesmo local em que ela se encontra no texto original de Cavalieri.

sabemos que $\sum a$ é a área do paralelogramo $AFCD$ e $\sum x$ é a área do triângulo AFC. Ao utilizar a estrutura e a notação moderna de integral, Struik (1986) introduz o símbolo Δx, o que possibilita a afirmação: $(x + y)\Delta x = a\Delta x$ e, então, $\sum x\Delta x = \frac{1}{2}\sum a\,\Delta x$. Essa igualdade pode ser transformada em outra $\sum x\Delta x = \frac{1}{2}\sum a\,\Delta x = \frac{1}{2}a\sum \Delta x$, pois a representa a base do triângulo *AFC*. Desse modo, é possível concluir que $\sum x\Delta x = \frac{1}{2}\sum a\,\Delta x = \frac{1}{2}a\sum \Delta x = \frac{1}{2}a^2$.

Struik (1986) defende que o processo desenvolvido por Cavalieri, nessa demonstração, equivale à fórmula $\int_0^a x dx = \frac{1}{2}a^2$, utilizada em nosso tempo. Entretanto, apesar das semelhanças, é indispensável destacar as diferenças, como, por exemplo, a concepção de indivisível e a natureza estritamente geométrica da proposição. Feita essa ressalva, continuemos com a exposição da demonstração da *proposição XXI*.

Realizado esse primeiro movimento de estabelecimento de relações, é possível provar a proposição $\sum a^3 = 4\sum x^3 = 4\sum y^3$. Com esse intuito, Cavalieri estabelece as igualdades: $\frac{\sum a(x+y)^2}{\sum ax^2} = \frac{\sum (x+y)^2}{\sum x^2} = \frac{\sum a^2}{\sum x^2} = 3$. Decorrente dela, é possível estabelecer o seguinte raciocínio:

$$\sum (x + y)^3 = \sum a(x + y)^2 = 3\sum ax^2 = 3\sum (x + y)x^2$$

$$\sum (x + y)^3 = 3\sum yx^2 + 3\sum x^3$$

$$\sum (x + y)^3 + \sum y^3 + \sum x^3 + 3\sum y^2x + 3\sum x^2y = 3\sum yx^2 + 3\sum x^3$$

$$\sum x^3 + \sum y^3 + 3\sum y^2x = 3\sum x^3$$

$$\sum x^3 + \sum y^3 = 2\sum y^3$$

$$\sum x^3 + \sum y^3 + 3\sum xy^2 + 3\sum x^2y = 4\sum y^3 = \sum (x + y)^3 = \sum a^3$$

$$\sum xy^2 = \sum x^2y$$

O matemático italiano generalizou esse resultado para um número natural n qualquer. Entretanto, conforme Ríbnikov (1987), apesar da influência e da sua eficiência na resolução de determinados problemas da época, o seu método apresentava alguns inconvenientes: 1) não era adequado para o cálculo do comprimento de curvas, pois os indivisíveis correspondentes a elas não possuíam dimensão; 2) o conceito de indivisível era utilizado sem ter sido claramente definido, o que, devido à impossibilidade de uma explicação racionalmente coerente a ser fornecida pelo autor, gerava um consenso de que a teoria padecia de falta de fundamentos; 3) por ser um representante dos teóricos de sua época, na Europa ocidental, evitava utilizar métodos e simbolismo algébrico.

No que se refere ao segundo ponto destacado por Ríbnikov (1987), cabe evidenciar que os métodos que envolviam os indivisíveis sofreram diversas críticas devido à sua natureza, considerada "misteriosa". Em uma resposta a Guldin[80], que defendia a impossibilidade de formar uma área ou volume por meio de um conjunto de elementos sem espessura, Cavalieri introduz uma concepção cinemática segundo a qual os indivisíveis, em seu movimento de fluência, formavam as áreas e os volumes. Tal justificativa não foi considerada convincente, o que impediu a continuidade de disseminação dos trabalhos de Cavalieri.

No período do Renascimento, ocorreu a transformação da álgebra por meio do desenvolvimento da álgebra simbólica, como resultado da apropriação do nível retórico próprio dos árabes pelos europeus. Essa ferramenta se torna bastante útil na exploração e elaboração de uma imagem teórica e matemática do movimento em geral, principalmente com o desenvolvimento de uma nova geometria de cunho analítico por René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665). Conforme Struik (1989, p. 162), o desenvolvimento do Cálculo, como parte do desenvolvimento geral da matemática,

> [...] ocorreu num ambiente intelectual no qual os pensadores se iam libertando da antiga visão aristotélica da natureza. Aristóteles, insistindo nas qualidades e na teleologia, tornara-se completamente inadequado num mundo onde a medição, os cálculos, a engenharia e a quantidade, em geral, com as suas relações causais, se tornavam cada vez mais importantes. Um novo método de aproximação da natureza e do homem era necessário para os círculos mais avançados e, consequentemente, uma nova matemática, que se haveria de tornar o exemplo clássico do pensamento quantitativo e lógico.

Nesse contexto, a Geometria Analítica de Descartes é elaborada como um elemento de sua filosofia. Ele buscou um método geral que facilitasse as descobertas científicas para encontrar a "*verdade*". Teve por base as ciências que, na época, possuíam sistematicidade e algum grau de coerência, a astronomia e a mecânica. Como elas tinham a matemática como uma peça central para a sua compreensão, entende que a matemática é uma chave geral para apreensão das legalidades do universo. A Geometria Analítica se torna, portanto, uma expressão do seu método de unificação, no caso, entre geometria e álgebra. O mérito de seu trabalho foi realizar uma aplicação da álgebra do século XVI à análise geométrica, com o alargamento do seu campo de atuação. Ademais, Descartes, ao tomar um segmento de reta como unidade, representou as cinco operações básicas da aritmética em um meio geométrico, o que possibilita a superação da homogeneidade das grandezas, até então estabelecida na geometria euclidiana

[80] Paul Guldin (1577-1643) – matemático e astrônomo suíço.

(Roque, 2012). O produto das medidas de dois segmentos, por exemplo, começa a ser interpretado com outro segmento e não mais, necessariamente, um retângulo. Isso permitiu, também, a vinculação da aritmética com a geometria. Fermat, por sua vez, desenvolveu, concomitantemente a Descartes, uma forma de expressão de problemas geométricos em linguagem algébrica.

Conforme Boyer (1992), com essa tendência de articulação entre a álgebra e a geometria, a última perde sua hegemonia e, crescentemente, sua popularidade. Tal fato pode ser notado nos trabalhos de John Wallis (1616-1703) que, em um primeiro momento, concebe as linhas como minimamente distintas de paralelogramos com altura infinitamente pequena, ou seja, sem altura, pois considerava que uma quantidade infinitamente pequena não poderia ser entendida como quantidade. A linha possui uma espessura, o que possibilitava que, ao ser multiplicada infinitamente, adquiria-se uma altura igual a uma figura na qual ela estivesse inscrita. Essa concepção foi abandonada em *Arithmetica infinitorum*, de 1655, em que o modelo geométrico na explicação das potências de Cavalieri foi abandonado. De acordo com Ríbnikov (1987), Wallis realiza uma tradução em linguagem aritmética da soma dos indivisíveis, de forma similar ao que, atualmente, representamos como $\int xdx$ – até então interpretado como a relação de potência dos indivisíveis –, concebendo-a como uma relação entre somas de números. O processo de Wallis é indutivo e parte das seguintes relações:

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2};\qquad \frac{0+1+2}{2+2+2}=\frac{1}{2};\qquad \frac{0+1+2+3}{3+3+3+3}=\frac{1}{2};\ldots;\ \frac{0+1+2+3+\cdots+n}{n.(n+1)}=\frac{1}{2}$$

Em um segundo momento, altera-as do seguinte modo:

$$\frac{0^2+1^2}{1^2+1^2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6};\qquad \frac{0^2+1^2+2^2}{2^2+2^2+2^2}=\frac{5}{12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12};\qquad \frac{0^2+1^2+2^2+3^2}{3^2+3^2+3^2+3^2}=\frac{7}{18}=\frac{1}{3}+\frac{1}{18};\ \ldots;$$

$$\frac{0^2+1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^2+\ \ ^2+n^2+n^2+\cdots+n^2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6n}$$

Com n cada vez maior, a razão se aproximava de $\frac{1}{3}$. Como o infinito era entendido e manipulado de modo ambíguo – em algumas situações como um número qualquer e em outras como uma quantidade infinitamente grande –, a passagem de $\frac{1}{6n}$ para $\frac{1}{6.\infty}=\frac{1}{\infty}=0$ era justificada, logo, era permitido considerar a sequência igual a $\frac{1}{3}$. Seguindo essa mesma lógica, para Ríbnikov (1987) o matemático britânico lidou com a relação entre as somas das $2, 3, \ldots, m$ potências dos indivisíveis do seguinte modo:

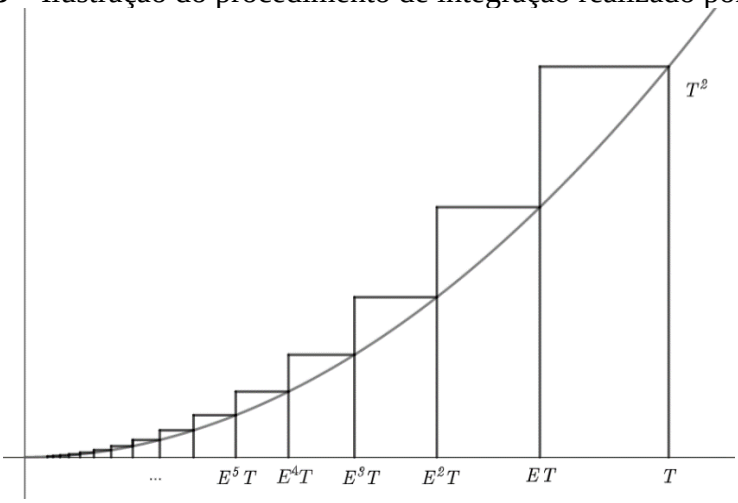
$$\frac{0^k+0^k+0^k+0^k+\cdots+0^k}{n^k+n^k+n^k+n^k+\cdots+n^k}=\frac{1}{k+1}$$

com $(k=2,3,\ldots,m)$ e n crescendo indefinidamente, o que equivale em notação atual a

$$\int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}$$

O método indutivo de Wallis foi criticado por Fermat por se distanciar do rigor exibido nos textos clássicos de matemática dos gregos. Segundo Boyer (1992), Fermat utiliza-se de um método mais adequado para encontrar a área sob as curvas expressas por x^n. Esse método determinaria o que, em notação e conceituação atual, representaríamos como $\int_0^T x^2 dx$. Para realizar tal intento, o matemático francês traçava a curva $y = x^2$ e destacava pontos com abscissas *T, ET, E²T, E³T* e assim sucessivamente, com *E* < 1. Com base nessas coordenadas com abscissas que formam uma progressão geométrica decrescente, ele formava uma sequência de retângulos aproximando a área sob a curva (Figura 5).

Figura 5 – Ilustração do procedimento de integração realizado por Fermat



Fonte: Boyer (1992, p. 14).

Desse modo, a soma das áreas dos retângulos será encontrada por meio da progressão geométrica expressa por

$$T^3(1-E)(1+E^3+E^6+E^9+\cdots) = T^3(1-E)\left(\frac{1}{1-E^3}\right) = \frac{T^3}{1+E+E^2}$$

Ao fazer com que E se aproxime cada vez mais de 1, as larguras dos retângulos tornam-se progressivamente mais próximas de zero e, por consequência, a soma das áreas dos retângulos se aproximam cada vez mais da área da curva, ou seja, de $\frac{T^3}{3}$. Conforme Boyer (1992), Fermat mostra que para todos os valores racionais de n, menos para $n = -1$, temos

$$\int_0^T x^n dx = \frac{T^{n+1}}{n+1}$$

Além dessa contribuição para o cálculo de quadraturas, o matemático francês forneceu um método para determinação de tangentes. Nesse período, o problema das tangentes começou a se transformar qualitativamente com o abandono da interpretação estática e especulativa de parte da matemática, substituída por uma nova significação sob um ponto de vista técnico ou físico (Roque, 2012). É nesse contexto que a direção do movimento de um objeto representativo de sua trajetória começa a ser descrita por uma curva. Tal processo ganha contribuições pelos estudos sobre a tangente de Fermat, sendo realizado por meio do uso de infinitesimais. Para a compreensão do seu método, é mister que, anteriormente, descrevamos como o matemático francês calculava valores máximos e mínimos, pois são os fundamentos para o seu método de cálculo das tangentes.

> SOBRE UM MÉTODO PARA DETERMINAÇÃO DE MÁXIMO E MÍNIMO
> *Dividir o segmento AC em E, de tal modo que o retângulo AE.EC possa ser máximo.*
>
>
>
>
> Seja a reta *AC* dividida em *E*, de tal modo que o retângulo *AE.EC* possa ser um máximo.
> Seja *AC* igual a *B* e um dos segmentos igual a *A*: o outro será *B – A*, e o retângulo, cujo máximo procuramos, será $BA - Aq$[81]. Agora seja *A + E* a primeira parte de B, o resto será *B – A – E* e o retângulo formado pelos segmentos será *BA – Aq + BE – 2AE – Eq*, que consideraremos ser aproximadamente igual a *BA – Aq*. Removendo termos comuns
> *BE ~ 2AE + Eq*
> E dividindo por *E*, *B ~ 2A + E*.
> Desprezando *E*, *B* é igual a *2A*. Para resolver o problema devemos dividir a reta ao meio: é impossível existir um método mais geral (Fermat *apud* Baron, 1985b, p. 36).[82]

Pressupomos que a explicação fornecida por Fermat, devido à proximidade com a representação e com as operações realizadas atualmente, é autossuficiente, desde que sublinhemos apenas alguns aspectos de seu modo de pensamento. Segundo Roque (2012), ao dividir *BE ~ 2AE + Eq* por *E* desprezando-o, na sequência, para encontrar a igualdade *B = 2A*, Fermat se utiliza do processo de *adequação*, atribuído por ele a Diofanto. A adequação se resume a encontrar uma igualdade aproximada, ou como sugere Strømholm (1968, p. 51), uma "*pseudo-igualdade"*. Com base nesse aspecto, Strømholm (1968) defende que não faz sentido afirmar que Fermat considera *E* em alguns momentos como uma quantidade infinitamente pequena e em outros como idêntica a zero – opinião difundida em diversas historiografias.

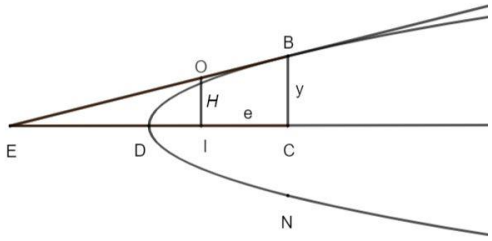
---

[81] O "*q*" é uma abreviação de "*quad*", que no contexto indica o quadrado da magnitude.
[82] A figura foi inserida conforme aparece no próprio texto de Fermat.

Realizados esses destaques, vejamos como Fermat traçava as tangentes em determinados pontos. Para tanto, apoiamo-nos na Figura 6 como forma de ilustração do método:

> SOBRE AS TANGENTES A CURVAS
> Usamos o método acima para determinar a tangente a uma curva em um ponto. Tomemos, por exemplo, a parábola *BDN* com vértice *D*. Consideremos que a tangente à parábola passa por *B* e encontra o diâmetro em *E*. Então, tome qualquer ponto *O* sobre a reta *BE* e trace a ordenada *OI*; também trace a ordenada *BC* no ponto *B;* temos então que *CD/DI* será maior do que *qBC/qOI*, pois o ponto *O* está fora da parábola; mas usando triângulos semelhantes, *qBC/qOI=qCE/qIE*; segue-se daí que *CD/DI* é maior do que *qCE/qIE*. O ponto *B* é dado, logo conhecimento *BC*, o ponto *C* e *CD*; Seja *CD* igual a *D*; seja *CE* igual a *A* e *CI* igual a *E*; temos $\frac{D}{D-E}$ é maior do que $\frac{Aq}{Aq+Eq-2AE}$, e multiplicando os meios e extremos, $D.Aq + D.Eq - 2DAE$ é maior do que $D.Aq + E.Aq$. Seja então os termos aproximadamente iguais, de acordo com o que estabelece o método; removendo termos comuns, temos, $D.Eq \sim 2DAE \sim -Aq.E$, ou, o que dá no mesmo, $D.Eq + Aq.E \sim 2DAE$.
> Dividindo por *E*, $DE + Aq \sim 2DA$.
> Desprezando *DE*, vem *Aq* igual a 2*DA*, e *A* igual a 2*D*.
> Assim, provamos que CE é igual ao dobro de CD, que é o resultado. O método nunca falha: ele pode ser estendido a vários problemas; temos usado também para determinar centros de gravidade de figuras limitadas por retas e curvas assim como de sólidos. Ele une vários outros resultados que podemos descrever adiante se o tempo permitir (Fermat *apud* Baron, 1985b, p. 37).

Figura 6 – Ilustração de apoio para o método de determinação de tangentes de Fermat



Fonte: Baron (1985b, p. 37).

Nesse método, Fermat encontra um ponto E que possui uma relação específica com a curva, portanto, fornece elementos suficientes para traçar a tangente que toca a parábola no ponto B.

Segundo Grabiner (1983a), o contexto – composto pelos métodos de cálculo de máximos e mínimos e de determinação de tangentes de Fermat – seria o primeiro passo em direção ao conceito atual de derivada. Esta, segundo a autora, foi: primeiramente *utilizada*, depois *descoberta*, em seguida *explorada e desenvolvida* e, por fim, *definida*. Tal caracterização pode ser uma ferramenta de exposição importante, no entanto, traz em seu bojo algumas concepções problemáticas acerca da história. A primeira diz respeito ao uso do termo *descoberta* que, conforme discutido no segundo capítulo e contraposto à concepção da

invenção, é uma expressão do platonismo no que se refere aos objetos da matemática. Outro ponto que deve ser sublinhado é a *metáfora do caminhar* na utilização da palavra "passos"[83], como se a história tivesse um percurso único em direção ao conceito de derivada. Conforme abordaremos nas próximas seções, o conceito de derivada pode ser definido de diferentes formas, a depender do sistema conceitual pelo qual é significado.

Antes de seguirmos nosso percurso analítico, vale sublinhar que nesse período alguns matemáticos, entre eles destacamos Evangelista Torricelli (1608-1647), James Gregory (1638-1675) e Isaac Barrow (1630-1677), conheciam a relação entre o processo de construção da tangente em um ponto e o processo de determinação da quadratura de uma curva, ou como chamamos atualmente, o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC). Optamos por abordar essa relação com mais detalhes nos trabalhos de Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), considerados os "criadores" ou "descobridores" do Cálculo.[84]

3.4 A SÍNTESE HISTÓRICA DOS INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS DE APREENSÃO DO MOVIMENTO

O fluxo das ideias na Europa ocidental, bem como o processo de constante transformação da realidade impulsionado pelo capitalismo nascente, proporcionou uma síntese teórica de processos que eram anteriormente abordados em suas singularidades. Nesse contexto, tornam-se relevantes as contribuições teóricas de Newton e Leibniz, considerados os "inventores do Cálculo". Conforme Grabiner (1983a), esse "título" decorre de três razões: 1) estabelecimento das relações entre os métodos existentes para encontrar tangentes, máximos e mínimos, assim como áreas, e sua sintetização em dois conceitos gerais, *derivada* e *integral*; 2) elaboração de notações que possibilitaram a utilização de modo mais funcional e acessível desses conceitos; 3) construção de um argumento para justificar a relação de mútua inversão entre a derivada e a integral. Poderíamos acrescentar uma quarta razão, assinalada por Kleiner (2001): 4) a extensão da aplicabilidade dos métodos do Cálculo.

---

[83] No original lemos: "Historically speaking, there were four steps in the development of today's concept of the derivative, which I list here in chronological order" que pode ser traduzido como "Historicamente falando, houve quatro passos no desenvolvimento do conceito atual de derivada que, eu listo aqui em ordem cronológica" (Grabiner, 1983a, p. 195). Optamos por traduzir "four steps" por "quatro passos", mas outra tradução possível é "quatro degraus", o que acresceria uma visão hierárquica ao desenvolvimento da derivada.

[84] Para maiores informações sobre a relação entre a quadratura e as tangentes nos trabalhos de Torricelli, Barrow e Gregory, consultar Baron (1985b, p. 40-47) e Edwards (1979, p. 138-141).

Entendemos, assim como Rezende (2003), que não há motivos para considerar os dois supracitados pensadores como *inventores* ou *descobridores* do Cálculo, pois, conforme temos argumentado, há uma grande quantidade de elementos e conceitos componentes que foram desenvolvidos durante a história da humanidade, com destaque para o período a partir do século XVI. Entretanto, não há como negar que esse conjunto de contribuições possibilitou a elaboração de novos conhecimentos, os quais permitiram a transformação e a sintetização dos conceitos em sua generalidade, em contraposição à presença da forma fragmentada em diversas instâncias de um mesmo conceito (Kleiner, 2001). De tal modo, o desenvolvimento do Cálculo, que em Newton e Leibniz ganha uma nova qualidade, possui um caráter dialético, assim como todas as instâncias da realidade. Segundo Ríbnikov (1987, p. 189),

> O desenvolvimento dos cálculos matemáticos carrega um caráter dialético claramente expresso. Nos domínios dos cálculos já existentes, transcorre o processo de acumulação de premissas, elementos e partes componentes do novo cálculo. Na sequência, chega o momento quando ocorre uma mudança no método. Surgem trabalhos matemáticos, nos quais os fatos acumulados no domínio dado se reconsideram sob um novo ponto de vista único. O centro de atenção passa dos esforços por resolver problemas independentes ao método mesmo ou grupos de métodos, os quais se formulam explicitamente, se aperfeiçoam e se aplicam. O campo de aplicação do cálculo, surgido de tal maneira, como regra, resulta mais amplo que o campo de origem. Os trabalhos de I. Newton y G. W. Leibniz sobre análise infinitesimal refletem precisamente este ponto de virada na história da análise matemática.[85]

Feita essa ressalva, convém situar o leitor que, na presente seção, abordaremos as formas de pensamento intrínsecas aos modos como esses dois pensadores compreendem o Cálculo. Também daremos atenção aos elementos que desencadeiam a discussão sobre a natureza e validade desse campo de conhecimentos, porém sem focar, como vimos fazendo durante todo o percurso analítico do capítulo, em detalhes biográficos de suas obras além daqueles considerados essenciais.

O desenvolvimento do Cálculo, em Newton, insere-se no contexto dos seus estudos sobre a mecânica, apresentada em *Philosophiae naturalis principia mathematica,* publicada em 1687. Essa obra, que possuía uma fundamentação axiomática, continha uma exposição

[85] "El desarrollo de los cálculos matemáticos porta un carácter dialéctico expresado claramente. En los dominios de los cálculos ya existentes transcurre el proceso de acumulación de premisas, elementos y partes componentes del nuevo cálculo. A continuación, llega el momento cuando ocurre el viraje em el método. Surgen trabajos matemáticos, em los cuales hechos acumulados en un dominio dado se reconsideran desde un nuevo punto de vista único. El centro de atención pasa de los esfuerzos por resolver problemas independientes al método mismo o grupos de métodos, los cuales se formulan explícitamente, se perfeccionan y se aplican. El campo de aplicación del cálculo surgido de tal manera, como regla, resulta más amplio que el campo de origen. Los trabajos de I. Newton y G. W. Leibniz sobre el análisis infinitesimal reflejan precisamente este punto de viraje en la historia del análisis matemático".

dedutivo-matemática de determinadas leis da física – por exemplo, a lei da gravidade – e demonstrações de leis empíricas – como a demonstração da órbita dos planetas. Em duas obras anteriores – *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas,* de 1669, e *Methodus fluxionum et serierum infinitarum*, de 1671, publicada em 1736 –, o pensador inglês estabeleceu algumas regras de quadraturas no cálculo de integrais e a sua *teoria das fluxões.*[86] Essa, que substituiu uma primeira abordagem do Cálculo com base no conceito de infinitesimal, parte de uma abordagem geométrica (Kleiner, 2001). É expressa na obra de 1671 com o intuito de fundamentação dos processos e cálculos realizados no conjunto de seus trabalhos.

Primeiramente, é preciso destacar que Newton tratava de uma diversidade de problemas fundamentado na ideia da geração de curva por meio do movimento. Seu método foi transformado no estudo das "grandezas variáveis, introduzidas como abstração das diferentes formas do movimento mecânico contínuo"[87] (Ríbnikov, 1987, p. 191). Nele, Newton trabalha com dois conceitos centrais: as *fluxões* e os *fluentes*. Ele denomina de *fluentes* as quantidades variáveis que se modificam sobre uma mudança contínua e, implicitamente, consideradas em relação de dependência com um tempo contínuo. Por sua vez, concebe as *fluxões* como as taxas de variação instantânea, ou velocidade instantânea, dessas grandezas variáveis, denotadas por um ponto acima da variável. Cabe ressaltar que, não obstante Newton estabelecer uma relação entre álgebra e geometria para o estudo de curvas, ele não trabalha com o conceito de função.

Vejamos como o físico britânico encontra uma relação entre as fluxões das quantidades variáveis quando existe uma relação conhecida entre os fluentes. Citamos, como exemplo, a equação $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, em que x e y são considerados fluentes e a uma quantidade determinada e conhecida. O pensador inglês inicia o processo de determinação da relação entre as fluxões substituindo x por $x + \dot{x}o$ e y por $y + \dot{y}o$. Destaca-se que $\dot{x}$ e $\dot{y}$ são as velocidades instantâneas dos fluentes x e y no ponto (x, y), enquanto o é um período de tempo infinitamente pequeno. Por consequência, $\dot{x}o$ e $\dot{y}o$ representam um deslocamento – velocidade *x* tempo (Kleiner, 2001). Como as velocidades dos fluentes são relacionadas a um tempo, o produto da velocidade pelo tempo infinitesimal o é também chamado de momento (Baron; Bos, 1985). Sobre essas bases, o matemático inglês realiza o seguinte raciocínio:

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

[86] Baron e Bos (1985) indicam quatro trabalhos como aqueles em que estariam presentes as principais contribuições de Newton para o Cálculo. São eles os três indicados no parágrafo, mais *Tractatus de quadratura curvarum*, de 1693, publicado em 1704 como um apêndice à *Óptica*.

[87] "[…] estudian las magnitudes variables, introducidas como abstracción de las diferentes formas del movimiento mecánico continuo".

$$(x + \dot{x}o)^3 - a(x + \dot{x}o)^2 + a(x + \dot{x}o)(y + \dot{y}o) - (y + \dot{y}o)^3 = 0$$

$$x^3 + x^2\dot{x}o + x(\dot{x}o)^2 + (\dot{x}o)^3 - a(x^2 + 2x\dot{x}o + (\dot{x}o)^2) + a(xy + x\dot{y}o + \dot{x}oy + \dot{x}\dot{y}o^2) - (y^3 + y^2\dot{y}o + y(\dot{y}o)^2 + (\dot{y}o)^3) = 0$$

Como $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, temos

$$x^2\dot{x}o + x(\dot{x}o)^2 + (\dot{x}o)^3 - 2ax\dot{x}o - a(\dot{x}o)^2 + ax\dot{y}o + a\dot{x}oy + a\dot{x}\dot{y}o^2 - y^2\dot{y}o - (\dot{y}o)^2 + (\dot{y}o)^3 = 0$$

Na sequência, Newton divide os dois lados da equação por o e despreza os termos restantes que o contenham como fator, pois são considerados uma quantidade infinitamente pequena. A nova equação será igual a $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0$, que relaciona as fluxões dos fluentes x e y que variam em função do tempo. Entretanto, se fosse necessário encontrar a relação entre as fluxões dos fluentes – na necessidade de determinar a tangente em um ponto específico ou ainda os pontos de máximo e/ou de mínimo da relação entre os dois fluentes –, bastaria encontrar a razão entre as fluxões. Conforme Kleiner (2001), esse procedimento do cálculo diferencial newtoniano é geral, o que forneceu, ao matemático inglês, um instrumental para que pudesse determinar a tangente de qualquer curva algébrica.

A despeito de sua generalidade, a interpretação da teoria das fluxões causava incômodos a Newton devido a certos erros decorrentes do uso do o como quantidade infinitamente pequena. Com fins didáticos, nossa exposição da problemática se apoiará em noções ou conceitos que não haviam sido elaborados no século XVII e XVIII, como o de função. É possível perceber que o processo descrito anteriormente possibilita encontrar a tangente em um ponto (x, y) de uma curva $f(x, y) = 0$. Isso porque, se $\dot{x}$ é a velocidade instantânea de x e $\dot{y}$ a velocidade instantânea de y no ponto $\mathrm{P}(x, y)$, $\dot{y}/\dot{x}$ representa o coeficiente angular da reta tangente no referido ponto, ou seja, o gradiente em P. Entretanto, como $\mathrm{P}(x, y), \neq \mathrm{P}_1(x + \dot{x}o, y + \dot{y}o)$ todos os casos em que $o \neq 0$ será marcado por uma diferença envolvida no processo, pois não há identificação entre os incrementos pequenos da curva e da tangente (Baron; Bos, 1985). A fim de buscar uma interpretação que pudesse superar essa problemática, Newton elabora uma nova fundamentação para seu processo de diferenciação, formulado sobre a expressão *primeiras e últimas razões*[88]. Aqui, ele interpreta de maneira distinta o contínuo, ao afirmar que as quantidades matemáticas não são mais consideradas como uma composição de partes extremamente pequenas, mas geradas por um

[88] Devido à similaridade com o conceito de limite, Smith (1958, p. 694) denomina essa variação do cálculo newtoniano de "*método dos limites*". Novamente, chamamos a atenção para o cuidado com uma aproximação não tematizada.

movimento contínuo de um ponto. Explicita-se, portanto, uma visão dinâmica da matemática que está imbricada às suas considerações sobre o movimento. A justificação dessa concepção se "baseia na natureza e pode ser vista dia a dia no movimento dos corpos" (Newton *apud* Baron; Bos, 1985, p. 31).

De acordo com Rezende (2003), a modificação realizada por Newton na nova formulação de seu método pode ser resumida nos seguintes processos: 1) considerar $y = y(x)$ e o incremento o de x; 2) substituir x por $x + o$ na expressão $y(x)$ e subtrair os próprios termos de $y(x)$ para que seja determinada a variação Δy de y oriunda da variação o de x; 3) estabelecer a proporção de o para Δy, do mesmo modo que 1 para $\frac{\Delta y}{o}$; 4) dividir Δy por o para, então, encontrar a *primeira razão*; 5) por fim, fazer com que o se aproxime continuamente de zero para determinar a *última razão*.

Vejamos como isso se aplica no caso do polinômio x^n, conforme exemplo de Newton (*apud* Baron; Bos, 1985, p. 34):

> Suponhamos que a quantidade *x* flua uniformemente. Encontre a fluxão de x^n. No mesmo intervalo de tempo em que a quantidade x torna-se $x + o$ pelo fluxo, a quantidade x^n torna-se $\overline{x + o|n}$, quer dizer, pelo método das séries infinitas $x^n + nox^{n-1} + \frac{nn-n}{2}oox^{n-2} +$, ... e os aumentos o e $nox^{n-1} + \frac{nn-n}{2}oox^{n-2} +$, ... estão relacionados entre si como 1 e $nx^{n-1} + \frac{nn-n}{2}x^{n-2} +$, ... Agora faça aqueles aumentos desaparecerem e a última razão será de 1 a nx^{n-1}; portanto, a fluxão da quantidade *x* está relacionada à fluxão da quantidade x^n como 1 a nx^{n-1}.

No que tange às integrais, em geral, Newton as determinava como um problema inverso do problema da diferenciação, isto é, utilizava a noção de antiderivada. Portanto, se a derivada parte do problema da determinação da velocidade de movimento em um momento de tempo dado com base em uma trajetória conhecida, a integral era concebida no processo de procura pela trajetória percorrida em um tempo dado e uma velocidade conhecida. Utilizamo-nos das palavras de Meneguetti (2010, p. 100) para descrever a interpretação, em um contexto geométrico, da integral por Newton:

> Trace uma curva de modo que, para a abscissa x e a ordenada y a área, limitada pela curva entre o ponto de abscissa 0 e o ponto de abscissa x, seja $z = [\frac{n}{(m+n)}]ax\frac{(m+n)}{n}$. Deixe o momento ou infinitesimal crescente na abscissa ser o. A nova abscissa será então $x + o$ e a área aumentada $z + oy = [\frac{n}{(m+n)}]$ a $(x + o)\frac{(n+m)}{n}$. Se nesta expressão aplicarmos o teorema binomial e o dividirmos por o e, então, omitirmos os termos que ainda contém o o, o resultado será $y = ax\frac{m}{n}$. Isto é, se a área for dada por $z = [\frac{n}{(m+n)}]$

> a $x\frac{(m+n)}{n}$, a curva será $y = ax\frac{m}{n}$. Inversamente, se a curva é $y = ax\frac{m}{n}$, a área será $z = [\frac{n}{(m+n)}]ax\frac{(m+n)}{n}$.

Para que a explicação fique mais clara, vejamos o exemplo utilizado pelo cientista britânico (*apud* Baron; Bos, 1985): Ao considerar $z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ ou $z^2 = \frac{4}{9}x^3$ a área da curva entre $x = 0$ e x, acrescentamos o, um infinitesimal, em x, que resulta em um acréscimo $z + ov$ na área. Logo, $(z + ov)^2 = \frac{4}{9}(x + o)^3 \rightarrow \ z^2 + 2zov + (ov)^2 = \frac{4}{9}(x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3)$. Como $z^2 = \frac{4}{9}x^3$, teremos $2zov + (ov)^2 = \frac{4}{9}(3x^2o + 3xo^2 + o^3)$. Ao dividir toda a equação por o, encontramos $2zv + ov^2 = \frac{4}{9}(3x^2 + 3xo + o^2)$. Do fato de o ser infinitamente pequeno, fazemo-lo igual a zero, logo, a equação anterior será igual a $2zv = \frac{4}{9}(3x^2) \rightarrow zv = \frac{2}{3}x^2$. De acordo com Baron e Bos (1985), no passo seguinte, Newton supõe que $f(x) < v < f(x + o)$, de tal modo que ov é igual ao acréscimo de área sob a curva quando realiza o acréscimo de o na abscissa. Como isso sempre é possível em uma curva simplesmente convexa, a equação formada em seguida era exata. Portanto, tem-se $zy = \frac{2}{3}x^2 \rightarrow \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}y = \frac{2}{3}x^2 \rightarrow y = \frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}} = x^{\frac{1}{2}}$. Em suma, conhecida a área $z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, é possível determinar a equação da curva $y = x^{\frac{1}{2}}$, e sua relação inversa é válida. Newton, portanto, estabelece um processo que não se vincula à determinação de soma de áreas infinitesimais, mas sim pela consideração do crescimento momentâneo do ponto em questão. Ou seja, ele determina a razão de variação da área para, então, calcular a área por antidiferenciação (Meneguetti, 2010).

Não obstante, o matemático inglês, influenciado por Wallis, recorreu ao uso de séries infinitas para encontrar as quadraturas de diversas curvas que ainda não haviam sido calculadas, entre elas muitas áreas do que, atualmente, denominamos funções transcendentes. Por exemplo, para encontrar a área sob curvas, tais como a circunferência e a hipérbole, Newton estabelece uma relação entre a curva e as quadraturas conhecidas do modo que é apresentado no Quadro 1:[89]

[89] Assim como em Baron e Bos (1985, p. 16), utilizaremos notação atual e organizaremos a exposição por meio de uma tabela.

Quadro 1 – Organização da relação entre curva, quadratura e integral das curvas de tipo $(1-x^2)^{n/2}$ com $n \in \mathbb{N}$

Curva	Quadratura	Integral
$(1-x^2)^{0/2}$	x	$\int_0^x (1-x^2)^{0/2}dx$
$(1-x^2)^{1/2}$	?	$\int_0^x (1-x^2)^{1/2}dx$
$(1-x^2)^{2/2}$	$x-\frac{1}{3}x^3$	$\int_0^x (1-x^2)^{2/2}dx$
$(1-x^2)^{3/2}$	?	$\int_0^x (1-x^2)^{3/2}dx$
$(1-x^2)^{4/2}$	$x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5$	$\int_0^x (1-x^2)^{4/2}dx$
$(1-x^2)^{5/2}$	?	$\int_0^x (1-x^2)^{5/2}dx$
$(1-x^2)^{6/2}$	$x-\frac{3}{3}x^3+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7$	$\int_0^x (1-x^2)^{6/2}dx$

Fonte: Baron e Bos (1985, p. 16).

Com base nos resultados conhecidos, o matemático inglês identificou uma regularidade nos coeficientes das expressões que indicam a quadratura. Como é possível perceber, o coeficiente dos primeiros termos é sempre 1, e o dos segundos é uma progressão aritmética – $0\left(\frac{1}{3}\right), 1\left(\frac{1}{3}\right), 2\left(\frac{1}{3}\right), 3\left(\frac{1}{3}\right), \ldots$ –, o que indica que os coeficientes das séries intercaladas deverão ser $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right), \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right), \frac{5}{2}\left(\frac{1}{3}\right)$, ...;. Pode-se perceber que os denominadores dos termos em sequência formam uma progressão aritmética – $1, 3, 5, 7, \ldots$ –, enquanto os numeradores são dados pelos algarismos das potências de 11, com expoente inteiro não nulo – $1;\ 1, 1;\ 1, 2, 1;\ 1, 3, 3, 1;\ 1, 4, 6, 4, 1;$[90]. Estas sequências de números representam o triângulo de Pascal, também conhecido naquela época. Para encontrar os numeradores, portanto, é necessário identificar o padrão pelo qual a sequência desses números é formada, pois é imprescindível saber quais são os expoentes que não representam uma linha do triângulo de Pascal, a fim de interpolar outra entre elas. Newton determina-a pela seguinte fórmula: $\frac{m-0}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}$, ...;. Desse modo, na quadratura de $(1-x^2)^{1/2}$, teremos $m=\frac{1}{2}$, o primeiro coeficiente igual a 1, o segundo a $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)$, o terceiro – com aplicação da fórmula – será igual a

[90] Para além do expoente quatro, é necessário realizar algumas alterações.

$\frac{1}{2}.\frac{\frac{1}{2}-1}{2} = -\frac{1}{8}$, o quarto a $-\frac{1}{8}.\frac{\frac{1}{2}-2}{3} = \frac{1}{16}$, e assim, por diante. Fundamentado nisso, Newton afirma que a série que representa a integral $\int_0^x (1-x^2)^{1/2} dx$, será $\frac{x}{1} - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3} - \frac{\frac{1}{8}x^5}{5} - \frac{\frac{1}{16}x^7}{7} - \cdots$.

Essa forma de expansão, com base na interpolação, permitiu a Newton determinar as quadraturas de hipérboles. O estabelecimento de uma relação entre a hipérbole $y = \frac{1}{1+x}$ e $\ln(1+x)$ – devido à propriedade da área da hipérbole, indicadora de que ao aumentar as abscissas geometricamente a área decresce aritmeticamente – possibilitou vincular a expansão de $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$; com $ln(1+x) = x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$;. Portanto, identificou que a integral de $y = \frac{1}{1+x}$ é $ln(1+x)$.

Concomitantemente[91], Leibniz enfrentou problemas semelhantes sob outra perspectiva. O matemático e filósofo alemão determina a tangente em um ponto de uma curva apoiado na ideia de que a razão da diferença entre as ordenadas e as abscissas, quando essas diferenças se tornam infinitamente pequenas, a determinaria. Também concebeu que a quadratura está relacionada à soma das ordenadas ou retângulos com base no eixo das abscissas, equivalente a intervalos infinitesimais. Esses problemas inserem-se na busca pela formulação, acerca da *characteristica generalis*, de uma linguagem simbólica geral com certas regras lógicas que garantiriam a veracidade de um argumento (Baron; Bos, 1985). No que tange aos seus trabalhos relativos ao Cálculo, por sua elaboração no seio de uma tradição analítica iniciada por Viète[92], havia uma preocupação de que a linguagem utilizada fosse entendida de uma forma algébrica. Nesse contexto, denominou os seus trabalhos de *análise de indivisíveis e infinitos*, com a pretensão de "mostrar que novos métodos eram necessários para estudar relações entre grandezas que não podiam ser tratadas com a álgebra ordinária, caso da relação de uma curva com sua tangente ou sua normal" (Roque, 2012, p. 356).

A gênese do Cálculo leibniziano é encontrada no estudo de séries e triângulos, mais especificamente da série da sequência de diferenças. A soma e a diferença de sequências passaram a ser entendidas como operações consideradas inversas. A utilização desse conhecimento na geometria conduziu à abordagem do problema das quadraturas pela adição de sequência das ordenadas, dispostas de modo equidistantes. Conforme Baron e Bos (1985), ao adotar a distância igual a 1, tem-se que a soma das ordenadas será próxima da área, enquanto

[91] A celeuma sobre a prioridade em relação à elaboração do Cálculo foi um episódio bastante discutido na história da matemática. Para uma análise aprofundada dessa disputa, consultar Bardi (2016).
[92] François Viète (1540-1603) – matemático francês.

as diferenças consecutivas dessas ordenadas, na sequência, aproximam-se do declive da curva. Ao diminuir a distância entre as ordenadas, há um processo de aumento da sua quantidade e uma maior precisão na determinação da área e da inclinação da tangente, de tal modo que, ao tornar a distância infinitamente pequena, elas, enfim, coincidirão. Isso permite que Leibniz estabeleça uma relação entre o cálculo das diferenças finitas e das somas, com a quadratura de curvas e a determinação das tangentes. Para Bos (1974), a teoria das sequências infinitas vinculadas aos problemas sobre curvas mostrou que eram úteis à aproximação dessas curvas por polígonos que possuem como vértices as abscissas e ordenadas. Assim, "*os praticantes do cálculo LEIBNIZIANO enfatizam que a chave do cálculo estava em conceber a curva como um polígono infinitangular*"[93] (Bos, 1974, p. 14).

A significação numérica desse processo foi estabelecida pela extrapolação[*94*] das sequências finitas, ao considerar a sequência ordenada de variáveis que possui um número infinito de termos e a distância entre eles, representada pela sequência das diferenças, infinitamente pequena. Esses termos são chamados de *diferenciais* (Bos, 1974). Por sua vez, a sequência da soma finita é transformada em um número infinito de termos infinitamente grandes, chamados de *somas*. Tanto diferenciais como somas são considerados variáveis.

Bos (1974) destaca a necessidade de se distinguir, nos trabalhos de Leibniz, o diferencial como variável e a diferenciação como um operador com atribuição de variáveis às variáveis. Conforme o autor,

> [...] o operador Δ, por extrapolação, se transforma em uma diferenciação de operador, indicada pelo símbolo d, que atribui uma variável infinitamente pequena a uma variável finita, por exemplo, dy a y. Similarmente, o operador Σ se transforma, por extrapolação, na soma do operador, indicado pelo símbolo, que atribui a uma variável infinitamente grande uma variável finita, por exemplo $\int y$ a y (Bos, 1974, p. 17).

As diferenciais podem ser consideradas variáveis e dependem de outras envolvidas no problema, que representa, destarte, a diferença infinitamente pequena entre dois valores da variável a que estão vinculadas. O processo de extrapolação, ou seja, transição do finito para o infinito, é justificado pela *lei da continuidade*. Essa lei afirma que "Em qualquer suposta transição, terminando em um termo qualquer, é permitido instituir um raciocínio geral, no qual

---

[93] "[…] *the practitioners of the LEIBNIZIAN calculus emphasized that the key to the calculus was to conceive the curve as an infinitangular polygon"*.

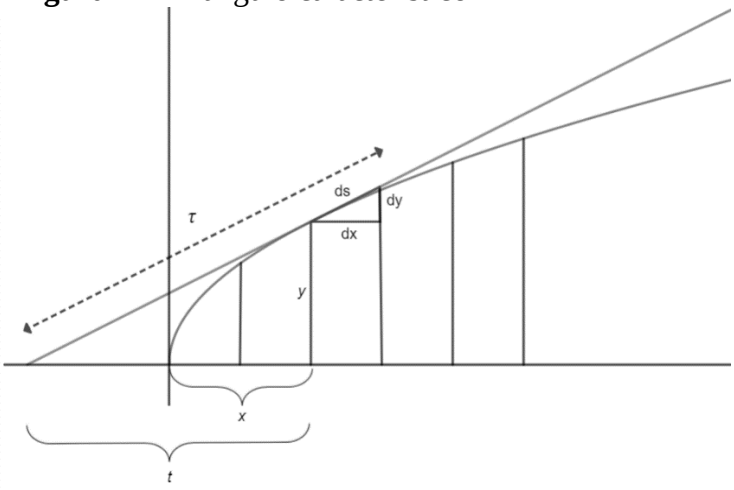
[94] Bos (1974) utiliza-se do termo "*extrapolação*" como uma maneira de evitar qualquer ideia relacionada ao conceito de limite. A extrapolação do cálculo de sequências finitas às sequências infinitas, segundo o autor, é um elemento central para a apropriação dos conceitos fundamentais do cálculo infinitesimal leibniziano.

o termo final pode também ser incluído"[95] (Leibniz, 1687 *apud* Boyer, 1959, p. 217). Com o seu uso, ao realizar manipulações, "a diferença não é assumida ser zero até o cálculo ser depurado tanto quanto é possível por legítimas omissões, e reduzido a razões de quantidades não-evanescentes, e finalmente nós chegamos ao ponto onde aplicamos nosso resultado ao último caso"[96] (Leibniz, 1920 *apud* Boyer, 1959, p. 217-218). Essa lei permite Leibniz afirmar que certas "*ficções*", consideradas ausentes de sentido nos casos limites, como por exemplo, os infinitésimos, possam ser manipuladas por meios simbólicos com a manutenção do argumento de que elas descrevem aplicáveis (Bos, 1974).

Uma outra lei que o auxilia na justificação dos seus métodos é a *lei da homogeneidade*. Sua essência se refere à consideração de que uma quantidade infinitamente pequena em relação à outra pode ser negligenciada na sua comparação. Logo, essa lei permite afirmar que $x + dx = x$ e $dx + ddx = dx$.

Com base nesses princípios teóricos e para tornar seu método geral vinculado a um conjunto maior de curvas, Leibniz utiliza do triângulo característico (Figura 7 e Figura 8), elaborado por Pascal[97].

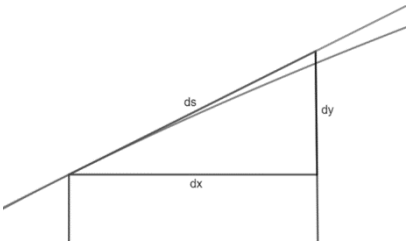
Figura 7 – Triângulo característico



Fonte: Baron e Bos (1985, p. 58).

[95] "In any supposed transition, ending in any terminus, it is permissible to institute a general reasoning, in which the final terminus may also be included."
[96] "the difference is not assumed to be zero until the calculation is purged as far as is possible by legitimate omissions, and reduced to ratios of nonevanescent quantities, and we finally come to the point where we apply our result to the ultimate case."
[97] Blaise Pascal (1623-1662) – pensador francês que contribuiu em várias áreas, em especial na matemática.

Figura 8 – Ampliação do triângulo característico



Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

O triângulo característico possibilita a apropriação de determinadas relações entre os elementos das curvas. Enquanto dx e dy são, respectivamente, diferenciais de x e y, ds é o diferencial do comprimento de arco s que coincide com a tangente da curva no ponto de abscissa x e ordenada y, no caso de o segmento ds ser prolongado infinitamente. Nesse triângulo, valem as relações $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ e $dx{:}\, dy{:}\, ds = t{:}\, y{:}\tau$. Ao adotar essas relações, a construção da tangente segue da determinação da razão $dy{:}\, dx$. Tal razão apresenta uma particularidade que se desdobra da distinção entre o diferencial e a diferenciação fundamentada na especificação dos conceitos de razão e fração.

A especificação dos supracitados conceitos – razão e fração –, segundo Roque (2012), tem como base a possibilidade de tornar independente a relação entre duas de suas quantidades. A fração era entendida como um valor que se obtém pela divisão de duas outras quantidades, enquanto a razão, apresentando uma natureza qualitativa, é independente dos termos que a compõem. Nesse sentido, o quociente de duas diferenciais $\frac{dy}{dx}$ não se refere à

> [...] divisão infundada de duas quantidades infinitamente pequenas dy e dx, mas de uma relação cujo estatuto é independente do estatuto dos termos que a compõem. Mesmo não sendo uma quantidade, essa relação pode ser expressa por uma função, que é o que acontece quando escrevemos $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Leibniz não chegou a enunciar desse modo, pois não propôs um conceito de função. [...]. As diferenciais dx e dy seriam infinitesimais não relacionadas. Mas, concretamente, Leibniz praticava um cálculo diferencial sem diferenciais, operando sobre as relações entre essas diferenciais, relações consideradas entidades autônomas e submetidas a regras próprias. A relação $\frac{dy}{dx}$ entre duas diferenciais não é uma diferencial; é resultado de uma operação de diferenciação (e as derivadas de ordens superiores resultarão da mesma operação reiterada). Logo, essa relação não pode ser entendida como um quociente entre duas quantidades infinitamente pequenas, não atribuíveis ou evanescentes, o que seria contraditório com a impossibilidade de dividir 0 por 0 (Roque, 2012, p. 362-363).

Nessa direção, Bos (1974) defende que o cálculo leibniziano se ergue sobre a ideia de diferenciabilidade, e não de diferencial. Para Roque (2012), essa constatação conduz à atribuição de importância à expressão "*diferenciar em relação à* [...]", como uma forma de

expressar a relação de variabilidade e interdependência entre as variáveis. “Escolher a variável em relação à qual se quer diferenciar indica uma dupla variação, uma variabilidade combinada que será associada à relação diferencial, fundamento do cálculo infinitesimal de Leibniz” (Roque, 2012, p. 363).

Com base nessas considerações, convém expor como Leibniz concebe a determinação de uma tangente, o da hipérbole $xy - a^2 = 0$[98]. Diferencia-se a equação com emprego das regras determinadas por Leibniz

$$d(xy - a^2) = d0$$
$$d(xy) - d(a^2) = d0$$
$$xdy + ydx - 0 = 0$$

Ao calcular a razão $y{:}\, t = dy{:}\, dx = -\frac{y}{x}$, obtém-se $t = -x$, o que possibilita a construção da tangente.

No caso das integrais, Leibniz entende que $\int ydx$ é a representação da soma de retângulos infinitamente pequenos de área $yxdx$. Conforme Baron e Bos (1985), o matemático e filósofo alemão não indicava o intervalo de integração que, usualmente, tinha como fronteira esquerda o eixo das ordenadas e uma abscissa x como fronteira à direita. Além disso, a soma $\int ydx$ não possuía regras gerais para todos os casos, contudo muitas delas foram estabelecidas. Outro ponto importante é sua suposição de que os $dx's$ eram iguais, mas isso não era uma regra inalterável decorrente da natureza variacional dos diferenciais. Ou seja, caso os dx's sejam considerados iguais, os dy's se tornaram distintos entre si – exceto para $y - x = 0$ – e vice-versa, o que torna mais eficiente, em certos casos, considerar os dy's ou até mesmo os ds's como iguais entre si. Outro desdobramento é o de que, devido à natureza variacional dos diferenciais, a sua relação de variação é representada pelos diferenciais de ordem superior. Ou seja, ao considerar os diferenciais como equidistantes, o diferencial de segunda ordem será nulo – por exemplo, dx temos $ddx = 0$. Isso faz com que a outra variável relacionada possua como diferencial de segunda ordem a variação entre os diferenciais – por exemplo, $ddy = dy' - dy$.

É necessário destacar que, subjacentes ao cálculo leibniziano e ao cálculo newtoniano, há concepções mais gerais sobre o conhecimento e a realidade. Meneghetti (2010), sob a perspectiva da filosofia geral, identifica, na produção dos dois pensadores, traços do Empirismo e do Racionalismo. Por um lado, Newton, ao recorrer mais a elementos intuitivos, alicerçou o seu Cálculo sobre a base de conceitos cinemáticos e com apelo à geometria e a

[98] Esse é o mesmo exemplo utilizado por Baron e Bos (1985, p. 59).

argumentos verbais sobre figuras. Por outro, Leibniz elaborou um instrumental simbólico que estabelece um relacionamento por meio de fórmulas que, ao serem manipuladas, constituem sua teoria. Newton compreendia a matemática como um instrumento ou método para solucionar problemas oriundos da experiência, e o Cálculo como uma ferramenta para melhor demonstrar as descobertas experimentais acerca do movimento. Leibniz, entretanto, enfatizava a natureza algorítmica do método como uma particularidade da sua *characteristica generalis,* ou seja, como particularidade de um método geral no qual decorria de regras, formuladas e aplicadas apropriadamente, um conhecimento correto e racional, independente do grau de apropriação e consciência arbitrária sobre os símbolos envolvidos. Segundo Meneghetti (2010, p. 104), "isso fortalece a crença de que Leibniz enfatizava o aspecto lógico do conhecimento e menosprezava o intuitivo". Diferentemente, "Newton enfatizava o intuitivo, não dando tanto valor para o aspecto lógico".[99]

Dentre as possíveis similaridades que podem ser identificadas nas obras desses dois pensadores, podemos destacar as noções de variabilidade e relacionamento como elementos centrais em seus construtos teóricos-conceituais. Em geral, os elementos são descritos fundamentados em relações, por exemplo, em Newton, o movimento de uma variável é aferido com base em outro a partir do tempo que varia continuamente. Por sua vez, Leibniz define o infinitamente pequeno ou grande como "quantidades que são indefinidamente grandes ou pequenas, ou seja, tão grandes quanto se queira, ou tão pequenas quanto se pretenda"[100] (Leibniz *apud* Edwards, 1979, p. 265). O uso das quantidades infinitamente pequenas também pode ser um elemento a ser destacado, apesar de Newton ter formulado o método das primeiras e últimas razões para evitá-las. Esse é o ponto comum que transformou os métodos de Newton e de Leibniz em alvo de críticas, as quais desencadearam uma série de consequências.

Uma das críticas mais conhecidas foi produzida por George Berkeley (1685-1753) em *O analista* (Berkeley, 2010)[101], texto que elencava uma série de elementos dos métodos do Cálculo que contradiziam a intuição. As críticas do bispo britânico possuíam um duplo objetivo: afirmar sua concepção filosófica, que privilegiava a intuição, e defender a fé cristã.

---

[99] Meneguetti (2010, p. 18) entende por intuição "um conhecimento de apreensão imediata, podendo ou não ser de origem empírica" e por Lógica "uma linguagem formal, por meio da qual sistematizamos (formalizamos) o conhecimento que adquire caráter de necessidade e universalidade".

[100] "[...] quantities that are indefinitely great or indefinitely small, i.e., as great as you please, or as small as you please, […]".

[101] Referimo-nos, aqui, ao texto *O analista ou um discurso endereçado a um matemático infiel. Onde se examina se o objeto, os princípios e as inferências da análise moderna são concebidos de um modo mais distinto, ou deduzidos de um modo mais evidente do que mistérios religiosos e questões de fé*, publicado em 1734.

Para Sherry (1993), a crítica possui dois componentes, um lógico e outro metafísico[102]. No que se refere ao aspecto lógico, o bispo tem como alvo o uso do diferencial dx – ou no caso o, presente na obra de Newton.

> O eminente autor do método das fluxões[103] sentiu essa dificuldade e, por conseguinte, consentiu essas abstrações sutis e essa metafísica geométrica, ambas indispensáveis – conforme ele próprio percebeu – a tudo que se possa fazer a partir dos princípios aceitos. Caberá ao leitor julgar o que ele fez a partir desses princípios em termos de demonstração. Deve reconhecer que ele empregou as fluxões de modo semelhante ao andaime de uma construção, ou seja, como algo a ser posto de lado ou eliminado tão logo se encontre as linhas finitas proporcionais a elas. Mas, por outro lado, esses exponentes finitos são encontrados com a ajuda das fluxões. Assim, qualquer coisa obtida por meio de tais exponentes e proporções há de ser atribuída às fluxões, que devem, por isso, ser previamente conhecidas. Mas o que são essas fluxões? As velocidades de incrementos evanescentes? E o que são esses mesmos incrementos evanescentes? Eles não são quantidades nem finitas, nem infinitamente pequenas, nem, ainda, nada. Não os poderíamos chamar de fantasmas de quantidades defuntas? (Berkeley, 2010, p. 659-660).

Percebe-se que o âmago da crítica remete ao fato de que, em determinadas etapas dos procedimentos, o dx, ou o é manipulado como uma quantidade finita qualquer e, em outras, ele é descartado ou suposto como igual a zero – $dx \neq 0$ e $dx = 0$. Pela mesma razão, Marx (1983) classifica o cálculo infinitesimal de Leibniz e Newton como "místico".[104] Entretanto, conforme Blaszczyk, Katz e Sherry (2013), essas críticas podem ser facilmente rebatidas com base nas próprias elaborações dos fundadores do Cálculo. A desconsideração do incremento evanescente no encaminhamento final do procedimento algorítmico não decorre da nulidade do incremento infinitesimal, mas da qualidade da pseudoigualdade, na concepção de Fermat, ou da aplicação da *lei da homogeneidade*, na versão leibniziana, implícita na última etapa do procedimento.

O componente metafísico da crítica berkeleyana, por sua vez, direciona-se à crítica da falta de evidência empírica da existência dos infinitésimos. Todavia, conforme temos defendido, a matemática é uma forma de conceituação de relações que existem em determinado sistema que possui existência na realidade, mas que não pode ser identificado com ela, isto é, não é uma foto do fenômeno empírico tal qual ele se apresenta diretamente aos sentidos, mas uma imagem desse fenômeno elaborada com base em ferramentas que, em muitas vezes, escapam da imediaticidade da percepção.

---

[102] Pressupomos que a autora entende como metafísico aquilo que diz respeito à ontologia.
[103] Berkeley se refere a Newton.
[104] Marx (1983) classifica o cálculo diferencial em *místico, racional* e *puramente algébrico.* Os principais representante do primeiro grupo são Newton e Leibniz, do segundo Euler e D'Alembert, e do terceiro Lagrange.

As críticas aos métodos do cálculo infinitesimal tiveram como consequência um impulso em direção à busca por uma fundamentação e justificação mais "rigorosa" dos procedimentos empregados, representando, contudo, conforme Roque (2012), um movimento de alteração do conceito de rigor. Consideramos importante destacar o caráter histórico do conceito de rigor, pois é uma tendência entre os matemáticos

> [...] pensar que a matemática é rigorosa (quando executada da forma que eles preferem) ou não (caso contrário). Mas a história da matemática ensina muito claramente que, de fato, o rigor se dá em níveis, os quais, portanto, devem ser especificados antes de se avaliar o trabalho matemático do estudante (Grattan-Guiness, 1997, p. 81).

A matemática, entendida como um conhecimento historicamente elaborado pela humanidade, tem como critérios de sua avaliação exigências gestadas, fundamentalmente, pela história e pela cultura. A *exigência da compatibilidade* – o princípio de acordo da razão consigo própria, ou seja, a não contradição dos elementos teóricos consigo mesmo – e a *exigência de acordo com a realidade*, presentes em Caraça (2003), são, para nós, importantes critérios para essa avaliação, caso entendamos que a razão é consubstanciada historicamente pelos elementos culturais que a compõem. Com base nesses preceitos, dedicar-nos-emos, na próxima seção, a analisar o processo histórico de justificação e fundamentação do Cálculo, que promoveu uma transformação no conceito de rigor.

3.5 A FORMALIZAÇÃO DOS CONCEITOS DE DERIVADA E INTEGRAL E O ESCAMOTEAMENTO DO FENÔMENO DO MOVIMENTO

As críticas aos fundamentos do Cálculo popularizaram uma imagem de instabilidade conceitual do novo método. Conforme Bos (1985), no século XIX, os referidos fundamentos se firmaram após três modificações: a) a consideração das variáveis como funções de uma variável independente; b) a introdução da função derivada como conceito fundamental do Cálculo; c) a fundamentação da definição de função derivada em um conceito explícito de limite.

A gênese do processo de modificação, que culminou com essa nova forma e conteúdo do Cálculo, é concomitante ao estabelecimento do capitalismo como forma de produção. Conforme Ríbnikov (1987), na segunda metade do século XVIII, o capitalismo adquire sua forma industrial, o que conduz a uma reestruturação das concepções sociais, científicas, culturais e de outras concepções ideológicas. Com aumento do ritmo das mudanças

e transformações sociais, em especial aquelas relativas à divisão social e técnica do trabalho, essa nova fase do capitalismo, em conjunto com os problemas relacionados à mecânica e à astronomia, impulsionou a criação do aparato matemático de investigação de fenômenos eletromagnéticos e térmicos imprescindíveis para a resolução dos problemas emergentes. Isso gerou um duplo movimento no âmbito da produção do conhecimento sobre o Cálculo: uma ampliação do aparato matemático vinculado às necessidades engendradas pelo capitalismo industrial, bem como a busca por justificação dos métodos utilizados.

O primeiro movimento permite que Grabiner (1983a) identifique esse período como o de exploração e desenvolvimento do conceito de derivada. O segundo movimento, imbricado ao primeiro, possui diversos elementos constitutivos. Conforme Grabiner (1983b), o poder explicativo e manipulatório dos diversos fenômenos que se ancoravam nos conceitos do Cálculo viu-se obstaculizado por dificuldades originadas da imprecisão de seus fundamentos. Tal situação transforma-se em um dos fatores impulsionadores para a busca por uma fundamentação com base em um novo entendimento do conceito de rigor. Um segundo fator, destacado pela autora, emerge da abordada crítica filosófica dos fundamentos. Por fim, um terceiro fator é atinente às preocupações de cunho didático, relativas à exposição do conteúdo dos conceitos. Esse fato ganha relevância em um contexto de diminuição do poder das cortes monárquicas e deslocamento de grandes estudiosos dessas cortes para os centros superiores de ensino, movimento engendrado e impulsionado pelas novas configurações sociais emergentes no capitalismo industrial, bem como pela luta entre os burgueses e as monarquias (Struik, 1989). Como destaque de explicitação de tal situação, pode-se citar o cenário francês que, após a revolução burguesa, possibilitou a criação de centros de ensino com vistas à formação de profissionais especializados na pesquisa científica, entre eles, os indivíduos que se dedicavam ao estudo da matemática (Ríbnikov, 1987).

O processo de constituição de uma nova forma de rigor e da fundamentação do Cálculo teve diversas contribuições. Destacam-se aquelas tentativas de negação do uso das quantidades infinitamente pequenas, como a de Colin MacLaurin (1698-1746), que buscou fundamentar a teoria das fluxões de Newton com a adoção do método de exaustão em sua versão arquimediana, e a de Jean le Rond d'Alembert (1717-1783), que defendeu o método dos limites. Conforme Roque (2012), D'Alembert diferenciava uma relação qualquer – como por exemplo $y^2 = ax$ – obtendo outra – $2y\frac{dy}{dx} = a$ ou $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2y}$ –, na qual considerava $\frac{dy}{dx}$ como o limite da razão entre y e x. De tal modo, o limite não era concebido como a razão entre 0 e 0, mas como a quantidade da qual ela se aproxima quando supomos y e x decrescentes. Percebe-se que o

limite, aqui, é entendido com base em uma concepção dinâmica, diferentemente, como poderemos verificar, da utilizada hodiernamente. Ademais, conforme destaca Ríbnikov (1987), as variáveis em D'Alembert são monótonas[105] e o limite unilateral, ou seja, a grandeza que se aproxima de outra nunca pode ser igual ou superá-la. Um outro ponto a ser destacado é que o matemático francês não lida com o limite de uma função, mas com as grandezas em si.

Com o conceito de função, que começa a ser mais bem esboçado no século XVIII, o Cálculo passa a ser reestruturado com suporte em um novo delineamento das noções de variabilidade e de multiplicidade. Isso é consequência do fato de o conceito de função possuir como centrais as noções de variabilidade e interdependência, ou seja, o relacionamento entre variáveis. Essas noções, teoricamente, começam a ganhar consistência com base em um aprofundamento quantitativo dos estudos sobre o movimento, seja pela relação de variação de um objeto em relação ao tempo, seja na descrição de sua trajetória. Segundo Roque (2012), esses estudos, junto com a introdução de um simbolismo para a representação de uma quantidade desconhecida, foram um dos impulsionadores para a elaboração do conceito de função.

De acordo com Ríbnikov (1987), a função possui dois aspectos: a função como correspondência e a função como expressão analítica. Essa última foi evidenciada por Johann Bernoulli (1667-1748) e padronizada por Leonard Euler (1707-1783), que conceituava, em 1748, a função de uma quantidade variável como "expressão analítica composta de um modo qualquer dessa quantidade e de números, ou de quantidades constantes" (Euler, 1748 *apud* Roque, 2012, p. 374). O conceito, aqui, é resumido a uma forma de expressão analítica que contém constantes e variáveis em processo de estabelecimento de alguma relação entre si, com a possibilidade de sua representação por meio de símbolos. Isso fica mais explícito na definição euleriana de continuidade, ao conceber como funções contínuas aquelas que podiam ser representadas por uma única expressão analítica invariável.

A definição supracitada de função foi modificada por Euler, em 1755, e apresentada com maior grau de generalidade, fato que possibilitou a ampliação e a extensão do conceito não explorado em seus estudos futuros:

> Se certas quantidades dependem de outras quantidades de maneira que se as outras mudam essas quantidades também mudam, então temos o hábito de chamar essas quantidades de função dessas últimas. Essa denominação é bastante extensa e contém nela mesma todas as maneiras pelas quais uma quantidade pode ser determinada por

[105] Uma função entre dois conjuntos ordenados é monótona se a relação de ordem entre os conjuntos é mantida ou invertida.

> outras. Consequentemente, se x designa uma quantidade variável, então todas as outras quantidades que dependem de x, de qualquer maneira, ou que são determinadas por x, são chamadas funções de x (Euler, 1755 *apud* Roque, 2012, p. 378).

Apesar de não ter sido o primeiro a introduzir o termo e a noção de função[106] na matemática, Euler foi quem a posicionou no centro do desenvolvimento do Cálculo, ao defender que ele não lida com curvas, mas sim com funções. O matemático suíço usualmente realizava expansões de funções na forma de séries infinitas. Contudo, ao estudá-las, transpunha as propriedades de séries finitas às infinitas, assim como de convergentes em divergentes, sem tomar os devidos cuidados.

Boyer (1959) lembra que Euler foi um dos principais difusores de um método formalista no que se refere ao Cálculo. Sua concepção sobre as quantidades infinitamente pequenas pode ser resumida a sua igualdade a zero, o que se estendia para os diferenciais – $dy's$ e $dx's$. No entanto, seguindo Leibniz, os zeros eram concebidos como possuidores de qualidades distintas, o que o levou a considerar a relação $\frac{0}{0}$, oriunda da relação entre diferenciais, como representante de uma razão finita. É nesse sentido que, para Euler, "o cálculo era simplesmente a determinação de uma razão de incrementos evanescentes – um procedimento heurístico para encontrar o valor da expressão $\frac{0}{0}$"[107] (Boyer, 1959, p. 244).

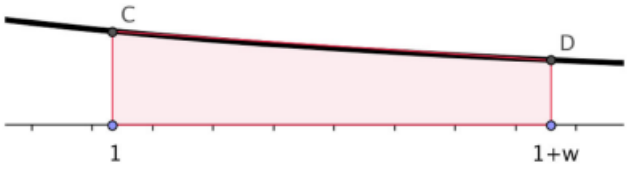
Ao adotar por base esses elementos, Euler conseguiu estabelecer relações entre áreas e séries, o que expandiu e relacionou tais conceitos entre si. Seguimos Moreno-Armella (2014) para acompanhar como Euler procede para encontrar a expansão da série e^x adotando como ponto de partida o estudo da função logarítmica. Sua referência foi uma relação conhecida – a área entre $y = \frac{1}{x}$ no intervalo compreendido entre 1 e x com $x > 0$ definida como ln (x). Para tanto, Euler iguala a área sob a curva $y = \frac{1}{x}$, no intervalo entre 1 e $1 + w$ (Figura 9). Também supõe *w* como uma quantidade infinitesimal e uma área retangular, cuja base mede *w* e altura 1(Figura 10) proveniente de uma "ampliação" de um intervalo infinitesimal.

---

[106] Segundo Bos (1985), o primeiro a se utilizar da palavra *função* foi Leibniz, e significava quantidades variáveis relacionadas a uma curva.

[107] "[…] the calculus was simply the determination of the ratio of evanescent increments – a heuristic procedure for finding the value of the expression $\frac{0}{0}$".

Figura 9 – Área sob a curva $\boldsymbol{y = \frac{1}{x}}$



Fonte: Moreno-Armella (2014, p. 623).

Figura 10 – Área retangular

Fonte: Moreno-Armella (2014, p. 623).

Com base nessas suposições, referentes às quantidades infinitesimais, o raciocínio permite que se estabeleça uma identidade algébrica $w = \ln(1 + w)$. Em seguida, ao considerar x como um número finito e N um número natural infinito, pode-se afirmar que $w = \frac{x}{N}$, o que conduz à identidade $e^x = (1 + \frac{x}{N})^N$. Ao expandir o binômio, chegamos à igualdade $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$, o que conclui o desenvolvimento.

Para Moreno-Armella (2014), nesse exemplo transparece o modo como Euler, ao pressupor a existência de quantidades infinitesimais e números infinitos, encontra resultados nos quais eles desaparecem de modo que "Infinitésimos e números infinitos são, portanto, artefatos cuja finalidade é o cálculo"[108] (Moreno-Armella, 2014, p. 623).

Assim como D'Alembert, outro matemático da época que buscou eliminar a referência aos diferenciais e infinitesimais foi Joseph Louis Lagrange (1736-1813). A particularidade de seu trabalho se encontra no aprofundamento de certos desenvolvimentos de Euler e no seu método apoiado na expansão de séries de potências, além da eliminação da referência ao conceito de limite. Conforme Grabiner (1983a), para Lagrange, esse conceito era muito restritivo, o que justificava a busca pela fundamentação do Cálculo na Álgebra, uma vez que partia do pressuposto de que ela possuía bases sólidas.

[108] "Infinitesimals and infinite numbers are thus artifacts whose purpose is calculation […]".

> A álgebra que Lagrange tinha em mente era o que ele chamava de álgebra das séries infinitas, pois Lagrange estava convencido que séries infinitas eram parte da álgebra. Assim como a aritmética lida com frações decimais infinitas sem deixar de ser aritmética, Lagrange pensou então, que a álgebra lida com expressões algébricas infinitas sem deixar de ser álgebra[109] (Grabiner, 1983a, p. 202).

De acordo com Roque (2012), a ideia subjacente às demonstrações de Lagrange, bem como as de Euler, era essencialmente algébrica. Por decorrência, transforma o problema original do Cálculo – análise matemática da variação das curvas – em um problema relativo ao estudo de fórmulas. Bos (1985) argumenta que esse deslocamento da orientação do estudo de curvas – com o emprego dos símbolos algébricos que eram representação das abscissas e ordenadas dessas curvas ou outros elementos das figuras geométricas – para o estudo do relacionamento entre símbolos e fórmulas foi um dos movimentos em direção à constituição da Análise. Outro motivo a ser destacado é uma ampliação das disciplinas que abordavam os processos infinitos, o que fez emergir ramos distintos daqueles tratados pelo Cálculo. Devido a tais características, em geral, a generalidade das técnicas que tinham como obstáculo as limitações relativas aos campos numéricos não se vinculavam ao domínio de sua aplicação, pois a validade estava estabelecida pela generalidade algébrica.

Lagrange parte da suposição de que, dada uma função $f(x)$, se substituirmos x por $x + h$, podemos desenvolver uma série de potências $f(x + h) = f(x) + Ah + Bh^2 + Ch^3 + \cdots$, em que $A, B, C, \ldots$, são novas funções de x derivadas da função original $f(x)$. Percebe-se que tal série é idêntica à de Taylor[110]: $f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots$.

Para Grabiner (1983a), a contribuição original de Lagrange para o conceito de derivada é o seu tratamento como função, ou seja, igualar, no que tange ao seu estatuto ontológico, a derivada à função que a origina. No entanto, Edwards (1979) chama-nos atenção de que aquelas expansões das funções em séries são possíveis para algumas famílias particulares de funções, as quais chamamos, atualmente, de funções analíticas.

Augustin Louis Cauchy (1789-1857) apropria-se de alguns elementos do trabalho de Lagrange, como por exemplo, as notações e suas contribuições para a teoria das funções, mas nega sua fundamentação algébrica. Segundo Struik (1989), Cauchy passa a discutir a

---

[109] "The algebra Lagrange had in mind was what he called the algebra of infinite series, because Lagrange was convinced that infinite series were part of algebra. Just as arithmetic deals with infinite decimal fractions without ceasing to be arithmetic, Lagrange thought, so algebra deals with infinite decimal fractions without ceasing to be algebra".

[110] Brook Taylor (1685-1731) – matemático britânico.

questão das séries com base na ideia de convergência e procura fundamentar os conceitos envolvidos na Análise. Seu objetivo é "reconciliar o rigor, que foi o princípio-guia de meu curso de análise [*Cours d'analyse*] com a simplicidade a ser alcançada ao considerarmos diretamente as quantidades infinitamente pequenas" (Cauchy *apud* Bos, 1985, p. 46). Nessas linhas, salta aos olhos a menção que Cauchy faz às quantidades infinitesimais, o que, conforme argumentação de Blaszczyk, Katz e Sherry (2013), deslegitima a defesa de que o matemático francês as haveria substituído por uma *álgebra das inequações*, conforme defendido por Grabiner (1983b).

Para que possamos melhor entender a nova qualidade das contribuições do matemático francês, bem como a argumentação mencionada, é mister que nos reportemos às suas próprias palavras sobre variáveis, assim como sobre a definição de limite:

> Chamamos quantidade *variável* aquela que consideramos capaz de assumir diversos valores diferentes sucessivamente. Por outro lado, chamamos quantidade *constante* aquela que assume um valor fixo e determinado. Quando os valores sucessivamente atribuídos a uma variável aproximam-se indefinidamente de um valor fixo, de modo que eles finalmente difiram deste valor tão pouco quanto quisermos, esse último valor é chamado o *limite* de todos os outros. Assim, por exemplo, a área do círculo é o limite para o qual convergem as áreas de todos os polígonos regulares inscritos, se o número de seus lados aumentar cada vez mais o ângulo entre o eixo x e o raio vetor, traçado do centro de uma hipérbole a um ponto na curva que se mover cada vez mais para longe do centro tem como limite o ângulo entre esse mesmo eixo e a assíntota; ... Indicaremos o limite para o qual converge determinada variável pela abreviação "lim." escrita antes da variável em questão (Cauchy *apud* Bos, 1985, p. 46-47).

Dessas definições, alguns pontos são importantes para nos apropriarmos das contribuições de Cauchy. Primeiramente, conforme lembra Bos (1985), a definição de limite é similar à de D'Alembert e Robins[111], mas supera algumas de suas desvantagens ao combiná-las com o conceito de função e com a noção do infinitamente pequeno, o que possibilitou a formulação de uma nova e mais precisa definição de continuidade. O infinitamente pequeno é definido como uma variável que diminui indefinidamente e os torna menores que qualquer número dado, além de possuir limite igual a zero. Destarte, Blaszczyk, Katz e Sherry (2013) defendem que a definição de limite de Cauchy possui uma preponderância de elementos cinemáticos e de uma abordagem infinitesimal, que traria em seu bojo uma natureza variacional que possibilita a determinação do limite ao invés de sua pressuposição.

[111] Benjamin Robins (1707-1751) – engenheiro militar e matemático britânico. Na tentativa de defender o cálculo newtoniano, Robins passa a admitir a impossibilidade de aceitar as quantidades infinitamente pequenas, com o argumento de que as razões últimas podiam tornar-se fundamentalmente sólidas ao interpretá-las como limites.

Outra contribuição de Cauchy foi sua concepção de função contínua. Para Boyer (1959), o trabalho de Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) sobre séries teria sido um dos responsáveis por engendrar a necessidade de um estudo mais rigoroso, bem como uma nova definição do conceito de continuidade. Isso decorre do fato de Fourier ter mostrado que haveria curvas descontínuas arbitrárias que poderiam ser representadas analiticamente por meio de séries infinitas de funções trigonométricas, o que torna imprescindível, para atender os critérios de rigor emergentes, um alargamento do conceito de função. "A visão formalista de que a função era uma simples expressão analítica deu lugar ao entendimento que ela era uma relação entre variáveis"[112] (Boyer, 1959, p. 277). Nesse contexto, Cauchy objetivou essa nova abordagem com apoio nos conceitos de infinitesimal e limite do seguinte modo:

> Suponhamos que a função $f(x)$ seja equivalente e finita para todos os valores de x entre dois limites dados; então, se a diferença $f(x+i)-f(x)$ for sempre infinitamente pequena *entre esses limites*, dizemos que $f(x)$ é uma *função contínua* da variável x entre os limites em questão (Cauchy *apud* Bos, 1985, p. 48).

Com fundamentos nessas definições de continuidade e limite, Cauchy define a derivada como uma função representada pelo limite de $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ quando x é tomado como um termo fixo, $i = \Delta x$ uma quantidade infinitamente pequena que se aproxima de zero, e $y = f(x)$ uma função contínua entre dois limites dados. A função derivada, representada por $f'(x)$ ou y', é, portanto, uma nova função de variável x que representa o limite da razão $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$, quando as diferenças do numerador e do denominador, que são quantidades infinitamente pequenas, convirjam para a nova função de x.

Essa formulação permitiu que Cauchy defina diferencial do seguinte modo: seja $y = f(x)$ uma função da variável independente x, i uma quantidade infinitamente pequena e h uma quantidade finita. Se $i = \alpha h$, α será uma quantidade infinitamente pequena e $\frac{f(x+i)-f(x)}{i} = \frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha h}$ e $\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i}h$. O limite do lado esquerdo da última equação, quando α se aproxima indefinidamente de zero e h permanece constante, é o *diferencial* da função $y = f(x)$. Como a diferencial de $y = f(x)$, representada por d, é $df(x) = hf'(x)$ e a diferencial de $f(x) = x$ é h, isto é, $dx = h$, resulta que $df(x) = f'(x)dx$, ou, o que é a mesma coisa, $dy = y'dx$. Segundo Cauchy (*apud* Bos, 1985), isso mostra que a derivada $y' = f'(x)$

[112] "The formalistic view that a function was a simple analytic expression gave away to the understanding that it was any relationship between variables".

de qualquer função $y = f(x)$ é igual à razão $\frac{dy}{dx}$ – razão entre a diferencial da função e a diferencial da variável independente.

Em relação à integral, Cauchy se apoia em interpretação similar à de Leibniz, pois interpreta a integral como soma. A novidade é que formula a definição com base no conceito de limite e independentemente do conceito de derivada. Ademais, o enfoque passa a ser a integral definida pelos limites finitos $x = x_0$ e $x = X$. O matemático francês destaca outros valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ de x, que variam entre os limites x_0 e X. De tal modo, a diferença $X - x_0$ é dividida em $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, $x_3 - x_2$, ..., $X - x_{n-1}$ que terão sinais iguais. Na sequência, Cauchy multiplica cada uma dessas diferenças, concebidas como novos elementos, pelo valor do que chama de origem de cada um deles e os soma, em seguida, obtendo $S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$. Essa soma dependerá do número n, que representa a quantidade de elementos em que a diferença $X - x_0$ foi dividida, bem como dos valores desses elementos, ou seja, do modo como foi feita a divisão. Quando os elementos da diferença $X - x_0$ se tornam quantidades infinitamente pequenas como consequência do número n se tornar infinitamente grande, o limite da soma S tende a uma constante que dependerá somente da função $f(x)$ e dos valores de x_0 e X da variável independente x. O limite dessa soma é o que Cauchy define como integral definida (Cauchy *apud* Bos, 1985). Uma diferença entre a definição de integral elaborada pelo matemático francês e a mais comumente utilizada na atualidade é encontrada no fato de aquela não pressupor que os elementos obtidos da divisão da diferença entre $X - x_0$ possuam a mesma magnitude, o que a torna menos precisa e mais geral (Bos, 1985).[113]

Dentre as novas formulações elaboradas por Cauchy destacam-se, entre outros aspectos: a posição central que ocupa o conceito de função; a fundamentação dos conceitos de derivada, diferencial e integral com base no conceito de limite; a falta de menção a conceitos geométricos; a utilização do conceito de quantidades infinitamente pequenas; e a definição de modo independente de derivada e de integral, o que engendra a necessidade da demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo. Para realizar a demonstração do teorema – resumida na afirmação de que a integração e a diferenciação são operações inversas, ou seja, que se f é uma função contínua e F é definida por $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$, então $F' = f$ –, Cauchy se utiliza do

[113] A especificação de condições de integração de funções mais gerais, bem como a determinação da homogeneidade dos intervalos de divisão foi realizada por Bernhard Riemann (1826-1866).

seguinte teorema, provado anteriormente por ele: “se f é uma função contínua no intervalo $[a, b]$, existe uma valor ξ no intervalo, tal que $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$ " (Bos, 1985, p. 52).

A demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo, segundo Cauchy, segue os seguintes passos: sejam $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$, M o valor máximo e m o valor mínimo que f assume no intervalo $[a, b]$. Assim, $(b-a)m \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)\,M$. Como consequência, deve existir um valor μ entre m e M, tal que $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$. Como f é contínua, com base no teorema supracitado pode-se afirmar que existe ξ tal que $f(\xi) = \mu$ ou $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$, com $a \leq \xi \leq b$. Assim, existe $\xi = \mathrm{a} + \theta(\mathrm{b} - \mathrm{a})$ para algum θ entre 0 e 1. Como $F(x+\alpha) - F(x) = \int_{x_0}^{x+\alpha} f(x)dx - \int_{x_0}^{x} f(x)dx = \int_{x}^{x+\alpha} f(x)dx$ e, ao aplicar o teorema supracitado, encontramos $F(x+\alpha) - F(x) = \alpha f(x+\theta\alpha)$ no intervalo $[x, x+\alpha]$, em que $\lim_{\alpha\to 0} \frac{F(x+\alpha)-F(x)}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0} f(x+\theta\alpha)$, ou seja, $F'(x) = f(x)$.

Conforme Boyer (1992), Bernhard Bolzano (1781-1848), matemático suíço que procurava aritmetizar a Análise[114], havia, independentemente, elaborado uma definição de derivada e de função contínua similar à de Cauchy. O matemático suíço, conforme Ríbnikov (1987), contribuiu com um profundo estudo sobre funções contínuas. Para tanto, expõe exemplos de funções que possuíam essa propriedade, mas que não tinham derivadas em nenhum de seus pontos.[115] Por sua vez, o estudo das condições de integração, assim como o surgimento de funções que possuíam propriedades incomuns à época, produziram um impulso em direção à extensão do conceito de função. Johann Dirichlet (1805-1859), por exemplo, propõe uma definição de função que é independente da expressão analítica e está articulada ao estabelecimento *a priori* de suas propriedades.

Esse movimento de estudo aprofundado do conceito de funções estava inserido em um contexto de mudança dos rumos da matemática naquele período. Segundo Roque (2012, p. 461), antes do século XIX,

> [...] as funções surgiam de problemas concretos, como os de natureza física; agora vinham do interior da matemática, a partir dos esforços dos matemáticos para delimitar os novos conceitos que estavam sendo forjados e deviam servir de

[114] A *aritmetização* da Análise foi um movimento que, fundamentado em um novo entendimento do conceito de rigor, objetivava reelaborar a Análise sobre nova base. Para atingir tal propósito, recorreu somente a noções não intuitivas, ou seja, que não se utilizassem de fundamentos geométricos ou cinéticos como, por exemplo, o conceito de movimento.

[115] Devido à falta de circulação dos trabalhos de Bolzano, as primeiras funções desse tipo que se tornaram conhecidas foram socializadas por Riemann e Weierstrass.

> fundamentos para a análise, como os de função, continuidade e diferenciabilidade. Essa autonomia sinalizava a tendência crescente de se estabelecer as definições sobre bases abstratas, independentes da intuição sensível e da percepção geométrica.

A partir de Cauchy, é possível encontrar um movimento de conscientização por parte dos matemáticos de que só poderiam ser usadas propriedades explicitamente definidas. De outro modo, pode-se constatar que diversas noções encontradas nos trabalhos de Cauchy e Bolzano que se aproximam daquelas que atualmente encontramos nos livros textos de Cálculo, ainda estavam envoltas de imprecisão, como por exemplo: o significado de "valores sucessivos", de "aproximar-se indefinidamente" ou de "quantidade suficientemente pequena" (Boyer, 1995).

Com o movimento de aritmetização da análise, iniciado no século XIX, tais noções deram lugar à definição de limite de Weierstrass, que a transformou em um conceito estático. Entretanto, isso pressupôs uma nova formulação, posicionada sobre novas bases, do próprio conceito de número que, até o século XIX, era interpretado sob um prisma mais intuitivo. A despeito do uso pragmático e não crítico dos números irracionais, na época, não havia questionamentos sobre sua natureza ou seu preciso significado. Entretanto, conceitos como os de diferenciabilidade, de continuidade e de convergência, que pressupunham uma clara definição articulada a número, contribuíram para a impulsionar o movimento de sua conceituação precisa.

Edwards (1979) destaca duas construções de números reais que são ainda hoje utilizadas: de Richard Dedekind (1831-1916) e de Georg Cantor (1845-1918). Segundo Dantzig (1970), apesar da tentativa de desvincular o conceito de número de qualquer ideia geométrica, a imagem da reta se torna aquela em que se amparam esses autores para estabelecer uma nova teoria dos números, devido ao fato de a reta, assim como o tempo, serem adotados como o modelo intuitivo de compreensão do contínuo e de suas propriedades. A ideia de uma correspondência biunívoca entre o número e o ponto que compõe a reta torna-se um pressuposto para a formulação teórica do conceito de número. Passa a ser imprescindível, portanto, precisar conceitualmente o ponto, que como ente geométrico sem dimensão, é tido como uma ficção conceitual.

Dantzig (1970) cita três formas de conceber o ponto. A primeira, dinâmica, parte da ideia de que o ponto em movimento é o elemento gerador de uma linha. A segunda, adotada por Dedekind na formulação de um novo entendimento de número real, concebe-o como a intersecção de duas retas. Ele se baseia no conceito de corte, entendido como a partição da reta, realizada por um ponto P, em duas classes – A, à esquerda de P, e B, à direita de P –, que pode

incluir o ponto P em qualquer uma delas. Segundo Caraça (2003), desdobra-se disso que: 1) nenhum ponto fica fora da partição; 2) todo ponto que pertence à classe A estará à esquerda de todo ponto da classe B. Isso permite que Dedekind caracterize a continuidade da reta pelo seguinte axioma: "*todo corte da recta é produzido por um ponto dela, isto é, qualquer que seja o corte* (A, B) *existe sempre um ponto da recta que separa as duas classes* (A) *e* (B)" (Caraça, 2003, p. 58). Ao recorrer à noção de corte, no estudo da estrutura dos números racionais, é possível perceber que nem todos os cortes que classificam os números racionais em duas classes A e B são realizados por um elemento do conjunto formado pelos próprios números racionais. Desse modo, o conjunto formado por esses números não satisfaz o axioma da continuidade, conhecido como axioma de Dedekind-Cantor, que afirma que: um conjunto pode ser considerado contínuo se atende à condição de que todo corte realizado nele seja feito por um elemento pertencente ao mesmo conjunto. Com base nisso, Dedekind define um número real como o elemento de separação de duas classes por meio de um corte qualquer no conjunto dos números racionais. Porém, a definição é formulada de maneira que, se o elemento do corte fizer parte das classes, será um número racional e, no caso contrário, será um número irracional.

Uma terceira maneira de conceber o ponto é como uma posição limite de um processo infinito aplicado a um segmento de reta, concepção adotada por Cantor que, por analogia, entende o número como limite de uma sequência de números racionais (Edwards, 1979). Para Roque (2012), os estudos do matemático russo conduziram-no ao conceito de enumeração, que possibilita distinguir os conjuntos infinitos – dos racionais e dos reais – como forma particular de distinção entre eles. Nesse contexto, ao caracterizar o processo de enumeração, que pressupõe uma relação biunívoca entre os conjuntos, surge a ideia de função como correspondência entre dois conjuntos. Essa noção será aprofundada pelo grupo de Bourbaki[116], que elimina a variabilidade na definição desse conceito. De acordo como Roque (2012, p. 474), para o grupo de Bourbaki

> [...] a função é somente um conjunto de pares ordenados. Essa abordagem conjuntista das funções elimina todas as ideias originais associadas à variação e, portanto, à noção de variável. Conjunto e variação passam a ser ideias inconciliáveis. Podemos definir variável usando a noção de conjunto, mas ao preço de conceber todos os valores possíveis da variável a um só tempo. Logo, ao invés de ser entendida como uma quantidade indeterminada, que varia, a variável passa a ser um elemento de um conjunto numérico.

[116] Foi um grupo de matemáticos, em sua maioria franceses, que propunha fundamentar a matemática na teoria dos conjuntos. As obras desse grupo eram assinadas pelo pseudônimo de Nicolas Bourbaki.

A noção do sistema dos números reais em conjunto com a noção estática do conceito de limite molda a forma com que atualmente se tem abordado o Cálculo e a Análise. A diferenciação é evidente na definição de limite proposta por Weierstrass, distinta daquelas elaboradas por Cauchy e Bolzano. Para o matemático alemão, um número L é chamado de limite de uma função $f(x)$ para o valor $x = x_0$ se, ao escolhermos arbitrariamente um número positivo ε, existir δ positivo, de tal modo que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para qualquer x que se possa verificar a relação $0 < |x - a| < \delta$. Essa definição é sustentada pelo conceito de função como relação de conjuntos, e a variável como um conjunto de todos os valores possíveis a um só tempo, o que confere às relações estabelecidas sua estaticidade.

Essa forma, amplamente divulgada e ensinada nas disciplinas que têm como objeto de ensino o Cálculo, vem sendo contraposta a outras que se erguem sobre modos diversos de entender o contínuo. Entre elas podemos destacar, além das apresentadas aqui, a concepção de Abraham Robinson (1918-1974).[117] Robinson, em sua formulação da *análise não-standard*, elabora alguns axiomas com a intenção de estender o campo dos reais, negando o *axioma de Arquimedes* e formando um novo corpo, o dos números hiper-reais (*$\mathbb{R}$). Conforme Edwards (1979), os axiomas I, II e III da análise não-standard de Robinson admitem a existência de um corpo *$\mathbb{R}$, que possui como subconjunto próprio $\mathbb{R}$. Entre os elementos de *$\mathbb{R}$, chamados de números hiper-reais, encontram-se os infinitos e infinitésimos. Diz-se que um elemento x é infinitesimal finito se, dado qualquer número real positivo r, tem-se $|x| < r$, e um infinitesimal infinito se $|x| > r$ para todo o número real r. Conforme Suárez (1987), isso faz com que se admita a existência atual tanto do infinito como dos infinitésimos. Desdobra-se daqui que dois elementos x e y, pertencentes a *$\mathbb{R}$, estão infinitamente próximos – representados por $x \approx y$ – caso sua diferença seja infinitesimal. Ademais, todo número hiper-real finito está infinitamente próximo de um número real. Se chamamos r de real e x de hiper-real, portanto, $r \approx x$, pode-se afirmar que r é a parte standard de x, representada por $r = st(x)$. Assim, dados dois hiper-reais x e y, tem-se $x \approx y$ se, e somente se, $st(x) = st(y)$. No que tange à função f^* de valores hiper-reais com n variáveis hiper-reais, ela é entendida como extensão natural de uma função

[117] Blaszczyk, Katz e Sherry (2013) citam algumas formas de conceber o contínuo: a) o *contínuo de Stevin*, que aceita o axioma de Arquimedes; b) o *contínuo de Brouwer*, que aceita o axioma de Arquimedes, mas se baseia em uma concepção intuicionista da matemática que parte do preceito lógico de negação da lei do terceiro excluído; c) o *contínuo de Robinson*, que é construído sobre a base da negação do axioma de Arquimedes; d) o *contínuo de Lawvere*, de perspectiva intuicionista e que rejeita o axioma de Arquimedes. Devido ao foco da presente pesquisa, não será possível realizar um tratamento adequado a todas essas concepções do contínuo, bem como explorar as possibilidades didático-pedagógicas de sua constituição em objetos de ensino. Contudo, chamamos a atenção para o fato de que o contínuo de Lawvere possui como uma de suas intenções estabelecer relações entre a lógica matemática e a dialética, o que pode compor um possível campo de pesquisas no futuro. Para uma introdução ao tema, consultar Gonzáles (2004) e Lawvere (2005).

f, com valores reais, definida sobre um conjunto $\mathbb{R}^n$, logo, as operações sobre *$\mathbb{R}$ são extensões naturais das operações sobre $\mathbb{R}$. Por sua vez, o axioma III garante que, se dois sistemas de fórmulas possuem a mesma solução real, sua extensão natural possuirá as mesmas soluções hiper-reais.

Para expormos resumidamente algumas das definições que podem ser utilizadas em uma disciplina de Cálculo com fundamentação na análise não-standard, consideremos, assim como Baldino (1995), ε como um infinitésimo e Ω como infinito e, por consequência, $\frac{1}{\varepsilon} = \Omega$ e $\frac{1}{\Omega} = \varepsilon$.

A continuidade, conforme Suárez (1987), é concebida exatamente do mesmo modo que Cauchy, pois se admite que uma função é contínua em a, pertencendo a $\mathbb{R}$, se $f(x) \approx f(a)$ para todo $x \approx a$. A definição de derivada de uma função f em um ponto a pertencente a $\mathbb{R}$ será a função $f'(a) = st\left(\frac{f(a+dx)-f(a)}{dx}\right)$, caso for finita e possuir parte standard igual para qualquer $dx \approx 0$. A justificação geométrica pode ser obtida não pela aproximação da reta secante a uma tangente em um ponto, mas por meio da ampliação da mônada de x, definida como todos os z que pertencem a *$\mathbb{R}$ e se encontram infinitamente próximos de x, que pertencente a $\mathbb{R}$. Conforme Baldino (1995), a ampliação da mônada no ponto em que se procura determinar a tangente, permite mostrar que a curva e a reta tangente coincidem em $P(x, y)$, mas os pontos $P(x, y)$ e $Q(x, f(x + dx))$, onde passa a secante, estão infinitamente próximos à tangente e aparecem como distintos. Dado que $dy = f(x + dx) - f(x)$ e que o coeficiente angular da reta é o quociente $\frac{dy}{dx}$, dito coeficiente pertence à mônada de $f'(x)$, logo, a derivada será a parte real do número hiper-real definido em $f'(x)$. Ou seja, as "funções deriváveis serão aquelas para as quais essa parte real não depende do acréscimo infinitesimal dx dado a x" (Baldino, 1995, p. 18).

Sobre o processo de integração infinitesimal, traremos uma de suas interpretações, mais especificamente a descrita por Baldino (1995). Comecemos chamando de S um segmento da curva descrita pela função $f(x)$ no intervalo entre os pontos de abscissas a e b. Para encontrar a área sob o segmento da curva S, é preciso dividi-lo em uma infinidade de pedaços infinitesimais de área dA, o que possibilita afirmar que $A(S) = re\int_a^b dA$. Divide-se o intervalo $[a, b]$ em ω partes, sendo ω um número infinito. O comprimento de cada segmento é igual a $dx = \frac{1}{\omega}$. Por sua vez, dA será igual à soma entre um retângulo e um triângulo de base infinitesimal dx. A integral é entendida como a soma de todos os $dA's$ (Baldino, 1995).

Esses elementos são suficientes para a elaboração de uma justificativa do Teorema Fundamental do Cálculo. Ao particionarmos um intervalo $[a, b]$ em ω – número infinito –, no caso da função monótona, obtém-se uma partição também infinita, no intervalo $[c, d]$ das ordenadas. Temos que $c - d$ é a soma dos infinitos infinitésimos dy, que são iguais ao coeficiente angular da secante multiplicado por dx. Por sua vez, $c - d = \int_c^d dy = \int_a^b \frac{dy}{dx} dx$. Tal forma de conceituação dos elementos do Cálculo nos permite ampliar os modos como os conceitos que o compõem são entendidos, além de revelar uma natureza atravessada por sua historicidade, uma vez que evidencia o caráter dinâmico da atividade matemática.

De modo geral, os episódios destacados das formas histórica e socialmente elaboradas de formulação dos conceitos que compõem o Cálculo possibilitam-nos destacar também nexos conceituais que organizam o objeto a ser ensinado em contextos educativos formais. Na próxima seção, realizaremos a exposição dos principais elementos estabelecidos na incursão realizada até este ponto do presente capítulo, sintetizando e aprofundando a discussão sobre os determinantes que nos possibilitem descrever a essência que compõe o sistema conceitual do Cálculo.

3.6 DETERMINAÇÕES ONTOLÓGICAS DO SISTEMA CONCEITUAL DO CÁLCULO

A jornada analítico-expositiva realizada até este ponto permite-nos fazer a crítica ontológica das formas pelas quais se manifestam os conceitos e sua articulação na composição do Cálculo. Isso possibilita a apropriação dos nexos que compõem o seu sistema conceitual, assim como da sua essência. Para tanto, faremos um percurso que nos auxilie na abordagem do objeto da presente tese, em suas múltiplas determinações.

Um elemento que apresenta centralidade é relativo aos fenômenos da realidade de que o Cálculo se constitui como reflexo, a saber: o movimento do real capturado em forma de relação. Aqui, convém, para a limpidez de nossos argumentos, que nos aprofundemos no entendimento do que concebemos como movimento e por sua explicação sobre a forma de relação.

Inicialmente, é preciso ressaltar que o movimento é uma qualidade inerente e insuprimível à realidade, isto é, uma propriedade ontológica da matéria. Engels (2020, p. 188), ao conceituar essa categoria, afirma que o "movimento aplicável à matéria é *mudança em geral*". Torna-se necessário especificar a definição de Engels (2020) para que não reduzamos uma categoria universal a suas manifestações particulares. Cheptulin (2004), na esteira de

Engels (2020), destaca que, para o autor, o movimento como mudança geral não pode ser limitado à forma de deslocamento dos corpos no espaço. Ao contrário, a concepção de Engels permite-nos considerar o movimento em toda a sua diversidade, como alterações próprias da matéria, produzidas nos: organismos vivos, núcleos das células, seres inorgânicos ou nas sociedades.

Nesse sentido, baseando-nos no caráter universal da categoria do movimento, concordamos com Quintero (2018) quando afirma que o Cálculo trata dos fenômenos em movimento consubstanciado pelo conceito de mudança. Ou seja, a dialética, partindo do princípio da matéria em constante processo de vir-a-ser, indica que seu movimento é constituído por um ininterrupto processo de mudança, caracterizado e impulsionado pela contradição entre os elementos que a constituem. Obviamente, esse processo não implica, sempre e a todo momento, um tornar-se-outro, pois fenômenos e objetos, mesmo em seu processo de vir-a-ser, em muitos casos, reproduzem a si, o que configura o caráter de permanência na mudança. Essa estabilidade relativa, oriunda da multiplicidade que compõe a unidade, permite que a totalidade, no seu fluir, mantenha seu próprio conteúdo, mesmo quando há mudanças em seus elementos e relações constitutivas. Isso ocorre quando as mudanças não atingem a sua essência, conforme abordado na segunda seção do presente capítulo, no episódio da crítica lukacsiana à concepção heraclitiana.

Ao constante fluir do ser contrasta-se a noção de estabilidade, invariabilidade, estaticidade, surgidas na aparência e manifestação dos objetos e fenômenos, que podem ser considerados como elemento constitutivo de diversas formações materiais. Entretanto, o repouso não pode ser identificado com a falta de movimento sob uma ou outra relação qualquer, mas como uma de suas formas particulares, ou seja, “movimento em equilíbrio” (Cheptulin, 2004, p. 164). Nesse quadro, o repouso não é nada mais que estabilidade ou equilíbrio entre os distintos elementos que compõem a totalidade, o que conduz ao entendimento da estaticidade do ser como uma instância relativa. A permanência da essência no seu processo de reprodução não significa seu engessamento, mas é indicativa de que as relações de interdependência, em ação sobre elas, geram um movimento de mudanças pouco significativas para a totalidade.

Acrescentamos à categoria e conceitos, anteriormente tratados, o de interdependência, uma vez que a análise do movimento, devido à sua natureza variacional, só é possível por meio do inter-relacionamento entre estados distintos do fenômeno ou objeto em constante movimento. Caraça (2003), ao explorar o contexto de surgimento da necessidade do conceito de infinitésimo, defende que o movimento é um dado, e não um fenômeno a ser explicado. Isso acarreta que, em sua abordagem, estudem-se os modos de sua manifestação, a

fim de evitar um caminho marcado pelo empreendimento de uma explicação metafísica do seu surgimento. Assim, os conceitos do Cálculo emergem com a finalidade específica de refletir e explicar conceitualmente como os fenômenos mudam com base na abordagem da relação de variação e acumulação entre grandezas covariáveis, isto é, interdependentes. Para o matemático português, a natureza desse fenômeno é tal que

> [...] "quando vamos a querer fixar a posição de um móvel, em determinado instante, num ponto da sua trajectória, já ele aí se não encontra – entre dois instantes, por mais aproximados que sejam um do outro, o móvel percorreu um segmento, com uma infinidade de pontos"; "a cada instante, o móvel está e não está em determinado ponto".
> Que quer isto dizer? Que não poderemos *obter resultados*, em qualquer instante ou ponto, se o tomarmos em si, isolados dos outros pontos; que o que se passa num instante e num ponto só pode ser entendido integrado na sua *interdependência* com o que se passa em instantes e pontos que o precedem e seguem. Mas esse *preceder* e *seguir* tem aqui caráter subtil de que não há ponto que preceda ou siga imediatamente outro – entre dois, por mais próximos, há uma infinidade de pontos, logo há uma infinidade de possibilidades que contam na interdependência. De modo que não poderemos certamente obter resultados no estudo do fenómeno com a ajuda simples de *números* a marcar posições de *precedência* ou *sequência* entre instantes ou pontos – esses números, por menor que seja a sua diferença deixam-nos sempre fugir uma infinidade de possibilidades da interdependência – aquelas que correspondem ao segmento que eles encerram (Caraça, 2003, p. 205).

Nesse excerto, o autor trata da forma com que, no estudo do movimento, se engendra a necessidade de conceitos matemáticos para o estudo de sua manifestação. O movimento se caracteriza por um processo contínuo entre dois estados, no qual é entreposto um conjunto amplíssimo de possibilidades. Por isso, os instrumentos matemáticos que possibilitam refletir o processo não podem ser a expressão de relacionamento na forma de simples números, mas um elemento que represente qualquer outro elemento de um conjunto numérico conveniente, ou seja, uma *variável*. Esta, por sua vez, é definida do seguinte modo por Caraça (2003, p. 119-120):

> Seja E um conjunto qualquer de números, conjunto finito ou infinito, e convencionemos representar qualquer dos seus elementos por um símbolo, por ex.: x. *A este símbolo, representativo de qualquer dos elementos do conjunto E, chamamos variável.*
> Quando dizemos, por exemplo: seja E o conjunto dos números reais no intervalo $(0,1)$, e seja x a sua *variável*, que queremos significar? Que o símbolo x, sem coincidir *individualmente* com nenhum dos números reais desse intervalo, é suscetível de os representar a todos; é afinal, o símbolo da *vida colectiva* do conjunto, vida essa que se nutre da vida individual de cada um dos seus membros, *mas não se reduz a ela*. [...] a variável *é* e *não é* cada um dos elementos do conjunto.

Desse modo, o conceito de variável é determinado pelas possibilidades intrínsecas ao processo de mudança do próprio objeto ou fenômeno, o que faz gerar, para a explicitação na

forma quantitativa desse movimento, a necessidade de identificar o campo limitado de possibilidades reais inseridas no contexto, conduzindo ao conceito de campo de variação (Sousa, 2004).

A variação, no quadro delineado, ao tratar da mudança, pressupõe a avaliação entre dois estados distintos que se alteram, ou seja, mudam.[118] A diferença entre os estados é o que se tem chamado de variação. De acordo com Thompson e Carlson (2017), apesar da variação e da covariação serem conceitos presentes explicitamente na cultura e no modo de pensar a matemática a partir do começo dos anos 1000, eles não são conceitos matemáticos explícitos, mas adotados tacitamente não obstante sua falta de definição. Esse conceito, como elemento do estudo do movimento e da mudança, é importante para o sistema conceitual do Cálculo.

Como diferença entre estados de um fenômeno, a variação pressupõe a fluência da realidade, em geral relacionada ao tempo. Conforme destacado anteriormente, a tentativa de explicar a inter-relação entre o tempo e a posição de um objeto foi um dos primeiros estudos sobre o movimento, no que tange à sua forma mecânica, como deslocamento. O pensamento de Newton, por exemplo, é ilustrativo na consideração dessa relação, uma vez que o físico inglês pressupõe o tempo em constante fluir, o que lhe permite relacionar outros elementos em um movimento coordenado entre grandezas interdependentes. De tal modo, diretamente relacionado à categoria do movimento, ou, nos termos de Caraça (2003), à fluência como característica essencial da realidade, está a interdependência que, com o auxílio e coordenação entre aspectos variáveis e – covariação – interdependentes, gerou a necessidade de elaboração do conceito de função.

A função, em sua forma inicial, tem como central a covariação, entendida como processo de coordenação entre duas ou mais grandezas variáveis. Desse modo, o pensamento covariacional é a capacidade de "alguém que possa ter em mente uma imagem sustentada de dois valores (magnitudes) simultaneamente"[119] (Saldanha; Thompson, 1998, p. 226).

O caso da combinação da relação de variação de duas grandezas variáveis – covariação – e interdependentes pode ser representado como uma função se obedecer à condição de que, para cada elemento de um conjunto de variáveis independentes, possamos determinar somente um elemento dependente. Como vimos, historicamente esse conceito adquiriu certa autonomia no que diz respeito aos fenômenos que ele reflete e, progressivamente,

---

[118] O leitor pode se perguntar acerca das situações em que não ocorre alteração, ou seja, quando a qualidade estudada não sofre modificação. Nesse caso, lembremos da relação entre movimento e repouso, conforme já abordado.

[119] "[...] someone holding in mind a sustained image of two quantities' values (magnitudes) simultaneously".

a sua relação com os fenômenos da realidade que impulsionaram a sua elaboração torna-se cada vez mais mediada. Esse processo proporcionou um aumento progressivo de generalidade, despindo-o de sua forma dinâmica e se constituindo progressivamente como um objeto estático cada vez mais geral. Nesses termos, tanto o conceito de variável como o de função em si, atualmente, apresentam-se em uma forma estática e entificada, apesar de sua característica e essência serem necessariamente dinâmicas e relacionais.

Desse contexto também surge a questão da aparente contradição entre a amplitude e extensão do conceito de função e o seu objeto, isto é, a esfera da realidade que ele reflete. Esse aspecto da problemática é explorado por Caraça (2003, p. 197) na seguinte passagem:

> Ponhamos a seguinte questão: qual é a função mais geral $y(x)$? O que equivale a perguntar qual é a correspondência mais geral possível entre duas variáveis? Se escolhemos uma lei determinada para a correspondência, imediatamente a particularizamos, de forma que chegamos à conclusão seguinte – a correspondência $x \to y$ mais geral é aquela em que os valores de y, correspondentes aos x, são *quaisquer*. Mas, quem diz *quaisquer* diz: *sem lei nenhuma*, diz: *ao acaso*; portanto, a função $y(x)$ mais geral é aquela em que os valores da variável dependente são dados ao acaso.
> Estranha conclusão! O conceito de função nasceu do de *lei natural*; ao procurar depurá-lo, generalizá-lo, encontramo-nos com o *acaso*, noção precisamente oposta à de lei!

O conceito atual de função em sua generalidade, ao se resumir a uma relação arbitrariamente estabelecida, perde a forma inicial que se vinculava à variação contínua. Isso porque a arbitrariedade evocada na formação de uma função, presente na sua expressão mais comum, indica a possibilidade de estabelecimento de funções descontínuas em muitas partes. Além disso, a definição da variável como um símbolo que representa um elemento de uma classe de elementos não é circunscrita, diferentemente daquela fornecida por Caraça (2003) e expressa nesta seção, necessariamente a uma quantidade. Portanto, torna-se, de um lado, mais geral e, de outro, entra em contradição com o contexto e os fenômenos que forneceram os impulsos que mobilizaram os sujeitos a desenvolvê-los como conceitos. A função, em vista disso, além dessa generalidade, desvincula-se, na sua forma hegemônica, da variabilidade, pois, ao se definir como subconjunto determinado de um produto cartesiano de dois outros conjuntos, é tomada pela visão estática. Isso pode ser percebido na análise do deslocamento, movimento que é apreendido intuitivamente na totalidade, mas interpretado matematicamente como momentos estaticamente desvinculados.

> O movimento matemático é apenas uma sucessão infinita de estados de repouso, *i. e.*, a Matemática reduz a Dinâmica a um ramo da Estática. O princípio que realiza essa transição foi formulado pela primeira vez por d'Alembert, no século XVIII. Essa

> identificação do movimento com uma sucessão de estados contíguos de repouso, durante os quais o corpo que se move está em equilíbrio, parece absurdo face a êle. Entretanto, o movimento feito de estados *sem movimento* não é nem mais nem menos absurdo do que o comprimento feito de pontos *sem extensão*, ou de tempo feito de instantes *sem duração* (Dantzig, 1970, p. 118).

Esse processo de formalização pode ser benéfico à medida que cria instrumentos homogêneos de apropriação da realidade, por meio de um reflexo que se distingue dela, mas, ao mesmo tempo, pode esconder a sua essência e produzir um contexto de sua inversão e desfiguração do real. No entanto, para o Cálculo, o essencial é a noção de variação. Para Kaput (1994), o estudo desse aspecto – variação –, foi o elemento central para o surgimento do Cálculo como campo de conhecimento, argumento também defendido por nós no decurso deste capítulo. Decorrente da interdependência intrínseca à realidade, a variação do estado de uma qualidade ocorre correlacionada com outras. Por consequência, necessita da coordenação dos processos de variação entre grandezas relacionadas, ou seja, interdependentes, o que conduz ao estudo do processo de covariação. O Cálculo, em seu conjunto, ergue-se como uma forma de estudar o movimento quantitativo de mudança dos estados qualitativos dos objetos em seus pormenores, de forma detalhada. Para tanto, utiliza de instrumental que permite se apropriar da relação entre as grandezas, tanto em uma perspectiva mais global quanto mais pontual. Tal intento requer que abordemos os conceitos de infinito e de infinitésimo.

Segundo Caraça (2003, p. 206), como o estudo do movimento, muitas vezes, necessita da investigação do que ocorre em um ponto específico de um processo, devido à qualidade do movimento em si, é necessária a abordagem desse "ponto em interdependência com pontos arbitrariamente próximos". Ou seja, a "variável deve ter no seu domínio números arbitrariamente pequenos em módulos". Como variabilidade contínua intrínseca ao movimento, pressupõe-se que o seu estudo em um momento/ponto específico aborde o comportamento nos momentos/pontos próximos. Isso gera a necessidade de elaboração de um conceito representativo de uma relação em si mesmo. É nesses termos que o conceito de infinitésimo passa a ser importante para a elaboração do Cálculo. Para Caraça (2003), o infinitésimo é uma variável importante para o entendimento do que ocorre na vizinhança do ponto, decorrente da interdependência dele com aqueles próximos. Tal conceito "deve ser de natureza a permitir que se dê conta da infinidade de estados possíveis entre dois estados quaisquer; de natureza a permitir-nos trabalhar, não só com estados determinados, mas com a *infinidade das possibilidades* entre dois estados" (Caraça, 2003, p. 206).

Conforme antes discutido, a dificuldade de estabelecer uma definição satisfatória, que considerasse o conceito como um processo relacional e não como ente isolado e unitário,

gerou tentativas de efetivamente desconsiderar o conceito de infinitésimo como necessário para a constituição do Cálculo. Isso efetivamente ocorreu pela elaboração do conceito de limite como um relacionamento entre elementos arbitrários da vizinhança do ponto avaliado, com base em uma certa relação – definição de Weierstrass. Conforme Caraça (2003), o conceito de limite também possibilita o estudo da determinação de um estado em interdependência de si com os vizinhos.[120] Sustentados principalmente nesses dois elementos, que podem ser considerados em conjunto ou de maneira separada – conforme abordado na seção precedente –, o estudo do movimento teve propriedades quantitativas gerais sintetizadas nos conceitos de derivada e integral.

O conceito de derivada possui como característica principal o estudo da variação da relação de covariação entre as grandezas, o que permite identificar como seu núcleo a ideia de variabilidade (Flores, 2013; Rezende, 2003; Thompson, Carlson, 2017). Seja a definição fundamentada no conceito de limite, oriunda da *Análise standard* – $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ –, ou a definição com a utilização de infinitésimos no contexto da *Análise não standard* – $f'(x) = st(\frac{f(x+i)-f(x)}{i})$ em que i é um infinitésimo distinto de zero –, é possível constatar que aquilo que tal conceito expressa diz respeito ao comportamento da função em pontos específicos, relacionando-os aos demais, isto é, constituindo uma função que representa a variação do processo de covariação entre as grandezas. Em outras palavras, é a taxa de variação instantânea da grandeza y em relação a outra grandeza x, ou ainda, a medida da rapidez com que y varia com relação a x. A derivada é entendida como o comportamento da variação ou a taxa de variação instantânea em um ponto. No caso da função derivada, temos uma função específica que coordena, na forma de covariação, a rapidez da razão da variação das duas grandezas iniciais. Tal instrumento conceitual permite controlar e estudar a taxa de variação da relação quantitativa entre grandezas variáveis em geral.

No caso da integral, há também uma dependência do relacionamento da variação da função na correlação entre pontos. Isso é estabelecido por intermédio da noção de acumulação representativa da unidade formada pela totalidade dos valores que uma grandeza adquire em um intervalo determinado, ou seja, é uma forma de representação de uma unidade da multiplicidade. Conforme Thompson e Silverman (2008), o conceito de acumulação é central para a ideia de integração, mas não tem sido abordado de modo satisfatório em pesquisas que

[120] Consideramos que o fato de Caraça (2003) se utilizar do conceito de infinitésimo para definir limite não implica redução da generalidade de sua afirmação.

tematizam o seu ensino. A ideia é, por um lado, trivial, pois se resume ao fato de acumular uma quantidade para a obtenção de mais delas. Mas, por outro lado, não é tão direta ou simples, pois é necessária a compreensão de quais são as "unidades" daquilo que se acumula, além de coordenar múltiplas partes variáveis, na forma da função de acumulação. Thompson e Silverman (2008) argumentam que pensar a integral em termos de acumulação auxilia a significá-la de maneira generalizada e, mesmo que definida independentemente da derivada, como vinculada também a ela.

> Se f é uma função na qual os valores fornecem medidas de uma quantidade e x também é uma medida de uma quantidade, então $f(c)\Delta x$, onde $c \in [x, x + \Delta x]$, é uma medida de uma quantidade derivada. O caso mais simples é quando $f(x)$ é uma medida de comprimento e x é uma quantidade de comprimento. Então $f(c)\Delta x$ é a quantidade de uma área. Se $f(x)$ é uma quantidade de velocidade e x é uma quantidade de tempo, então $f(c)\Delta x$ é uma quantidade de distância. Se $f(x)$ é uma quantidade de força e x é uma quantidade de distância, então $f(c)\Delta x$ é uma quantidade de trabalho. [...] Uma soma de Riemann, então, realizada por uma soma de peças incrementais, cada uma das quais é produto de duas quantidades, representa uma quantidade total da quantidade derivada cujos pedaços são definidos por $f(c)\Delta x$[121] (Thompson; Silverman, 2008, p. 45).

De tal modo, a integral sintetiza o estudo da acumulação de quantidades que variam em um contexto determinado e a uma taxa de variação também determinada. Portanto, a acumulação de quantidades varia, isto é, ocorre como uma função que possui uma taxa de variação específica. Ao se estudar o processo de acumulação de uma função determinada, busca-se apropriar como varia a quantidade de uma grandeza, em um intervalo, expressa como soma – unidade, isto é, a quantidade acumulada – formada por parcelas da multiplicidade, isto é, pedaços, produtos $f(c)\Delta x$. Tal acumulação pode ser representada por uma série que ilustra o processo. No caso do aumento do número de pedaços – em que dividimos o campo de variação de uma das grandezas de forma potencialmente grande –, essa série representará a integral da função.

A articulação entre a acumulação de uma quantidade e a sua taxa de variação é descrita pelo Teorema Fundamental do Cálculo. Nesses termos, ao pensar que algo varia é necessário, ao mesmo tempo, considerar que isso gera uma acumulação da propriedade variável

---

[121] "If f is a function whose values provide measures of a quantity, and x also is a measure of a quantity, then f(c)Δx, where c ∈ [x,x+Δx], is a measure of a derived quantity. The simplest case is when f(x) is a measure of length and x is a measure of length. Then f(c)Δx is a measure of area. If f(x) is a measure of speed and x is a measure of time, then f(c)Δx is a measure of distance. If f(x) is a measure of force and x is a measure of distance, then f(c)Δx is a measure of work. [...]. A Riemann sum, then, made by a sum of incremental bits each of which is made multiplicatively of two quantities, represents a total amount of the derived quantity whose bits are defined by f(c)Δx".

e, como tal, ocorre sobre uma taxa de variação (Thompson; Silverman, 2008). Consequentemente, é possível estabelecer uma relação expressa por $\frac{d}{dx}[\int_a^x f(t)dt] = f(x)$ (Carlson; Persson; Smith, 2003), na qual a $\int_a^x f(t)dt$ é a função acumulação de $f(x)$, no intervalo de a a x.

Sobre essa perspectiva, defendemos que o Cálculo se caracteriza pelo estudo da relação de variação e acumulação de relações quantitativas entre grandezas variáveis em geral. Como reflexo da realidade, debruça-se sobre o movimento, elemento insuprimível do real, que possui como substância a mudança, condição para o estudo da variação. De tal maneira, o estudo do movimento, pelo Cálculo, é composto por um sistema que reúne conceitos como os de: movimento ou fluência, mudança, variável, variação e covariação, interdependência, função, infinito, infinitésimo, limite, derivada, série e integral.

Em suma, o presente capítulo se propôs à realização de uma discussão ontológica do objeto do Cálculo. Para tal, realizamos uma análise ontológico-genética desse objeto, assim como uma discussão de episódios singulares do desenvolvimento dos conceitos que o compõem. A discussão foi guiada pelo objeto da realidade que é refletido no Cálculo, ou seja, o movimento. De maneira geral, indicamos os seguintes pontos principais: 1) o Cálculo se constitui como uma forma de reflexo específico da realidade que visa à representação e ao estudo do movimento na sua forma de variação de relações quantitativas entre grandezas variáveis em geral; 2) o processo histórico de desenvolvimento do Cálculo, no Ocidente, tem seu germe na discussão sobre a relação entre fluência e permanência, bem como entre unidade e multiplicidade da realidade como reflexo das formas de organização da sociedade grega; 3) devido a uma série de condições, o estudo do movimento começa a ser delineado, na Europa, como modo de apreensão do movimento mecânico da realidade por meios quantitativos; 4) no fim do século XVII, vários métodos particulares são sintetizados nos conceitos de derivada e integral, além de sua relação ser explicitada de modo satisfatório; 5) algumas fragilidades nos métodos utilizados geraram um movimento de busca, no começo do século XVIII, pela definição e conceituação do Cálculo sobre base de ideias puramente matemáticas, o que conduz a conceitos que perdem sua vinculação com o processo da realidade mobilizador do ser humano à sua criação, o movimento.

No capítulo seguinte, enfrentaremos uma problemática teórica emergente da relação entre o lógico e o histórico como princípio para a organização do ensino. O pressuposto é de que esse debate traz consequências para a compreensão da relação entre as formas históricas do conhecimento e o modo de sua manifestação na organização do ensino e, de

maneira mais geral, para o delineamento da relação entre o desenvolvimento filogenético e o ontogenético como relação importante para a apreensão dos determinantes da formação do indivíduo no contexto da educação escolar. Por decorrência, impacta no conteúdo e forma que toma o objeto de ensino em seu processo de objetivação.

4 A RELAÇÃO ENTRE O LÓGICO E O HISTÓRICO: ELEMENTOS TEÓRICO-CONCEITUAIS PARA A APROPRIAÇÃO DO CONCEITO DE OBJETO DE ENSINO

A abordagem realizada nos capítulos precedentes objetivou a exposição dos elementos imprescindíveis para a análise do objeto de investigação da presente tese. Na continuidade desse movimento, neste capítulo daremos mais um passo no percurso analítico, a fim de trazer mais determinantes que nos permitam proceder à especificação do referido objeto. A referência é a exposição objetivada, que se ocupou de explicitar as nuances do conhecimento matemático – uma forma específica de reflexo da realidade e, de modo particular, de relações entre os seres humanos – e do Cálculo – forma de reflexo da análise da relação de variação e acumulação de relações quantitativas entre grandezas variáveis em geral. Para tanto, a base é a análise ontológico-genética, realizada por meio de episódios singulares do desenvolvimento histórico do saber e do conhecimento matemático. Enfim, o presente capítulo tem como objetivo esmiuçar, em um quadro teórico-analítico, as possíveis relações entre o lógico e o histórico, porquanto ali estão vincados aspectos indispensáveis para a apreensão da concreticidade de qualquer objeto de ensino. Isso se evidencia em sua presença entre as pesquisas em educação embasadas em referenciais teóricos vinculados à tradição marxista, seja na sua abordagem como categorias reflexivas essenciais para o entendimento do objeto ou quando são entendidas como métodos complementares, mas distintos, de sua abordagem.

A escolha por seguir esse caminho analítico e expositivo tem como justificativa duas centralidades: a destacada relação categorial na constituição do objeto de ensino e o complexo educativo. Afinal, à educação, em seu aspecto amplo, fica incumbido o papel de exercer pressões sobre os indivíduos para que se apropriem de conhecimentos, habilidades, comportamentos e atitudes historicamente elaborados, mas não repetíveis do mesmo modo, a depender das formas de organização da reprodução social, com fins de garantir a reprodução do ser social.

A análise da relação entre o lógico e o histórico consiste, portanto, em esclarecer os seus devidos papéis no ensino em geral e no ensino de matemática em particular. Também objetiva lançar luz ao pressuposto exposto por Radford (1997), segundo o qual qualquer perspectiva ou atividade que apele para o uso da história deve, primeiramente, justificar esse relacionamento claramente, uma vez que ela tem o papel de ser subsídio e fonte de análise dos nexos envolvidos na composição do objeto.

Grifamos que a problemática aqui em destaque pressupõe uma exposição sobre a concepção de história e da historicidade do ser que não pode se evadir de abordar a relação entre *essência e fenômeno,* bem como *necessidade e acaso*, categorias que ganharão relevo na tessitura de nosso texto, em especial na primeira seção do capítulo. Dito isso, uma primeira aproximação será suficiente para indicar as possibilidades das concepções de história e historicidade serem compreendidas e explicadas com base no marco teórico aqui adotado. A relação entre o desenvolvimento do real – sua historicidade – e o modo pelo qual podemos conhecê-lo e representá-lo na consciência é que permeia toda a problemática da relação entre o lógico e o histórico. Portanto, na sequência, o texto se aprofundará em algumas formas de entendimento da relação entre o lógico e o histórico que emergiram na tradição marxista. Para tanto, exploraremos a concepção de Engels (1982, 2017) e de filósofos do século XX como Kopnin (1972, 1978), Ilienkov (1960), Ilyenkov (2008), Rosental (1960) e Lukács (2010, 2012, 2013, 2018c).

4.1 CONCEPÇÃO CONCRETA DE HISTÓRIA[122]

Nas últimas décadas, um grande debate tem sido travado em torno do conceito de história que, devido à sua polissemia, conduziu a significações decorrentes da esfera pela qual se enfrenta a problemática. Moraes e Duayer (1998) mostram que muitas delas buscam, na filosofia contemporânea, uma fundamentação com o intuito de constituir novos referenciais que se objetivam como concepções de história erguidas sobre o terreno de uma desconfiança do que costumeiramente se designa por *razão moderna* com roupagem iluminista. As consequências da suspeita como princípio teórico foram a implosão da diferenciação entre os tipos de conhecimento e a valorização e validação horizontal das formas de consciência que experienciavam os sujeitos na sua prática imediata. A noção de "verdade" ou "correspondência" do referente ao referido foi eclipsada pela noção de relato ou narrativa do fenômeno. Conforme os autores (1998), esse movimento expressou a morte do real e criou um vácuo, preenchido pela virada linguística que transforma a história em literatura, narrativa. Passa-se a considerar a experiência *possível* da *realidade* como um construto ou um "efeito" do sistema particular de linguagem próprio da cultura à qual pertencemos. A *verdade* e a *realidade* são consideradas como relativas a um jogo particular ou contexto cultural específico de significados e valores.

[122] Devemos essa expressão a Ilyenkov (2008). Ao adotá-la, porém, não buscamos caracterizar a compreensão de história do autor.

Disso depreende-se a ilegitimidade de toda crítica ao conhecimento ou de qualquer representação da realidade fora de certo contexto ou momento histórico. Decorre, pois, do entendimento da não existência de qualquer plataforma supracultural que permita a análise de uma prática qualquer sem predileções e pré-conceitos dos quais é impossível nos despirmos (Rorty, 1994).

As concepções de história, apoiadas nesses tipos de fundamento das correntes filosóficas contemporâneas, carregam implicitamente a *falácia epistêmica* (Bhaskar, 2008). Elas partem, pois, de um viés gnosiológico que encara a existência da realidade em seu movimento ininterrupto, ou seja, em sua historicidade, como moldada e estruturada pelo modo como compreendemos essa mesma realidade. Diferentemente, nossa abordagem da historicidade, entendida como aspecto inerente à realidade e à história dos objetos em geral, parte do ponto de vista ontológico fundamentado em elementos teóricos da análise marxiana e da tradição marxista. Dita perspectiva teórica concebe o ininterrupto movimento do ser como elemento caracterizador da historicidade, uma de suas determinações ontológicas (Lukács, 2010, 2012).

O movimento de apropriação da concreticidade de um objeto ou fenômeno, especialmente na esfera do ser social, é obstaculizado quando se desconsidera a historicidade do que é investigado. No entanto, a simplória identificação ou menção também não é suficiente para a apreensão apropriada do concreto pelo pensamento. Por isso, torna-se fundamental a confrontação de suas categorias mais importantes e das respectivas conexões inerentes ao seu movimento e mudança. Essas características conduziram Lukács (2012) a grifar a temporalidade irreversível como pressuposto de toda investigação ontológica. Para o autor, a "história é um processo irreversível e por isso parece plausível, em sua investigação ontológica, tomar como ponto de partida essa irreversibilidade do tempo" (Lukács, 2012, p. 339).

Da destacada temporalidade e irreversibilidade do tempo, Lukács (2012) põe em relevo o tempo e lugar determinado que o ser ocupa na temporalidade posta do universo. Ou seja, ele evidencia a existência de um movimento ininterrupto da matéria como aspecto universal de todo o ser. A essa noção se contrastam outras que pensam os objetos e fenômenos estaticamente, como elementos relativamente estáveis. Conforme abordado no capítulo anterior, essa relação entre o movimento e a estabilidade, entre a fluência e a permanência do mundo foi elemento essencial para a constituição de diversas formas de pensar a realidade e, por consequência, retroagia na forma pela qual se organizava a sociedade. Disso, é importante sublinhar que existe uma interdependência entre o modo como se concebe o ser social ao se tomar por parâmetro o ser natural e o ser orgânico e vice-versa. Cita-se como exemplo a

articulação realizada pelo positivismo comtiano entre essas duas formas de movimento – a estática social e a dinâmica social –, cunhada no lema "*ordem e progresso*" (Arana, 2007). Para Löwy (2018, p. 13), a teoria inaugurada pelo filósofo francês tem como pressupostos que:

> 1. A sociedade pode ser epistemologicamente assimilada à natureza [...]; na vida social reina uma harmonia natural.
> 2. A sociedade é regida por leis naturais, quer dizer, leis invariáveis, independentes da vontade e da ação humana.

Daqui desdobra-se a conclusão de que o método das ciências da natureza pode e deve ser adotado nas ciências sociais, além do relevado caráter "neutro" da observação, objetivamente desenlaçado dos fenômenos. Como aponta Löwy (2018), aos pressupostos e conclusões se vinculam implicações ideológicas conservadoras, reacionárias e contrarrevolucionárias, pois as leis sociais, do mesmo modo que as leis naturais, são tomadas como inalteráveis, o que implica o engessamento da sociedade. É crucial salientar que o conceito de lei é essencial e se caracteriza, sob a concepção comtiana, como um dos elementos necessários de caracterização do último estágio teórico que alcançou a humanidade.[123] Nesse estágio, a explicação ou busca do *porquê* deve ser substituída pelo *como*, e a procura da *causa* – modo pelo qual os fenômenos devem ser essencialmente gerados – é suprida pela *lei* – circunstâncias coordenadas de sua produção (Arana, 2007). A dissolução da ideia de causa, por sua vez, tende a estabelecer um quadro de engessamento dos fenômenos, traduzidos pela ideia de previsibilidade intrínseca à reprodução da necessidade solvida na lei, o que tende a produzir uma concepção linear do desenvolvimento da história.

Do outro lado da identificação das leis sociais com as leis naturais e, por consequência de uma história progressiva e linear, a negação absoluta de leis, no decurso histórico, também pode desembocar em um total esvaziamento da objetividade dos fenômenos. Isso ocorre na medida em que esses fenômenos são considerados como fragmentários e irrepetíveis, o que conduz à captação deles simplesmente pelo ponto de vista de sua expressão pelo sujeito por intermédio da linguagem, traço característico e destacado no discurso pós-moderno. Segundo Cavazotti (2010), esse é um dos eixos epistemológicos do pensamento pós-moderno, para o qual a linguagem não apenas representa ou traduz a realidade, mas se confunde com ou constitui a própria realidade. Outro efeito é a negação da totalidade e da possibilidade de captar a essência da realidade por intermédio da razão.

---

[123] Para Comte (1996), a humanidade passaria por três estágios teóricos, obrigatoriamente: 1) teológico ou fictício; 2) metafísico ou abstrato; 3) positivo ou real.

Como síntese das principais características dessa perspectiva, utilizamo-nos das palavras de Chauí (2001, p. 130-131), que retratam as formas pelas quais se manifesta a crise da razão pelo pensamento pós-moderno:

> I. negação de que haja uma esfera da objetividade. Esta é considerada um mito da razão, e em seu lugar surge a figura da subjetividade narcísica desejante;
> II. negação de que a razão possa propor uma continuidade temporal e captar o sentido imanente da história. O tempo é visto como descontínuo, a história é local e descontínua, desprovida de sentido e necessidade, tecida pela contingência;
> III. negação de que a razão possa captar núcleos de universalidade no real. A realidade é constituída por diferenças e alteridades, e a universalidade é um mito totalitário da razão;
> IV. negação de que o poder se realiza à distância do social, através de instituições que lhe são próprias e fundadas tanto na lógica da dominação quanto na busca da liberdade. Em seu lugar existem micropoderes invisíveis e capilares que disciplinam o social.
> Categorias gerais como universalidade, necessidade, objetividade, finalidade, contradição, ideologia, verdade são consideradas mitos de uma razão etnocêntrica, repressiva e totalitária. Em seu lugar, colocam-se o espaço-tempo fragmentados, reunificados tecnicamente pelas telecomunicações e informações; a diferença, a alteridade; os micropoderes disciplinadores, a subjetividade narcísica, a contingência, o acaso, a descontinuidade e o privilégio do universo privado e íntimo sobre o universo público; o mercado da moda, do efêmero e do descartável.

Com base nessa citação, desenvolveremos alguns pontos de interesse da discussão realizada na presente seção. Primeiramente, é preciso dar relevo à forte descontinuidade do tempo, isto é, à fragmentação e não continuidade da história, assim como à impossibilidade de apropriação e reprodução, na consciência, do real, pois esses dois aspectos se inter-relacionam no sentido do estudo histórico. Segundo Moraes (1996), o campo de investigação do historiador, a *duração*, sofre com os efeitos da decomposição pela desaceleração das temporalidades, que se tornam descontínuas e desarticuladas. De tal fragmentação, tem-se como produto o tempo convertido "em uma série de presentes perpétuos" (Jameson, 1984 *apud* Moraes; Duayer, 1998, p. 69). A possibilidade de explicação ou descrição histórica, por meio de categorias ontologicamente referenciadas, passa a ser uma ilusão, pois "História e estória não se distinguem, uma vez que o processo histórico é compreendido como textual, contingente, fragmentário, descontínuo, plural. Sendo assim, só pode ser assunto de um conjunto de estilos de narrativa" (Moraes, 1996, p. 298).

Tanto o positivismo – que pretende distinguir as leis sociais como naturais e, portanto, anuncia neutralidade e objetividade estritas – quanto as tendências pós-modernas – que recusam qualquer possibilidade de apreensão de aspectos da continuidade da história – contrapõem-se a uma ontologia materialista-dialética do ser social. Essa se diferencia de concepções que se anunciam como marxistas, mas que apresentam leituras que flertam com o

positivismo. Como exemplo, citam-se as formulações de Kautski[124], para quem as leis naturais são similares às leis do desenvolvimento histórico. O marxismo, para Kautski (*apud* Löwy, 2018, p. 128), é "o estudo científico das leis da evolução do organismo social".

Para compreendermos as diferenças entre as concepções supracitadas e a adotada nesta pesquisa, vale destacar o papel das categorias de necessidade e contingência ou acaso, uma vez que o materialismo mecanicista, por exemplo, tende a superestimar o papel da necessidade, enquanto na agenda pós-moderna[125] o acento é colocado no acaso.

Grifamos o papel dessas categorias, em especial a da necessidade, pois "em toda consideração ontológica, precisamente nesse caso, o ser deve constituir o centro fundante e a medida geral de toda diferenciação, para a gnosiologia e para a **lógica**, ao revés, é forçosamente a **necessidade** o centro determinante de tudo" (Lukács, 2010, p. 191, grifo nosso). Logo, a análise da história e da lógica, na apropriação do objeto, pressupõe uma discussão das referidas categorias.

Conforme Pilipenko (1960), entre os filósofos idealistas, a necessidade, que surge no polo do sujeito, é um aspecto da subjetividade derivado da razão, da consciência, da sensibilidade, dentre outros elementos. Entre os materialistas do século XVIII há uma inversão, pois a necessidade se desloca para o polo da objetividade, ao mesmo tempo que a casualidade é identificada com a subjetividade. Entre os representantes dessas ideias, podemos citar Espinosa[126] e Hobbes[127], para quem a casualidade é a ignorância das causas, dado que tudo na natureza é movido pela necessidade (Lukács, 2010; Pilipenko, 1960).

Para Pilipenko (1960), ao hipostasiar a necessidade e negar a casualidade, Hobbes, Espinosa e os materialistas franceses do século XVIII desembocaram em um fatalismo que pré-estabelece o caminho do desenvolvimento. Hegel, de acordo com Lukács (2010), tentou imprimir um caráter de historicidade e dinamicidade ao sistema de Espinosa, no entanto manteve a necessidade como fonte do desenvolvimento da realidade. Assim, pois, "toda estrutura lógica do sistema hegeliano é conduzida essencialmente pelo esforço de conferir à realidade já não concebida como estático-'eterna', mas como histórico-dinâmica, a mesma

---

[124] Karl Kautsky (1854-1938) – teórico marxista e um dos fundadores da ideologia social-democrata.
[125] Da abrangência do que convencionou-se chamar de pós-moderno, conceito "guarda-chuva", segundo Moraes (1996), que diz respeito a quase tudo, de questões estéticas e culturais até filosóficas e político-sociais, optamos por adotar o termo "*agenda pós-moderna*", cunhado por Wood (1996), para designar uma atmosfera política e cultural que tem em comum uma crítica à razão moderna e a negação de qualquer metanarrativa ou conhecimento de caráter "totalizante".
[126] Benedictus de Espinosa (1632-1677) – filósofo holandês.
[127] Thomas Hobbes (1588-1679) – matemático, teórico político e filósofo inglês.

necessidade absoluta e inabalável que estava contida no *Deus sive natura*[128] de Espinosa" (Lukács, 2010, p. 193).

O estaqueamento de noções iniciais sobre a categoria da necessidade permite nos embrenharmos no debate que ela desencadeia no seio do materialismo histórico e dialético, bem como sobre sua categoria reflexiva, a casualidade. Para Pilipenko (1960, p. 129), a necessidade é "*o que tem sua causa em si mesmo, o que se desprende inevitavelmente e com força de lei da essência mesma, dos nexos internos das coisas, dos processos e acontecimentos; o que tem que suceder, forçosamente, assim e não de outro modo*"[129]. Essa concepção contrasta com a noção lukacsiana que defende que é imprescindível, para uma correta apreensão dessa categoria, considerá-la sob o ponto de vista da concreticidade. Ou seja, partir do seu enlaçamento com seus pressupostos ontológicos, em condições concretamente determinadas que delimitam o campo pelo qual se exprime. Assim, "tudo o que costumamos chamar de necessidade é, na sua essência, a forma mais generalizada de cada um desses cursos processuais concretos; portanto, ontologicamente uma necessidade 'se... então'" (Lukács, 2010, p. 198).

Do ponto de vista do processo científico de análise do movimento da natureza, ou seja, da atividade científica, um modo de realizar o isolamento de processos amplamente inter-relacionados em sua forma pura de "se... então" é por meio do *experimento*. Essa forma pura e homogênea da existência da necessidade só é possível no processo experimental, que visa eliminar as perturbações externas, as casualidades, para investigar as relações causais daquilo a ser investigado. Diferentemente, o "se" operante na totalidade, como um sistema aberto e heterogêneo, constitui-se não como uma "coisidade", mas como "um processo histórico, em última análise unitário, não obstante todas as diferenças e contrastes singulares [...]" (Lukács, 2010, p. 103), isto é, como síntese concreta de múltiplas determinações. Por esse motivo, Lukács (2010) defende, contundentemente, que na prática não existe de modo algum uma necessidade incondicionada, uma necessidade absoluta.

Para contrapor as perspectivas lógico-gnosiológicas às quais a casualidade significa uma negação da necessidade, é indispensável conceber essa categoria de modo positivo, como uma complementar concretização da conexão dos complexos processuais (Lukács, 2012). Nessa direção, para Pilipenko (1960), o casual é aquilo que possui fundamento e causa fora de si e se desenvolve com base nos nexos acidentais ou externos. Entretanto, o autor complementa

---

[128] Traduzido do latim: Deus ou Natureza. Espinosa defende a existência despersonalizada de deus expressa também pela natureza.

[129] "[…] *lo que tiene su causa en sí mismo, lo que se desprende inevitablemente y con fuerza de ley de la esencia misma, de los nexos internos de las cosas, de los procesos y acontecimientos; lo que ha de suceder, forzosamente, así y no de otro modo*".

ao considerar o casual como aquilo que "*pode ser ou não ser, o que pode suceder assim ou de outro modo*"[130] (Pilipenko, 1960, p. 130). Lukács (2012) comunga dessa visão até certo ponto, pois entende que a natureza ontológica da casualidade está na heterogeneidade constitutiva da realidade, formada por complexos que, mutuamente, interagem e se afetam em diferentes graus e maneiras. Porém, toma outra direção ao tratar da questão da determinidade do casual. Para o autor, "o casual não consiste na junção de determinidade e não determinidade, mas da heterogeneidade dos processos que incidem de modo real uns sobre os outros na realidade" (Lukács, 2012, p. 176-177). A caracterização ontológica do que é casual depende do patamar do ser em que atuam as inter-relações de determinidade, ou seja, uma mesma ocorrência pode ser inteiramente determinada em um patamar do ser, enquanto em outro, mais elevado, pode ser um simples acaso.

Com fins ilustrativos, podemos citar como uma doença pode interromper o trabalho de uma pessoa e impactar nas formas e, possivelmente, nos rumos do desenvolvimento de uma certa área de conhecimento, como foi o caso de Riemann. A morte de Riemann é um exemplo de como uma doença – no caso a tuberculose – que possui uma causalidade conhecida e, portanto, apresenta características determinadas no nível biológico, é um acaso para o desenvolvimento histórico da matemática. Isso porque não é possível saber quais conjecturas, hipóteses e teorias que Riemann pretendia ou poderia desenvolver com base em sua experiência (Grattan-Guiness, 2004).

Entretanto destacamos que, da existência do acaso, não é lícito deduzir qualquer forma de negação das leis, mesmo que tendenciais, operantes na esfera do ser social. Conforme Lukács (2012, 2013), todo ato singular, por ter base em uma teleologia, tem implícito um grau de acaso oriundo do fato de ser necessária a tomada de uma decisão entre alternativas. Como o movimento do ser social é uma síntese do conjunto dos pores teleológicos singulares, eles tendencialmente apresentam uma direção, um encadeamento de causalidades, mas que de modo algum alteram o fato, ontologicamente primário, da existência da casualidade. Lukács (2010, p. 118) explora essa relação nos planos de complexos mais amplos, como o econômico, e no plano da vida cotidiana:

> A partir do predomínio da causalidade no decurso objetivo da sociedade colocado em marcha diretamente pelos pores teleológicos singulares, é impossível eliminar o acaso. Mas, enquanto no terreno dos próprios processos econômicos essas casualidades se cancelam mutuamente sob forma tendencial, podendo sintetizar-se em uma unidade tendencialmente dominante do processo em seu conjunto (pensemos no

[130] "[…] *puede ser o no ser, lo que puede suceder así o de otro modo*".

> mercado), no estágio da vida cotidiana um tal princípio de compensação operante automaticamente tem ação muito fraca.

No exemplo de Riemann, pode-se dizer que, em linhas gerais, o processo do desenvolvimento matemático da sociedade em sua totalidade continuou, apesar de sua morte, sintetizando um movimento mais abrangente, ou seja, seguiu a tendência de desenvolvimento do conhecimento matemático. Entretanto, no que é atinente às relações e formas mais particulares – não as confundir com relações cotidianas – sua morte pode ter causado impacto mais profundo.

Nessa direção, para Lukács (2010), Marx considerou que, no processo objetivo como um todo, há um compensar-se-recíproco, apesar dos ritmos, etapas e da qualidade das individualidades envolvidas serem subordinadas a uma ineliminável casualidade. Para ilustrar essa relação entre o processo de desenvolvimento histórico e as ações e atividades particulares, convém citar a crítica que Lukács (2010) dirige a Engels. O filósofo húngaro debruça-se sobre uma carta de Engels a Starkenburg[131], ao defender que o pensador alemão segue, em grande parte, a linha do pensamento de Marx. Contudo, é dissonante em sua conclusão, ao afirmar que na história, com a eliminação do acaso do nascimento dos "chamados grandes homens [...] haverá procura [*Nachfrage*] de substituto, e esse substituto encontrar-se-á, *tant bien que mal*, mas com o tempo encontrar-se-á" (Engels, 1894). Como exemplo, Engels (1894) afirma que os resultados do marxismo surgiriam na história de um modo ou de outro, devido às necessidades postas pela sociedade daquele tempo. Para Lukács (2010), essa afirmação é uma deturpação da concepção marxiana da tendencialidade histórica, de modo a hipostasiar uma necessidade que não é intrínseca ao ser social, exceto na esfera econômica em seu sentido mais estreito. Uma vez que as formas de manifestação e as próprias capacidades individuais se mostram distintas, elas influem sobre as formas de desenvolvimento do processo histórico. Isso, não pelo fato de os indivíduos possuírem prioridade sobre as massas, mas porque a objetivação de determinados eventos pode ter a influência e papel decisivo de certos indivíduos e de suas características e capacidades individuais. Desse modo, as formas de manifestação das individualidades podem sintetizar e influir sobre características do processo histórico.

Um exemplo, relativo ao nosso objeto de pesquisa, é o papel dos aspectos individuais de Newton sobre o desenvolvimento da matemática na Inglaterra, e, posteriormente,

---

[131] Carta publicada pela primeira vez, em 1895, na edição de número 20 da revista *Der Sozialistische Akademiker* (O Acadêmico Socialista) pelo seu chefe de redação, Heinz Starkenburg, não indicando o remetente. A carta, entretanto, foi endereçada a Walther Borgius, em 1894, conforme pode ser visto em Engels (1894). A primeira publicação da carta pode ser encontrada em http://library.fes.de/sozmon/pdf/1895/1895_20.pdf

na Grã-Bretanha. A reticência de Newton em publicar seus trabalhos, devido ao episódio protagonizado por ele e Hooke[132], influiu sobre o modo pelo qual se desenvolveu a matemática na Inglaterra, especialmente nos séculos XVIII e XIX. Conforme Bardi (2016), ao se envolver em uma polêmica com Hooke após a publicação de seu tratado sobre a ótica, Newton evitou publicar seus trabalhos científicos, entre eles as contribuições para o Cálculo. Por consequência, desencadeou um dos primeiros processos de direitos autorais da história, a saber: o debate sobre a prioridade da autoria do Cálculo. O debate desencadeado, irradiado desse evento, teve como consequências uma resistência e afastamento dos matemáticos ingleses perante a matemática praticada e objetivada em trabalhos oriundos da Europa Continental, derivados de uma posição favorável a Newton nessa escaramuça. Nesse sentido, Struik (1948), ao descrever o ambiente do século XIX, considera que a Inglaterra era um ótimo lugar para estudar química, física e biologia, mas não a matemática.

Esse ambiente gerou duas tendências no desenvolvimento do Cálculo e, por conseguinte, no vir-a-ser da matemática na Europa: por um lado, a matemática inglesa seguia influenciada pelo cálculo newtoniano; por outro, na Europa Continental, ela se beneficiava do método desenvolvido por Leibniz, alçado a uma posição praticamente hegemônica, em especial no que tange às notações.[133] Contudo, não é sensato atribuir a Newton e, mais especificamente, a traços de sua personalidade, a determinação dos caminhos tomados pelo desenvolvimento da matemática inglesa. Vale ressalvar, entretanto, que tal casualidade cumpriu papel potencializador de uma tendência, na época, emergente e oriunda do estabelecimento de estados nacionais, em afirmar e fortalecer o nacionalismo, presente no episódio da disputa protagonizada por Newton e Leibniz. Boyer (2012), nesse sentido, afirma que o método das fluxões não teria sido o principal culpado pelo que viria a se transformar a análise, uma vez que, atualmente, os físicos utilizam sem grandes problemas a notação dos fluxos junto à geometria analítica. A geometria sintética, campo que não combinava muito com o Cálculo, seja ele em sua versão fluxional ou diferencial, seria a principal responsável por atá-lo em suas amarras tradicionais.

> Logo, a predileção britânica pela geometria pura parece ter sido um fator de **atraso** muito mais efetivo na pesquisa em análise do que a notação ou os fluxos. Nem é justo

[132] Robert Hooke (1635-1703) – foi um cientista experimental com estudos em diversas áreas como ótica, mecânica dos sólidos, mecânica dos fluídos, entre outros. Sobre o debate entre Newton e Hooke, iniciado em 1672, acerca da ótica, consultar Bardi (2016).

[133] Grattan-Guiness (1997) defende que a maior difusão e absorção da tradição leibniziana ao invés da newtoniana, no desenvolvimento do cálculo, deve-se menos as supostas vantagens simbólicas e mais pelo prestígio e contribuição dos seus seguidores, especialmente Bernoulli's e Euler.

> colocar a culpa do conservacionismo geométrico predominantemente nos ombros de Newton. Afinal de contas, o *Método dos fluxos* de Newton estava cheio de geometria analítica e mesmo o *Principia* continha mais análise do que se reconhece em geral. Talvez tenha sido uma insistência excessiva na precisão lógica o que levou os ingleses a uma visão geométrica estreita. [...] No continente [Europa Continental], por outro lado, o sentimento era semelhante ao conselho que supostamente Jean Le Rond d'Alembert deu a um amigo matemático hesitante: "Vá em frente e a fé em breve voltará" (Boyer, 2012, p. 286, grifo nosso).

Nota-se que, mesmo que não se possa "colocar a culpa do conservadorismo geométrico" sobre os "ombros de Newton", não é possível negligenciar que o seu papel e sua influência política na comunidade científica inglesa, em um momento em que o nacionalismo se mostrava presente, impactaram nos rumos do desenvolvimento da matemática na Inglaterra. Portanto, um aspecto casual, combinado com aspectos tendenciais, também possui poder de influir – nesse caso, potencializar –, até certos limites, o movimento de determinados complexos.

Importa grifar o uso da palavra *atraso,* no excerto de Boyer (2012), como forma de ilustrar uma potencial vertente determinista da história implicada na tessitura do argumento. Tateamos o assunto no capítulo anterior, mas para que seja apropriadamente desanuviado, vale destacar o delineamento da necessidade, no determinismo, como elemento preponderante ou causa primeira dos movimentos históricos. Esse permite que seu ritmo se altere, mas de maneira alguma sua forma final, determinada de antemão e que, convenientemente, para o pesquisador, é a forma atual. O acaso, assim, tem papel acessório, é um mero fator de mudança de ritmo, mas não de conteúdo.

A vertente determinista da leitura da história é oriunda do prisma pelo qual o pesquisador investiga o passado que, segundo Grattan-Guiness (2004), pode ser o da *herança* ou da *história*. Para o autor (2004), a investigação que se inicia pela pergunta "como chegamos até aqui" e busca no passado os elementos que nos fizeram chegar até aqui, entende o que passou como herança. Por sua vez, a postura do investigador que se pergunta o "porquê" de os acontecimentos terem sido daquele modo e não de outro, com foco na questão do "que aconteceu no passado", entende o passado como história.

Entre as diferentes características distintivas dessas duas perspectivas, pode-se destacar que olhar o passado como história pressupõe enfatizar a diferença entre as formas de produção da matemática e suas teorias. Portanto, subentende-se que o processo histórico é um desenvolvimento realmente criativo, possivelmente realizado por revolução, inovação ou evolução da teoria. Assim, o pesquisador que estuda o passado sob o viés da história – ao ressaltar as diferenças, e por consequência, a originalidade e os aspectos distintivos entre as

teorias – consegue também relacioná-las e identificar seus pontos de partida. A busca do "porquê" foca-se nas motivações, influências e entendimentos em um sentido mais amplo, o que leva a apreender as causas de modo mais geral como sendo causas sociológicas, pedagógicas, econômicas etc.

Por outro lado, o pesquisador que analisa o passado sob o prisma da herança, carrega uma tendência em focar nas similaridades entre as teorias, nos traços de continuidade, naquilo que as ligam. Nesse caso, sua concepção sobre o processo de criação da matemática pode ser considerada continuísta. Ou seja, a história da matemática é entendida como um processo cumulativo, com traços predominantemente epistemológicos e formais. A orientação comum nesse tipo de abordagem é o internalismo dos conhecimentos matemáticos. Em vista disso, explicita uma necessidade, arraigada na própria forma de ser da matemática, de se tornar o que atualmente é.

Ao trazer essa discussão à tona, nossa intenção não é identificar e classificar as obras consultadas aqui e utilizadas, principalmente no capítulo anterior, como expressões acabadas de pesquisas que entendem o passado como herança ou história – apesar da utilização de determinadas expressões como *atraso* ou *defeito*, no âmbito da exposição das matemáticas do passado e de contextos culturais distintos, mostrarem indícios de alguns traços de uma cosmovisão que comunga com certos aspectos do agir do pesquisador que vê a história como herança. Para além disso, nossa pretensão é explicitar e entender, de modo mais aprofundado, as nuances da concepção de história adotada na presente tese que foram objetivadas no capítulo anterior. Ademais, a nosso ver, a conceituação de Grattan-Guiness (2004) indica elementos a serem considerados na organização do ensino nas duas concepções. Basta, no momento, frisarmos que, de certo modo, as concepções de herança favorecem a constituição de uma visão teleológica do processo histórico e tendem a considerar os acasos como fatores que não alteram o curso do desenvolvimento da produção do conhecimento matemático. Isso, pedagogicamente, pode se objetivar em uma depreciação do papel da história em favor de uma logicização internalista do conhecimento. Marx e Engels (2007, p. 40), em âmbito mais geral, chamavam a atenção para a possibilidade de conceber a história como um processo teleológico.

> A história nada mais é do que o suceder-se de gerações distintas, em que cada uma delas explora os materiais, os capitais e as forças de produção a ela transmitidas pelas gerações anteriores; portanto, por um lado ela continua a atividade anterior sob condições totalmente alteradas e, por outro, modifica com uma atividade completamente diferente as antigas condições, o que então pode ser especulativamente distorcido, ao converter-se a história posterior na finalidade da anterior, por exemplo, quando se atribui à descoberta da América a finalidade de facilitar a irrupção da Revolução Francesa, com o que a história ganha finalidades à

> parte e torna-se uma "pessoa ao lado de outras pessoas" (tais como: "Autoconsciência, Crítica, Único" etc.), enquanto o que se designa com as palavras "destinação", "finalidade", "núcleo", "ideia" da história anterior não é nada além de uma abstração da história posterior, uma abstração da influência ativa que a história anterior exerce sobre a posterior.

Apoiados nessas palavras, consideramos que o desenvolvimento da matemática não possui uma teleologia diretiva nem uma finalidade implícita, pois é uma forma de compreender o real e se relacionar com ele, independente da esfera ontológica de que se trata. Para tal, é indispensável que o passado seja analisado como ele realmente ocorreu, e não avaliado como uma etapa necessária para o que hoje somos nem analisado com base nos preconceitos e concepções que possuímos sobre ele. Um exemplo de uma leitura enviesada do passado é apontado por Knorr (2001) no fato de os historiadores da matemática do começo do século XX conceberem o evento da "descoberta" da incomensurabilidade como uma grande crise dos fundamentos que alicerçavam o pensamento matemático entre os gregos. De acordo com o autor, essa leitura provavelmente é uma projeção da crise dos fundamentos da matemática ocidental, vivenciados no começo do século XX, para um evento ocorrido no passado.

Entretanto, obviamente, entender o presente passa pela apropriação do passado, em especial dos "porquês", os nexos causais dos acontecimentos, as relações essenciais do desenvolvimento histórico. A identificação das categorias existentes nas formas de ser do passado podem ser encontradas no presente, mas, em sua maioria, apresentam diferenças substanciais e só podem ser capturadas na sua concretude pela própria crítica do presente. Marx (2011, p. 58-59), ao abordar a relação entre o produto e o processo defende que

> [...] a própria sociedade burguesa é só uma forma antagônica do desenvolvimento, nela são encontradas com frequência relações de formas precedentes inteiramente atrofiadas ou mesmo dissimuladas. Por exemplo, a propriedade comunal. Por conseguinte, se é verdade que as categorias da economia burguesa têm uma verdade para todas as outras formas de sociedade, isso deve ser tomado *cum grano salis*. Elas podem conter tais categorias de modo desenvolvido, atrofiado, caricato etc., mas sempre com diferença essencial. O assim desenvolvimento histórico se baseia sobretudo no fato de que a última forma considera as formas precedentes como etapas até si mesma, e as concebe sempre unilateralmente, uma vez que raramente critica a si mesma, do que é capaz apenas em condições muito determinadas. [...] a Economia burguesa só chegou à compreensão das sociedades feudais, antiga e oriental quando começou a autocrítica da sociedade burguesa. Na medida em que a Economia burguesa não se identifica pura e simplesmente com o passado, mitologizando-o, sua crítica das sociedades precedentes, sobretudo a feudal, com a qual ainda tinha de lutar diretamente, é similar à crítica feita pelo cristianismo ao paganismo, ou à do protestantismo ao catolicismo.

Volvendo ao tratamento categorial em decurso, ressaltamos que a relação entre as categorias da necessidade e do acaso não exclui a existência de causalidades no processo

histórico, mas se opõe à existência de uma necessidade cega que conduz a história da humanidade, em geral, e a história da matemática, em particular, ao estágio atual. Cheptulin (2004, p. 246) contribui com a temática, ao considerar a relação entre as categorias da necessidade e da casualidade[134] como processos "geneticamente ligados à causalidade, decorrem dela e representam o grau seguinte, depois da causalidade, do aprofundamento do conhecimento humano do mundo dos fenômenos". Portanto, a casualidade não significa uma ausência de causa, mas provém das relações heterogêneas que compõem a realidade. No âmbito da história, isso evidencia a existência de relações causais históricas que, decorrentes da complexidade do próprio real, não compõem e, muito menos, são resultados de cegas necessidades ou de alguma força teleológica que conduz o fazer histórico. Similarmente, convém frisar que o entendimento do ser social como complexo formado por outros complexos (Lukács, 2013) – por conseguinte, unitário e diferenciado –, em que se destaca o momento predominante – o trabalho como atividade que gera sempre o novo –, não fornece elementos para advogar em favor de qualquer determinismo. Para que fique mais cristalina essa tese, convém analisar as categorias da essência e do fenômeno, em grande medida com base em Lukács (2010, 2012, 2013).

Para Lukács (2013), as categorias da essência e do fenômeno estão relacionadas à permanência na mudança. Conforme Lessa (1999), de Platão a Hegel, a essência era considerada uma categoria que possuía um *quantum* maior de ser que o fenômeno. A esfera fenomênica era entendida apenas como uma expressão ou momento de manifestação da essência que, por sua vez, era a-histórica, imutável, ou seja, alheia à historicidade.

O "verdadeiro ser" se enlaçava à essência, o que conferia às suas propriedades um caráter a-histórico. Com o advento da crítica marxiana – que identifica objetividade com historicidade, sendo essa uma categoria ontológica universal –, o quadro que delineia a discussão ganha outras cores, a fim de conferir à essência a característica ontológica da historicidade. Como a continuidade é o campo da distinção entre a essência e o fenômeno, ela sempre possui como pressuposto o movimento histórico de permanência na mudança. Essa essência, devido à historicidade do ser, não pode ser dada *a priori*, mas apresenta alterações e se consubstancia durante o processo de desenvolvimento ontológico. Lukács (2012, p. 340-341) argumenta:

[134] Cheptulin (2004) chama de *contingência*. Entendemos como sinônimo de casualidade.

> A substância, enquanto princípio ontológico da permanência na mudança, decerto perdeu seu velho sentido de antítese excludente em face ao devir, mas obteve uma validade nova e mais profunda, já que o persistente é entendido como aquilo que continua a se manter, a se explicitar, a se renovar nos complexos reais da realidade, na medida em que a continuidade como forma interna do movimento do complexo transforma a persistência abstrato-estática numa persistência concreta no interior do devir. [...] a continuidade na persistência é, enquanto princípio de ser dos complexos em movimento, indício de tendências ontológicas para a historicidade como princípio do próprio ser.

Fica nítido como o filósofo magiar pensava a essência como uma categoria em movimento, que pode sofrer alterações, ou seja, como uma categoria que possui historicidade. Todavia, como é um representante do permanecer, da continuidade na mudança, ela possui papel fundamental nos processos do ser, pois representa as tendências de seu desenvolvimento, bem como as suas características intrínsecas. Por sua vez, o fenômeno não é produto passivo da essência, mas também influi sobre ela, o que atribui a ambos o caráter de categorias reflexivas (Lessa, 1999).

Outra questão destacada por Lessa (1999) sobre a relação entre necessidade, casualidade, essência e fenômeno, é que em Lukács (2010, 2012, 2013) não se encontra nenhuma identificação entre essência e necessidade. Podemos compreender que a primeira, como elemento representativo da continuidade no movimento de desenvolvimento dos complexos heterogêneos, não pode ser aprioristicamente delimitada, ao mesmo tempo que sua objetivação não escapa das influências do acaso. Por conseguinte, necessidade e essência não excluem a participação do acaso, que pode ser um fator de impacto, inclusive determinante, no direcionamento do desenvolvimento do ser.

Lukács (2013), na especificação das categorias da essência e do fenômeno, defende que na primeira há um predomínio da generalidade, enquanto na segunda há um maior *quantum* de singularidade e de particularidade. Como generalidade e singularidade são, assim como essência e fenômeno, categorias reflexivas, é ilícito estabelecer uma relação de identidade entre essência e generalidade e entre fenômeno e a particularidade e singularidade. De acordo com o autor,

> [...] todo e qualquer objeto sempre é simultaneamente um universal e um particular. Por essa razão, embora o mundo fenomênico – posto em relação com a essência enquanto universalidade permanente – represente um mundo da singularidade movimentada, ele igualmente deve produzir ontologicamente as suas próprias universalidades, assim como as universalidades da essência reiteradamente se revelam também como singularidades (Lukács, 2013, p. 391).

Como exemplo dessa inter-relação, podemos citar o processo de formação da individualidade. Lessa (2016a) afirma que, em Lukács (2013), há uma exaustiva discussão acerca do modo pelo qual as formas fenomênicas, singulares, de cada individualidade são, ao mesmo tempo, a cada momento histórico do ser social, portadoras de determinações genérico-essenciais. Consequentemente, o modo como as individualidades conduzem o desenvolvimento da humanidade, por meio de escolhas entre as alternativas postas pelo desenvolvimento social, influencia no desenvolvimento da essência humana. Pode-se perceber, portanto, como as categorias da generalidade, particularidade e singularidade, e as da essência e fenômeno manifestam-se no desenvolvimento do ser social indiscriminadamente no que se refere aos seus estatutos ontológicos. "Nenhum dos pólos da reprodução social é mais 'ser' que outro, não há um 'ser' de segunda categoria nesta esfera. Do mesmo modo, nem o gênero é portador exclusivo da essencialidade, nem a individualidade é portadora exclusiva da esfera fenomênica" (Lessa, 2016a, p. 189). Erroneamente, essa contraditória relação entre gênero e indivíduo pode ser estendida para outra, a relação entre a essência – entendida como uma linha que transpassa e conduz o desenvolvimento da história humana – e o fenômeno – como o modo de manifestação da essência em sua forma derradeira. A projeção dessas relações advém das relações fenomênicas que encarnarem uma zona maior de impacto das decisões e ações individuais que na essência.

Reforçamos a inadmissibilidade da dicotomia ou correlação direta da esfera individual com o fenomênico, bem como da esfera social com o essencial. Menos ainda é válida a supervalorização de um dos polos em detrimento do outro. No quadro delineado, emerge a dificuldade para constituir uma concepção de história que não desague no determinismo, nem negue a possibilidade de apreensão da objetividade processual do movimento histórico. Portanto, convém que essência, fenômeno, acaso e necessidade sejam delineados para não cair na redução da história a um processo teleologicamente guiado, ou resumir a realidade social ao puro caos e o campo de conhecimento das ciências sociais aos eventos singulares, como ocorre entre os pós-modernos (Lessa, 2016c).

A ontologia materialista-dialética, para se afastar dessas concepções, busca apreender na realidade leis do desenvolvimento histórico que podem ser apropriadas, mas que não são imutáveis e nem indicam qualquer concretude do desenvolvimento posterior com base no atual. [135] Essas leis são sínteses do processo de interação e desenvolvimento dos complexos

[135] Basta lembrar da passagem marxiana: "A anatomia do ser humano é uma chave para a anatomia do macaco" (Marx, 2011, p. 58).

heterogêneos do ser social que, em última instância, referem-se a atos singulares dos indivíduos que escolhem entre as alternativas postas pela realidade (Lukács, 2013).

Conforme Lessa (2016c), até o século XIX a humanidade havia contraposto, de maneira mecânica e metafísica, o acaso a leis necessárias. Entretanto, com a Economia Política e a historiografia pós-Revolução Francesa, que revelou o papel decisivo da luta de classes na história humana, percebeu-se que esta é regida por leis. Para apreender o caráter concreto do que se entende por lei, é imprescindível sua especificação em dependência da esfera do ser a que ela se objetiva. Inicialmente, equiparava-se leis naturais às leis sociais, no entanto, percebeu-se que as últimas não possuíam um grau de previsão tão preciso e confiável quanto as primeiras. Bhaskar (1998), em atinência a esse tema, afirma que os critérios para o desenvolvimento de teorias e suas substituições nas ciências sociais – ciências que estudam objetos dos quais fazem parte e podem também reciprocamente se influenciar – são *explanatórios* e *não-preditivos.* Isso é decorrente do caráter aberto do "sistema" social, ao deslocar a finalidade do prever para o situar e explicar.

A compreensão da não dicotomia entre acaso e necessidade surge em especial com Hegel e Marx. Lessa (2016c, p. 352) observa:

> Com Hegel e com Marx se descobre, finalmente (finalmente, porque por muito tempo a humanidade buscava esta resposta sem poder encontrá-la – por vezes mesmo sem poder formular corretamente a pergunta), que, como as tendências históricas universais (as leis universais do desenvolvimento social) são sínteses em totalidades [...] das consequências objetivas dos atos humanos singulares – e que estes, por serem a objetivação de projetos ideais, envolvem sempre uma escolha entre as necessidades e possibilidades presentes na vida cotidiana – por esta razão as leis universais do desenvolvimento social operam com um mais explícito caráter de tendência geral.

Explica-se o caráter tendencial de uma lei pelo condicionamento das possibilidades concretas estabelecidas sempre no momento do agir dos seres humanos. Porém, devido ao entendimento de que a totalidade é síntese e, portanto, consequência dos atos singulares que sempre trazem em seu bojo um *quantum* de acaso, criam-se campos de possibilidades para atuação e redirecionamento da lei. Nesse sentido, a contradição entre lei – consequentemente, necessidade – e acaso se configura como um movimento não linear que pressupõe campos de possibilidades – amplos, mas não ilimitados –, porquanto existem condições dadas e estabelecidas pelo próprio ser social, que condiciona também as possibilidades e a atuação dos indivíduos no desenvolvimento. Engels ([19--], p. 351) afirma, por exemplo, que Marx havia encontrado uma lei geral do desenvolvimento da história humana:

> Assim como Darwin[136] descobriu a lei do desenvolvimento da Natureza orgânica, Marx descobriu a lei do desenvolvimento da história humana: o fato tão simples, mas que até êle se mantinha oculto pelo ervaçal ideológico, de que o homem, precisa, em primeiro lugar, comer, beber, ter um teto e vestir-se antes de poder fazer política, ciência, arte, religião, etc; que, portanto, a produção dos meios de subsistência imediatos, materiais e, por conseguinte, a correspondente fase econômica de desenvolvimento de um povo ou de uma época é a base a partir da qual se desenvolveram as instituições políticas, as concepções jurídicas, as idéias artísticas e inclusive as idéias religiosas dos homens e de acôrdo com a qual devem, portanto, explicar-se; e não ao contrário, como se vinha fazendo até então.

Dessa lei, no entanto, não se deduz, logicamente, qualquer elemento da superestrutura a partir da base econômica. Segundo Lukács (2012), Engels aqui apenas expressa o caráter de prioridade ontológica da esfera econômica sobre as demais. Ou seja, basicamente quer dizer que se não houver seres humanos vivos – portanto, comendo, bebendo, abrigando-se etc. – não há religião, ciência, arte etc. De acordo com o autor, a análise do desenvolvimento desigual caminha para afastar esse tipo de incompreensão, uma vez que o marxismo, ao colocar "o caráter histórico do ser mais decididamente no centro do seu método e da aplicação concreta deste do que qualquer outra teoria, ele é capaz de avistar, no desenvolvimento desigual, a forma típica dos processos histórico-sociais" (Lukács, 2010, p. 226). Essa desigualdade não contradiz o desenvolvimento sob certas leis – no sentido que se entende a lei nas teorias do conhecimento –, mas faz parte das características mais essenciais de qualquer processo que se desdobra.

É lícito, para enfatizar o distanciamento da concepção aqui defendida de qualquer tipo de determinismo ou de qualquer outra que defenda a existência de alguma lei histórica transcendental com validade para toda situação histórica, apoiar-nos em uma carta escrita por Marx e dirigida ao diretor da revista Russa *Otienchéstvennie Zapiski* [137] na qual ele responde algumas críticas atinentes, em especial ao conceito de acumulação primitiva. Conforme Marx (1877), seu crítico teria transportado o movimento de transformação do feudalismo de países da Europa Ocidental para a Rússia, e, para além disso, ainda teria transformado seu

> [...] esboço histórico da gênese do capitalismo na Europa Ocidental numa teoria histórico-filosófica da *marche generale* que o destino impõe a todos os povos, quaisquer que sejam as circunstâncias históricas em que eles se encontram, a fim de que possa chegar finalmente a essa formação econômica que assegura, junto ao maior desenvolvimento das capacidades produtivas do trabalho social, o mais completo desenvolvimento do homem. Mas eu lhe peço desculpas (Ele está simultaneamente a honrar-me e a insultar-me excessivamente).

---

[136] Charles Darwin (1809-1882) – biólogo e naturalista inglês.

[137] Transliteração de *Отечественные записки* do alfabeto cirílico para o alfabeto latino. A expressão tem significado próximo de *Notas patrióticas* ou *Anais da Pátria*. Essa revista foi fundada em 1818 e sua última edição foi publicada em 1884.

Nessa carta, Marx afirma que o capítulo de *O Capital* (Marx, 1984) que se ocupa da análise da acumulação primitiva intenta delinear os nexos causais que conduziram à emergência da ordem capitalista do seio da ordem econômica feudal na Europa Ocidental. Para tal intento, foi necessário descrever o movimento histórico que converteu os produtores em assalariados, ocorrido pela dissociação dos seus meios de produção, concomitantemente à conversão dos que mantinham os meios de produção em capitalistas. Todas aquelas revoluções alavancadoras da classe capitalista em estado de formação – em particular, aquelas que tiraram, das grandes massas de produtores, seus meios de produção e subsistência e os arremessaram ao mercado de trabalho – desempenharam papel importante e determinante nesse processo. Desse modo, Marx utiliza um exemplo para afastar de vez a tendência ao determinismo ou a qualquer leitura supra-histórica.

Como contraexemplo, ele cita o fato de os plebeus da Roma Antiga, que originalmente eram camponeses livres, também terem sido expropriados, o que não os converteu em trabalhadores assalariados, mas sim em uma massa de desocupados. Por conseguinte, da desapropriação dos meios de trabalho desses plebeus não se ergueu o capitalismo, mas um modo de produção que era dependente da escravatura. Assim,

> [...] eventos notavelmente análogos, mas que têm lugar em meios históricos diferentes levam a resultados totalmente distintos. Estudando separadamente cada uma dessas formas de evolução e, logo depois, comparando-as poder-se-á encontrar facilmente a chave desse fenômeno, mas nunca se chegará a ela mediante o passaporte universal de uma teoria histórico-filosófica geral cuja suprema virtude consiste em ser suprahistórica (Marx, 1877).

Extrai-se, dessas considerações, que as leis presentes no desenvolvimento histórico, materializadas de formas distintas, são, além de específicas para determinado momento e lugar histórico, tendenciais, pois se objetivam como síntese de pores teleológicos oriundos de atos singulares ontologicamente dependentes das escolhas entre alternativas concretamente determinadas pelo desenvolvimento do ser social (Lukács, 2013). Segundo Gorender (1983 *apud* Castanho, 2010, p. 9), a "lei tendencial sintetiza a manifestação direcionada, constante e regular – não ocasional – da interação e oposição entre fatores imanentes na realidade fenomenal". Em suma, uma teoria da história com base em Marx nos encaminha a um entendimento da história como:

> *primeiro*, um processo objetivo; *segundo*, medularmente contraditório; *terceiro*, no qual concorrem sujeitos coletivos; *quarto*, que, determinados socialmente, atuam com diferentes graus; *cinco*, consciência e; *seis*, com teleologias diversas. Em outras palavras, quanto ao processo objetivo, isso significa que se trata de uma

> processualidade que porta a si mesma uma especificidade primariamente independente das representações que dela façam os sujeitos; *segundo*, esse processo é contraditório, já que ele é marcado pela tensão entre os interesses sociais que circunscrevem os diferentes sujeitos em presença; *terceiro*, é um processo com sujeitos, seus sujeitos reais não se plasmam como personalidades singulares, mas como grupos sociais vinculados por interesses comuns; *quarto*, projetos que são conduzidos por sujeitos determinados, isto é, tais sujeitos não se constituem aleatoriamente, mas segundo imperativos e possibilidades que se colocam concretamente nos espaços e tempos precisos; *quinto*, são sujeitos conscientes, ou seja, esses sujeitos não atuam cegamente, mas direcionados pelo maior ou menor grau de conhecimento que têm dos limites e possibilidades da sua ação. E *seis*, é um processo que é marcado pela ação dos sujeitos que têm finalidades, têm intenções, sendo, pois, um processo tencionado por sujeitos com suas próprias teleologias (Netto, 2010, p. 60-61).

Netto (2010) destaca, ainda, que uma teoria da história como forma de reflexão e reprodução ideal do movimento do desenvolvimento real do seu objeto necessita ser distinguida da própria história como movimento autônomo em relação ao pesquisador. Isso equivale a afirmar que as categorias elaboradas racionalmente no exame do objeto não pressupõem uma identidade entre esses dois polos, uma vez que são portadoras de legalidades próprias. Portanto, não é equivalente a afirmar falsamente sua independência, mas sim sua unidade e, simultaneamente, sua não identidade. É importante frisar que essa não identidade parte do princípio da objetividade da história, ou, nos termos utilizados por Bhaskar (1998, p. 227), da sua "*intransitividade existencial*"[138]. Conforme o autor inglês (1998, p. 227), tal característica não exclui a "*interdependência causal*", pois o pesquisador que se debruça sobre um objeto social está inserido nele e influi nos rumos de seu desenvolvimento. Assim, confere às ciências humanas a característica de ser "em si mesmas um aspecto do, e agentes causais no, que procuram explicar"[139].

O intuito do desenvolvimento analítico realizado até este ponto é trazer à tona as categorias necessárias para uma compreensão ontológica do objeto de ensino do Cálculo. Para tanto, utilizamo-nos, aqui, da teoria da história em uma perspectiva ontológica materialista-dialética para explicitar qual o papel da historicidade na análise de qualquer objeto na esfera do ser social. Além disso, visa enriquecer o debate sobre um elemento essencial para a compreensão do processo de ensino, ou seja, o papel desempenhado pela análise histórica do objeto do conhecimento e suas consequências para a organização do ensino. O objetivo da próxima seção é aprofundar a análise para capturar a relação que se estabelece entre o lógico e

---

[138] "*existencial intransitivity*". Utilizamos aqui a tradução livre e não publicada realizada pelo professor Dr. Mario Duayer.

[139] Encontra-se no original: "*causal interdependency* […] they are themselves an aspect of, and causal agent in, what they seek to explain".

o histórico, bem como suas particularidades como método e possíveis fundamentos para a organização do ensino. Tal propósito requer, também, a análise das diferentes interpretações e suas implicações no âmbito da tradição materialista histórico e dialética. Partimos do pressuposto de que entender essa relação ajuda a delimitar, de modo mais efetivo, os papéis das referidas categorias no domínio do ensino em geral e do ensino do Cálculo, em particular.

4.2 A RELAÇÃO ENTRE O LÓGICO E O HISTÓRICO NO PROCESSO DE CONHECIMENTO

A relação entre o lógico e o histórico tem figurado em diversas pesquisas em educação matemática no Brasil. Entre elas, uma das primeiras[140] publicações que trouxe de forma explícita a relação entre o movimento lógico e o histórico foi a dissertação de Newton Duarte, intitulada *A relação entre o Lógico e o Histórico no Ensino de Matemática Elementar* (Duarte, 1987). Nesse trabalho, o autor parte da hipótese de que tal relação é fundamental e decisiva para a organização intencional de uma sequência de ensino que busque a apropriação do conhecimento pelos estudantes. Trata-se, segundo pressuposto do autor, de um critério de seleção das etapas consideradas essenciais na evolução do conteúdo matemático em sua história que, por sua vez, devem ser reproduzidas na apropriação da sua lógica. A sequência criada visava "não desvincular a lógica do conteúdo matemático de seu desenvolvimento histórico, sem cair, no entanto, num historicismo que considera como solução para todos os problemas do ensino a reprodução pura e simples da história em sala de aula" (Duarte, 1987, p. 5). O autor argumenta que essa postura permite a determinação do essencial na evolução histórica dos conceitos a serem ensinados com foco no processo, compreendido como "essência da evolução histórica" (Duarte, 1987, p. 13). Para a identificação dessas etapas essenciais, é peremptório que o lógico se torne a referência. Nesses termos, objetiva-se a relação entre o lógico e o histórico, na qual

> [...] o lógico reflete o histórico pelo fato de que o lógico formou-se ao longo do processo histórico. O lógico é, portanto, o ponto de partida para o estudo do histórico, na medida em que o lógico reflete as etapas essenciais do processo histórico. Mas esse reflexo não é direto nem imediato, pois, do contrário, seria desnecessário o estudo histórico. Ao mesmo tempo que o lógico orienta o estudo do histórico, por sua vez, o

[140] No Apêndice A, encontra-se um levantamento de dissertações e teses que abordam ou se fundamentam na relação entre o lógico e o histórico. Além desse levantamento, buscamos as referências que possuem em seu título a referida relação. Dentre essas, pode-se constatar que, em âmbito nacional, Duarte (1987) foi a mais antiga que encontramos.

> histórico vai orientado a reformulação, o aprofundamento do lógico, numa ação recíproca que leva a um desenvolvimento em espiral (Duarte, 1987, p. 13).

A relação entre o lógico e o histórico é considerada fundamental para organização de uma sequência de ensino que não se reduza a um encadeamento lógico desnudo de conteúdo histórico, nem meramente uma exposição histórica, mas sim uma sequência lógico-histórica.[141] A particularidade dessa sequência encontra-se na intenção de que as "etapas do aprendizado" se sucedam "de maneira lógica, reproduzindo as etapas essenciais do processo histórico." Isso permitiria, segundo o autor, que o estudante tivesse "condições de aprender a matemática enquanto um processo" (Duarte, 1987, p. 14).

O autor, na sequência de uma exposição bastante densa sobre os diversos aspectos atinentes à relação entre essas duas categorias, de maneira resumida afirma que

> [...] as etapas de elaboração de uma sequência lógico-histórica de ensino-aprendizagem são:
> a. Analisar a estrutura lógica do conteúdo a ser ensinado. Essa análise fornecerá os pontos de referência para selecionar dentre os dados da história do desenvolvimento desse conteúdo, os antecedentes históricos (e não meramente cronológicos).
> b. Com base na análise do item anterior, selecionar, da bibliografia disponível, os antecedentes históricos, isto é, as etapas essenciais da evolução daquele conteúdo.
> c. Elaborar uma seqüência lógico-histórica da evolução daquele conteúdo e tendo o conteúdo na sua etapa mais desenvolvida como ponto de referência, verificar se a seqüência elaborada realmente é uma seqüência lógico-histórica, isto é, se aquela é a seqüência mais lógica da gênese daquele conteúdo.
> d. Para que essa seqüência se efetive enquanto seqüência de ensino-aprendizagem é preciso verificar em que ponto dessa seqüência está o conhecimento dos educandos. Muitas vezes eles já superaram algumas etapas posteriores, sem ter ainda passado pelas etapas precedentes, etc. Muitas vezes essa verificação se dá ao longo do desenvolvimento da própria seqüência com os educandos, quando então se vai detalhando mais certos passos e acelerando outros (Duarte, 1987, p. 32-33).

No restante da dissertação, o autor expõe uma sequência de ensino do sistema de numeração e das quatros operações aritméticas elementares – adição, subtração, multiplicação e divisão –, elaborada em consonância com as etapas e os fundamentos teóricos expostos.

Não é nosso objetivo desenvolver uma análise profunda das implicações educacionais e das concepções sobre a relação entre lógico e o histórico presentes no trabalho

---

[141] Entre as bibliografias consultadas em língua portuguesa, a mais antiga a utilizar a expressão "lógico-histórico" é Della Volpe (1984). Entre os autores brasileiros que abordam o tema do ensino de matemática, encontramo-la em Duarte (1987). Como Duarte (1987) cita Della Volpe (1984), é possível que a adoção da expressão tenha por base a concepção do autor francês. No contexto da sua obra, Duarte (1987) utiliza a expressão para adjetivar e discriminar a forma específica de organização do ensino proposta e grifar suas principais categorias constitutivas. Uma outra questão a ser posta em relevo é não termos encontrado essa expressão em nenhuma das bibliografias em língua estrangeira consultadas.

de Duarte (1987).[142] Essa exposição inicial, no entanto, serve para apresentar uma das primeiras produções de pesquisadores brasileiros com uma proposta pedagógica fundamentada que põe no centro a consideração dialética entre essas categorias. Isso possibilita entender o delineamento da centralidade e relevância que elas passam a adquirir nas pesquisas em educação matemática, com mais proeminência entre aquelas que se fundamentam na teoria histórico-cultural.

No contexto das pesquisas em educação matemática em âmbito nacional, pôde-se constatar um forte aumento do número daquelas que se utilizam da relação entre o lógico e o histórico.[143] Obviamente não temos possibilidade de citar todas, mas, a título de exemplo, destacamos aquelas produzidas pelo GEPAPe: Sousa (2004, 2018), Dias (2007), Dias e Moretti (2012), Lemes (2012), Moretti (2014), Panossian (2014), Sousa, Panossian e Cedro (2014), Silveira (2015), Panossian, Sousa e Moura (2017), Panossian, Moretti e Souza (2017), Moraes (2018), Silva (2018) e Teza (2018).[144]

Tais pesquisas, bem como a grande maioria daquelas que se fundamentam nessa relação, erguem suas argumentações sobre o arsenal categorial produzido, principalmente, por Kopnin (1978)[145]. Isso conduz a nos ocuparmos, na primeira parte da presente seção, da análise da relação entre o lógico e o histórico com centralidade na concepção dos autores que se baseiam na interpretação inaugurada por Engels (1982, 2017), com destaque para Kopnin (1978) – principal referência –, Rosental (1960), Ilienkov (1960) e Ilyenkov (2008). Na segunda parte da seção, explicitaremos uma interpretação de certo modo divergente das pesquisas mencionadas, principalmente com base na interpretação ontológica de Lukács (2010, 2012, 2013). A contraposição de interpretações permitirá o delineamento dos principais elementos que nos auxiliam no entendimento dos papéis desempenhados pelas referidas categorias na constituição de um objeto de ensino.

4.2.1 A interpretação da relação entre o lógico e o histórico com fundamento em elaborações de Engels

[142] Cabe aqui destacar que Duarte (2013) realiza uma autocrítica a alguns elementos da posição que defendeu em Duarte (1987). Voltaremos a essa questão no próximo capítulo.
[143] Ver Apêndice A.
[144] Os trabalhos aqui citados são dos membros do grupo listado em https://sites.google.com/usp.br/gepape-usp/produ%C3%A7%C3%B5es que apresentam os termos "*lógico"* e "*histórico",* de modo combinado, no título. Busca realizada em: 15 nov. 2022.
[145] No Apêndice A, é possível constatar quais as pesquisas que citam o referido autor.

A anunciada divergência interpretativa da relação aqui analisada tem seu solo na compreensão distinta de elementos teórico-conceituais das categorias do materialismo dialético. Para que possamos lançar luz sobre esse conglomerado complexo de questões, é crucial apresentar as primeiras formulações acerca da temática. Essas são encontradas em uma resenha elaborada por Engels (1982) da obra *A Contribuição para a Crítica da Economia Política* de Marx.[146] No extenso excerto a seguir, encontra-se a via pela qual Engels (1982) introduz a relação entre o lógico e o histórico, como dois modos de abordagem do objeto – no caso analisado, a Economia Política. Segundo o autor (1982), Marx teria sido o único que, ao partir da "casca" da lógica hegeliana, conseguiu extrair o núcleo que continha elaborações reais, que resgata o "método dialético". Isso só se tornou possível porque o autor de *O Capital* teria se focado na forma simples da dialética, sem as ornamentarias idealistas, o que foi determinante para capturar o desenvolvimento do capitalismo. Em seguida, Engels (1982, p. 541, negrito nosso) afirma que

> [...] depois de adquirido o método, a Economia podia ser abordada de duas maneiras: historicamente ou logicamente. Como na história, tal como no seu reflexo literário, o desenvolvimento, a traços largos, progride das relações mais simples para as mais complicadas, o desenvolvimento histórico-literário da Economia Política fornecia um fio condutor natural a que a crítica se podia ligar e, a traços largos, as categorias económicas apareceriam na mesma ordem do que o desenvolvimento lógico. Esta forma tem aparentemente a vantagem de uma maior clareza, pois, assim, segue-se o desenvolvimento *real*; de facto, porém, no máximo tornar-se-ia apenas mais popular. A história procede frequentemente por saltos e em ziguezague e, se houve-se que segui-la ao mesmo tempo por toda a parte, teria não apenas de recolher muito material de pouca importância, como também o curso do pensamento teria frequentemente que ser interrompido; além disso, não se poderia escrever a história da economia sem a da sociedade burguesa e, deste modo, o trabalho tornar-se-ia infindável, uma vez que faltam os trabalhos preparatórios. Portanto, **o modo lógico** de tratamento era o único que estava no seu lugar. **Este** [modo], porém, **não é de facto senão o histórico, despido apenas da forma histórica e das casualidades perturbadoras**. Por onde esta história começa, por aí tem de começar igualmente o curso do pensamento, e o seu avanço ulterior não será mais do que o reflexo, numa forma abstracta e teoricamente consequente, do decurso histórico; um **reflexo corrigido**, mas corrigido **segundo leis que o próprio decurso histórico real** fornece, na medida em que cada momento pode ser considerado no ponto de desenvolvimento da sua plena maturidade, da sua forma clássica.

No término do artigo, o autor complementa com as seguintes palavras:

[146] De acordo com notas da edição consultada, a referida resenha foi escrita por Engels de 3 a 15 de agosto de 1859 e publicada em duas partes no jornal *Das Volk*, nas edições de número 14 e 16, de 6 e 20 de agosto, respectivamente. O autor tinha a intenção de publicar a resenha em três partes, sendo a terceira e última voltada à análise do conteúdo econômico do livro, mas não levou adiante a empreitada devido à suspensão das atividades realizadas pelo jornal.

> Vê-se, como com este método o **desenvolvimento lógico** não precisa manter no domínio puramente abstracto. Pelo contrário, **ele requer a ilustração histórica**, **o contacto contínuo com a realidade**. Estes elementos de referência são inseridos, portanto, também com grande diversidade e, designadamente, tanto as alusões ao decurso histórico real em diferentes estádios do desenvolvimento social como à literatura económica, em que, desde o princípio, se procura a elaboração clara das determinações das relações económicas. **A crítica** dos modos singulares mais ou menos unilaterais ou confusos de conceber [a matéria], **no essencial, está já dada**, então, **no próprio desenvolvimento lógico e pode ser brevemente exposta** (Engels, 1982, p. 543, grifo nosso).

Aqui, optamos por sacrificar o estilo do texto para trazer essas duas extensas passagens, pois consideramos que nelas se encontram a gênese e a síntese de grande parte do desenvolvimento posterior da discussão acerca da relação entre o lógico e o histórico, no âmbito do materialismo dialético e, por consequência, de sua utilização no desenvolvimento das pesquisas em educação matemática.

Os pressupostos teóricos – e por que não dizer, metodológicos – explicitados são reafirmados por Engels (2017) em uma intepretação de *O Capital* de Marx que, segundo Barreira (2020), é conhecida como *historicista*. Nesse texto, Engels utiliza-se dos pressupostos enunciados na resenha anteriormente mencionada e estabelece um enlace entre o método de exposição e o processo de desenvolvimento das categorias em Marx. O pressuposto é que a lei do valor se materializaria na produção das mercadorias como determinação do valor pelo tempo de trabalho, o que estaria exposto nas múltiplas relações descritas como formas específicas dessa mesma lei na seção I do primeiro livro de *O Capital* (Marx, 1984). Contudo, Engels (2017) defende que, com o advento do dinheiro metálico, a determinação do valor na troca das mercadorias deixa de ser algo perceptível na superfície da sua relação. O referido evento – o surgimento do dinheiro metálico – passa a ser um episódio que particionaria em dois períodos a história econômica: o período de *produção simples de mercadorias* ou *produção mercantil* e a *produção capitalista*. Nesse sentido, explicita-se a interpretação de que o excurso categorial-analítico de *O Capital* percorreria a ordem da história do desenvolvimento das categorias expostas, uma vez que a forma-valor seria encontrada apenas no primeiro período – entre 3500 e 6000 anos a.E.C. até o século XV – quando vigorou a *produção simples de mercadorias* (Engels, 2017). Conforme Barreira (2020), a interpretação engelsiana teve forte influência no desenvolvimento de correntes marxistas, tanto no que tange à questão da crítica à Economia Política quanto no que se refere à interpretação filosófica do materialismo histórico e dialético.[147]

[147] Para ampliar e aprofundar esse debate, consultar Barreira (2020).

Nas interpretações influenciadas pelas palavras de Engels (1982, 2017), podemos citar elaborações filosóficas do marxismo soviético, dentre as quais destacamos Kopnin (1978), Rosental (1960), Ilienkov (1960) e Ilyenkov (2008).[148] Isso fica claro nos modos de abordagem da relação entre o lógico e o histórico, análogos àqueles objetivados pela ponta da pena do pensador e revolucionário alemão:

> O pensamento não deve simplesmente fotografar o processo histórico real com todas as suas casualidades, ziguezagues e desvios. O pensamento não é obrigado a seguir cegamente o movimento do objeto por toda parte. Por isso *o lógico é o histórico libertado das casualidades que o perturbam* (Kopnin, 1978, p. 184).

> O reflexo lógico do processo histórico, para descobrir o fio condutor do desenvolvimento, prescinde destes ziguezagues e retrocessos temporais, que se apartam da tendência geral do movimento.
> Ao afirmar que o lógico é o histórico corrigido, Engels sublinha acertadamente que esta correção se faz com arranjo às leis que ditam o próprio processo histórico objetivo[149] (Rosental, 1960, p. 341).

> [...] o "momento histórico" se encontra contido na própria forma da análise "lógica". Além disso, o método "lógico" de análise em sua compreensão dialético-materialista não era para Marx "mais que o método histórico, despojado unicamente de sua forma histórica e das contingências perturbadoras"[150] (Ilienkov, 1960, p. 12).

Essa linha argumentativa é encontrada em diferentes pesquisas no âmbito da educação matemática que se ancoram nas formulações desses autores. A título de exemplo, citamos Panossian, Moretti e Souza (2017, p. 133):

> Assim, consideramos que a compreensão da essência do objeto, tal como entendida por Kopnin (1978), passa pelo estudo de sua história e da história de seu desenvolvimento e de sua produção ante as necessidades humanas que o motivaram, bem como pela apropriação pelo sujeito cognoscente da lógica do conceito,

---

[148] A justificativa para destacar os referidos autores decorre do fato de Kopnin (1978) ser citado por grande parte das teses e dissertações que abordam a relação entre o lógico e o histórico no âmbito da educação matemática no Brasil (Apêndice A) e da influência de M. M. Rosental e E.V. Ilienkov sobre os formuladores da teoria do ensino desenvolvimental – como pode-se constatar em Davýdov [198-?] e Davídov (1988).

[149] "El reflejo lógico del proceso histórico, para descobrir el hilo conductor del desarrollo, prescinde de estos zigzags y retrocesos temporales, que se apartan de la tendencia general del movimiento.
Al afirmar que lo lógico es lo histórico corregido, Engels subraya acertadamente que esta corrección se hace com arreglo a las leyes que dicta el propio proceso histórico objetivo".

[150] No original se encontra: "[...] el <<momento histórico>> se halla contenido en la propia forma del análisis <<lógico>>. Además, el método <<lógico>> de análisis en su comprensión dialéctico-materialista no era para Marx <<más que el método histórico, despojado únicamente de su forma histórica y de las contingencias perturbadoras>>".
Destacamos que há numerosos indícios de que essa conceituação, conforme anteriormente exposto, é de autoria de Engels, e não de Marx.

> compreendida como a apropriação e sistematização do histórico pelo pensamento humano, sem as causalidades perturbadoras do movimento histórico. [151]

Com base na identificação da emergência da lógica e da história como pares categoriais relativos ao modo de apropriação da realidade pela consciência, passa ao primeiro plano, com relativa relevância, a necessidade de dissecação do significado do lógico e da lógica, assim como do histórico e da história. Para tal empreitada, apoiar-nos-emos principalmente em Kopnin (1978) devido às justificativas antes mencionadas – presença constante em pesquisas que se utilizam desse aparato conceitual no âmbito da educação matemática no Brasil –, sem que, com isso, deixemos de explorar as concepções dos outros autores que comungam das elaborações de Engels (1982, 2017).

Kopnin (1978) alicerça sua análise da relação entre o lógico e o histórico na identidade entre dialética, lógica e teoria do conhecimento. Tal tese, oriunda dos trabalhos de Lênin (2018, p. 327), é justificada da seguinte maneira:

> Se Marx não deixou uma "Lógica" (com letra maiúscula), deixou a lógica de *O capital*, e isso deveria ser utilizado profundamente nesta questão. Em *O capital* aplica-se a uma ciência a lógica, a dialética, a teoria do conhecimento < não são necessárias três palavras: é uma coisa só> do materialismo, que tomou tudo o que há de valioso em Hegel e fez esse valioso avançar.

Kopnin (1978, p. 45), no capítulo intitulado "A Concepção Marxista-Leninista da Dialética como Lógica e Teoria do Conhecimento*",* utiliza a citação anterior como epígrafe.[152] Ele considera que a identificação entre os referidos elementos não é casual, mas uma ideia central nos *Cadernos filosóficos* (Lênin, 2018). O filósofo russo (1978) defende, ainda, que a tese da coincidência entre dialética, lógica e teoria do conhecimento é um resultado natural do desenvolvimento de toda a história da filosofia. Na tessitura do texto, com a exposição e análise do movimento histórico de desenvolvimento dessas concepções que culminam na tese leniniana, identifica na filosofia grega, por um lado, o processo de germinação da filosofia no

---

[151] Entendemos que tenha ocorrido algum erro de digitação, de editoração ou algo que o valha, resultando, possivelmente, na substituição de "*casualidades"* por "*causalidades".* Nossa impressão decorre do fato de a categoria evocada na formulação engelsiana e, posteriormente, nas formulações dos autores que se baseiam em Engels (1982, 2017) ser a da *casualidade*.
O leitor encontrará, dentre os trabalhos listados no Apêndice A, diversas interpretações similares.

[152] Ao compararmos a tradução da citação presente em Lênin (2018) e Kopnin (1978), notam-se discrepâncias. Na edição do texto de Lênin (2018) encontramos "nos deixou", em Kopnin (1978) lê-se "desprezou", o que, no contexto da sentença, apresenta sentidos divergentes. Não possuímos condições para avaliar a correção das traduções, porquanto não possuímos nem o original em russo muito menos expertise para tal empreitada. Contudo, decorrente da utilização e tradução dessa passagem em outras obras da literatura marxista, tendemos a aceitar que a tradução do parágrafo presente em Lênin (2018) está mais de acordo com o contexto da obra.

interior das ciências particulares e, por outro, a separação de partes especiais sobre a forma de ontologia, gnosiologia e lógica. Por sua vez, com Kant, houve, por consequência do desenvolvimento das ciências naturais, uma ascensão da filosofia como teoria e método do conhecimento. Isso fez germinar, nas ciências naturais e em outros campos científicos, a necessidade de "uma teoria do conhecimento que arme as ciências naturais e outras ciências com um método de conhecimento científico, de uma teoria que ajude os cientistas a pensar corretamente, elaborar racionalmente os fatos e construir teorias" (Kopnin, 1978, p. 48). Kant, ao identificar tal necessidade, apresenta uma filosofia com essa finalidade. Porém é falha, uma vez que sua teoria do conhecimento era "isolada do estudo das leis e formas do próprio ser, fechada na investigação e crítica das faculdades cognitivas do homem". Ou seja, o filósofo alemão teria reduzido a "teoria do conhecimento ao simples estudo das formas da atividade subjetiva do homem" (Kopnin, 1978, p. 48-49). Após Kant, a filosofia seguiria uma linha de unificação da teoria do conhecimento com a lógica e a ontologia, na qual um importante papel foi desempenhado por Hegel.

Hegel, segundo Kopnin (1978), foi o primeiro a elaborar o princípio de identidade entre as leis do ser e as leis do pensamento. Entretanto, como para Hegel elas eram ao mesmo tempo as leis da própria realidade objetiva – o que o levava a considerar que o pensamento era base de todo o processo de desenvolvimento –, o pensamento se voltava à apreensão das suas próprias leis. "À medida que o conceito é a própria realidade, a lógica em Hegel engloba tudo; em lógica se converte toda a filosofia" (Kopnin, 1978, p. 50). Essa característica do sistema hegeliano é superada, de acordo com o autor, pelo reconhecimento do *princípio do reflexo*, inserido na inter-relação entre pensamento e ser que, por sua vez, necessita reconhecer o lugar da prática na teoria do conhecimento. Em decorrência, a relação entre sujeito e objeto se torna nuclear. Conforme Kopnin (1978, p. 51, grifo nosso), o

> [...] marxismo relaciona sujeito e objeto na base real em que eles são unificados na história; a dialética subjetiva é o mesmo movimento objetivo, só que sob uma forma de sua existência diferente da natureza. (...) Na atividade prática dos homens verifica-se uma **coincidência plena de sujeito e objeto**, a atividade humana se processa e é dirigida por leis objetivas. O momento da dialética geral do sujeito e do objeto vem a ser a relação das leis e formas do pensamento com a realidade objetiva que fora dele se encontra.
> A evolução do nosso pensamento é apenas o reflexo da dialética objetiva, as leis do pensamento são o reflexo das leis da natureza.

A teoria do reflexo ganha relevância quando, sobre sua concepção, são "aplicados" os princípios da dialética, despindo-a de seu caráter mecânico que permite, segundo Kopnin (1978), um entendimento mais apurado da unidade entre as leis do pensamento e do ser. O autor

enfatiza que essa unidade não significa coincidência, pois as leis do pensamento e do ser se unem pelo conteúdo, mas diferenciam-se pela forma. No caso, a unidade é estabelecida e comprovada apenas pela prática. Por meio da prática o ser humano estabelece e apreende, no pensamento, as leis do mundo objetivo mediante representação. De tal modo,

> [...] a dialética revela as leis do movimento dos objetos e processos, converte-se ainda em método, em lógica do avanço do pensamento no sentido do descobrimento da natureza objetiva do objeto, dirige o processo de pensamento segundo leis objetivas visando a que o pensamento coincida em conteúdo com a realidade objetiva que fora dele se encontra e, após concretizar-se em termos práticos, leve ao surgimento de um novo mundo de objetos e relações (Kopnin, 1978, p. 53).

Na esteira de Lênin (2018), o autor amplia a noção de *Lógica*, a ponto de identificá-la a uma concepção de mundo e método de pensamento teórico-científico que se apresenta como guia para o movimento do conhecimento no sentido da verdade.

> Enquanto lógica, a dialética materialista se distingue de qualquer outra ciência pelo fato de tomar como base o conhecimento das leis de desenvolvimento de qualquer objeto, do objeto em geral, e criar **um método universal** de movimento do pensamento no sentido da verdade, elaborar problemas lógicos que se apresentam ante cada ciência (ciência em geral) no processo de apreensão da verdade, ao passo que qualquer outra ciência concretiza e aplica essa lógica ao conhecimento do seu objeto específico (Kopnin, 1978, p. 54, grifo nosso).

Tal concepção da lógica dialética materialista – em princípio, com pretensões universalistas –, esbarra na própria recusa, a nosso ver acertada, de sua intencionalidade no seio dos métodos específicos. Isso é justificado pela distinção entre os métodos filosóficos e especiais, no qual o imprescindível na caracterização do primeiro não é sua suposta aplicação universal, mas "o fato de ele tentar descobrir as leis da evolução do conhecimento humano no sentido da verdade" (Kopnin, 1978, p. 98). Trata-se, também, de um contraste em relação à concepção de ontologia do autor.

Conforme Kopnin (1978), há dentro da tradição marxista duas variantes no que diz respeito à defesa da criação da sua ontologia: uma voltada à doutrina do ser em geral e outra à doutrina do ser social. A primeira pressupõe a possibilidade de encontrar formas mais gerais, propriedades e relações entre os objetos no mundo que seriam incapazes de ser encontradas por uma ciência particular. A segunda possui a mesma tarefa, mas distingue-se pelo seu objeto, a atividade humana. Para o autor, as duas tentativas de elaboração de uma ontologia marxista possivelmente estarão fadadas ao fracasso, pois, no ponto de partida, contradizem "um dos princípios fundamentais que servem de base à filosofia marxista-leninista: a coincidência entre

a dialética, a lógica e a teoria do conhecimento". Esse fator condenaria toda ontologia ou metafísica ao fracasso, pois, mesmo que

> [...] venham a ser construídas à base da generalização dos dados das ciências naturais ou sociais, não se converterão numa doutrina autêntica do ser (da natureza ou da sociedade), de vez que a ontologia, em quaisquer variantes, apresenta como objeto de estudo o ser ou o existente em geral tal como ele é, ou melhor, subentende a criação de uma "teoria universal do ser" (Kopnin, 1978, p. 58-59).

O autor acusa as tentativas de formação de ontologias marxistas de não tratar de uma relação considerada essencial, a saber, aquela entre o pensamento e o ser.

> O materialismo dialético não se contenta com uma divisão racional entre as leis do ser e as leis do pensamento; une-as racionalmente, leva-as à identidade, à coincidência, que compreende também certas diferenças enquanto momento. Note-se que, para a filosofia, é justamente a coincidência dessas leis que adquire importância de princípio. (Kopnin, 1978, p. 61).

O que nos interessa, para uma melhor compreensão da relação entre o lógico e o histórico, delineia-se à medida que o autor começa a tornar mais explícita sua concepção de Lógica, concebida como um campo que estuda "o movimento do conhecimento no sentido da verdade" (Kopnin, 1972, p. 64). Seu objeto é atinente ao movimento da dedução lógica dos conhecimentos – estrutura de conclusão como forma de passagem de um conhecimento dado a um outro como necessidade lógica ou probabilística –, assim como ao processo de mudança das ciências por meio da extrapolação de seus próprios limites, o que possibilita o surgimento de novas teses (Kopnin, 1978). Entretanto, em sentido *stricto* ou *lato*, a Lógica está vinculada ao conhecimento científico, de modo a restringir, pelo que se pode perceber, o conhecimento ao científico (González; Aquino, 2018). Para Kopnin (1972), a referida definição da lógica leva em consideração que, na história da humanidade, o novo, a princípio, sempre parece incorreto. A fim de abarcar o conhecimento no sentido da verdade, o lógico se debruça sobre a teoria científica, sistema que é forma amadurecida do conhecimento verdadeiro. No entanto, não se restringe à análise da sua estrutura de formação e conclusão, ou seja, não é delimitada pelo detalhamento analítico do conhecimento em seus pressupostos e processo dedutivo. O filósofo soviético atribui ao *lógico*

> [...] tudo o que está vinculado à análise do conhecimento científico, ao desmembramento de suas formas e leis do movimento. Sob esse conceito surge o perigo de que a lógica deixe de ser algo único, uma vez que em seu objeto estão incluídos elementos demasiadamente heterogêneos, dos cálculos formais às leis e categorias da dialética. É verdade que ela contém distintos elementos, porém,

> permanece ao mesmo tempo unificada, posto que todos esses elementos estão de uma forma ou de outra vinculados à concepção do conhecimento e do seu movimento no sentido de resultados objetivamente verdadeiros. Seja qual for a lógica, ela é sempre um sistema que estuda o conhecimento de um aspecto determinado, isto é, uma lógica do conhecimento científico. A lógica, na medida em que analisa o movimento no sentido da verdade ou pelo menos um aspecto qualquer desse delicado processo, continua lógica sejam quais forem os meios por ela utilizados (Kopnin, 1972, p. 63-64).

Desse delineamento, fica mais clara a ideia a ser comunicada pelo autor ao afirmar que entende por lógico "o método de assimilação teórica do objeto no pensamento do homem por meio da criação de um sistema de abstrações" (Kopnin, 1972, p. 60). Derivada da tese da identidade entre dialética, teoria do conhecimento e lógica, está a ideia dessa última também como método. É, pois, resultado do seu estatuto diretor da atividade sintética do pensamento, fundamental ao movimento de desdobramento e encadeamento conceitual – que difere da dedução lógico-formal, de símbolo a símbolo – para apreensão do objeto em suas múltiplas relações. O lógico é a base do pensamento, representada pelas categorias da dialética materialista, que nada mais são que sínteses condensadas das experiências antecedentes do conhecimento (Kopnin, 1978).

O lógico, como apoio para o pensamento e arraigado no método, é-nos desanuviado quando o autor soviético (1978) define o método como "um meio de obtenção de determinados resultados no conhecimento e na prática" (Kopnin, 1978, p. 91). Ou ainda, "um meio de atividade do homem em que se unem num todo as leis objetivas interpretadas com o fim voltado para a apreensão do objeto e a sua transformação" (Kopnin, 1978, p. 96). Como meio de obtenção ou atividade, nos dizeres do autor, o que caracteriza o método do conhecimento são as "regras de ação, padronizadas e unívocas; não havendo padrão nem univalência, então não há regra, logo, não há método, não há lógica" (Kopnin, 1978, p. 94-95). As regras, todavia, são a conversão das leis objetivas em modo de ação do sujeito, o que impele as interpretações apriorísticas. Fica evidente que, para Kopnin (1978), a inter-relação entre pensamento e realidade está em consonância com as teses leninianas relativas ao conhecimento. Para Lênin (2018, p. 108),

> A lógica é a doutrina não das formas exteriores do pensamento, mas das leis do desenvolvimento "de todas as coisas materiais, naturais e espirituais", isto é, do desenvolvimento de todo o conteúdo concreto do mundo e de sua cognição, ou seja, o resumo, a soma, a conclusão da *história* da cognição do mundo.

Realizados os delineamentos iniciais, nossa preocupação agora é com a explicitação das consequências atinentes à compreensão da relação entre o lógico e o histórico. É possível

perceber que esses desdobramentos orbitam duas questões principais: a diferença entre o método lógico e o método histórico de pesquisa e em como um se expressa em inter-relação com o outro.

Começaremos, novamente, com a visão de Kopnin (1978). Para o autor (1978, p. 183), enquanto o histórico é o "processo de mudança do objeto, as etapas de seu surgimento e desenvolvimento", o lógico é o meio pelo qual o pensamento reproduz esse processo em sua objetividade, complexidade e contraditoriedade. Destarte, "é o reflexo do histórico em forma teórica, vale dizer, é a reprodução da essência do objeto e da história de seu desenvolvimento no sistema de abstrações" (Kopnin, 1978, p. 183-184). Entretanto, o reflexo não é uma fotografia de todo o processo, o que seria impossível para quem se propõe à análise de qualquer fenômeno. Portanto, "*o lógico é o histórico libertado das casualidades que o perturbam*" (Kopnin, 1978, p. 184). Dentre as duas categorias, o autor, como um bom materialista, atribui primazia do histórico em relação ao lógico.[153]

Um ponto que distingue Kopnin (1978) de outros autores que abordam essa relação – Rosental (1960), Ilienkov (1960) e Ilyenkov (2008) – é a ausência de um delineamento específico de dois métodos, mesmo que complementares. Entretanto, em confluência com esses autores, considera a relação entre o lógico e o histórico um pressuposto metodológico para uma abordagem dialética.

> O problema da *inter-relação do lógico e do histórico* tem muitos aspectos, não se limita à inter-relação da teoria do objeto e sua história. O lógico reflete não só a história do próprio objeto como também a história do seu conhecimento. Daí a unidade entre o lógico e o histórico ser premissa necessária para a compreensão do processo de movimento do pensamento, da criação da teoria científica. À base do conhecimento da dialética do histórico e do lógico resolve-se o problema da correlação entre o pensamento individual e o social; em seu desenvolvimento intelectual individual o homem repete em forma resumida toda a história do pensamento humano. *A unidade entre o lógico e o histórico* é premissa metodológica indispensável na solução dos problemas da inter-relação do conhecimento e da estrutura do objeto e do conhecimento da história e seu desenvolvimento (Kopnin, 1978, p. 186).

Rosental (1960) e Ilienkov (1960) afirmam, na esteira de Engels (1982), que no método dialético marxiano coexistem dois modos de abordagem do objeto: um lógico e o outro

---

[153] Com base nisso que Panossian (2014, p. 22) opta pela expressão *movimento histórico e lógico* ao invés de *lógico-histórico*. Sua justificativa considera que "os acontecimentos históricos são determinantes do que se têm condições de analisar como desenvolvimento do processo de pensamento. Só é possível captar e reconhecer o desenvolvimento do pensamento por meio das marcas históricas que vão sendo deixadas. Entende-se que os processos lógicos de pensamento só se consolidam, e completam seu processo de constituição, no movimento do abstrato ao concreto, quando encontram a possibilidade de se concretizar, sendo cristalizados em ações ou registros que se tornam históricos. Assim, ainda que se considere que a relação lógico/histórico é uma relação dialética, só conseguimos determinar na experiência humana o movimento lógico dado o movimento histórico".

histórico. Os autores concordam que, em *O Capital* (Marx, 1984), prepondera o método lógico em detrimento do histórico. Ilienkov (1960) defende que nessa obra o método histórico é acessório, utilizado como instância comprovatória. Por sua vez, Rosental (1960), ao caracterizar o método lógico como aquele que estuda os fenômenos em seu estado mais puro, considera que, em *O Capital*, tal método se manifesta na redução das pessoas a simples personificações de categorias econômicas. Cabe ao método histórico refletir a trajetória histórica do desenvolvimento dos fenômenos, não pela simples descrição empírica, mas pela exposição do processo histórico-concreto. Assim sendo, as casualidades – como, por exemplo, a atuação histórica de determinadas personalidades – desempenham um papel importante, como é possível constatar no texto marxiano *Luta de Classes na França*. Apesar dessa caracterização entre esses dois métodos, Rosental (1960) defende a impossibilidade da existência de um método lógico ou histórico puro ou isolado.

Ilienkov (1960), na correlação entre os referidos métodos, considera que a dialética materialista concebe o objeto em sua processualidade real, como série de estados qualificativamente particulares que se substituem uns aos outros e possuem um começo que não é um acúmulo de mudanças, mas uma fratura qualitativa no seu desenvolvimento universal. Assim,

> [...] só é possível descobrir a autêntica ordem "histórica" do desenvolvimento de umas formas de existência do objeto a partir de outras de suas formas somente por intermédio da análise "lógica" do objeto no nível superior de sua maturação. O processo histórico aparece em seus resultados objetivos frente uma forma que despe sua própria "essência". O estudo do "presente" joga luz sobre o "passado"[154] (Ilienkov, 1960, p. 26).

Observa-se, pois, a necessidade da análise do movimento de composição do objeto, entretanto isso só pode ser realizado na medida em que se compreende corretamente sua essência, o que confere prioridade ao método lógico. Ou seja, se o histórico apresenta prioridade ontológica sobre o lógico, no plano do conhecimento sobre o objeto o lógico é quem assume esse papel. Em consonância com tal assertiva, o autor considera que "toda a questão reside em compreender o 'presente' na essência, historicamente" [155] (Ilienkov, 1960, p. 12). Fica sem

---

[154] "[…] se puede llegar al descubrimiento del auténtico orden «histórico» del desarrollo de unas formas de existencia del objeto a partir de otras de sus formas sólo a través del análisis «lógico» del objeto en el nivel superior de su madurez. El proceso histórico aparece en sus resultados objetivos bajo una forma que desnuda su propia «esencia». El estudio del «presente» arroja luz sobre el «pasado»".

[155] "[…] todo el asunto reside em comprender el <<presente>> em esencia, historicamente".

explicação o que o autor entende por "compreender o *presente* historicamente" e, de forma adicional, "como se compreende o presente historicamente".

Das exposições até então realizadas, é possível afirmar que Ilienkov (1960), Ilyenkov (2008), Rosental (1960) e Kopnin (1978) responderiam que o "como" tem por base uma postura séria sobre a relação entre o lógico e o histórico.

> A convergência entre o "lógico" e o histórico é entendida pela primeira vez pela teoria materialista do reflexo e se estabelece como o ponto de partida da lógica do marxismo-leninismo. A relação entre a lógica do pensamento desenvolvido (a lógica dialética) e a história do pensamento, assim como a relação de ambas com a história real da natureza e a sociedade, é uma questão que converge com o problema da estrutura da dialética como lógica, como teoria do conhecimento do marxismo-leninismo. Este é o problema da coerência dos elementos da dialética em sua exposição sistemática[156] (Ilienkov, 1960, p. 35).

É ponto pacífico entre os autores que a base para o estudo do objeto está na sua forma mais madura. Essa convicção tem como alicerce a famosa passagem supracitada de Marx (2011, p. 58), que estabelece como forma analítica preferencial do objeto aquela mais desenvolvida. Dessa passagem, Kopnin (1978), Ilienkov (1960), Ilyenkov (2008) e Rosental (1960) concebem que a referência inicial para o estudo do objeto é sua forma final, em que "os aspectos essenciais estão suficientemente desenvolvidos e não estão disfarçados por casualidades que não têm relação direta com ela" (Kopnin, 1978, p. 184-185). Para Kopnin (1978), da fase madura, realizam-se certas definições primárias da essência que, apesar de sua insuficiência, são indispensáveis para o estudo do objeto em seu processo histórico. Ali encontra-se implícito o caminho percorrido pelo objeto, o qual deve ser explicitado e explicado pela teoria. Reproduzir no pensamento a essência de um fenômeno ou objeto significaria, portanto, "ao mesmo tempo a *descoberta da história* desse fenômeno, que a teoria de qualquer objeto não pode deixar de ser também a sua história" (Kopnin, 1978, p. 185). Nessa mesma direção, Ilienkov (1960) concebe que os elementos embrionários do objeto desenvolvido só são possíveis de serem observados no passado, quando o que está desenvolvido possa ser analisado, compreendido e conhecido por nós.

Encadeada a essa exposição analítica, está a compreensão do movimento histórico como processo de desdobramento do simples ao complexo, ou seja, um movimento de eterna

---

[156] "La convergencia entre lo «lógico» y lo histórico se comprende por primera vez sobre la teoría materialista del reflejo y configura el principio de partida de la lógica del marxismo-leninismo. La relación entre la lógica del pensamiento desarrollado (la lógica dialéctica) y la historia del pensamiento, así como la relación de ambas con la historia real de la naturaleza y la sociedad, es una cuestión que converge con el problema de la estructura de la dialéctica como lógica, como teoría del conocimiento del marxismo-leninismo. Este problema es el de la coherencia de los elementos de la dialéctica en su exposición sistemática".

complexificação da realidade. Tal compreensão traz implicações à apreensão da realidade, pois no pensamento, apropriar-se do objeto como histórico implica a articulação entre os seus elementos de modo que expressem seu processo de desenvolvimento e complexificação. Para Kopnin (1978, p. 185), isso fica explícito quando Marx, no estudo do capitalismo, estabeleceu uma ordem lógica da forma valor (simples – extensiva – geral – forma dinheiro) que expressa o movimento de complexificação do simples ao complexo e, concomitantemente, é a expressão do "processo real de mudança das formas de valor, processo que se verificou na história real".

Outro aspecto atinente a esse emaranhado de questões é que não é possível, conforme Rosental (1960), que a dialética entre o lógico e o histórico implique uma identidade, no sentido hegeliano, entre ser e consciência, mas a apreensão do reflexo do mundo objetivo por meio de conceitos. Em razão do mundo seguir um desenvolvimento que caminha do simples ao complexo, a exposição dos conceitos, organizados logicamente sob esse princípio, possui caráter objetivo. Ou seja, "a lógica do movimento do pensamento do simples ao complexo corresponde ao movimento histórico real"[157] (Rosental, 1960, p. 337). Entretanto, como o lógico é expressão concentrada do histórico, não pode seguir o desenvolvimento histórico de modo fiel. Portanto, em alguns casos desvia-se de sua trajetória real, o que o caracteriza como um reflexo "corrigido" do histórico. Nessa forma de apropriação da realidade, o lógico

> [...] deve refletir, no essencial, o processo histórico que estes fenômenos e objetos sofrem em seu desenvolvimento. Portanto, também as categorias e conceitos científicos, que resumem a marcha mesma do desenvolvimento do objeto, devem ser reflexo do nexo histórico entre os fenômenos e devem deduzir umas das outras em consonância com a verdadeira história do objeto de investigação[158] (Rosental, 1960, p. 333).

A investigação científica, guiada pelo que chama de "princípio dialético de concordância do lógico com o histórico"[159] (Rosental, 1960, p. 334), deve dispor e ordenar os conceitos, leis e categorias pelo princípio objetivo pelo qual o desenvolvimento histórico da realidade é refletido no desenvolvimento lógico dos conceitos. Rosental (1960) cita como exemplo a construção da tabela periódica por Mendeleev[160], que ocorreu pelo caminho dos

---

[157] "[…] la lógica del movimiento del pensamiento de lo simple a lo complejo corresponde al movimiento histórico real".
[158] "[…] debe reflejar, en lo esencial, el proceso histórico que estos fenómenos y objetos sufren en su desarrollo. Por tanto, también las categorías y conceptos científicos, que resumen la marcha misma del desarrollo del objeto, deben ser reflejo del nexo histórico entre los fenómenos y deben deducirse unas de otras en consonancia con la verdadera historia del objeto de la investigación".
[159] "[…] el principio dialéctico de la concordancia de lo lógico con lo histórico".
[160] Dmitri Mendeleev (1834 – 1907) – Químico e físico russo que criou a primeira versão da tabela periódica dos elementos químicos.

elementos mais simples aos mais complexos, correspondente ao "processo histórico da natureza mesma, processo que tem tido cada vez maior complexidade. [...] Mendeleev [...] captou e refletiu, no sistema que havia criado, precisamente a histórica mutabilidade da natureza"[161] (Rosental, 1960, p. 334).

Acerca dessa mesma temática, Ilienkov (1960) e Ilyenkov (2008) realizam, a nosso ver, uma análise mais sofisticada, que se descola dos outros autores em suas conclusões. Para Ilienkov (1960), em face de um objeto que ganha nova qualidade, o resultado do desenvolvimento, em geral, transforma de modo ativo as condições pelas quais apareceu. Se esse desenvolvimento é resultado de uma nova direção ou interação qualitativamente nova, ela transforma suas formas precedentes em externas, secundárias ao seu ser. A partir do momento que se constitui esse novo objeto – ou seja, que se estabelece um "novo começo" para seu desenvolvimento, produto secundário da precedente história –, ele transforma as premissas previamente desenvolvidas em suas formas acessórias. Por consequência, converte-se em princípio universal que domina e rege os caminhos de desenvolvimento desse novo objeto. Ao transformar as premissas em suas formas acessórias, destrói-as ou as incorpora até que aquilo que se apresentava como possibilidade não desenvolvida ou tendência se torne realidade.

Nesse sentido, é possível entender como Ilienkov (1960) e Ilyenkov (2008) tratam das categorias do casual e da necessidade imbricadas nas relações e interações do movimento do objeto. Nesse processo, o precedente se torna "logicamente subordinado" ao novo objeto. Destarte, a relação entre o lógico e o histórico, em Ilienkov (1960) e Ilyenkov (2008), não se aproxima de um paralelismo de mesmo sentido como em Rosental (1960) – salvaguardadas as devidas ressalvas deste último autor para o lógico como "reflexo corrigido do histórico" –, mas de uma relação que, em muitos dos casos, é invertida devido à interatividade e à unidade da relação fenômeno e essência. Fica estabelecida, de uma maneira ou de outra, uma relação na qual o histórico coincide com o fenomênico, expressão mais direta e perceptível da essência. Por sua vez, a ordem lógica do desenvolvimento das categorias, como expressão do desenvolvimento histórico, contradiz esse apenas em sua aparência externa, e não em sua essência que manifesta as relações causais da história concreta do objeto.

> A sequência de acontecimentos (fenômenos) "logicamente" exposta, descobre pela primeira vez o segredo de sua autêntica inversão sequencial e coincide com o "histórico", compreendido e expresso em sua "essência". Além disso, oferece a

[161] "[…] el proceso histórico de la naturaleza misma, proceso que ha ido adquiriendo cada vez mayor complejidad".

> possibilidade de compreender a própria sequência temporal de acontecimentos científica e não empiricamente[162] (Ilienkov, 1960, p. 25).

Para ilustrar essa afirmação, o filósofo russo cita o exemplo da crise geral de superprodução que, em sua primeira manifestação aparente, emerge como contradição na esfera das movimentações monetárias e operações bancárias para, só por último, aparecer como aspecto da superprodução de mercadorias. O sujeito, diante desse processo, pode ser levado a acreditar que a causa da crise está nas relações monetárias e cambiais, fazendo com que a verdadeira causa apareça como "consequência de sua própria consequência"[163] (Ilienkov, 1960, p. 334). Tal atitude tem como decorrência que, do enlaçamento das categorias com a forma de desenvolvimento histórico – ao tomar como critério a ordem de acontecimentos no tempo – não se obterá uma convergência entre o lógico e o histórico, mas sua dissociação, pela não expressão fiel do objeto. Essa tese, por sua vez, tem como embasamento as considerações marxianas expressas nas seguintes palavras:

> Seria impraticável e falso, portanto, deixar as categorias econômicas sucederem-se umas às outras na sequência em que foram determinantes historicamente. A sua ordem é determinada, ao contrário, pela relação que têm entre si na moderna sociedade burguesa, e que é exatamente o inverso do que aparece como sua ordem natural ou da ordem que corresponde ao desenvolvimento histórico. Não se trata da relação que as relações econômicas assumem historicamente na sucessão de diferentes formas de sociedade. Muito menos de sua ordem "na ideia" ([como em] Proudhon) (uma representação obscura do movimento histórico). Trata-se, ao contrário, de sua estruturação no interior da moderna sociedade burguesa (Marx, 2011, p. 60).

Com base nesse princípio e na literalidade inexorável imanente ao texto marxiano é que Ilyenkov (2008, p. 218), ao abordar a organização das categorias no sistema categorial da ciência, compreende que

> Desenvolvimento lógico das categorias no sistema da ciência corresponde à sequência histórica genuína escondida atrás da observação empírica, contradizendo a aparência externa, o aspecto superficial desta sequência. A ordem lógica corretamente estabelecida do desenvolvimento das categorias no sistema da ciência revela o segredo da real sequência objetiva do desenvolvimento do fenômeno, dos aspectos do objeto, permitindo o entendimento da sequência cronológica em-si cientificamente ao invés de empiricamente, do ponto de vista do senso comum. O desenvolvimento lógico das categorias na ciência contradiz a sequência cronológica exatamente porque

[162] "La secuencia de acontecimientos (fenómenos) «lógicamente» expuesta descubre por primera vez el secreto de su auténtica inversión secuencial y coincide con lo «histórico», comprendido y expresado en su «esencia». Además, ofrece la posibilidad de comprender la propia secuencia temporal de acontecimientos científica y no empíricamente".

[163] "[…] consecuencia de su propia consecuencia".

> corresponde à sequência genuína e objetiva de formação da estrutura do objeto estudado.[164]

Portanto, a relação entre o lógico e o histórico está diretamente relacionada às categorias reflexivas do fenômeno e da essência, em que a história empírica se identifica com o que é fenomênico e a história concreta com a sua essência. É nesses termos que Radford (2021b) considera que, no materialismo dialético, a interpretação comum acerca da relação entre as dimensões lógica e histórica do conhecimento ocorre de modo que a primeira se associa ao movimento das essenciais, enquanto a segunda é associada ao movimento fenomênico da realidade efetiva.

O quadro delineado de encadeamento conceitual no pensamento para a correta apreensão do objeto – segundo os autores que defendem a relação do histórico com o lógico como princípio teórico e também metodológico – liga-se ao seu processo de desenvolvimento, no qual o ordenamento lógico reproduz o ordenamento histórico do desdobramento das relações essenciais, ou seja, desnudadas de suas casualidades. Assim, forma-se um quadro de homogeneização do processo por meio da lógica.

Na concepção dos autores aqui tratados, a relação entre o lógico e o histórico no processo de conhecimento evidencia que a análise do presente, do desenvolvido, do complexo lança luz sobre os elementos essenciais que auxiliam na análise da história do desenvolvimento do objeto. De outro modo, o desenvolvimento histórico indica os processos necessários que se desdobram no desenvolvimento da essência e devem ser reproduzidos no sistema conceitual por meio dessa sequência. O lógico e o histórico são tomados como categorias lógicas que representam o encadeamento real dos processos objetivos da realidade. Trata-se, pois, de uma consequência entre o pressuposto da identidade das leis do ser com as leis do pensamento, mesmo que o lógico expresse o histórico de modo aproximado ou liberto das *casualidades perturbadoras*, conforme pode-se ver em Kopnin (1978). Da identidade entre as leis do pensamento e as leis do ser, desdobra-se a identidade entre sujeito e objeto (Kopnin, 1978, p. 51) que suscita uma indiferença entre o reflexo do objeto e o objeto refletido no que se refere ao seu conteúdo.

---

[164] "Logical development of categories in the system of science corresponds to the genuine historical sequence concealed from empirical observation, but it contradicts the external appearance, the superficial aspect of this sequence. The correctly established logical order of development of categories in the system of science discloses the secret of the real objective sequence of the development of phenomena, of the aspects of object permitting to understand the chronological sequence itself just as scientifically rather than empirically, from the standpoint of the man in the street. Logical development of categories in science contradicts temporal sequence exactly because it corresponds to the genuine and objective sequence of the formation of the structure of the object under study".

Na próxima seção, incumbir-nos-emos de apresentar outra forma de entender esse enredamento conceitual. Para tanto, adotaremos por base um viés ontológico, com fundamentos, principalmente, nas elaborações contidas nos últimos trabalhos de Lukács (2010, 2012, 2013). Essa perspectiva visa à superação da logicização da história e ao resgate da distinção e concreção do sujeito e do objeto, bem como do reflexo do objeto e do objeto refletido.

4.2.2 A interpretação ontológica da relação entre o lógico e o histórico

Podemos localizar a divergência da abordagem ontológica, em especial da lukacsiana, na esfera de análise do objeto. Esta, segundo Lukács (2010, 2012), deve ter como referência central o próprio objeto, e não alguma forma ou norma pré-estabelecida que guiaria ou aplicaria certos preceitos a ele. Lukács (2012), no conjunto da obra, busca evidenciar essa centralidade para uma correta apreensão da realidade, ou seja, indica uma prioridade do ontológico sobre gnosiológico. Ao comentar a contribuição leniniana, o filósofo húngaro identifica que em todos os casos concretos analisados com base no viés gnosiológico em *Materialismo e Empiriocriticismo*, na prática – por utilizar a teoria do reflexo de uma realidade material que é existente independentemente da consciência – encontram-se implícitas considerações ontológicas. O mérito de Lênin, segundo o filósofo magiar (2012), é de ser o único, em seu tempo, que rejeitou a supremacia filosófica da lógica e da gnosiologia modernas. Para tanto, ele retorna, como suas formas de superação, à original concepção hegeliana de unidade da lógica, teoria do conhecimento e dialética, mas, dessa vez, com base no materialismo. Contudo, conforme Lukács (2012), esse retorno não é legitimado pela leitura da obra marxiana, na qual é inadmissível a sustentação da unidade entre a ontologia e a gnosiologia. A unidade anunciada é, para Lukács (2012), uma das fontes identificadas por Marx das ilusões idealistas de Hegel. Desse modo, a aproximação excessiva entre Marx e Hegel é um dos pontos que influenciariam algumas correntes marxistas, sobretudo o chamado marxismo-leninismo.

A questão da diferença entre ontologia e gnosiologia, em seus aspectos mais essenciais, foi abordada no segundo capítulo da presente pesquisa, o que nos permite avançar para outras relações atinentes ao tema. É oportuno, no entanto, explorar mais a fundo os esforços para aproximar Marx e Hegel. Para Chasin (2009), esse vínculo adentra no seio do marxismo pela porta da tese do vínculo lógico ou herança de Hegel por Marx. Porém, para o autor “a tese do vínculo lógico entre Marx e Hegel não é uma problemática autorizada pela obra

ou pelas convicções intelectuais de Marx, mas uma formulação improcedente que tem rastros em Engels, pegadas em Lenin e que, depois, foi expandida, a exemplo do caso de Lukács"[165] (Chasin, 2009, p. 190).

Dessa tendência, há um desdobramento relativo a encaminhamentos metodológicos que Marx nunca teria abordado. Lukács (2010) traz à tona algumas dessas noções ao fazer uma análise da filosofia hegeliana. Para o autor, está imbricada na obra filosófica de Hegel uma duplicidade que se manifesta, por um lado, na consideração da processualidade como imperante no mundo da objetividade – noção suscitada da irreversibilidade do movimento que segue das formas menos desenvolvidas para as mais desenvolvidas – e, por outro lado, na concepção da gênese como derivação lógica do concreto com base no abstrato –, o que acarreta o distanciamento das autênticas categorias do desenvolvimento do ser processual e uma inversão do processo de dedução, concebido como a forma genuína do desenvolvimento.

Para Lukács (2010, 2012), o motor do desenvolvimento utilizado por Hegel é a *negação da negação*. Nessa esteira, causa estranheza ao filósofo húngaro que Engels tenha se contentado em apenas conceber de modo materialista a construção idealista da *negação da negação*. Como é bem sabido, Engels estabelece a *negação da negação* como uma das *leis da dialética*. Enquanto lei, ela é aplicável a todo o campo da realidade processual, histórica. Na visão de Lukács (2010, 2012), esse externo campo de aplicação é problemático, porquanto se torna supérflua ao não contribuir para apreensão da especificidade do processo de desenvolvimento no que é essencial, como havia reconhecido Engels (2015).

Para apreendermos o cerne da crítica lukacsiana, convém transcrever as palavras de Engels (2015, p. 165), que fornecem suporte analítico para o filósofo húngaro:

> Tomemos um grão de cevada. Bilhões de grãos de cevada são moídos, fervidos, fermentados e, depois, consumidos. Porém, se um desses grãos de cevada encontra as condições que lhe são normais, ao cair em solo propício, ocorre com ele, sob a influência do calor e da umidade, uma mudança bem própria: ele germina; o grão desaparece como tal, é *negado*, e seu lugar é tomado pela planta que surgiu dele, que é a negação do grão.

Para Lukács (2012), nessa citação é realizada uma descrição dos processos pelos quais segue o movimento natural de desenvolvimento. Nos casos em que o grão de cevada é

---

[165] Aqui o autor trata dos escritos lukacsianos precedentes àqueles que possuem orientações ontológicas, em especial Lukács (2018c). Entretanto, vale assinalar que no livro citado, Chasin (2009) desenvolve algumas críticas também aos últimos escritos do filósofo húngaro. Como não é nosso objetivo delinear os pontos de convergência e divergência entre os autores, focamos apenas nas contribuições de ambos que auxiliam no desenvolvimento de uma abordagem fundamentada em uma ontologia materialista-dialética da relação entre o lógico e o histórico.

destruído, pode-se afirmar, como expressão ontológica legítima, que houve uma negação logicamente determinada, mas que é pouco significativa para apreender o ser em suas determinações. Do contrário, no caso concreto em que o grão se encontra em condições propícias para brotar, há uma transformação do grão em seu ser-outro normal, a planta. A consideração abstrata das negações do grão conduz à perda de determinações concretas desse ser-outro. Ao mesmo tempo, obscurece o processo dialético-real pela aproximação e analogia com casos que possuem relação meramente formal com o processo em estudo.

Lukács (2017, p. 134), ao tentar explicar o caráter formal do processo de negação, costuma dizer que se

> [...] *omnis determinatio est negatio*[166], eu também poderia dizer que o leão não é um creme de barbear. No plano lógico, esta proposição é irrepreensível, porque o leão realmente não é um creme de barbear. Mas proposições deste tipo podem ser ditas aos milhões e nenhuma delas teria um sentido efetivo, pois a negação no ser-outro é um momento subordinado. Essa negação nasce da comparação, e também nesse caso é um momento subordinado, porque o recíproco ser-outro da cadeira e da mesa, por exemplo, vem de coisas totalmente positivas, e a circunstância de que a mesa não é uma cadeira é um fator sobremaneira subordinado e não tem nenhuma importância no pensar prático. Em contraposição, a negação, independentemente de que seu verdadeiro sentido já esteja atenuado, assume grande importância tão logo queiramos entender a realidade em bases puramente lógicas. É uma negação efetiva, por exemplo, quando digo: "Duas vezes dois não são cinco". Quando digo: "Não existem dragões", esta também é uma negação justificada. A grande maioria das negações, entretanto, não são, na verdade, negações reais. Quando digo que o leão não é um creme de barbear, esta não é, absolutamente, uma negação real, mas somente uma consequência puramente lógica de uma afirmação na qual a lógica tem importância secundária.

No que diz respeito às considerações ontológicas nas quais a negação seria traço importante no desenvolvimento, para Lukács (2012) é inconcebível encontrar a negação na esfera do ser inorgânico, uma vez que sua característica, seu modo de ser, é resumido a uma cadeia de transformações do ser-assim em ser-outro. Diferentemente, na esfera do ser orgânico a negação pode ser identificada no processo de morte dos seres vivos, pois é nesse acontecimento que a reprodução biológica cessa e as suas leis são superadas, o que faz com que a matéria existente nos organismos seja regida por leis químico-físicas. De modo geral, "Tão somente nos casos em que o tornar-se outro significa objetivamente uma passagem que subverta radicalmente as formas de objetividade ou dos processos é que ele pode ser entendido como negação também no plano ontológico objetivo" (Lukács, 2012, p. 217).

---

[166] Em tradução livre significa "*toda determinação é uma negação*".

Outro exemplo utilizado por Engels (2015) que se aproxima do objeto da presente tese é a negação da negação intrínseca às operações matemáticas. Para compreender essa ilustração, é necessário que se destaque que o autor, inicialmente, estabelece uma relação entre metafísica/dialética e lógica formal/dialética. Na sequência, repete a comparação, mas utiliza os conceitos matemáticos: "matemática das grandezas variáveis está para a das grandezas invariáveis assim como o pensamento dialético está, em geral, para o pensamento metafísico" (Engels, 2015, p. 153). Em outro momento, realiza um paralelo similar ao tratar da lógica formal como um método para buscar novos conhecimentos com base no conhecido e da dialética como aquela que fornece elementos de superação da lógica formal e traz em seu bojo o embrião de uma concepção de mundo mais abrangente:

> A matemática elementar, a matemática das grandezas constantes, move-se dentro dos limites da lógica formal, pelo menos em termos gerais; a matemática das grandezas variáveis, cuja parte mais significativa é constituída pelo cálculo infinitesimal, em essência, não é senão a **aplicação da dialética** às relações matemáticas. O simples ato de provar está aqui, decididamente, em segundo plano, em comparação com as múltiplas aplicações do método a novos campos de investigação. Porém, do ponto de vista da matemática elementar, quase todas as provas da matemática superior, começando pelas primeiras do cálculo diferencial, são, a rigor, falsas. Isso nem pode ser diferente quando se pretende, como acontece aqui, provar, mediante a lógica formal, os resultados obtidos no campo dialético (Engels, 2015, p. 165, grifo nosso).

Salta à vista, nessas linhas, a afirmação de que a "matemática das grandezas variáveis", em grande parte o cálculo infinitesimal, corresponderia a uma "*aplicação da dialética* às relações matemáticas". Importante sublinhar que Engels não concebia as variáveis ainda em termos da análise matemática pós-Cauchy[167], ou seja, não havia se apropriado das discussões mais elaboradas de sua época. Nesses termos, a tese engelsiana de que a matemática superior contradiz a matemática elementar se torna frágil. Nesse contexto, é válida a apresentação do modo pelo qual Engels (2015) interpreta a negação da negação na matemática elementar e na matemática das grandezas variáveis, antes de adentrarmos no seio da discussão aqui exposta.

> Tomemos uma grandeza algébrica qualquer, digamos, a. Se negarmos, teremos $-a$ (menos a). Se negarmos essa negação, multiplicando $-a$ por $-a$, teremos $+a^2$, isto é, a grandeza positiva original, só que num patamar mais elevado, a saber, na segunda potência. Nesse caso, não faz diferença se conseguimos obter o mesmo a^2 multiplicando o a positivo por si mesmo e, por essa via, obtendo igualmente a^2, porque a negação negada está tão radicada no a^2 que, em qualquer circunstância, ele possui duas raízes quadradas, a saber, a e $-a$. Mas, livrar-se dessa impossibilidade,

[167] Segundo a nota da edição utilizada, Engels apoiava-se no trabalho de Heinrich Suter intitulado *Geschichte der mathematischen Wissenschaften.*

> da negação da negação, da raiz negativa contida no quadrado, já adquire uma importância bastante concreta no caso das equações de segundo grau (Engels, 2015, p. 166-167).

Na sequência da exposição de sua concepção e simultânea crítica a Düring[168], o revolucionário alemão lança mão das operações utilizadas no âmbito do cálculo diferencial para tornar mais explícito seu entendimento desse campo como lócus privilegiado de aplicação da dialética na matemática.

> Tenho, por exemplo, num determinado problema a resolver, duas grandezas variáveis x e y, sendo que uma não pode se modificar sem que a outra se modifique junto com ela, numa proporção determinada pelo caso concreto. Eu diferencio x e y, isto é, concebo x e y como tão infinitamente pequenos que desaparecem em relação a qualquer grandeza real, por menor que seja; concebo-os de tal modo que de x e y nada resta além de sua proporção recíproca, desprovida, por assim dizer, de todo substrato material, resultando em uma proporção quantitativa sem qualquer quantidade. Logo, $\frac{dy}{dx}$, a proporção dos dois diferenciais de x e y, é $\frac{0}{0}$, sendo $\frac{0}{0}$ posto como a expressão de $\frac{x}{y}$. Menciono apenas de passagem que a proporção entre duas grandezas desaparecidas, o momento fixado do seu desaparecimento, é uma contradição; mas isso não pode nos perturbar, assim como não perturbou a matemática em geral nos quase duzentos anos que já se passaram. O que foi que eu fiz, portanto, senão *negar* x e y? Porém, não os neguei de um modo que não tenha que me preocupar mais de jeito nenhum com eles, como faz a metafísica, mas de um modo que corresponde ao caso concreto. Em vez de x e y, tenho, portanto, a sua negação, dx e dy, nas fórmulas ou equações diante de mim. Ora, eu continuo a calcular com essas fórmulas, trato dx e dy como grandezas reais, ainda que submetidas a certas leis de exceção, e, a certa altura, *nego a negação*, isto é, integralizo a fórmula diferencial e, em vez de dx e dy, obtenho novamente as grandezas reais x e y, mas não me encontro no mesmo ponto em que estava no início (Engels, 2015, p. 167).

Não é nosso objetivo aqui nos atermos à análise detalhada das concepções subjacentes ao processo matemático descrito, bem como da sua realização. Importa, no entanto, sublinhar certos aspectos relativos à explicitação da *negação da negação aplicada* à matemática conforme se encontram nas linhas engelsianas.[169] Tanto no primeiro como no segundo exemplo, o filósofo alemão se utiliza de "processos" de "mudanças" sobre determinadas condições. No

---

[168] Karl Eugen Dühring (1833-1921) – filósofo e economista alemão.

[169] É importante citar que diferentes autores atribuem, aos estudos que Marx (1983) realizou sobre o Cálculo Diferencial, uma intencionalidade da comprovação da lei dialética da *negação da negação*. Como exemplo, Radice (1975, p. 161) afirma que a atenção, dedicação e esforço de Marx para com os fundamentos do cálculo infinitesimal estariam ligados a encontrar nele "um argumento decisivo contra uma interpretação metafísico-mística da lei dialética da negação da negação". Entretanto, como defendem Grande e Smilgys (2018), não há, nos *Manuscritos Matemáticos* (Marx, 1983), explicitação da intenção nem dos motivos impulsionadores de Marx ao estudo da matemática, em particular do Cálculo. Além disso, é possível encontrar nesses manuscritos a menção da *negação da negação* em apenas um trecho, no qual Marx (1983, p. 3) afirma que: "Toda a dificuldade para compreender a operação diferencial (como *negação da negação*) é precisamente em ver *como* se distingue deste procedimento simples e de que maneira conduz aos resultados efetivos". Acerca dessa questão, convém pontuar que, conforme Netto (2015), Marx conhecia e contribuiu em algumas partes de *Anti-Düring* (Engels, 2015).

primeiro caso, a *negação* da grandeza algébrica a é realizada ao atribuirmos um sinal (–) ao seu ser-precisamente-assim, tornando-o seu oposto, ou como Engels prefere, sua *negação*. Por sua vez, no processo de *negação* dessa *negação*, realiza-se uma multiplicação do ente negado $(-a)$ por outro igual a si $(-a)$, a fim de obter como produto o elemento inicial, mas em um novo grau, o a^2. Fica explícito que a *negação,* nos dois casos, é distinta. Primeiramente, ele realiza uma multiplicação por um número negativo (-1) e, no segundo caso, ele realiza uma multiplicação pelo próprio ente $(-a)$ que foi negado. Convenhamos que é um estratagema do autor para mostrar que o produto é o mesmo elemento em um grau maior, quando, no caso, a realização da negação em sentido lógico faria retornar ao mesmo a inicial. É possível que sejamos acusados de fazer uma leitura metafísica do "processo dialético" mostrado por Engels, mas não conseguimos ver a dialética incrustrada na mudança de multiplicações sucessivas de números relativos diferentes entre si.

Lukács (2010) aponta outras duas questões em relação ao primeiro exemplo. A primeira diz respeito ao fato de os números relativos apresentarem outros significados, como por exemplo, no sistema de coordenadas em que o $-a$ e o $+a$ são números quaisquer que possuem algo em comum, mas não representam, em si, nenhuma negatividade um em relação ao outro. A segunda é atinente ao motivo da multiplicação, e não da adição exprimir a *negação* de $-a$ em relação a a. Para Lukács (2010, p. 168), "A multiplicação, além disso, mostra uma analogia aparentemente útil só de modo puramente formal, e exclusivamente daí adquire seu lugar privilegiado", mas "não contém nenhuma sombra de qualquer questão ontológica".

O exemplo do cálculo diferencial não ajuda a esclarecer a situação. Primeiramente, o autor se embrenha em outra seara da matemática, seguindo sua própria cisão entre a matemática elementar e matemática das grandezas variáveis, o que lhe permite operar fundamentado em outros princípios lógicos. A *negação* passa a ser realizada por outro processo, distinto da multiplicação, pela diferenciação. Segundo Engels (2015), tal processo se inicia ao fazer desaparecer x e y, ao torná-los infinitamente pequenos, de modo que reste apenas uma proporção sem quantidade. Ou seja, a negação agora é realizada à medida que a relação entre as quantidades se torne "uma proporção quantitativa sem quantidade". Explicita-se, aqui, uma concepção da diferenciação similar à de Euler, além de uma noção do conceito de número bastante carregada de pressupostos físicos, como deixam transparecer expressões do tipo "desaparecem em relação a qualquer grandeza real", "proporção quantitativa sem qualquer quantidade" e "grandezas desaparecidas".

O que importa nesses exemplos, conforme Lukács (2010), é mostrar, primeiramente, que o processo de abstração, no movimento do conhecimento, não advém de formas abstratas *a priori* a serem aplicadas aos diferentes ramos da realidade. Em segundo lugar, que há distinções entre os planos lógico e o ontológico e não é prudente, ou no mínimo desnecessário fazer uma leitura estritamente lógica de questões ontológicas. Em terceiro lugar, encontramos na crítica de Lukács (2010) a intencionalidade de afirmar que o processo de abstração com base na realidade só é profícuo se buscar o que Marx (2011) considera como "abstrações razoáveis", generalizações da realidade, cuja base são os processos reais, a fim de obter certas abstrações em que a exclusão do particular da exposição "nunca transforma essa última em absurdidade grotesca" (Lukács, 2010, p. 169). Bastaria anunciar o desenvolvimento da cevada do mesmo modo que o Cálculo Diferencial como processos similares de negação da negação para que se explicitassem lados absurdos. Isso não ocorre quando as generalizações partem do próprio ser, com obtenção de abstrações que tenham determinações ontológicas que as justifiquem, como, por exemplo, ao afirmar a historicidade como traço geral das formas de ser, pois, explica Lukács,

> [...] sem sequer tocar o terreno do absurdo, posso afirmar: a geologia mostra a irreversibilidade dos processos naturais tão nitidamente quanto a história da França mostra a irreversibilidade dos processos históricos. Aqui também, os momentos particulares concretos dos dois grupos de fenômenos nada têm a ver entre si; a própria irreversibilidade do processo, porém, forma, aqui como lá, a base real das respectivas particularidades (Lukács, 2010, p. 169-170).

Isso significa que a negação da negação não é uma *lei geral* obtida no desenvolvimento do ser, mas de uma esfera específica e aplicada arbitrariamente sobre toda a realidade. É nesse sentido que a crítica lukacsiana se desenha, a fim de chamar a atenção para a possibilidade, intrínseca à logicização de problemas ontológicos, de descaracterização do próprio ser, ou no caso menos problemático, de não auxiliar no desvelamento da sua essência.

Fica a questão relativa ao estatuto de validade da lei da *negação da negação*. Para Lukács, o lócus privilegiado da negação é a esfera do ser social, pois ela se ergue com a existência do sujeito. Surge da escolha e decisão, na práxis, entre alternativas que se estabelecem para o sujeito como uma bipartição e oposição, no mundo, entre o que serve de auxílio ou não ao indivíduo para atingir seu objetivo. Aqui é engendrada, no pensamento, uma homogeneização da realidade, na qual a negação ou afirmação de certas propriedades são atualizadas pelo processo de trabalho. Nessas linhas, Lukács (2012) afirma que a negação é instrumento intelectual da práxis e seu reflexo inseparável.

Voltemos ao aspecto central da crítica lukacsiana da prioridade da concretude ontológica do objeto sobre as abstrações gnosiológicas gerais. Relacionado a esse aspecto, Lukács (2010, p. 365) comenta a tendência de separação, no marxismo, do materialismo dialético enquanto doutrina filosoficamente geral e abrangente que, em sua aplicação à sociedade, faria surgir o materialismo histórico.

> Essa postura contradiz o marxismo em dois pontos decisivos. Primeiro, assumindo uma doutrina filosófica das categorias abstrato-gerais, cujas constatações deveriam valer da mesma maneira para todo ser, e, segundo, na medida em que o momento da historicidade é transformado em mero problema singular do ser, mas que só pela aplicação dos princípios gerais supra-históricos universais do materialismo dialético nesse "setor especial" poderia receber seu autêntico conteúdo objetivo e, consequentemente, sua possibilidade de formulação intelectual. Essa codificação da essência do materialismo dialético aparece como univocidade precisa de seus princípios — comparada com os comentários de Marx, que sempre se referem ao processo histórico, ao contrário das tentativas vacilantes de Lenin de apreender aproximativamente, de vários ângulos, os traços essenciais do seu movimento processual, portanto, como tentativa de fixar de uma vez para sempre determinações unívocas das categorias.

O filósofo magiar advoga contra a tendência de identificar e separar a existência de características universais de certas determinações, convertendo-as, pela esfera da lógica, nas formas de encadeamento e hierarquização da realidade sob o pretexto de determinado princípio ordenador. Esse processo, segundo Lukács (2012), tende a homogeneizar o quadro da realidade sobre determinado aspecto não o captando em sua multiplicidade de determinações. Nesse sentido, a lógica pode subverter o processo real, como o autor considera que aparece em Hegel. "A lógica é um dos mais importantes meios homogêneos criados pela práxis e pelo trabalho mental do homem" (Lukács, 2012, p. 220). O problema emergente, nas interpretações que alçam a lógica como referência ou diretora do processo de conhecimento, é que os pontos de partida, as atividades geratrizes tendencialmente se extinguem no meio homogêneo da lógica, condensada em um sistema fechado que supõe universalidade. A história da humanidade é ilustrativa acerca da ilusão, ali originada, de diversos pensadores de "poder, mediante um sistema bem-acabado do universo do pensamento homogeneizado em termos lógicos, dar respostas, a partir dele, a todas as questões que nascem das relações dos seres humanos com a realidade" (Lukács, 2012, p. 221).

A questão que se põe é de como a lógica interage com a realidade, dada sua natureza essencialmente homogênea que difere fundamentalmente da realidade. Para Lukács (2012, p. 221-222),

> [...] a lógica cria um meio homogêneo de pensamento, cuja estrutura deve ser qualitativamente diversa da realidade, que é em si heterogênea; e essa diversidade deve se manifestar, não fosse por outra razão, pelo fato de que as relações num meio homogêneo devem ser constituídas de modo diverso do que o seriam em presença de objetos, forças etc. realmente heterogêneos e atuando uns sobre os outros. Já nos referimos às operações intelectuais que tal fato torna necessárias, como, por exemplo, à necessidade de uma interpretação física etc. de fenômenos reais que tenham sido expressos em fórmulas matemáticas; nesse caso, é preciso que aquilo que recebeu homogeneização matemática seja novamente aproximado da realidade objetiva, mediante o destaque e a aclaração intelectuais do caráter heterogêneo de seus componentes. [...] Se o meio homogêneo que serve de fundamento à conexão cognoscitiva possui caráter lógico, então o contraste entre o meio cognoscitivo homogêneo e a realidade heterogênea adquire um traço particular, pelo qual o complexo — infinito — de fenômenos heterogêneos entre si e, portanto, não imediatamente sistematizáveis e hierarquizáveis enquanto tais, vai se reproduzir no pensamento como sistema hierárquico homogeneamente acabado.

A homogeneização do processo, no entendimento de Lukács (2012), não é necessariamente um traço obliterador da possibilidade de conhecimento da realidade e de sua apreensão no sentido de captar a sua essência. A explicação disso está no estabelecimento da capacidade de auxiliar na apropriação concreta de determinado objeto, por decorrência de seu constante retorno e sua calibragem em relação a ela, bem como na renegação do seu caráter sistêmico imanentemente hermético como aspecto da realidade. Portanto, "pode, pelo manejo satisfatório, conscientemente crítico, dos meios cognoscitivos, ser sempre reconduzida aos parâmetros de uma correta aproximação aos objetos reais" (Lukács, 2012, p. 222). Contudo, isso não é uma possibilidade ao se criar e fixar uma hierarquia, pois, no geral, ela tende a distorcer o processo de constituição da realidade por meio do encadeamento conceitual que compõe o sistema. Para Lukács (2012), enquanto o surgimento de uma formação é um problema de gênese – em que as características reais do ser particular são consequências das legalidades do seu aparecimento e perecimento –, o conceito, por sua vez, tem seu surgimento pela dedução lógica de outro conceito, indiferentemente se essa via é de cima para baixo ou vice-versa. O foco no aspecto lógico, portanto, torna-se um problema quando a lógica se transforma em modelo e fundamento da ontologia; logo, implica que as deduções lógicas se transformem em formas próprias da gênese ontológica.

É nesse contexto que está posicionada a questão da ordem das categorias na exposição do objeto. No geral, conforme mostramos na subseção anterior, há, entre os autores defensores de uma unidade explícita do lógico com o histórico e seus consequentes métodos de apreensão da realidade, uma tendência a afirmar que a ordem das categorias e o processo de formação da realidade são aspectos correlacionados. Por essa sua particularidade, a lógica ganha lugar privilegiado e forma par dialético com a história (Kopnin, 1972). As formas

expositivas seriam, nesses casos, transfiguradas como etapas de desenvolvimento do próprio objeto (Chasin, 2009).

Conforme Chasin (2009), essa pretensa correlação entre o desenvolvimento concreto da realidade e sua exposição lógica ocorre pela tradição, principiada em Engels (1982), de interpretar como existentes uma postura lógica e outra histórica nos procedimentos marxianos, e não pela análise entre realidade (história) e pensamento. A historicidade é aproximada da realização lógica, e faz com que formas lógicas sejam expressão do desenvolvimento histórico concreto. Isso pode ser visto em Lukács (2018c) que, em suas concepções anteriores às ontológicas, entende as formas de juízo como realizações históricas. O autor reitera a historicidade da formação e sucessão das formas de juízo de maneira que há sempre um substrato histórico que a constitui como forma e conteúdo. Nesse sentido, a processualidade histórica global pode ser entendida como silogística (Chasin, 2009). Como explicitação desse processo, basta lembrar as determinações e caminhos percorridos pela forma valor como etapas históricas da realidade em Engels (2017), corroborada por Lukács (2018c)[170]. Para Chasin (2009, p. 181-182), essa transfiguração do problema marxiano se deve a uma indistinção entre o processo expositivo e o processo analítico da realidade nas obras Marx, em que

> [...] a determinação marxiana inicial – a *forma simples de valor*, basicamente *expositiva*, que não é descoberta em ato, mas só o ato que principia a mostrar o descoberto, isto é, determinação cuja tônica não recai nem sobre a reprodução do complexo analítico da descoberta, nem sobre o descoberto como complexo histórico concreto, seja imediatamente tomada ou forçada a ser entendida como reprodução teórica de uma etapa determinada de existência efetiva.

A exposição das categorias como etapas ou formas históricas de existência do objeto tem ampla repercussão na tese hegeliana da identidade entre os elementos da objetividade e da subjetividade desdobrada da totalidade. Nesses termos, afirma Hegel (*apud* Lukács, 2012, p. 203-204) que

> "A ordem e a conexão das ideias" (do subjetivo) são idênticas "à ordem e à conexão das coisas" (do objetivo). Tudo existe *numa* só totalidade; a totalidade objetiva e a

[170] Encontramos em Lukács (2018c, p. 101) as seguintes palavras: "Naturalmente, esta extrema generalização, esta elevação da forma do valor ao grau da autêntica universalidade, não é um produto do pensamento econômico: este não é senão o reflexo daquilo que ocorreu realmente no curso do desenvolvimento histórico da economia. [...]. O pensamento humano só pode efetivar uma verdadeira generalização na economia quando reflete adequadamente o que foi produzido pelo desenvolvimento histórico-social. Em nosso caso, vemos como a explicitação da forma do valor, devida ao desenvolvimento econômico real, eleva-se – na realidade objetiva – da singularidade à universalidade através da particularidade".

> totalidade subjetiva, o sistema da natureza e o sistema da inteligência são uma só e mesma coisa; a uma determinidade subjetiva corresponde a mesma determinidade objetiva.

Se a ordem estabelecida entre as ideias e a realidade é a mesma – ou, no caso de algumas interpretações marxistas, é invertida –, é conveniente que se admita uma relação e hierarquização do desenvolvimento, à medida que, para Hegel, o caminho do ser ao conceito se estabelece do simples ao complexo, no qual o ser, simples, abstrato, é uma propriedade de tudo o que é novo. Contra isso, Lukács (2012) adverte que não é possível advogar conclusivamente esse caráter abstrato e simples do novo. Ele se apoia no conhecimento sobre as ciências orgânicas de sua época – lembremos do exemplo da teoria de Mendeleev e sua interpretação por Rosental (1960). Essa dúvida lançada sobre a tese hegeliana não significa uma negação do processo de complexificação da realidade que tem, no desdobrar-se das esferas de ser, a expressão do processo de complexificação – surgimento do ser orgânico com base no inorgânico e do ser social com base nessas outras duas formas de ser. Ademais, é possível identificar que na esfera do ser social há uma tendência progressiva à universalização e socialização das relações. Disso, no entanto, não se deduz qualquer forma de categorização que, ao homogeneizar processos heterogêneos, resuma a exposição da lógica do objeto a uma realização do conceito em sua forma mais acabada tendo como referência outras mais simples. Essa linha argumentativa é ressonância das elaborações marxianas que podem ser encontradas nas seguintes palavras de Marx (2011, p. 55-56):

> Mas as categorias simples não têm igualmente uma existência independente, histórica ou natural, antes das categorias mais concretas? Isto depende. Hegel, por exemplo, começa corretamente a filosofia do direito com a posse como a mais simples relação jurídica do sujeito. Mas não existe posse antes da família ou das relações de dominação e de servidão, que são relações muito mais concretas. Pelo contrário, seria correto dizer que existem famílias, tribos, que somente *possuem*, mas não tem *propriedade*. Com relação à propriedade, portanto, a categoria mais simples aparece como relação de associações mais simples de famílias ou tribos. Na sociedade mais avançada, a propriedade aparece como relação mais simples de uma organização desenvolvida. Mas o substrato mais concreto, do qual a posse é relação, é sempre pressuposto. [...] a categoria mais simples pode expressar relações dominantes de um todo ainda não desenvolvido, ou relações subordinadas de um todo desenvolvido que já tinham existência histórica antes que o todo se desenvolvesse no sentido que é expresso em uma categoria mais concreta. Nesse caso, o curso do pensamento abstrato, que se eleva do mais simples ao combinado, corresponderia ao processo histórico efetivo.

A relação entre as categorias simples e complexas não é dada, portanto, na forma expositiva, por um encadeamento e dedução inerentes aos próprios conceitos, mas pelo desenvolvimento da realidade que possui legalidades, porém não teleologia ou necessidade

cega. A existência das categorias complexas não é, necessariamente, um desdobramento das categorias simples, mas de uma complexificação e atuação conjuntas da realidade. A existência das categorias simples só possui substância em dependência da complexidade de formas concretas de sua expressão. Em linhas gerais, isso corrobora a afirmação de uma preponderância do objeto no processo de investigação, e que a ordem expositiva das categorias tem relação apenas com a sua lógica e a historicidade intrínseca. Chasin (2009, p. 244), na análise da exposição categorial desenvolvida por Marx em *O Capital*, respalda essa afirmação.

> De sorte, a ordem de entrada dos materiais à cena discursiva e os lugares que nela ocupam não são estipulados por algum tipo de legalidade expositiva autônoma, mas pelo estatuto da reprodução ideal, forjado em subsunção ao composto ontológico do complexo estudado. O que não guarda identidade com a ordem e o modo de seus engendramentos reais, pois basta considerar que a forma da mercadoria enquanto mercadoria, ou seja, o modo de existência do produto do trabalho na sociabilidade particular da produção de mercadorias, como qualquer ente, compreende a simultaneidade de todas as suas características enquanto presença integrada e esculpida por suas categorias, ao passo que, obviamente, na análise e no discurso essa unidade imediata é impossível, cedendo lugar a um quadro estruturado pela sequencialidade da abordagem categorial.

É sobre esses aspectos que Lukács (2010, 2012, 2013), ao atribuir à lógica um papel importante, mas não necessariamente prioritário, no processo de conhecimento, almeja resgatar o desenvolvimento do objeto em sua processualidade própria, ou seja, sua própria lógica de desenvolvimento. Nesse sentido, a lógica do objeto e sua historicidade são um único movimento (Chasin, 2009), porém, ao serem representadas por meio conceitual, não são uma cópia do real pela subjetividade. Como momentos captados pela subjetividade na busca dos meios para a efetivação do pôr teleológico, o reflexo da realidade se realiza de modo a captar os momentos necessários para esse processo. Ou seja, constitui-se como uma homogeneização que, para sua efetiva realização, é imperativo que se reja pela lógica própria do objeto, e não por um princípio metodológico supra-histórico.

Anteriormente, citamos a questão da lei da *negação da negação* e reduzimos o espaço de sua regência, mas ainda é válido questionar o papel e a legitimidade de outras supostas leis gerais. Por exemplo, a historicidade, a processualidade, a universal contraditoriedade do real são propriedades ontológicas do real. Marx (1984, p. 17) reconhece, por exemplo, que Hegel, apesar da mistificação da dialética, teria sido "o primeiro a apresentar suas formas gerais de movimento, de maneira ampla e consciente". Nesse sentido, Chasin (2009) afirma que nos movimentos do pensamento em direção à reprodução do concreto como síntese de múltiplas determinações – em especial no momento de determinação –, há uma contribuição dessas formas gerais, no entanto, que são sempre imanentes ao objeto, e não

atribuídas a ele pelo pensamento. No objeto, é sempre possível identificar os momentos da universalidade, particularidade e singularidade, haja vista que a concreção da análise se move também nesses níveis de generalização que representam, pela sua inter-relação dialética, momentos do processo determinativo, apesar de seu estatuto remoto e abstrato.

> Sob essa condição, uma lógica ou dialética do universal, particular e singular será o feixe [...] mais abstrato das abstrações razoáveis, que enquanto tal não determina nenhum objeto concreto. Dada a generalidade máxima dessa mais abstrata das abstrações razoáveis, ela é dizível de qualquer objeto, é a voz abstrata mais tênue, uma generalidade tão possível, e nesse sentido pode servir de guia distante para a formulação das abstrações razoáveis, e do mesmo modo para os passos de concreção (Chasin, 2009, p. 216).

Esses preceitos ontológicos, derivados da máxima generalidade da realidade, indicam alguns pressupostos, mas não são muletas ou guias seguros na apreensão do conhecimento do objeto, do mesmo modo que não o são os supostos modos lógicos e históricos de abordagem da realidade. Essa sobreposição dos modos de abordagem do objeto é, conforme Chasin (2009), uma confusão atinente ao processo investigativo e em relação à própria realidade, pois homogeneíza e simplifica o seu movimento com intuito expositivo.[171]

É possível perceber que a crítica apresentada por Lukács (2010, 2012, 2013) e Chasin (2009) se estrutura sobre a negação da suposta existência de uma orientação geral diante dos objetos, bem como de uma subsunção do ontológico – histórico – ante os preceitos lógicos. Isso, na análise do desenvolvimento da sociedade, pode ser visto na medida em que as necessidades ontológicas das principais tendências de desenvolvimento da totalidade não podem ser homogeneizadas como necessidades de caráter puramente lógico. É ilícito, por exemplo, afirmar que a Antiguidade Clássica surge de uma necessidade ontológica, assim como é substituída pelo feudalismo de modo similar. Por outro lado, mesmo *post festum*, a dedução da servidão da gleba da economia escravista, em termos lógico-racionais, é uma absurdidade (Lukács, 2012). É nesse sentido que Lukács (2012) estabelece a crítica a Engels, no que se refere à sua distinção entre os modos lógicos e históricos de abordagem da realidade.

> A oposição decisiva com a concepção de Marx reside no primado do "modo lógico de tratamento", que é posto aqui como idêntico ao histórico, "só que despojado da forma histórica e das causalidades importunas". **A história despojada da forma histórica: nisso está contido sobretudo o recurso de Engels a Hegel**. Na filosofia hegeliana,

[171] Sobre esses termos, ligados ao método de simplificação e exposição da realidade, é que Chasin (2009) interpreta a máxima engelsiana acerca do lógico como "o histórico, despido apenas da forma histórica e das casualidades perturbadoras" (Engels, 1982, p. 541). Contudo, vale sublinhar que Engels (2017) extrapola o campo da exposição e concebe as categorias como formações históricas particulares.

> isso era possível: uma vez que a história, tal como toda a realidade, se apresentava apenas como a realização da lógica, o sistema podia despojar o acontecer histórico de sua forma histórica e reconduzi-lo à sua essência própria, ou seja, à lógica. Mas para Marx – e de resto também para Engels – a historicidade é uma característica ontológica não ulteriormente redutível do movimento da matéria, particularmente marcado quando, como é o caso aqui, trata-se apenas do ser social. As leis mais gerais desse ser podem também ser formuladas em termos lógicos, mas não é possível derivá-las da lógica ou reduzi-las a ela. Na passagem citada, Engels faz isso, o que já fica evidente pelo uso da expressão "casualidades importunas"; no plano ontológico, algo casual pode muito bem ser portador de uma tendência essencial, não importando se, da perspectiva da lógica pura, o acaso seja entendido como "importuno" (Lukács, 2012, p. 373, grifo nosso).

Nesses termos, coerentes com os pressupostos teórico-metodológicos aqui adotados, tendemos a concordar com as posições assumidas por Lukács (2010, 2012, 2013), bem como com algumas assumidas por Chasin (2009).

O percurso analítico até aqui percorrido não tem por objetivo esgotar a problemática da relação entre o lógico e o histórico no âmbito do marxismo, mas se faz necessário para explicitar e especificar o objeto de nossa análise. A extensão do aparato teórico-conceitual de que aqui lançamos mão se justifica, uma vez que a maioria das pesquisas que se sustentam, de algum modo, na relação entre o lógico e o histórico no campo da educação matemática, apresentam uma fundamentação teórica ancorada nas elaborações de pesquisadores que se apoiam em Engels (1982, 2017). Isso, em nossa concepção, torna imprescindível uma especificação de nossos pressupostos, pois divergem em determinados aspectos no que tange à problemática – sublinha-se, "em determinados aspectos", e não em toda a extensão ou essência. Ao buscarmos uma análise ontológica do objeto da presente pesquisa, não excluímos as questões gnosiológicas, lógicas e relativas à teoria do conhecimento, conforme abordamos no segundo capítulo e que se tornarão mais cristalinas nos capítulos 5 e 6. Contudo, essas abordagens devem ser esclarecidas desde suas bases, o que constitui identificação da sua gênese ontológica e contribui para sua desmistificação.

A discussão acerca da relação entre o lógico e o histórico caminha, portanto, no sentido de estabelecer uma relação entre o desenvolvimento do objeto e a apreensão da sua dinâmica processual. Essa relação ganha relevância na esfera do ensino, pois a própria natureza do complexo da educação está ligada à reprodução, nos indivíduos, de características humanas desenvolvidas historicamente e que devem ser apropriadas em contextos distintos. Portanto, nele estão implícitos aspectos que correlacionam a reprodução com a produção do novo. No que diz respeito à educação formal, essa relação, para que seja a mais efetiva possível, necessita de intencionalidade, o que pressupõe uma relação consciente e crítica em atinência às produções humanas e históricas.

Nesse contexto, a constituição do objeto de ensino, objetivado na *atividade coletiva de estudo escolar*, passa por se apropriar da processualidade do objeto do conhecimento com o intuito de apreender sua essência, sua forma de ser, objetivando a formulação de uma organização didática que vise à sua apropriação pelos estudantes. Por esses motivos tratamos, neste capítulo, de alguns elementos conceituais sobre a relação entre o lógico e o histórico no seio da vertente do marxismo. Destacamos: 1) a historicidade como componente ontológico ineliminável da realidade; 2) a distinção entre a reprodução das categorias históricas no pensamento e seu concreto desenvolvimento; 3) o entendimento da lógica vinculada ao método de pensamento, em âmbito geral, como um dos alicerces da compreensão da relação entre o lógico e o histórico nas elaborações teórico-metodológicas de autores que se baseiam em Engels (1982, 2017); 4) a tradução, por esses autores, da diferenciação entre as categorias do lógico e do histórico também como métodos de abordagem do objeto; 5) a existência de correlações ou paralelos entre a forma de exposição e o desenvolvimento histórico; 6) a negação, pela análise ontológica materialista-dialética, de qualquer forma de paralelismo entre o histórico e o lógico, e o entendimento de sua imbricação no próprio ser; 7) a constatação da gênese da referida problemática como oriunda de uma apropriação e interpretação indevida dos preceitos da lógica hegeliana; 8) a constante necessidade da afirmação da prioridade ontológica do objeto no processo de apropriação e transformação da realidade.

O capítulo seguinte será dedicado à compreensão de como o enlaçamento das categorias abordadas até este ponto podem nos auxiliar na concretização da relação entre o conhecimento historica e culturalmente constituído e a sua apropriação pelos indivíduos, tendo como fio condutor a análise da relação entre ontogênese e filogênese, que é diretamente impactada pelo entendimento que se possui da relação entre o lógico e o histórico.

5 A DIALÉTICA ENTRE FILOGÊNESE E ONTOGÊNESE E A CONSTITUIÇÃO DO OBJETO DE ENSINO NO CONTEXTO DA ATIVIDADE COLETIVA DE ESTUDO ESCOLAR

A insuficiência do quadro conceitual delineado até o presente ponto exige que aprofundemos o excurso teórico-analítico de modo que o objeto estudado seja apropriado concretamente. De tal maneira, a discussão realizada no capítulo precedente constituiu-se como um estaqueamento conceitual necessário para a abordagem correta do modo pelo qual se forma um objeto de ensino em geral e o objeto de ensino do Cálculo em particular. Esse cenário é desenhado com base na dialética entre a filogênese e a ontogênese, como uma das relações ontologicamente constituidoras do ser do complexo da educação.

Nessa esteira, o presente capítulo tem como alvo a apropriação dos elementos essenciais do objeto de ensino em contexto escolar, subsidiada pela análise ontológico-genética. Isso exige a compreensão dos modos como, dialeticamente, objetiva-se a relação entre a filogênese e a ontogênese. De modo particular, dita manifestação ocorre na atividade coletiva de estudo escolar, na qual os sujeitos se constituem em um processo guiado e mediado por diferentes esferas e camadas de relações sociais, cuja referência é apropriação do objeto do conhecimento que emerge das relações sociais concretas como objeto de estudo e ensino. Assim, o entendimento é de que a qualidade e o conteúdo do processo estabelecido por essas relações implicam a qualidade e o conteúdo da apropriação, bem como a objetivação do objeto de ensino em contexto escolar e vice-versa.

Ocupar-nos-emos, na primeira seção, de delinear as bases sobre as quais tem se desenhado a relação entre filogênese e ontogênese em algumas concepções, em grande parte, dentro dos limites do quadro teórico do materialismo histórico e dialético e da teoria histórico-cultural. Trata-se, pois, de aclarar os determinantes dessa relação essencial para a apropriação do fenômeno educativo. Contudo, essa delimitação terá como consequência a impossibilidade de abordar concepções bastante populares no âmbito da pesquisa em educação matemática, como, por exemplo, a estrutural-construtivista operatória e a evolucionista descontínua (Miguel; Miorim, 2021).[172]

[172] Encontra-se, em Miguel e Miorim (2021), um delineamento sobre perspectivas teóricas no campo de investigação da História na Educação Matemática, no qual são destacadas as perspectivas Evolucionista Linear, a Estrutural-Construtivista Operatória, a Evolutiva Descontínua, a Sociocultural e a dos Jogos de Vozes e Ecos. A primeira tem como uma de suas principais características o recapitulacionismo de cunho biológico. A segunda defende que existem mecanismos cognitivos, operatórios e gerais, resultantes da construção do conhecimento matemático que, mesmo ao atuar sobre uma base distinta e nova, não alteram sua função ou natureza. Por sua vez,

Na segunda seção posicionaremos, sob as luzes da ribalta, os determinantes gerais do modo pelo qual essa relação se constitui como um elemento importante para se compreender o processo de emergência do objeto de ensino no âmbito da atividade coletiva de estudo escolar. Para tal, utilizaremos a categoria do ideal, elaborada por Ilienkov (2016a, 2016b) e Iliénkov (1977) como categoria essencial para a apropriação do objeto de ensino nesse contexto.

5.1 MODOS DE CONCEBER A RELAÇÃO ENTRE FILOGÊNESE E ONTOGÊNESE E IMPLICAÇÕES PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

A concepção de ser humano defendida até o momento traz em seu bojo, como destaca Leontiev (2004), o entendimento de que, ao ter como referência o surgimento do homo sapiens, o desenvolvimento do ser humano passou a ser regido por leis sócio-históricas. Isso não quer dizer, no entanto, que as leis biológicas são interrompidas. Conforme Lukács (2013), a reprodução biológica do ser humano tem prioridade ontológica sobre as suas outras atividades, pois, eliminada essa reprodução, tornar-se-ia impossível a sua existência. Nesse sentido, são ilustrativas as palavras de Marx e Engels (2007, p. 32-33):

> Em relação aos alemães, que se consideram isentos de pressupostos [*Voraussetzungslosen*], devemos começar por constatar o primeiro pressuposto de toda a existência humana e também, portanto, de toda a história, a saber, o pressuposto de que os homens têm de estar em condições de viver para poder "fazer história". Mas, para viver, precisa-se, antes de tudo, de comida, bebida, moradia, vestimenta e algumas coisas mais. O primeiro ato histórico é, pois, a produção dos meios para a satisfação dessas necessidades, a produção da própria vida material, e este é, sem dúvida, um ato histórico, uma condição fundamental de toda a história, que ainda hoje, assim como há milênios, tem de ser cumprida diariamente, a cada hora, simplesmente para manter os homens vivos.

O "primeiro ato histórico" traz consigo outra relação importante, a saber, a do ser humano com a natureza, que é analisada por Marx (2010) ao tratar do trabalho alienado. O revolucionário alemão (2010), mesmo estabelecendo uma distinção entre a natureza e o indivíduo humano que trabalha, afirma que, na forma alienada do trabalho, a natureza e o ser

---

a terceira perspectiva se alicerça sobre o conceito de obstáculos epistemológicos, modo pelo qual estabelece a relação entre a filogênese e o processo de construção do conhecimento individual. A quarta perspectiva se caracteriza por entender a apropriação do conhecimento matemático como um processo de natureza semiótica que ocorre na ontogênese e na filogênese, além de compreender os signos como instrumentos psicológicos ligados às atividades realizadas no interior do contexto cultural que as envolve. Por fim, a última perspectiva concebe a produção do conhecimento matemático, tanto na psicogênese como na ontogênese. Trata-se de um processo de natureza semiótica, além de entender que a experiência humana necessita de vozes – produzidas em um meio social e legitimadas gradualmente, consequentemente, tornam-nas modos compartilhados de se falar sobre essa experiência – que a interpretem.

humano são separados, assim como o ser humano de si mesmo. Isso é um pressuposto ontológico sobre o qual ocorre a emergência do ser social, pois, conforme Marx (2010, p. 84),

> A natureza é o *corpo inorgânico* do homem, a saber, a natureza enquanto ela mesma não é o corpo humano. O homem *vive* da natureza significa: a natureza é seu *corpo*, com o qual ele tem de ficar num processo contínuo para não morrer. Que a vida física e mental do homem está interconectada com a natureza não tem outro sentido senão que a natureza está interconectada consigo mesma, pois o homem é uma parte da natureza (Marx, 2010, p.84).

Considerar a unidade composta pela inter-relação entre o ser humano e natureza é essencial para apreender as especificidades do ser social. Isso porque coloca em destaque a finitude de seus representantes singulares, que é um desdobramento da constituição biológica dos indivíduos. Emerge daqui, como uma necessidade social para a ininterrupta reprodução do gênero humano, o processo de objetivação e apropriação da realidade humanizada (Duarte, 2013).

No contexto supramencionado, é preciso pôr em relevo que, de acordo com Lukács (2013), a reprodução do ser orgânico singular, isto é, a interação biológica do ser vivo com o seu meio ambiente, não constitui um complexo parcial que medeie de forma permanente a referida relação. Logo, esse processo possui o objetivo de reproduzir o ser singular, que coincide, de modo imediato, com a reprodução filogenética. Sobre essa identidade imediata se funda, na esfera do ser orgânico, a mudez do gênero (Lukács, 2013).

Distinto é o cenário na esfera do ser social, que tem em sua estruturação básica a polarização entre dois complexos – ser singular e sociedade – continuamente constituídos no constante processo de reprodução reiteradamente renovado (Lukács, 2013). Ao ter como pressuposto a sua constituição biológica, que lhe confere a existência como complexo além de fornecer condições para se relacionar com o restante da realidade, o ser humano se apropria do que não lhe é propriamente biológico e se objetiva em atividades substancialmente determinadas pela sociedade. Isso ocorre em um desenvolvimento incessante que impulsiona o "recuo das barreiras naturais" e a tendência a tornar-se-sempre-mais-social dessa esfera de ser. Dessa maneira, a apropriação das formas de reprodução social torna-se central para compreender de que modo o ser humano se constitui como gênero, sociedade e indivíduo, pois é decisiva para o ser em geral, uma vez que, "a rigor, **ser** significa o mesmo que reproduzir a si mesmo" (Lukács, 2013, p. 170, grifo nosso).

No que diz respeito ao complexo que é central à nossa pesquisa, o da educação, a categoria da reprodução tem sua relevância destacada, pois a sua função precípua é a garantia

do contínuo processo de produzir-se do gênero humano e da sociedade. Para tal, necessita garantir que as produções humanas, elaboradas historicamente e necessárias para essa reprodução, sejam apropriadas pelos indivíduos.

> As aquisições do desenvolvimento histórico das aptidões humanas não são simplesmente *dadas* aos homens nos fenômenos objetivos da cultura material e espiritual que os encarnam, mas são aí apenas *postas*. Para se apropriar destes resultados, para fazer deles *as suas* aptidões, "os órgãos da sua individualidade", a criança, o ser humano, deve entrar em relação com os fenômenos do mundo circundante através de outros homens, isto é, num processo de comunicação com eles. Assim, a criança *aprende* a atividade adequada. Pela sua função este processo é, portanto, um processo de *educação*. [...] o ponto principal que deve ser bem sublinhado é que este processo deve *sempre* ocorrer sem que a transmissão dos resultados do desenvolvimento sócio-histórico da humanidade nas gerações seguintes seria impossível, e impossível, conseqüentemente a continuidade do processo histórico (Leontiev, 2004, p. 290-291).

O fenômeno caracterizado por Leontiev (2004) como *educação* tem suas raízes na transformação do mundo pelo trabalho. Como apontam Marx e Engels (2007), no "primeiro ato histórico", ao agir a partir das possibilidades oriundas de sua própria formação histórico-biológica com a finalidade de satisfazer a necessidade emergente de reproduzir a si como ser vivo, o ser humano transforma a realidade, e a si, além de criar novos objetos e meios de produção que até então não existiam. Nesse contexto, são engendradas novas formas de interação com o mundo circundante e consigo, o que implica seu desenvolvimento cultural (Leontiev, 2004).

As forças empregadas nessa transformação, de acordo com Leontiev (2004), cristalizam-se nos produtos da atividade humana, de maneira que se torna imprescindível, na relação entre o indivíduo e o gênero, a particularização do indivíduo. Este, ao se apropriar dos objetos sociais que o qualificam, adquire os instrumentos necessários para a sua atuação na qualidade de partícipe das relações sociais. Segundo Leontiev (2004, p. 284),

> Cada geração começa, portanto, a sua vida num mundo de objetos e de fenômenos criados pelas gerações precedentes. Ela apropria-se das riquezas deste mundo participando no trabalho, na produção e nas diversas formas de atividade social e desenvolvendo assim as aptidões especificamente humanas que se cristalizaram, encarnaram nesse mundo.

Nos quadros dessa dialética entre apropriação e objetivação da realidade (Duarte, 2013), cabe destacar que o modo pelo qual ocorre a apropriação, bem como a forma de entender o papel da historicidade dos objetos, das habilidades, das capacidades, dos valores e das formas de ação nas atividades que possuem como finalidade as suas apropriações, apresentam

consequências para a organização e para o conteúdo que compõe o objeto de ensino em atividades que possuem como finalidade a sua apropriação. Um ponto fulcral para compreender o papel da historicidade pode ser encontrado na relação entre a filogênese e a ontogênese.

Uma das maneiras de se conceber a anunciada relação pode ser encontrada no *recapitulacionismo*. Para essa concepção, existe, de algum modo, uma forma de reprodução ou paralelismo, oriundo dos desenvolvimentos nos planos filogenéticos e ontogenéticos, que implica uma forma de determinismo. Conforme Furinghetti e Radford (2008), ideias recapitulacionistas podem ser encontradas mesmo entre os pré-socráticos, ao conceberem que o desenvolvimento do indivíduo ecoava o processo de desenvolvimento cósmico. Mas é entre os séculos XVIII e XIX, com o proeminente desenvolvimento das ciências naturais, que esse ponto de vista começa a ganhar contornos fundamentados nas ciências emergentes. Em meados do século XIX, segundo os autores, as formas de desenvolvimento ontogenéticas passavam a ser enxergadas pelo prisma da teoria da evolução. Sobre essas bases, Haeckel (1912 *apud* Furinghetti; Radford, 2008, p. 629) elabora a sua lei fundamental da biogenética, assim formulada:

> As séries ou formas pelas quais o organismo individual passa durante seu desenvolvimento desde o óvulo até a sua estrutura corporal completa é uma breve, condensada repetição de uma longa série de formas pelas quais os ancestrais animais de dito organismo, ou as formas ancestrais da espécie, passaram desde o primeiro período da vida orgânica até os dias de hoje.[173]

Não considerando essa correlação suficiente, Haeckel, citado por Mengal (1993, p. 94 *apud* Furinghetti; Radford, 2008, p. 629), reproduz essa lei do domínio biológico no domínio psicológico, e defende que "o desenvolvimento psicológico da criança é uma repetição abreviada da evolução filogenética". É estabelecido, portanto, um paralelismo, com base na ideia de repetição, entre ontogênese e filogênese, que remete, simultaneamente, ao desenvolvimento biológico e psicológico.

Importa grifar que essa vertente explicativa do desenvolvimento dos indivíduos, ao se utilizar da história do desenvolvimento do ser humano, precisa, de algum modo, explicar as causas que possibilitam a conexão anunciada. Nesse ponto, Furinghetti e Radford (2008) avaliam como problemáticas as tentativas de conciliação entre recapitulacionismo e história.

---

[173] "The series of forms through which the individual organism passes during its development from the ovum to the complete bodily structure is a brief, condensed repetition of the long series of forms which the animal ancestors of the said organism, or the ancestral forms of the species, have passed through from the earliest period of organic life down to the present day".

Para os autores, a contradição inerente desse ponto de vista é oriunda, por consequência do recapitulacionismo psicológico de Haeckel, da suposição de que os desenvolvimentos intelectuais no presente, até certo ponto, são uma versão condensada do passado. Acresce-se ainda o entendimento da seleção como uma função do ambiente contra a qual os indivíduos agem. É difícil sustentar que atualmente uma criança experimenta o mesmo que uma outra experienciou no passado, pois é impensável entender de modo estático o ambiente em que habitam. Assim, o recapitulacionismo se torna impossível, pois sua possibilidade depende que o ambiente seja essencialmente o mesmo.

Conforme Miguel e Miorim (2021), uma leitura recapitulacionista conduz à concepção da matemática como um corpo constituído de conhecimentos sequenciados e previamente produzidos, cada qual em um tempo e espaço determinado. Por decorrência, o processo de ensino e aprendizagem deve ser administrado em etapas cronologicamente sequenciadas, hierarquizadas e qualitativamente indistintas.

Para ilustrar uma forma de manifestação do referido ponto de vista em concepções relativas ao ensino de matemática podemos citar, assim como Miguel e Miorim (2021), Aleksandrov (1973). Este realiza uma correspondência direta entre o modo como a matemática se desenvolveu historicamente e a forma pela qual se organiza o seu ensino na atualidade. A história desse campo de conhecimentos humanos, de acordo com o autor (1973), pode ser dividida em quatro etapas ou períodos: 1) aparição da matemática como ciência teórica pura e independente; 2) matemática elementar (grandezas constantes); 3) matemática das grandezas variáveis; 4) matemática contemporânea.[174] Essas etapas/períodos "correspondem naturalmente com as distintas etapas de nossa formação matemática; o material examinado em cada uma das etapas de nosso estudo reflete com bastante aproximação o conteúdo básico do período correspondente da história da matemática"[175] (Aleksandrov, 1973, p. 79).

Se a primeira etapa/período do desenvolvimento histórico, formada pelos resultados básicos da aritmética e da geometria, constituiriam o objeto do ensino primário, a segunda se torna objeto de estudo dos centros de Ensino Médio. Por sua vez, o terceiro período, o qual tem

---

[174] Conforme nota de rodapé número 49, é possível estabelecer um paralelo com a periodização adotada por Ribnikov (1987) que, por sua vez, é tomada de Kolmogorov (2006). Além disso, cabe destacar que Aleksandrov (1973) aponta para uma possível inauguração de uma nova etapa na matemática moderna oriunda das novas técnicas de cálculo e dos resultados da lógica matemática, cujo objetivo não é apenas o estudo de "determinados entes senão, também dos caminhos e meios pelos quais ditos entes podem ser definidos; não somente determinados problemas, senão também todos os possíveis métodos de os resolver" (Aleksandrov, 1973, p. 87).

[175] "[...] se corresponden naturalmente con las distintas etapas de nuestra formación matemática; el material examinado en cada una de las etapas de nuestro estudio refleja con bastante aproximación el contenido básico del período correspondiente de la historia de la matemática".

como objetos os fundamentos da Análise, a teoria das equações diferenciais, álgebra superior, entre outros, comporia o objeto de estudo de engenheiros. Por fim, as ideias e resultados da hodierna forma do conhecimento matemático são objetos quase exclusivos dos departamentos universitários de matemática e física.

No exposto, é possível constatar a presença de elementos do recapitulacionismo nas palavras de Aleksandrov (1973). Não nos parece válida a contraposição dessa afirmação por meio do argumento da referência do autor aos resultados conceituais – as ideias gerais – das etapas/períodos, e não necessariamente aos seus conteúdos. Isso porque contradiria as palavras do autor, em especial quando se refere ao termo "conteúdo básico do período correspondente". Entendemos tal expressão como um ponto problemático, e para uma exposição adequada utilizaremos o exemplo do conceito de número. Atualmente, apesar de mantidas algumas relações gerais, o referido conceito apresenta conteúdo e forma bastante distintos, se comparados ao que Aleksandrov (1973) entende como a primeira etapa histórica de seu desenvolvimento. Além disso, um dos grandes temas do terceiro e quarto períodos assinalado pelo autor, foi exatamente o desenvolvimento do conceito de número, não encapsulado no primeiro período anunciado, conforme discutimos no capítulo 3. No que diz respeito ao desenvolvimento do Cálculo, percebemos que uma possível gênese se encontra na tentativa de reflexo do movimento, que pode ser encontrado, pelo menos, entre os gregos antigos. Em suma, como a gênese do processo e sua síntese são momentos distintos, essa analogia não nos parece válida.

Outro argumento passível de formulação para contrapor-se à identificação de aspectos recapitulacionistas na supracitada ideia do autor soviético é o de que ele entenderia, conforme textualmente explicitado, a organização curricular norteadora da formação do indivíduo na educação institucionalizada como uma forma de *reflexo*, e não de *repetição* do desenvolvimento filogenético. Esse argumento, no entanto, é refutado na medida em que é explícita uma forma de repetição objetivada na correlação entre a formulação de cunho teórico das etapas/períodos do desenvolvimento da matemática e a organização do currículo matemático. Isso se constitui, nos quadros da escola tradicional, conforme Davydov (2017), influenciado fortemente pelo princípio didático da acessibilidade. Um ponto relevante é o de que o currículo ao qual o autor se refere tem seus conceitos e conteúdos definidos pela capacidade dos alunos de assimilação, que, por sua vez, apresenta critérios gerados espontaneamente na prática real desse formato de escola (Davydov, 2017). Mas, se os alunos só possuem a capacidade de aprender os conceitos matemáticos na sequência estabelecida espontaneamente pela escola tradicional, e esta reflete de algum modo o desenvolvimento

histórico, há, por consequência, uma repetição do mesmo com a formação espontânea do currículo dada de antemão pela capacidade dos alunos. Há, pois, algo nas capacidades dos estudantes que os conduziria a aprender matemática seguindo o mesmo caminho que o desenvolvimento histórico. Se Davydov (2017) estiver certo acerca da formação do currículo da escola tradicional, a ideia formulada por Aleksandrov (1973) indicaria que as capacidades dos estudantes estão moldadas pela sequência histórica de desenvolvimento da matemática.

Além disso, outras problemáticas são derivadas do paralelismo anunciado, como: da medida da materialização do reflexo dos conteúdos, tema que não é claramente desenvolvido por Aleksandrov (1973); da concepção de universalidade do desenvolvimento matemático eurocêntrico como molde ou modelo do desenvolvimento do pensamento matemático dos indivíduos; da validade do argumento que, ao não ser explorado em seus pormenores, exibe elementos insuficientes para sua validação; da relação entre os critérios de periodização da história e os critérios de periodização da formação do indivíduo. Por fim, ainda é pertinente questionar até que ponto a leitura histórica e a periodização elaborada por Kolmogorov (2006), adotada como fundamento da tese elaborada por Aleksandrov (1973), não é uma forma de retroprojeção da organização espontânea do currículo escolar.

Destacamos, também, que o entendimento de Aleksandrov (1973) vai de encontro ao proposto por Davídov (1988), para quem a organização das disciplinas escolares deve propiciar a formação de um nível mais alto de consciência e de pensamento, identificado pelo autor como pensamento teórico moderno. De tal modo, isso necessita que se considerem os conceitos com base na sua "versão" mais desenvolvida. O referido pressuposto conduz Davídov (1988) a eleger, como tarefa geral da matemática na educação formal até o Ensino Médio, a formação, pelo estudante, de uma concepção autêntica e completa de número real baseada no conceito de grandeza.[176] Ao considerar, no ponto de partida, a forma mais desenvolvida do

[176] Convém, aqui, uma explicação decorrente da tradução do original para o espanhol (Davídov, 1988, p. 185, grifo nosso) que sugere uma interpretação do conceito a que Davídov se refere como sendo o de *número natural*, o qual possui como base o conceito de *magnitude*. No texto citado, encontramos as seguintes palavras: "Como es sabido, la principal finalidad de este curso consiste en que, al finalizar la escuela media, se haya formado en los alumnos una concepción auténtica y completa del **número natural** cuya base es el concepto de **magnitude**". No original em russo (Давыдов, 1982, p. 158), encontramos os termos *diestvitel'nogo* (*действительного)* e *tchisla* (*числа)* que, segundo Guarino (2019), dicionário russo-português, têm o significado, respectivamente, de *real/válido/vigente* e *número*, que na sentença são formas de declinação da raiz *diestvitel'noe tchisló* (*действительное число*), número real. Por sua vez, o termo *vielitchini* (*величины*), segundo o mesmo autor (2019), refere-se a uma declinação da raiz *viilitchiná* (*величина*), que tem como significado *tamanho/grandeza*. Além disso, o contexto da obra de Davídov (1988) indica que sua proposição tem como alvo o conceito de *número real*, como fica subentendido no seguinte excerto: "El principal objetivo de las matemáticas escolares es llevar a los alumnos a comprender lo más claramente posible la concepción de **número natural**. […]. La familiarización de los alumnos con la diversidad de números, existentes en la concepción del **número natural**, es un importante camino para concretizar el concepto de **magnitud**" (Davídov, 1988, p. 208, grifo nosso). Outro argumento decorre

conceito que também carrega um conteúdo distinto de sua forma espontânea ou empírica, o psicólogo e didata soviético busca apreender a relação essencial – fundamento para qualquer particularidade numérica – por meio da relação entre grandezas. Em outras palavras, a proposição de Davídov (1988) permite que se principie o ensino, desde os primeiros anos de escolarização, adotando como referência o estágio atual de desenvolvimento do conceito de número, sua forma mais desenvolvida.

Outro elemento desdobrado do recapitulacionismo de Aleksandrov (1973) refere-se ao fato de o autor conceber as etapas/períodos do desenvolvimento da matemática, nos quais as grandezas variáveis tornam-se centrais, como correspondentes à escolarização dos engenheiros, matemáticos e físicos. Em virtude disso, no mínimo, o desenvolvimento do pensamento covariacional dos estudantes, em outras etapas de ensino, é transformado em um fator meramente periférico. Contrapondo-se a isso, a concepção davidoviana, ao abordar, por exemplo, o conceito de número, apresenta elementos para a promoção dessa forma de pensamento como uma consequência da ontologia relacional que a fundamenta. Isso pode ser percebido no modelo geral do número ($\frac{A}{c} = K$) como uma relação entre grandezas que, em suas diferentes manifestações, conduzem à ideia de variação. Do ponto de vista do ensino do Cálculo, uma ontologia relacional dos conceitos matemáticos pode fomentar a apropriação de formas de pensamento e conteúdos conceituais facilitadores da apropriação de seus conceitos desde as primeiras etapas de ensino escolar.

Vale sublinhar que a concepção de Aleksandrov (1973) reverbera o entendimento de Rosental (1960). Segundo este filósofo, o processo histórico tem expressão no desenvolvimento intelectual da criança, o qual se efetiva como uma "história abreviada e

---

da constatação de que, em obra diversa, o autor usa uma flexão do adjetivo citado, *natural'nyye* (*натуральные*), como referente a *natural*, ao lado de outro, *deystvitel'nyye* (*действительные*), que remete a *real* no contexto de diferenciação de conjuntos numéricos (Давыдов, 2000, p. 438), os quais foram traduzidos para o espanhol, respectivamente, como "*natural*" e "*real*" (Davýdov, [198-?], p. 431). Não analisaremos a tradução do período inteiro, pois não possuímos os conhecimentos necessários para tal empreitada. Ao incorporarmos esses apontamentos à tradução para o espanhol, defendemos a seguinte tradução como mais condizente com o original: "Como é sabido, a principal finalidade deste curso consiste em que, ao finalizar a escola média, tenha-se formado nos estudantes uma concepção autêntica e completa de número real cuja base é o conceito de grandeza". Nossa interpretação vai ao encontro da análise do modo que Davidov concebe o conceito de número e da organização de seu ensino realizada por Rosa (2012). O leitor pode se perguntar o motivo de tecermos essa longa nota de rodapé para justificar algo que poderia ser sanado apenas com o emprego da citação de Davýdov [198-?] ao invés de Davídov (1988). Não obstante a possibilidade mencionada, a adoção dessa postura não nos eximiria de lidar com a questão envolvendo magnitude/grandeza. Além disso, como Davídov (1988) é uma das obras mais conhecidas e citadas do autor, entendemos que esses adendos, que não são meramente marginais, mas sim centrais para a compreensão apropriada da obra do autor, fazem-se necessários.

repetida da humanidade"[177] (Rosental, 1960, p. 355). Tal afirmação, em algum sentido análogo à de Haeckel é possível, conforme o entendimento do autor, pois no começo da humanidade

> [...] o homem julgava os fenômenos que lhe rodeavam baseando-se, principalmente, nos dados que lhe proporcionavam seus órgãos sensoriais, isto é, suas sensações, percepções e representações. Somente nas fases ulteriores, mais altas, foi desenvolvendo-se, mais e mais, a atividade abstratizante e generalizadora do pensamento humano. [...] O pensamento infantil, certamente, tem em seus primeiros anos um caráter exclusivamente concreto-sensível, e somente mais tarde se vai desenvolvendo gradualmente nele a faculdade de generalizar, o pensamento abstrato[178] (Rosental, 1960, p. 355).

Além da correlação destacada, encontramos em Rosental (1960, p. 353-354) outro paralelismo, agora entre o desenvolvimento histórico do conhecimento e o processo cognoscitivo do sujeito individual:

> A generalização da marcha histórica do conhecimento desempenha um papel importante, ajudando a compreender como opera o conhecimento na mente de um sujeito individual, já que o lógico e o histórico, no essencial, também concordam nesse caso. A lógica do ato cognoscitivo individual reflete também, ainda que seja de modo concentrado e abreviado, a sucessão lógica do desenvolvimento histórico do conhecimento humano; certamente, refletem-se os traços mais gerais, não todos os detalhes, zigue-zagues e retrocessos inevitáveis na história do conhecimento.[179]

O pressuposto, expresso como manifestação intrínseca da interpretação acerca da relação dialética entre o lógico e o histórico concebida como uma lei do desenvolvimento da realidade, autorizaria o autor a identificar, no que se refere aos "traços mais gerais", o processo cognoscitivo do sujeito individual com o processo histórico de desenvolvimento do conhecimento, afirmando, dessa forma, que a "ontogênese do conhecimento coincide com sua filogênese"[180] (Rosental, 1960, p. 356). Para o filósofo soviético (1960), isso é um desdobramento da progressividade do conhecimento como apropriação da natureza essencial

---

[177] "La historia del desarrollo intelectual del niño se presenta como una historia abreviada y repetida de la humanidad".

[178] "[…] el hombre juzgaba acerca de los fenómenos que le rodeaban basándose, principalmente, en los datos que le proporcionaban sus órganos sensoriales, es decir, en sus sensaciones, percepciones y representaciones. Sólo en las fases ulteriores, más altas, fue desarrollándose más e más la actividad abstrayente y generalizadora del pensamiento humano. […] El pensamiento infantil, ciertamente, tiene en los primeros años un carácter exclusivamente concreto-sensible, y sólo más tarde se va desarrollando gradualmente en él la faculdad de generalizar, el pensamiento abstracto".

[179] "La generalización de la marcha histórica del conocimiento desempeña un papel importante, ayudando a comprender cómo opera el conocimiento en la mente de un sujeto individual, ya que lo lógico y lo histórico, en lo esencial, también concuerdan en este caso. La lógica del acto cognoscitivo individual refleja también, aunque sea de modo concentrado y abreviado, la sucesión lógica del desarrollo histórico del conocimiento humano; por supuesto, se reflejan los rasgos más generales, no todos los detalles, zigzags y retrocesos inevitables en la historia del conocimiento".

[180] "La ontogénesis del conocimiento coincide con su filogénesis".

da realidade pelo ser humano. Tal processo, tanto no plano histórico quanto no individual é iniciado na captura do aspecto exterior de um fenômeno e culmina com descobrimento da lei ou essência que o rege. No plano individual, esse caminho segue das sensações, percepções e representações em direção aos processos de abstração e generalização, considerados como meios que possibilitam a apropriação da essência da realidade.

> Todo o conhecimento parte do fato de que o objeto atua sobre nossos órgãos sensoriais. Sem esta ação do objeto, nada poderíamos saber dele. Por isso, a percepção sensível, a observação das coisas, constitui necessariamente a primeira fase do ato cognoscitivo de um sujeito individual, e somente mais tarde podemos passar a uma fase mais alta, a fase da generalização e do pensamento abstrato, mediante o qual conhecemos as leis que regem os fenômenos[181] (Rosental, 1960, p. 356).

Para fundamentar sua justificativa, o filósofo recorre a pesquisas fisiológicas, que lhe permitem concluir: "a história do homem e dos animais demonstra que o conhecimento se desenvolve, com força de lei, desde o reflexo imediato da realidade ao reflexo mediato, ou seja, demonstra que o processo cognoscitivo também está sujeito a leis no sujeito individual"[182] (Rosental, 1960, p. 356).

É importante fazermos algumas observações sobre as duas teses defendidas por Rosental (1960). A primeira, a da coincidência entre o plano do desenvolvimento do pensamento na criança e na história da humanidade. A segunda, a da coincidência, "no essencial", entre o processo cognoscitivo individual e a história do desenvolvimento do conhecimento. Primeiramente, a identificação superficial do desenvolvimento ontogenético da criança com o da humanidade só pode ser realizada no plano formal, pois o conteúdo que consubstancia o pensamento da criança é bastante distinto daquele dos nossos ancestrais mais longínquos.

Essa forma de comparação entre crianças contemporâneas e nossos antepassados adultos é um dos traços presentes em clássicas posições recapitulacionistas. Todavia, ao consultar a análise da categoria trabalho elaborada por Lukács (2013), deparamo-nos com o entendimento dessa atividade como a única que não possui caráter puramente social, pois representa um papel de transição. Para o filósofo húngaro (2013), isso não significa que outras

---

[181] "Todo conocimiento parte del hecho de que el objeto actúa sobre nuestros órganos sensoriales. Sin esta acción del objeto, nada podríamos saber de él. Por ello, la percepción sensible, la observación de las cosas, constituye necesariamente la primera fase del acto cognoscitivo de un sujeto individual, y sólo más tarde podemos pasar una fase más alta, la fase de la generalización y del pensamiento abstracto, mediante el cual conocemos las leyes que rigen los fenómenos".

[182] "[…] la historia del hombre y de los animales demuestra que el conocimiento se desarrolla, con fuerza de ley, desde el reflejo inmediato de la realidad al reflejo mediato, es decir, demuestra que el proceso cognoscitivo también está sujeto a leyes en el sujeto individual".

categorias como a socialidade e a linguagem, por exemplo, mesmo que oriundas do trabalho, tenham se desenvolvido em uma etapa temporal determinável, o que leva o autor a supor sua formação simultânea.

A presença de algum grau de sociabilidade pode, inclusive, ser identificada nas entrelinhas da formulação de Rosental (1960), ao afirmar que nossos ancestrais "julgavam" os fenômenos com base nos dados oriundos dos órgãos dos sentidos. O ato de "julgar" se estabelece sempre na comparação entre realidade e o idealmente preferível, isto é, insere-se em um cenário em que há uma atribuição de finalidade que, em geral, responde a uma necessidade. Esse julgamento, ou valoração, segue algum critério, o que de antemão admite a existência de formas de relacionamento dos indivíduos entre si e com o restante da realidade cujos elementos se encontram somente no contexto da atividade. Como há relações mediadas entre os seres humanos, não é inimaginável, nessas etapas, considerar a existência de processos de abstração, mesmo que tênues.

Rosental (1960) segue um caminho diferente na abordagem do processo geral do conhecimento por formular uma narrativa com indícios que conduzem à interpretação do sujeito como um elemento passivo de influência do objeto. Nessas condições, a análise interdita o papel da ação recíproca do sujeito sobre o objeto no contexto da atividade, o que nesse cenário é imperativo para a apropriação adequada do processo de conhecimento. O leitor pode contraditar ao considerar que o objetivo do autor não é elaborar uma análise profunda do processo de conhecimento. Isso seria um argumento válido se a intenção do autor fosse outra senão apresentar um paralelo entre o processo do desenvolvimento do pensamento na história humana e na criança, por um lado, e o processo de conhecimento dos indivíduos em geral, por outro. O problema decorre do fato de que, se inserido nessa formulação o relacionamento recíproco entre sujeito e objeto no âmbito da unidade formada pela atividade, a tese da coincidência não se sustenta, pois há um inter-relacionamento dialético que promove um desenvolvimento não linear em nenhum dos planos.

Desse modo, os paralelismos apontados, apesar de apresentar alguns elementos formais e gerais que podem ser considerados corretos, não fornecem subsídios para nos apropriarmos nem da forma de pensamento das crianças, nem do desenvolvimento do conhecimento durante a história.

A segunda questão que gostaríamos de pôr em relevo está umbilicalmente ligada à primeira e se refere, mais especificamente, à analogia entre o processo cognoscitivo individual e o processo histórico de desenvolvimento do conhecimento. Essa marcha, no plano histórico e no plano individual-cognoscitivo, que percorre da sensibilidade em direção à abstração e

generalização, pode ser rapidamente confundida com a proposta de organização de ensino de Davídov (1988). Uma das possíveis fontes dessas interpretações emerge do entendimento de que o pensamento empírico deve ser, naturalmente, base para o desenvolvimento do pensamento teórico. Para nós, o tratamento dessa questão pode lançar luz sobre a temática presente na tese defendida por Rosental (1960). Entretanto, é mister tratar da relação entre o sensorial e o racional, pois nela está a fonte do paralelismo descrito e da natureza da distinção entre o pensamento teórico e o pensamento empírico, na proposição de Davídov (1988).

Apoiados em Davídov (1988) podemos afirmar, assim como Rosental (1960), que o processo de apropriação do conhecimento tem como um de seus elementos a sensibilidade. Porém, para Davídov (1988), a sensibilidade não está restrita ao registro e investigação do aparente e do externo, isto é, da realidade física. Determinados tipos de atividade sensório-objetal apresentam, como característica, a potencialidade de captar a unidade e os nexos universais do objeto estudado, apesar de se limitarem, devido à sua natureza, à manifestação integral e indiferenciada. Mas, o que é importante destacar é que, em Davídov (1988), a sensibilidade é um componente do agir humano, de sua atividade.

> Assim, pois, não se pode falar sobre a sensibilidade "em geral" ao determinar sua relação com os diferentes tipos de pensamento. Ao dizer, por exemplo, "esse é um objeto captado sensorialmente" não predefinimos o tipo de sua expressão racional. Se este objeto é examinado em si mesmo, fora de certo sistema e da conexão com outros objetos, pode converter-se em conteúdo do pensamento empírico. Se o mesmo objeto se analisa dentro de certa concreticidade e somente aqui explicita suas verdadeiras particularidades, se converterá em conteúdo do pensamento teórico. Este se apoia inteiramente em dados fáticos, em conhecimentos sensoriais; esse pensamento é o meio para os unir e os explicar[183] (Davídov, 1988, p. 137-138).

Mostra-se, portanto, que a própria sensibilidade está interconectada, em toda sua extensão, com o pensamento. Ou seja, apesar do racional e do sensível possuírem suas características e funções próprias, estão imbricados de tal maneira que se torna hercúlea a tarefa de distinguir seus relativos pontos de independência. E aquilo que os coloca em movimento é a atividade. Por meio dela é que é possível nos apropriarmos de seus papéis específicos e de sua conexão.

---

[183] "Así pues, no se puede hablar sobre la sensibilidad 'en general' al determinar su relación con los diferentes tipos de pensamiento. Al decir, por ejemplo, 'esto es un objeto captado sensorialmente' no predefinimos el tipo de su expresión racional. Si este objeto es examinado en sí mismo, fuera de cierto sistema y de la conexión con otros objetos, puede convertirse en contenido del pensamiento empírico. Si el mismo objeto se analiza dentro de cierta concretidad y sólo aquí pone al descubierto sus verdaderas particularidades, se convertirá en contenido del pensamiento teórico. Este se apoya, enteramente en datos fácticos, en conocimientos sensoriales; ese pensamiento es el medio para unirlos y explicarlos".

Davídov (1988) não nega o papel específico do sensível na relação com o pensamento. Todavia, isso é diferente de afirmar que o pensamento empírico, isto é, aquele fundamentado nos traços externos dos objetos, tem por fundamento o pensamento teórico com o argumento de que a "fonte" dos dois se localizaria na sensibilidade. Nossa defesa é que a formação do pensamento teórico não solicita apenas desenvolvimento do pensamento, mas sim o desenvolvimento e a educação do indivíduo por inteiro, sua humanização, o que exige também a educação dos sentidos e das formas mais gerais de relacionamento do sujeito com o mundo. Na condição de indivíduo ele é indivisível, o que invalida qualquer tentativa de fragmentação entre corpo e mente e entre sensibilidade e razão. O pensamento não começa após a apreensão sensível, apesar de ela fornecer conteúdo para a sua ação. Ele age desde o momento dessa apreensão. Isso leva em consideração o pensamento e a sensibilidade não como funções de um ou vários órgãos que atuam separadamente, mas de um corpo completo e em movimento unitário. E mais, o realmente essencial é que, como afirma Wartofsky (1979, p. 115), "a sensação que *eu* tenho, o pensamento que *eu* penso, o desejo que *eu* expresso, a ação que *eu* performo como um ser humano é irremediavelmente infectada com a minha biografia pessoal, a história da minha espécie, meu passado, presente *e* futuro histórico e social"[184].

Portanto, abordar o desenvolvimento do pensamento teórico exige-nos, entre outras atenções, lidar com a questão do desenvolvimento dos sentidos em sua forma teórica, como uma expressão clara da tese marxiana sobre a humanização dos sentidos (Marx, 2010). Na referida tese, encontramos a ideia do objeto na atividade humana não como um simples ente "dado", mas como aquilo que, ao se tornar parte de uma relação humanizada, apresenta a forma de objeto socialmente estabelecido. Para Marx (2010, p. 109),

> [...] o olho *humano* frui de forma diversa da que o olho rude, não humano [frui]; o *ouvido* humano diferentemente da do ouvido rude etc. [...] O homem só não se perde em seu objeto se este lhe vem a ser como objeto *humano* ou homem objetivo. Isto só é possível na medida em que ele vem a ser objeto *social* para ele, em que ele próprio se torna ser social (*gesellschaftliches Wesen*), assim como a sociedade se torna ser (*Wesen*) para ele neste objeto.

Um pouco mais adiante, em seu escrito, encontramos uma análise teórica na qual Marx (2010, p. 110) discute a relação entre sujeito e objeto do ponto de vista do sujeito:

---

[184] "In short, the sensation *I* have, the thought *I* think, the desire *I* express, the action *I* perform as a human being is hopelessly infected with my personal biography, my species-history, my social and historical past and present *and* future".

> [...] subjetivamente apreendido: assim como a música desperta primeiramente o sentido musical do homem, assim como para o ouvido não musical a mais bela música não tem *nenhum* sentido, é nenhum objeto, porque o meu objeto só pode ser a confirmação de uma das minhas forças essenciais, portanto só pode ser para mim da maneira como a minha força essencial é para si como capacidade subjetiva, porque o sentido de um objeto para mim (só tem sentido para um sentido que lhe corresponda) vai precisamente tão longe quanto vai o *meu* sentido, por causa disso é que os *sentidos* do homem social são sentidos *outros* que não os do não social; [é] apenas pela riqueza objetivamente desdobrada da essência humana que a riqueza da sensibilidade *humana* subjetiva, que um ouvido musical, um olho para a beleza da forma, em suma as fruições humanas todas se tornam *sentidos* capazes, sentidos que se confirmam como forças essenciais *humanas*, em parte recém-cultivados, em parte recém-engendrados. Pois não só os cinco sentidos, mas também os assim chamados sentidos espirituais, os sentidos práticos (vontade, amor etc.), numa palavra o sentido *humano*, a humanidade dos sentidos, vem a ser primeiramente pela existência do *seu* objeto, pela natureza *humanizada*.

Expressam-se claramente, nessas linhas, os dois elementos principais que queremos fazer emergir na discussão em tela. O primeiro é que o sujeito cognoscitivo não entra em contato com o objeto primeiramente pelos órgãos dos sentidos, como simples órgãos que representam um suposto espaço exterior, para que então o pensamento, interior, entre em cena. Tal interpretação, em última instância, ao particionar mente e corpo, confere a este último a função específica de fornecer "dados" brutos para a mente. Todavia, a consciência e o pensamento atuam em unidade com os sentidos, isto é, são unidades do complexo do indivíduo nesse relacionamento entre o sujeito e a realidade em seu todo.

Vincado nesse terreno encontra-se um segundo elemento, referente à natureza do objeto que, na prática humana, estabelece-se na relação com o sujeito como objeto social. A manifestação de sua natureza social exige do sujeito determinadas características socialmente formadas. Isso coloca a humanização como uma necessidade de ampliação das possibilidades do sujeito, pois, para que um determinado estímulo sensorial se configure objeto de uma atividade, é necessário que o sujeito o reconheça de tal maneira. Assim, é possível o entendimento de que, quanto mais desenvolvidas as "sensibilidades", maior é a possibilidade de o sujeito se apropriar de relações teóricas, representantes da prática social encarnada nos dados decorrentes dos órgãos sensoriais. Em Radford (2010, 2021a), encontramos como esse aspecto pode se materializar em um modo de educar os sentidos teoricamente com a finalidade da apropriação do conhecimento matemático, isto é, como forma de prática social. O autor (2010), ao analisar uma aula sobre sequências, no contexto escolar, interpreta que os modos como o professor age podem engendrar condições para o estudante capturar determinados elementos de uma maneira que lhe proporcionem contato com uma forma de generalização, incorporada em uma prática social específica. A criação no sujeito dessa forma de percepção promove, conforme o autor (2010, 2021a), uma humanização e qualificação dos sentidos que,

no caso específico de seu estudo, pode ser considerada como uma transformação dos olhos em um órgão teórico sofisticado.

As discussões realizadas nos permitem, portanto, duvidar acerca da exatidão da tese de Rosental (1960) de que o processo cognoscível parte do sensível, como modo de apreensão do externo e acidental, e segue em direção ao conhecimento racional, que busca o essencial com a utilização dos dados, inicialmente resultantes da ação do objeto sobre o indivíduo. Esse modelo de cognição está próximo ao do empirismo e ao do que Ilyenkov (2008, p. 40) perspicazmente nomeia de "modelo epistemológico Robison Crusoé". Isso é passível de ser contraposto com a compreensão de que o ponto de partida do conhecimento não são os dados "brutos" da experiência, fornecidos pelos sentidos. Em vez disso, sustenta-se em uma relação mediada pela concepção de mundo herdada da comunidade da qual o sujeito é membro. Para Ilyenkov (2008, p. 40-41):

> Não é apenas a natureza material que existe fora e independentemente da consciência e vontade do *indivíduo* – o mesmo ocorre com a esfera extremamente complexa e historicamente moldada da cultura material e espiritual da *humanidade*, da sociedade. Ascendendo à vida consciente dentro da sociedade, o indivíduo encontra um "meio espiritual" pré-existente, cultura espiritual objetivamente implementada. Essa é contraposta à consciência individual como um objeto específico que o indivíduo tem que assimilar considerando sua natureza como algo objetivo. Um sistema de formas de consciência social (em um sentido mais largo possível, incluindo formas de organização política da sociedade, direito, moralidade, vida cotidiana, e assim por diante, bem como formas e normas de ação na esfera do pensamento, regras sintático-gramaticais para expressão verbal de noções, gostos estéticos, etc.) estruturam desde o início o desenvolvimento da consciência e da vontade indivíduo, moldando-o em sua própria imagem. Como resultado, cada impressão sensorial separada que surge na consciência individual é sempre um produto da refração[185] do estímulo externo através do extremamente complexo prisma das formas da consciência que o indivíduo se apropriou. Esse "prisma" é um produto do desenvolvimento social humano. Sozinho, frente a frente com a natureza, o indivíduo não possui esse prisma, e isso não pode ser entendido por meio de uma análise das relações de um indivíduo isolado da natureza.[186]

[185] Ver nota de rodapé número 31.

[186] "But it is not only material nature that exists outside of and independently from the consciousness and will of the individual – so does the extremely complex and historically shaped sphere of the material and spiritual culture of *mankind*, of society. Rising to conscious life within society, the individual finds pre-existing 'spiritual environment', objectively implemented spiritual culture. The latter is opposed to individual consciousness as a specific object which the individual has to assimilate taking into account its nature as something quite objective. A system of forms of social consciousness (in the broadest possible sense, including forms of political organization of society, law. morality, everyday life, and so on, as well as forms and norms of actions in the sphere of thought, grammatical syntactic rules for verbal expression of notions, aesthetic tastes, etc.) structures from the very outset the developing consciousness and will of the individual, moulding him in its own image. As a result, each separate sensual impression arising in individual consciousness is always a product of refraction of external stimuli through the extremely complex prism of the forms of social consciousness the individual has appropriated. This 'prism' is a product of social human development. Alone, face to face with nature, the individual has no such prism, and it cannot be understood from an analysis of the relations of an isolated individual to nature".

No que tange ao processo de formação do pensamento teórico, é possível conjecturar que esse "prisma" das formas de consciência social fornece as condições pelas quais os indivíduos possam se colocar em relação com o objeto, de modo que o "estímulo externo" seja posto em movimento, no sentido da revelação de sua abstração substancial desde o início do processo. Desse modo, a formação do pensamento teórico pressupõe uma postura dos sujeitos diante do objeto que se distingue desde o início daquela adotada pelo sujeito na formação do pensamento empírico. Isso, por consequência, possibilita o entendimento de que são associados, aos conhecimentos teórico e empírico, distintos procedimentos epistemológicos (Hedegaard, 2002). Nesses termos é que entendemos a seguinte formulação davidoviana, cujo foco se dirige à relação entre o empírico e o pensamento teórico:

> Às vezes, deparamo-nos com a opinião de que também **na atualidade** – dizem – o pensamento teórico segue apoiando-se no empírico e, pode-se dizer que, apoia-se sobre ele, conservando-o na qualidade de fundamento. A nosso ver, trata-se de uma interpretação errônea da correlação dos mesmos. No processo de sua formação, o pensamento teórico contemporâneo tem assimilado os aspectos e meios positivos do pensamento empírico, "modelando-os" em si mesmo. Dentro do **próprio** movimento, ele resolve agora como **seus** próprios problemas particulares, o que antes era (ou em condições especiais segue, todavia, sendo) prerrogativa do pensamento empírico, porém os resolve a seu modo, com maior plenitude e efetividade. A descrição do ser efetivo, como das premissas e consequências do ser mediatizado, constitui uma das funções do pensamento **teórico**, mas uma função que se cumpre à luz do propósito cardinal: aclarar a essência do objeto como lei geral de seu desenvolvimento. Neste caminho o pensamento teórico encontra fatos experimentais e outros resultados da observação e **cria** dentro de seu sistema os meios sensoriais para definir e consolidar esses fatos (o que é propriamente mental e sensorial se encontram aqui em unidade). Mas tudo isso se executa em um processo único de estudo da formação de certo sistema integral[187] (Davýdov, [198-?], p. 310).

Retomando o tema central desta seção, a relação entre filogênese e ontogênese, é mister esclarecer que a crítica ao ponto de vista recapitulacionista não decorre de uma negação da existência de alguma correlação ou relação de condicionamento entre os dois planos de desenvolvimento. Pelo contrário, trata-se do pressuposto de que a filogênese determina, de

[187] "A veces nos tropezamos con la opinión de que también **en la actualidad** - dicen - el pensamiento teórico sigue apoyándose en el empírico y diríase que asienta sobre él, conservándolo en calidad de cimiento. Esto es, a nuestro parecer, una interpretación errónea de la correlación de los mismos. En el proceso de su formación, el pensamiento teórico contemporáneo ha asimilado los aspectos y medios positivos del pensamiento empírico, "plasmándolos" en sí mismo. Dentro del **propio** movimiento él resuelve ahora como **sus** problemas particulares lo que antes era (o en condiciones especiales sigue siendo todavía) prerrogativa del pensamiento empírico, pero los resuelve a su modo, con mayor plenitud y efectividad. La descripción del ser efectivo, como de las premisas y consecuencias del ser mediatizado, constituye una de las funciones del pensamiento **teórico**, mas una función que se cumple a la luz del propósito cardinal: aclarar la esencia del objeto como ley general de su desarrollo. En este camino el pensamiento teórico encuentra hechos experimentales y otros fruto de la observación y **crea** dentro de su sistema los medios sensoriales para definir y consolidar esos hechos (los propiamente mental y sensorial se hallan aquí formando unidad). Mas todo ello se ejecuta en un proceso único de estudio de la formación de un cierto sistema integral".

algum modo, a ontogênese. Conforme Miguel e Miorim (2021), é o caráter determinista a fonte dos problemas que emergem do argumento recapitulacionista. O suporte analítico realizado nos auxilia a volver em direção às possíveis relações existentes entre os dois âmbitos do desenvolvimento. Isso porque tínhamos a intencionalidade, nas últimas páginas, de demonstrar a improdutividade das comparações apressadas, focadas apenas nas similitudes entre os dois planos. Em síntese, defendemos que a formulação de enunciados bastante gerais e abstratos não fornece nenhum conteúdo que subsidie a explicação dos fenômenos estudados, em especial, no quadro da nossa pesquisa, do fenômeno da formação do indivíduo no contexto da atividade coletiva de estudo escolar, que tem como objeto a apropriação dos conhecimentos do Cálculo.

Cabe ao leitor questionar: qual será o objetivo da presente discussão no âmbito de nossa pesquisa? A resposta é que o objeto de ensino se apresenta no contexto da atividade como uma prática social, historicamente elaborada, que se manifesta nas relações estabelecidas entre os sujeitos com a história das práticas que o originaram e o desenvolveram. Em virtude disso, é necessário despir a questão do véu que lhe encobre a face, a fim de problematizar a relação entre o conhecimento histórico e a sua apropriação pelo indivíduo. Nesse terreno, encontra-se o papel do estudo da relação entre a filogênese e a ontogênese, pois emergem dela diferentes implicações, sejam relativas ao modo de se organizar o currículo escolar, à forma como é concebida a formação do indivíduo ou ao modo pelo qual se organiza o ensino para a apropriação do conhecimento. Por isso a proposição de um processo de análise que considere o relacionamento comparativo, no sentido de não realizar um isolamento de aspectos coincidentes a fim de se estabelecer um paralelismo formal que auxilie na explanação do desenvolvimento atual dos indivíduos – como aparece em Aleksandrov (1973) – ou para o estabelecimento formal de alguma lei geral – como aparece em Rosental (1960). Em vez disso, a análise se volta ao processo concreto do modo como essas similitudes se concretizam em sua particularização (Moretti; Radford, 2023).

Nesse cenário, valoramos como importante a produção de Davidov sobre o tema em questão (Davídov, 1988; Davydov, 2012). Para o autor (1988), o exame da relação entre o desenvolvimento da consciência da criança e a educação/ensino passa pela análise da correlação entre a ontogênese da consciência e o processo histórico. Esse aspecto, contudo, não diz respeito, segundo o autor, a um recapitulacionismo psicológico. Sob essa premissa se ergue a exposição de sua visão sobre as questões relativas às inter-relações e paralelos entre filogênese e ontogênese. Para o autor (1988, 2012), a ideia geral entre esses supostos paralelos encontra-se no campo das produções filosóficas. Na fundamentação de seu posicionamento, é citada uma

passagem de Hegel (2014, p. 39, grifo nosso), cujo parágrafo reproduziremos em sua totalidade para melhor explicitar seu sentido:

> O indivíduo, cuja substância é o espírito situado no mais alto, percorre esse passado da mesma maneira como quem se apresta a adquirir uma ciência superior, percorre os conhecimentos-preparatórios que há muito tem dentro de si, para fazer seu conteúdo presente; evoca de novo sua rememoração, sem no entanto ter ali seu interesse ou demorar-se neles. **O singular deve também percorrer os degraus-de-formação-cultural do espírito universal, conforme seu conteúdo; porém, como figuras já depositadas pelo espírito, como plataformas de um caminho já preparado e aplainado**. Desse modo, vemos conhecimentos, que em antigas épocas ocupavam o espírito maduro dos homens serem rebaixados a exercícios – ou mesmo a jogos de meninos; assim **pode reconhecer-se no progresso pedagógico, copiada como em silhuetas, a história do espírito do mundo**. Esse ser-aí passado é propriedade já adquirida do espírito universal e, aparecendo-lhe assim exteriormente, constitui sua **natureza inorgânica** e apropriando-se dela. Vista porém do ângulo do espírito universal, enquanto é substância, a formação cultural consiste apenas em que essa substância se dá a sua consciência-de-si, e em si produz seu vir-a-ser – e sua reflexão.

Sobre essas palavras do filósofo alemão é que Davydov (2012) considera as questões em tela. Ao comentar o que avalia como uma tese correta de B. M. Kédrov[188] – o desenvolvimento da consciência individual *repete* dialeticamente alguns traços e peculiaridades de toda a história geral –, afirma que esse autor desconsidera a essência psicológica da questão: como e quais traços da história da consciência se repetem no desenvolvimento da consciência individual? Para buscar subsídios esclarecedores acerca dessa questão, Davydov (2012) se ancora na análise crítica, realizada por Vigotski, das teorias que estabelecem paralelos nos planos ontogenético e filogenéticos por influência da lei biogenética.[189]

Vigotski, segundo Davydov (2012), entende que essa lei não desempenha papel central na explicação do que é o ser humano. Na sua teoria, é decisivo o processo de relação estabelecido entre criança e adultos. Contudo, na detecção da gênese de certas funções mentais, ele lança mão de materiais sobre a sociogênese histórica de ditas funções. Portanto, nos trabalhos de Vigotski, conforme a visão de Davydov (2012), em determinados pontos manifestam-se paralelos entre ontogênese e história. No entanto, não ganham contornos finais em sua teoria, mas no contexto da totalidade de sua elaboração teórica se aproximariam da ideia e teoria elaboradas por Hegel. A questão do papel da análise histórico sociogenética no método vigotskiano também foi abordada por Scribner (1985). Ela considera que o pesquisador bielo-russo busca, em diferentes fontes, indícios sobre a gênese das funções psicológicas superiores

[188] Bonifaty Mikhailovich Kédrov (1903-1985) – pesquisador e teórico soviético com publicações em diversas áreas como filosofia, psicologia e lógica.
[189] O texto em questão é intitulado como *Lei biogenética em psicologia e pedagogia* e foi publicado no tomo 6 da primeira edição da *Grande Enciclopédia Soviética*. Não tivemos acesso a esse texto.

na criança, dentre elas também na história. Em outras palavras, o recurso de Vigotski à filogênese é um dos lócus em que investiga a existência de elementos explicativos do seu objeto. Isso seria suficiente para afastar qualquer tipo de leitura recapitulacionista de sua obra, mas Scribner (1985) vai além e formula quatro pontos para tornar mais consistente a sua posição.

O primeiro ponto se refere à própria negação vigorosa de Vigotski de qualquer paralelismo ou recapitulacionismo. De fato, pode-se encontrar as seguintes linhas em sua obra:

> No desenvolvimento da criança, dois tipos de desenvolvimento mental estão representados (não repetidos) de modo isolado na filogênese: o desenvolvimento do comportamento biológico e o histórico, ou o natural e o cultural. Esse é o fato central e fundamental, o ponto de partida de nossa pesquisa: diferenciar as duas linhas de desenvolvimento mental da criança que correspondem às duas linhas de desenvolvimento filogenético do comportamento. [...] Com isso, não queremos dizer que a ontogênese em qualquer forma ou grau repete ou reproduz a filogênese ou que é o seu paralelo. O que temos em mente é algo totalmente diferente e que apenas um pensamento preguiçoso poderia encarar como um retorno ao pensamento da lei biogenética (Vigotski, 2021a, p. 36).

Scribner (1985) cita como segundo ponto a ideia de que, para o recapitulacionismo, o mesmo processo deveria ocorrer no indivíduo e na espécie, no caso mais indireto, no indivíduo e na história. Desse modo, ao pensarmos no objeto do Cálculo, urge que analisemos novamente os elementos que indicam um paralelismo em Aleksandrov (1973). Dessa forma, percebemos que, mesmo nos primeiros minutos em que o estudante entra em contato com os conhecimentos do Cálculo, ele está em posição distinta daquela encontrada no processo histórico realizado pelos atores envolvidos na busca por soluções aos seus problemas. Isso porque o estudante, na melhor das hipóteses, já se apropriou do conceito de função em sua forma clássica, algo que, como mostramos, não segue os fatos históricos. Além disso, a lógica mais comum da organização da exposição dos conceitos do Cálculo, ancorada na sequência Cauchy-Weierstrass, segue, nessa ordem, os conceitos de limite e continuidade, derivada e integral, caminho oposto ao estabelecido no desenvolvimento histórico (Rezende, 2003). Há, entretanto, propostas para a organização do ensino que adotam uma ordem de elaboração e sistematização mais próxima ao modo como se desenvolveu no percurso histórico. Isso é possível constatar na abordagem genética presente em Toeplitz (2007), Burn (1999), Burn (2005) e no trabalho fundamentado na abordagem da Educação Matemática Realística de Trevisan e Mendes (2017). Essas abordagens olham para a história e buscam elementos para a organização dos cursos de Cálculo. Para tanto, selecionam-nos e os utilizam para organizar o modo de exposição de seu conceito, apesar de adotar terminologia e notação modernas. Mesmo com a organização didática que adota por base uma sequência histórica, a condição material e

simbólica da atividade desenvolvida é bastante distinta, o que impossibilita o estabelecimento de paralelismo.

É importante sublinhar as diferenças, pois possuem diversas implicações. Pode-se supor, por exemplo, que no estudo de determinado tema, o estudante deva perseguir ou realizar os mesmos processos percorridos pela humanidade ou desenvolver atividades idênticas às do cientista para responder a um determinado problema. Essa forma de paralelismo, contudo, não se sustenta, pois, ao estabelecerem-se essas possíveis similitudes, desconsideram-se as condições, o que põe a questão com base em parâmetros desalinhados. Majmutov (1983) contribui ao destacar que a aproximação, nos dois planos, no aspecto gnosiológico, refere-se, em essência, a um processo de aproximação do objeto e uma representação da realidade que se realiza dialeticamente, posta em movimento por contradições. As diferenças, não obstante, localizam-se nas vias distintas que percorrem esses processos. Podemos citar, como exemplo, que determinados conceitos são apropriados muito cedo pelas crianças contemporâneas enquanto, na humanidade, demoraram séculos para ser sistematizados.

É possível citar ainda outros elementos a serem contrastados, como a proposição do problema, os aspectos metodológicos, as condições gerais da atividade, e as finalidades atribuídas para cada uma dessas atividades. Referente ao problema, o cientista intenta solucionar uma contradição, em geral, que ainda não foi resolvida socialmente. Por sua vez, a criança em atividade de estudo se depara com algo que é contraditório apenas para ela ou para o coletivo de colegas de que faz parte. Isso revela outra diferença essencial: a das condições instrumentais, subjetivas e objetivas, inerentes aos dois planos, bem como as finalidades emergentes de necessidades distintas. É importante retomar a questão de que tanto em um quanto em outro caso, em última instância, o que está no horizonte é a reprodução do ser social, porém com vias e conteúdos distintos.

Algumas aproximações podem ser identificadas nessa análise comparativa. No que se refere aos métodos, especialmente a organização das tarefas, eles podem fornecer subsídios para que os estudantes realizem ações investigativas desencadeadas de situações contraditórias. Essas são oriundas de condições que fomentem a manipulação do objeto, a realização de conjecturas, o levantamento de hipóteses, e os guiem no movimento de apropriação dos conhecimentos que são o alvo. Diferentemente do cientista, que não pode recorrer a algum ser que se posicione diante do seu problema como algo resolvido, o estudante, por intermédio da tarefa a ser proposta pelo professor, parte do princípio da existência, no ambiente coletivo, de algum ser humano que possui condições de resolver a contradição posta na tarefa. Essa é uma

ideia importante que pode auxiliá-lo no alcance do seu objetivo. Davídov (1988, p. 174), de forma perspicaz, sintetiza esse conjunto de elementos do seguinte modo:

> Apesar de existir traços em comum entre o pensamento da criança e o pensamento dos cientistas, artistas, filósofos da moral e teóricos do direito, os dois não são idênticos. As crianças em idade escolar não criam conceitos, imagens, valores e normas de moralidade social, mas apropriam-se deles no processo da atividade de aprendizagem. Mas ao realizar esta atividade, as crianças executam ações mentais semelhantes àquelas pelas quais estes produtos da cultura espiritual foram historicamente construídos.[190]

Dessa formulação pode ser extraído, como implicações para o ensino, que a sua organização necessita ser objetivada de modo a colocar os estudantes em movimento de realização de ações condizentes com a forma pela qual esses objetos se tornaram significativos historicamente para a humanidade. Não se resume, portanto, à reprodução da necessidade histórica que possibilitou a sistematização de determinado conceito. A proposta davidoviana culmina em uma forma de organização do ensino por meio de tarefas que fornecem subsídios para se apropriar, em primeiro lugar, da abstração substancial, isto é, da base que fornece ao objeto sua unidade interna (Davídov, 1988). Essas tarefas podem ou não simular a emergência do objeto na história. Para tanto, ao professor, é necessária a apropriação do movimento ontológico-genético de constituição desse objeto, pois somente nele é que a identificação da abstração substancial se torna possível.

O terceiro ponto, segundo Scribner (1985), remete à existência, nas posições clássicas do paralelismo, da correspondência entre o conteúdo do comportamento da criança e o do adulto de épocas passadas. Segundo a autora, como em Vigotski o desenvolvimento ontogenético é influenciado pelo ambiente sociocultural particular, não há espaço para que essa determinação seja possível.

Por fim, em relação ao quarto ponto, a autora defende que a inexistência de uma periodização da cultura que corresponda àquela da ontogênese do estudante, nos estudos do pesquisador bielo-russo, desautorizaria uma leitura recapitulacionista de sua obra.

Nesse ponto, retomamos a questão: qual relação se estabelece entre a filogênese e a ontogênese e quais suas implicações para a organização do ensino? Leontiev (2004, p. 286) adiciona elementos ao debate ao escrever que, para “se apropriar dos objetos ou dos fenômenos

---

[190] “El pensamiento de los escolares, aunque tiene algunos rasgos comunes, no es idéntico al pensamiento de los científicos, artistas, teóricos de la moral y el derecho. Los escolares no crean conceptos, las imágenes, los valores y las normas de la moral social, sino que los asimilan en el proceso de la actividad de estudio. Pero en ese proceso los escolares realizan acciones mentales, adecuadas a aquellas por medio de las cuales se elaboraron históricamente estos productos de la cultura espiritual".

que são o produto do desenvolvimento histórico, é necessário desenvolver em relação a eles uma atividade que reproduza, pela sua forma, os traços essenciais da atividade encarnada, acumulada no objeto". Duarte (2013) comenta a referida passagem e considera que nem sempre a atividade a ser reproduzida será aquela de produção do objeto em referência, mas, em muitos casos, a de sua utilização.[191] Essa importante análise do autor levanta outra questão que pode se configurar como uma armadilha, para a qual, portanto, precisa ser chamada a atenção. A utilização não se resume à apropriação da simples funcionalidade do objeto – como pressupomos uma concordância por parte de Duarte (2013). Isso reduziria o processo de apropriação da realidade ao seu caráter instrumental, apesar de ser esse um dos seus momentos importantes. A problemática – em que a redução do processo de apropriação do objeto à sua utilização pode desaguar – é originada, em especial, na sociedade capitalista, em que na maior parte do tempo os objetos de conhecimento são valorados por critérios econômicos. Estes restringem seu conteúdo aos aspectos imediatos ou vinculados diretamente ao processo de valorização e reprodução do capital. Isso tem implicações para o ensino, ao se solidificar nas concepções dos professores a crença na utilização cotidiana e imediata dos conhecimentos matemáticos como critério estruturador dos modos de seleção e organização do ensino, como identificamos em Spacek (2012).[192] Em outras palavras, decorrente das contradições gestadas no modo de organização social, bem como de um insuprimível momento de materialização do significado social de um determinado produto da atividade humana, a sua apropriação pode ser resumida a uma forma de ação particular que expresse um significado restrito à sua mera utilidade mais imediata.

Consideremos, aqui, os casos dos objetos oriundos da esfera da educação escolar. Uma atividade que reproduza "os traços da atividade encarnada" no objeto requer a execução, pelo estudante, de ações pertinentes para a apropriação do conceito a que se refere. Para tanto, é preciso ações que estabeleçam uma relação do indivíduo com o significado social desse objeto. Portanto, que estejam vinculadas ao seu processo de formação com os modos possíveis de ação que ele permite realizar. Nos termos de Davídov (1988, p. 153), "o conceito constitui

---

[191] Com base nessa passagem, Duarte (2013) realiza crítica a uma ideia que defendeu em sua dissertação de mestrado (Duarte, 1987). O autor parte da distinção entre o conceito de etapas essenciais e de traços essenciais. Para o autor, enquanto as etapas essenciais da evolução histórica do conhecimento implicariam a reprodução, no processo de ensino, de fases essenciais na evolução histórica do conhecimento, a apropriação dos traços essenciais diz respeito à lógica do objeto sem que, necessariamente, esse processo se realize seguindo um caminho que reproduza a forma condensada do percurso histórico. Conforme o autor, isso pode ocorrer, mas se torna problemático quando é transformado em princípio didático generalizado.

[192] Não ultrapassaremos a franja da vaga alusão a esse ponto, pois não é objetivo deste trabalho realizar um aprofundamento da problemática da utilidade no ensino de matemática e na educação matemática. Para um debate introdutório acerca do tema, consultar Spacek e Candiotto (2021).

o procedimento e o meio da reprodução mental de qualquer objeto como sistema integral. Possuir o conceito sobre tal objeto significa dominar o procedimento geral de construção mental deste objeto"[193]. De tal modo, ressalva-se que a simples utilização do objeto, em caráter imediato, não garante a sua apropriação teórica. Para tal intento, é necessário concebê-lo como sistema integral sobre a base da sua relação essencial, que possibilita o processo de ascensão ao objeto em sua concretude, ou seja, como um constructo mental multifacético, isto é, concreto.

No contexto da educação escolar, em especial no ensino de Cálculo, o procedimento descrito pressupõe, ao professor, a elaboração de tarefas que se transformem em problemas[194] para os estudantes, de modo a possibilitar o seu contato com as práticas sociais históricas condensadas nesses conceitos. O elemento desencadeador do processo necessita emergir como uma contradição para o estudante, cuja solução requer um elemento mediador que expresse a abstração substancial.

Essas considerações são embasadas, na formulação de Davýdov [198-?], em duas premissas: uma ontológica e outra metodológica. Radford (2021b) expressa a premissa ontológica davidoviana ao considerar os objetos do conhecimento passíveis de serem desmembrados em relações e conexões – em nossa tese entendidos como *nexos conceituais*. Por sua vez, a premissa metodológica estabelece que a história, por um lado, e a forma atual da matemática, por outro, fornecem pistas para determinar essas relações.

Sobre esses termos, Davídov (1988) se posiciona ante a relação entre a filogênese e a ontogênese. Para o autor soviético, de forma geral, o processo de formação do indivíduo tem por princípio a relação que ele estabelece com uma realidade criada pelo ser humano, também composta por uma esfera ideal estreitamente ligada à cultura. Essa esfera, sintetizada na forma de padrões com o intuito de reprodução dos instrumentos e sua comunicação, contrapõe-se aos indivíduos como uma realidade objetiva peculiar. Por se tratar de formas da cultura, esses padrões são objetivações condensadas dos momentos necessários da história da atividade. Isso permite ao autor articular o desenvolvimento histórico com o ontogenético.

> Por isso o problema da história da consciência e de sua ontogênese está internamente ligado com o problema da formação histórica da cultura e de sua apropriação pelo indivíduo. A relação entre estes problemas aparece somente quando a cultura e o ideal

[193] "[…] el concepto constituye el procedimiento y el medio de la reproducción mental de cualquier objeto como sistema integral. Tener el concepto sobre tal objeto significa dominar el procedimiento de construcción mental del este objeto".

[194] A diferenciação entre tarefa e problema será mais bem abordada no próximo capítulo.

> se compreendem como a expressão lógica e universal da história da atividade consciente das pessoas[195] (Davídov, 1988, p. 64).

Dado que a realização de uma atividade pressupõe meios culturais, capacidades e atitudes estabelecidos e sistematizados como padrões históricos e sociais da forma de atividade ideal, é necessário, para a sua realização, a apropriação de tais características humanas pelos indivíduos.

> A apropriação pelo indivíduo das formas da cultura é, segundo nosso julgamento, o caminho já preparado do desenvolvimento de sua consciência. [...] o funcionamento dos meios da atividade como meios da cultura material e espiritual pressupõe as correspondentes capacidades e atitudes das pessoas e também o objeto ao qual estão dirigidas.
> Para a reprodução de ditos meios, capacidades e aptidões, é necessária, justamente, a esfera do ideal (ou da cultura) que leva em si os padrões historica e socialmente elaborados daqueles.
> Por isso, a criação e o funcionamento da cultura como fenômeno social específico visam ao desenvolvimento dos indivíduos humanos, os quais, ao se apropriarem de suas "riquezas", dominam os padrões ideias universais das capacidades e aptidões, indispensáveis para a produção das coisas reais[196] (Davídov, 1988, p. 65-66).

A relação entre o plano filogenético e ontogenético decorre, para Davídov (1988), portanto, do estabelecimento da cultura e do ideal como expressões lógicas e universais da história da atividade humana. A solução, levada a cabo por um processo de homogeneização lógica sustentada em abstrações razoáveis, é, em nossa interpretação, substancial para a correta captura da relação entre a filogênese e a ontogênese, bem como do fenômeno educativo em geral. Em outras palavras, interpretamos que a abordagem do problema por Davídov (1988) fundamentada em Ilienkov (2016a, 2016b) e Iliénkov (1977) decorre do próprio objeto, ou seja, é uma abordagem sobretudo ontológica. A postura adotada pelo autor permite aclarar aspectos relativos à natureza do objeto do conhecimento a ser apropriado – no caso do trabalho aqui desenvolvido, o objeto do Cálculo –, como também suas contribuições para o desenvolvimento

---

[195] "Por eso el problema de la historia de la conciencia y de su ontogénesis está internamente ligado con el problema de la formación histórica de la cultura y de su apropiación por el individuo. La relación entre estos problemas aparece sólo cuando la cultura y lo ideal se comprenden como la expresión lógica y universal de la historia de la actividad consciente de las personas".

[196] "La apropiación por el individuo de las formas de la cultura es, a nuestro juicio, la vía ya elaborada de desarrollo de su conciencia. […] el funcionamiento de los medios de la actividad como medios de la cultura material y espiritual presupone las correspondientes capacidades y aptitudes de las personas y también el objeto al cual están dirigidas. Para la reproducción de dichos medios, capacidades y aptitudes es necesaria, justamente, la esfera de lo ideal (o de la cultura) que lleva en sí los patrones histórica y socialmente elaborados de aquéllos. Por eso la creación y el funcionamiento de la cultura como fenómeno social específico apuntan al desarrollo de los individuos humanos, los que apropiándose de sus 'riquezas' dominan los patrones ideales universales de las capacidades y aptitudes, indispensables para la producción de las cosas reales".
É conveniente deixar claro para o leitor que interpretamos o ideal como uma realidade, posição que não seria objetada por Davidov apesar das palavras utilizadas no fim do excerto transcrito.

dos indivíduos. Isso se constitui em nossa base mobilizadora para a abordagem, na próxima seção, do objeto de ensino do Cálculo. Para tanto, nossa leitura ocorrerá no contexto da atividade coletiva de estudo escolar, fundamentados na categoria do ideal desenvolvida por Ilienkov (2016a, 2016b) e Iliénkov (1977) – e adotada por Davídov (1988) –,e nas categorias de saber e conhecimento de Radford (2013, 2019, 2021a).

5.2 O OBJETO DE ENSINO NO CONTEXTO DA ATIVIDADE COLETIVA DE ESTUDO ESCOLAR: UMA ANÁLISE ONTOLÓGICA DE SUA NATUREZA

A discussão realizada na seção anterior permite que minimamente possamos nos posicionar ante o emaranhado de determinações que são postas perante nós na abordagem do objeto de ensino do Cálculo. Na presente seção, abordaremos como esse objeto se manifesta no contexto da atividade, guiados pela análise ontológica da sua constituição. Isso possibilitará que, no próximo capítulo, ocupemo-nos de acompanhar o modo pelo qual as determinações que o compõem se manifestam nas pesquisas analisadas.

No caminho percorrido até este ponto, enfatizamos que o objeto de ensino somente pode ser pensado no contexto da atividade. Todavia, não enfrentamos essa temática, mas abordamo-la de modo tangencial, sem que perdêssemos de vista a ideia de totalidade. É oportuno, portanto, que os aspectos fundamentais dessa categoria sejam tratados para a correta apreensão da natureza de nosso objeto, a fim de formular um cenário teórico-analítico mais robusto.

Como ponto de partida, elegemos o conceito de objeto. Isso decorre da presunção ontológica que, de acordo com Chaiklin (2019), é central na acepção psicológica do conceito de atividade. Consideramos que nela há uma inextinguível conexão dinâmica entre indivíduo e o restante da realidade, cuja característica original é a de aquele sempre se apresentar engajado em uma ação relacionada a algum objeto, orientado por um motivo.

A relevância das formulações teóricas sobre a atividade, bem como a influência sobre o debate em tela, conduz-nos à abordagem da temática pelo prisma fornecido por Leontiev (2004, 2021), que acentua o papel do objeto para sua compreensão. Em Leontiev (2021, p. 123), a própria concretização do conceito geral de atividade tem em seu cerne o papel do objeto, como fica cristalino nas linhas a seguir:

> Tipos específicos e concretos da atividade podem ser distinguidos entre si por quaisquer traços: por sua forma, modo de realização, intensidade emocional, características espacial ou temporal, mecanismos fisiológicos etc. Contudo, a mais

> importante distinção entre uma e outra atividade consiste na diferença de seus objetos. De fato, justamente o objeto da atividade confere a ela certa orientação. Conforme a terminologia por mim proposta, o objeto da atividade é seu motivo efetivo. É claro que ele pode ser tanto material quanto ideal, dado na percepção ou existente apenas na imaginação, no pensamento. Importa que por trás dele sempre há a necessidade, que ele sempre responde a tal ou qual necessidade.

A centralidade do objeto na conceituação da atividade põe em relevo a interdependência entre ambos, uma vez que a presunção ontológica pode ser descrita, conforme Chaiklin (2019), como a unidade do par sujeito-objeto relacionada a um objetivo.

As formulações de Leontiev (2004, 2021) têm gerado, na esfera da academia, um debate sobre a natureza do conceito de objeto na tradição da Teoria da Atividade. O debate surge guiado pela premissa da carência de teorização desse conceito, decorrente de sua centralidade e natureza dinâmica. Isso implica, em muitos casos, a sua evolução e transformação na atividade (Bakhurst, 2023). Um dos pontos discutidos está atrelado às dificuldades de tradução do russo para diversas línguas, entre elas o português e o inglês, de dois termos distintos, *ob'iekt* (*объект*) e *predmet* (*предмет*), como *objeto*, em português, e *object*, em inglês (Bakhurst, 2023; Kaptelinin, 2005). De acordo com Bakhurst (2023), a primeira palavra – *ob'iekt* – é um termo utilizado com frequência para designar aquilo que se contrapõe ao sujeito, pura objetividade. Por sua vez, a segunda, *predmet*, aparece como um objeto conceitualizado, situado em um espaço de intenção e propósito. Dessa distinção inferem-se similaridades com aquela existente na língua alemã entre *Gegenstand* e *Objekt*.[197] Leontiev (1981, p. 49 *apud* Kaptelinin, 2005, p. 7) confere ao conceito de objeto (*predmet*), na fase inicial de formulação da Teoria da Atividade, o sentido do primeiro termo:

> De acordo com isso, limitarei o significado de "objeto". Normalmente, este conceito tem dois sentidos: no sentido mais amplo, é coisa relacionada com outras coisas, isto é, uma "coisa possuindo uma existência"; em um sentido mais específico, é algo que se opõe (do alemão *Gegenstand*), algo que resiste (do latim *objectum*), algo a que uma ação está direcionada (do russo *predmet*), isto é, algo que para o qual um ser vivo está de alguma forma relacionado, como um objeto da atividade dele ou dela, indiferentemente se esta atividade é externa ou interna (por exemplo, "objeto de nutrição", "objeto de trabalho", "objeto de contemplação", etc.). A partir daqui nós iremos empregar o termo *objeto* no sentido mais específico, especial.[198]

[197] Sobre esse tema, ver na nota 1.

[198] "Accordingly, I will limit the meaning of 'object.' Usually this concept has two meanings: in a broad sense, it is a thing related to other things, that is, a 'thing having an existence;' in a more narrow sense, it is something that opposes (German *Gegenstand*), something that resists (Latin *objectum*), something at which an action is directed (Russian *predmet*), that is, something to which a living creature is somehow related, as an object of his or her activity, no matter if this activity is an external one or an internal one (for example, 'the object of eating,' 'the object of labor,' 'the object of contemplation,' etc.). From now on the term 'object' will be used in this more narrow, special meaning".

É válido supor, com base nessas linhas, que o psicólogo soviético se utiliza de uma distinção do significado desses dois termos. Kaptelinin (2005), porém, chama a atenção que Leontiev, nesse trabalho, não contrasta *ob'iekt* com *predmet*. Utiliza-os com o mesmo sentido para se referir à ideia de uma condição especial adquirida por entes quando eles estão envolvidos nas relações estabelecidas entre as criaturas vivas e o restante do mundo. Segundo o autor, essa distinção apareceria de modo mais refinado em *atividade. consciência. personalidade*, nas quais as duas palavras possuem sentido distintos e específicos no contexto teórico elaborado. Nessa obra, segundo Kaptelinin (2005), o psicólogo soviético utiliza *ob'iekt* para se referir à realidade material em geral, que denota um polo da relação sujeito-objeto pela qual a transformação mútua dos dois polos é definida. O emprego do termo *predmet* continuou a ser usado no sentido definido anteriormente, como algo ao qual o sujeito direciona a sua ação. Bakhurst (2023) comenta que essa distinção não auxilia muito no entendimento do conceito, particularmente quando lidamos com a língua inglesa – o que podemos também estender à língua portuguesa. *Object*, na língua inglesa, pode ser interpretado como "propósito" ou "alvo" da atividade, isto é, responde à seguinte pergunta: "O que você está fazendo?" Ou ainda, de outra maneira, como aquilo que o sujeito está transformando, aquilo a que o sujeito direciona sua ação. Para o autor (2023), mesmo que *predmet* possa se referir a esse último significado, ater-se à tarefa de encontrá-lo nem sempre é aconselhável e, em alguns casos, inclusive, não possui significado concreto.

Utilizamos, na presente pesquisa, o significado de objeto da atividade como aquilo para o qual o sujeito dirige sua ação, que é composto pelos elementos e relações sobre os quais ele age e transforma. No âmbito da educação, especificamente no ensino do Cálculo, valoramos que essa delimitação é uma necessidade para apreender corretamente o fenômeno da apropriação, no campo do ensino. O objeto se constitui como motivo na atividade do sujeito, que responde a determinadas necessidades. Vale sublinhar que necessidade, motivo e objeto, nas atividades humanas, são elementos compostos essencialmente de aspectos socioculturais. Nesse âmbito, possuem significado determinado que adquire sentido quando apropriado pelo indivíduo. Dessa maneira, apesar de, em última instância, os indivíduos realizarem as atividades como ações da coletividade ou como atividades individuais, elas serão sempre sociais. Leontiev (2021, p. 105) explicita essa posição ao criticar as concepções positivistas que contrapunham indivíduo e sociedade. Segundo o autor, nessas visões

> [...] perde-se o principal, isto é, o fato de que a pessoa encontra na sociedade não apenas condições exteriores em relações às quais ela precisa ajustar sua atividade, mas que essas condições sociais carregam os motivos e objetivos de sua atividade, seus

> meios e modos; em resumo: a sociedade produz a atividade dos indivíduos que a formam.

Essas condições são os processos e produtos da atividade humana, objetivados e incorporados na realidade. Tal fenômeno fornece à realidade novos elementos, formas que não se resumem à materialidade em-si mas, segundo Ilienkov (2016a, 2016b) e Iliénkov (1977), compõem a esfera da *idealidade* ou do *ideal*. Como temos defendido, a apropriação correta dessa categoria auxilia a lançar luz sobre a natureza dos objetos matemáticos, em especial dos objetos do Cálculo e do modo de sua manifestação na forma de objetos de ensino, o que justifica a sua abordagem nesta parte da exposição.

O primeiro ponto a ser destacado é a centralidade da atividade no quadro conceitual elaborado por Ilienkov (2016a, 2016b) e Iliénkov (1977). Essa categoria é o modo pelo qual o ser humano introduz na realidade o ideal pela objetivação e incorporação de elementos que não estão presentes nela. Isto significa que o existente passa a ser reorganizado e adquire uma nova forma, reificada, inexistente até então. Nesse sentido, para Lukács (2013), o ser humano combina as leis da natureza, existentes como possibilidade, o que produz uma nova realidade. Contudo, até mesmo elementos os quais não estão ao alcance de influência significativa do agir humano são idealizados como formas constitutivas da atividade; por decorrência, convertem-se no "corpo inorgânico" do ser humano. As estrelas, por exemplo, passam a ser objeto de atenção e contemplação somente quando se tornam um meio de orientação do ser humano no tempo e no espaço. Ou seja, exercem a função de relógios, calendários e bússolas naturais, isto é, instrumentos que possuem função específica no contexto do ser social. Com essa incorporação, as propriedades e regularidades "naturais" do próprio objeto "natural" são apropriadas como "propriedades e regularidades do material no qual a sua atividade está sendo desempenhada, devendo, portanto, considerá-las como partes componentes completamente objetivas (de forma alguma dependentes de sua vontade e de sua consciência) da sua atividade" (Ilienkov, 2016a, p. 220-221).

A pressuposição da apropriação das características dos elementos essenciais envolvidos na realidade é condição *sine qua non* para a reprodução do ser social, conforme abordamos no segundo capítulo da presente pesquisa. Acrescenta-se que, conforme Ilienkov (2016a, 2016b) e Iliénkov (1977), por meio desse processo o ser humano, além de conhecer os objetos em um processo de contínua aproximação a seu ser-assim, significa-os, ao imprimir-lhes forma e relações novas que representam também o seu papel nas práticas sociais. A realidade material é idealizada, recebe significado na medida em que representa, além de suas propriedades em si, outras, inseridas pelo ser humano que as incorpora em sua atividade.

Entretanto, isso não significa, de forma alguma, uma redução do ser-assim do objeto à sua funcionalidade em atividades específicas, o que impediria a apropriação da essência do objeto. Desse modo, o céu estrelado não é uma bússola, mas pode representar esse instrumento, quando o indivíduo, ao se deparar com ele, reconheça uma função especificamente estabelecida pelas relações sociais, o que constitui um de seus significados no âmbito da prática social. A possibilidade desse processo emerge, todavia, de determinadas propriedades particulares do céu estrelado, as quais podem exercer a função de guia para o ser humano que, por consequência, as incorpora à atividade humana. Nesses termos, Ilienkov (2016a, p. 193-194) considera a idealidade como

> [...] um tipo de carimbo impresso na substância da natureza pela atividade vital humana e social, uma forma de funcionamento da coisa física no processo dessa atividade. Assim, todas as coisas envolvidas no processo social adquirem uma nova "forma de existência", que não está incluída em suas naturezas físicas e difere delas completamente – sua forma ideal.

A forma ideal de um objeto é mais evidente nos produtos da atividade transformadora do ser humano, nos artefatos (Bakhurst, 1991). Neles, estão encarnadas as propriedades da atividade humana, o que lhes confere um significado social. Há, portanto, uma relação entre o produto e função do objeto na atividade. Iliénkov (1977), porém, grifa que a definição do ideal como forma de atividade é unilateral, pois sintetiza somente o seu conteúdo condicionado objetivamente. Para o filósofo soviético, a identificação da referida categoria na materialidade movente da realidade é possível apenas quando, na forma da atividade que corresponde à forma externa do objeto, ocorre a sua conversão em objeto particular representativo, pelo qual o ser humano pode atuar sem a transformação do objeto real. Portanto, é

> [...] "ideal" porque não inclui um único átomo de substância do corpo no qual está representado, porque é a forma de um corpo bastante diferente. E esse corpo está presente, aqui, não corporalmente-substancialmente (ele se encontra "corpóreo" em um ponto no espaço bastante diferente), mas, de novo, somente de uma maneira "ideal", e não existe um único átomo da sua substância (Ilienkov, 2016a, p. 198).

O significado de um produto da atividade transformadora do ser humano é composto, no contexto das relações sociais, pela representação de algo que não apresenta traços comuns à sua natureza física, mas que, concomitantemente, é impossível senão em unidade com ela. No caso específico dos artefatos, como ideal encarnado no material, esse significado possui,

inclusive, um aspecto determinante sem o qual eles próprios não existiriam, isto é, suas funções nas relações sociais.

A apropriação, pelo indivíduo, da imagem ideal da atividade incorporada nos produtos humanos por meio de seus significados contribui na formação de sentidos que compõem o modo pelo qual ele se relaciona com o mundo. A apropriação da "cultura espiritual", como temos defendido, é imprescindível para sua humanização. Conforme já sublinhamos na seção anterior, essa "cultura espiritual" confronta o indivíduo como aspecto ideal da realidade materializado no mover da realidade, em especial, na forma de "*estrutura total de exigências normativas sobre a sua atividade*"[199] (Bakhurst, 1991, p. 188). Desse modo, a cultura também se expressa como um corpo de regras e modos de ser e estar no mundo, que são anteriores e contrapostas constantemente ao indivíduo.

> A criança que acabou de nascer é confrontada – fora de si mesma – não somente pelo mundo externo, mas também por um sistema bastante complexo de cultura, que exige dela "modos de comportamento" que não estão "codificados" geneticamente (morfologicamente) em seu corpo e não aparecem para ela de jeito nenhum. Aqui, a questão não é ajustar padrões de comportamento, mas **assimilar modos de atividade vital** que não carregam qualquer relação com as formas de reação biologicamente necessárias de seu organismo, com relação a coisas e a situações (Ilienkov, 2016a, p. 210-211, grifo nosso).

Todo esse aparato implica a objetividade da existência do ideal e a total impossibilidade de sua redução a um aspecto mental ou subjetivo. Iliénkov (1977) põe esse determinante em relevo ao afirmar que a imagem ideal de um objeto não está presente em sua consciência em todos os momentos, mas apenas em situações específicas. Socialmente, a situação é inversa, pois a reprodução social tem como necessidade a existência das formas de atividade objetivadas na cultura, isto é, na forma de imagens ideais. Perante o indivíduo, tais fenômenos sociais se apresentam em composições estruturais rígidas e opostas a si. Mas, em certos casos, são interpretadas como manifestações de vontade divina ou de designações teleológicas supra-históricas. Nesse contexto, o produto da humanidade se volta contra os seus representantes singulares como uma força estranha condensada, isto é, como relações e objetos estáticos obliteradores das suas conexões com a prática do ser humano. A matemática é um campo fértil para esse tipo de mistificação e tem, na *entificação* das relações que a constituem, uma das principais maneiras de eclipsar as formas de atividades humanas que as geram (Prado Júnior, 1963).

---

[199] "[…] *total structure of normative demands on his or her activity*".

Nesse quadro, o ideal, conforme Ilienkov (2016a, 2016b) e Iliénkov (1977), é objetividade caracterizada por sua dependência existencial da sociedade e do gênero humano, ao mesmo tempo, pela sua independência existencial do indivíduo. A existência objetiva da categoria em tela depende de seres humanos vivos, que realizam sistematicamente suas atividades e reproduzem continuamente a esfera do ser social, portanto, não se resume à atividade e consciência individual. Em outras palavras, a objetividade da categoria em discussão não é oriunda de uma soma de atividades singulares, mas da totalidade que forma a prática social global. Essa diferença não se resume a uma simples substituição de expressões conceituais, mas trata-se de uma concepção que atribui historicidade e unicidade à esfera do ser social. Nessa direção, Ilienkov (2016b, p. 114) considera que "a consciência social não é simplesmente a consciência singular repetida muitas vezes [...], mas é, na verdade, um sistema historicamente formado e historicamente desenvolvido das 'noções objetivas', formas e padrões do 'espírito objetivo', da 'razão coletiva' da *humanidade* [...]".

Nesse ponto, emergem duas questões. A primeira é relativa à definição de universal em Ilienkov (2016c), pois ela auxilia na composição de um quadro conceitual que sustenta a apropriação da categoria do ideal, pois ela tem sua objetividade caracterizada com base na universalidade. A segunda, impactada pela primeira, diz respeito ao modo pelo qual o autor concebe o conceito de objetividade.

Destacamos, em relação à primeira questão, que Ilienkov (2016c) contrapõe o universal à identificação de um traço "comum", originado de um processo de abstração, a todos os indivíduos de uma classe ou grupo. A natureza do universal, para Ilienkov (2016c), não obstante, só é compreendida pela apreensão de um determinado objeto como totalidade em autodesenvolvimento, formada por componentes inter-relacionados com certa coesão. O universal é a unidade genética que confere ao complexo o seu caráter unitário, uma lei ou princípio coordenados das inter-relações dos particulares em uma totalidade. Em outras palavras, é "aquela relação objetiva entre dois (ou mais) sujeitos particulares que os transforma nos momentos da mesma unidade concreta, real [...]" (Ilienkov, 2016c, p. 86). Essa caracterização do universal fornece ao ideal elementos indicadores de sua universalidade, sua forma de ser como atividade geral incorporada em um objeto. Isso porque, como parte da cultura, não é resumido a aspectos ou atividades singulares, mas se refere a formas de conduta e modos de realização de atividades em geral.

No que diz respeito à abordagem do segundo ponto, o critério de objetividade, é mister principiar pela distinção entre o material e o ideal. Conforme Ilienkov (2016b), torna-se infrutífero conceber uma linha divisória entre essas duas formas do ser, de modo a identificar o

primeiro com a esfera da realidade – encontrada fora da consciência do sujeito – e o segundo com o que se apresenta nela. O posicionamento das categorias dessa maneira, presente em muitas filosofias metafísicas, deságua na definição de objetividade com base no critério de existência e independência de qualquer sujeito, pois o objetivo é identificado com o material. A resolução metodológica da questão – encontrada por Ilienkov (2016a, 2016b) – ancora-se na alusão à objetividade como esfera da realidade que existe em independência, em última instância, do sujeito singular, mas não da humanidade em sua totalidade. A objetividade do ideal é garantida, segundo o autor, pois o ser humano introduz na realidade novas propriedades, as quais adquirem existência independente dos indivíduos singulares que as produziram. Por consequência, essa nova realidade só faz sentido se considerada como traço constitutivo da esfera do ser social.

> Assim, não se pode falar da "idealidade" onde não existem pessoas produzindo e reproduzindo socialmente as suas vidas materiais, ou seja, sujeitos desempenhando um trabalho coletivo (e, portanto, possuindo, necessariamente, consciência e vontade). Mas isso não significa que a "idealidade das coisas" seja um produto da vontade consciente dos sujeitos, um produto "imanente à consciência" e existente somente nela. Muito pelo contrário, a consciência e a vontade dos sujeitos agem como funções da idealidade das coisas, como realizações da idealidade das coisas (Ilienkov, 2016a, p. 194).

A caracterização do agir com base nos modos e formas de atividade encarnadas na esfera da idealidade remete-nos novamente à questão da necessidade de apropriação dessas formas pelo indivíduo para sua reprodução como indivíduo humano. A possibilidade da apropriação só ocorre por intermédio de relações entre indivíduos, mas não de forma direta. Segundo Iliénkov (1977, p. 311), não existe a possibilidade de transmissão entre as pessoas do ideal como tal, isto é, "forma pura de atividade"[200]. Essa apropriação, na forma de atividade subjetiva, somente é viável na ação com o seu produto, na forma de "descoisificação ativa"[201] (Iliénkov, 1977, p. 311). O referido processo perpassa a vida do indivíduo humano em todas as instâncias, pois ele é confrontado, a todo instante, com uma realidade humanizada, em que as relações e artefatos carregam, além da sua forma material determinada por seu corpo "físico", sua forma ideal representada pelo seu significado social. Este e seu objeto se contrapõem ao indivíduo estaticamente, de forma que sua apropriação exige a realização de uma atividade adequada. Só assim os elementos vinculados a ele aparecem, para o sujeito, como processo e

[200] "[...] forma pura de actividad".
[201] "[…] descoisificación activa".

forma geral de atividade que, em última instância, é entendida como uma condensação da prática social, de suas relações.

Importa destacar que, para Iliénkov (1977), o ideal – entendido como nada "mais do que o material transposto para a cabeça do ser humano e por ela interpretado" (Marx, 1984, p. 16) – só é "transposto" para a "cabeça do ser humano", e nunca apenas ao cérebro, órgão do indivíduo, quando expresso em formas idiomáticas aceitas, no sentido amplo da palavra, bem como por sua transformação na forma da atividade do homem com um objeto real. Ou seja, "o objeto é idealizado unicamente onde tem sido criada a capacidade de reconstruir ativamente, apoiando-se na linguagem das palavras e dos planos, onde tem sido criada a capacidade de transformar a palavra em prática e, através da prática, em coisa"[202] (Iliénkov, 1977, p. 290-291). Como desdobramento, o filósofo considera necessária a inclusão, na definição de um objeto, de um modo de sua construção no espaço real. Assim, para Iliénkov (1977, p. 292), o "ideal existe onde há a capacidade de reconstruir o objeto no espaço, apoiando-se na palavra, na linguagem, em combinação com a necessidade do objeto, mais suporte material para o ato de criação"[203].

O cenário teórico-categorial introduzido em nossa jornada expositiva fornece condições suficientes para considerar que os objetos matemáticos não são "descobertos" pelo ser humano na natureza ou "construídos" nas mentes dos sujeitos. Em vez disso, constituem "*labor cristalizado* que as novas gerações encontram e interpretam de novos modos e modificam ou expandem como, por sua vez, eles venham a refletir e agir nas sociedades e culturas socialmente mutáveis de seu tempo"[204] (Radford, 2014, p. 142). No contexto da discussão aqui realizada, a relação dialética entre o ideal – isto é, representação de uma atividade social e a sua forma de apropriação pelo indivíduo – pode ser consubstanciada com a dialética entre *saber* e o *conhecimento*, estabelecida por Radford (2013, 2014, 2021a), que engendra condições para melhor delinear a natureza do objeto de ensino do Cálculo. Para o autor, o saber é um ente geral, "uma *forma ideal* de ações, em oposição às próprias ações" (Radford, 2021a, p. 70). Desse modo, é *potencialidade*, *capacidade* em relação direta com cada uma de suas instâncias, apesar de ser irredutível a elas. É um produto histórico da humanidade existente como *potencialidade* não materializada, ou seja, uma capacidade de realizar algo que

---

[202] "[…] el objeto resulta idealizado únicamente allí donde ha sido creada la capacidad de reconstruirlo activamente, apoyándose en el lenguaje de las palabras y de los planos, donde ha sido creada la capacidad de transformar la palabra en práctica, y, a través de la práctica, en cosa".
[203] "Lo ideal existe allí donde hay capacidad de reconstruir el objeto en el espacio, apoyándose en la palabra, en la lengua, en combinación con la necesidad del objeto, más la base material del acto de la creación".
[204] "[…] *crystalized labour* that new generations find and interpret in new ways and modify or expand as, in turn, they come to reflect and act in the always changing societies and cultures of their time".

ainda não se *atualizou*[205]. Dessa maneira, o saber é "*um sistema de arquétipos de pensamento, ação e reflexão constituído histórica e culturalmente a partir de um labor coletivo material, corporificado e sensível*" (Radford, 2021a, p. 66). Isso permite, ao autor, considerar os objetos matemáticos atividades sociais, incorporadas na prática social como modos e formas potenciais de ações (Radford, 2014). Nesses termos, o saber é "constituído por formas culturalmente e historicamente codificadas de reflexão e ação que, ao invés de prestar-se à representação, são fontes de ação"[206] (Radford, 2014, p. 139).

A potencialidade determina o campo daquilo que pode vir-a-ser existente. Para que ela se transforme de potencialidade em existência, é necessário um movimento que a torne *atual*. Esse movimento ocorre na atividade que atualiza o saber, que se transforma, segundo Radford (2021a), em *conhecimento*[207]. Em outras palavras, entre o saber – potencialidade – e o conhecimento – corporificação do saber – está a atividade. Esse é o modo de materialização do conhecimento, aquilo que imprime a marca com sua forma e, ao mesmo tempo, demarca o modo pelo qual o saber se constitui em conhecimento. Em outras palavras, a forma pela qual "o saber adquire seu conteúdo depende da atividade que o coloca em movimento" (Radford, 2021a, p. 82). Como desdobramento, é possível considerar que, como o conhecimento é o conteúdo concreto e conceitual do saber, o "conhecimento matemático é o conteúdo teórico do saber matemático" (Radford, 2021a, p. 82).

Radford (2021a) defende que a atualização do saber não é possível em sua totalidade, logo, o conhecimento não se constitui na completude do saber. Concomitantemente, apresenta certo excesso, derivado do seu caráter sensível e material. Assim, "ao encarnar o saber, o conhecimento *confirma* e *afirma* o saber, ao mesmo tempo em que, como excesso, o nega. O princípio dialético do saber e do conhecimento não é um princípio de identidade: é um princípio de *diferença*" (Radford, 2021a, p. 83). O excesso do conhecimento, que extrapola as possibilidades do saber, passa a ser aperfeiçoado e encaminha novos modos de realização para além do que está dado.

Entendemos que a interpretação de Radford (2014, 2021a), apesar de suas especificidades, ancora-se na categoria do ideal, elaborada por Ilienkov (2016a, 2016b) e

---

[205] Potencialidade (δυναμις - *dynamis*) é entendida no sentido dado por Aristóteles (2012), como capacidade de realizar algo. Essa capacidade se materializa, torna-se ato (*ενεργεια – energeia*); nas palavras de Radford (2021a, p. 67), atualiza-se à medida que deixa de ser apenas potência e se transforma em ato.

[206] "It is constituted of culturally and historically encoded forms of reflection and action that, instead of lending themselves to representation, are sources for action".

[207] Para Radford (2021a, p. 78), o conhecimento "é o conteúdo conceitual concreto por meio do qual o saber é corporificado, ou materializado, ou atualizado".

Iliénkov (1977). Desse modo, é-nos permitida a interpretação dos objetos matemáticos como formas ideais de ação e reflexão potenciais atualizadas/materializadas na atividade concreta do indivíduo. Nesses termos, esses objetos, na forma de conceitos, consentem-nos "fazer coisas e pensar sobre elas de certas maneiras"[208] (Radford, 2019, p. 3069). Como tal, possuem também caráter ideal[209], pois representam uma forma de atividade diferente do modo pelo qual ele é apresentado, isto é, relações que refletem aquelas estabelecidas entre pessoas e objetos (Roth, 2020)[210]. Nesses termos, temos defendido que o significado disseminado atualmente do conceito de integral de uma função encarna a possibilidade de realização da ação de reflexão sobre o processo de acumulação da relação de variação de grandezas interdependentes, enquanto o de derivada de uma função fornece a possibilidade de realizar a ação de investigação da relação de variação entre as grandezas variáveis interdependentes.

Em síntese, interpretamos os objetos matemáticos caracterizados pelas formas ideais da atividade humana, da prática social, condensados e representativos do saber que lhes é próprio. Além do mais, em sua atualização, adquirem, além de caráter ideal, caráter sensível e material, adotados como meios de atuação e interpretação matemática da realidade pelos indivíduos. Essa capacidade de agir, contudo, só é possível por decorrência de a atividade matemática ser oriunda de um processo de reflexo da realidade, cujo objeto é constituído de "puras relações espaciais e puras relações quantitativas" (Lukács, 2012, p. 66). Além disso, permite, aos indivíduos, compreender e realizar escolhas entre alternativas postas pelas condições em que vive. Assim, sua apropriação, amplia as possibilidades de compreensão da realidade e tomadas de decisão diante dela. Porém, por decorrência da homogeneização dessa forma de reflexo da realidade, o conhecimento matemático possui limitações que podem

---

[208] "A concept enables us to *do* things and to *think* about them in certain ways".
Cabe aqui destacar que o conceito, na teoria da objetivação, é de ordem subjetiva, enquanto o saber e o conhecimento são entidades de ordem histórico-cultural. Conforme o autor (2021a, p. 144), um "conceito é a versão subjetiva do saber cultural. É a *refração* do saber na consciência do indivíduo através das formas de saber sensivelmente desenvolvidas que aparecem na atividade". Para aprofundamento dessa questão, consultar Radford (2021a, 2021b). Para uma diferenciação explícita, realizada pelo autor, do conceito de conceito na teoria da objetivação e na obra de Davidov, consultar Radford (2021b).

[209] Nas palavras de Ilienkov (2016a, p. 205), "esse conceito [ideal] engloba todos os objetos {significantes} do pensamento matemático {: estruturas topológicas, números imaginários tais como a raiz quadrada de menos um, regularidades descobertas em números naturais, e assim por diante. Resumindo, tudo que a matemática atual estuda}".

[210] Importa sinalizar ao leitor que o artigo citado é uma crítica dirigida à teoria da objetivação, especialmente no que se refere ao conceito de mediação. Entendemos que aqui não é o lugar para a exposição dos pontos colocados em debate, nem da pertinência ou não da referida crítica. O leitor pode encontrar em Radford (2021a) uma resposta à crítica mencionada. No que diz respeito à nossa temática, convém sinalizar que não consideramos como problemática a incorporação da compreensão do ideal como relações que refletem relações entre pessoas e objetos à teoria da objetivação, uma vez que, em Radford (2021a, p. 89), encontramos a defesa do saber matemático como algo "que é ao mesmo tempo ideal, sensorial e material".

incorrer no erro da generalização imprópria, bastante evidente no exemplo de Bertrand Russell. Este, segundo Mészáros (2009), defendia um ataque preventivo contra a União das Repúblicas Socialistas Soviéticas (URSS) enquanto não havia o risco desse ato ter como consequência a autodestruição.[211] Infelizmente, esse tipo de raciocínio, que no nível da consciência formal faz sentido – "antes milhões de mortos que toda a humanidade" –, foi reavivado no período pandêmico ao arrastar para o plano formal problemas substanciais. Conforme Mészáros (2009, p. 31),

> [...] o que não é levado em consideração em tais recomendações é a monstruosidade dos próprios *pressupostos materiais* que estão sendo admitidos como irrefutáveis – isto é, a *aceitabilidade* da destruição de centenas de milhões de seres humanos, como se isso fosse uma calamidade natural inevitável, em lugar de nos concentrarmos em como *eliminar as causas* do desastre que entrevemos –, mas que permanecem ocultos atrás da fachada da proporcionalidade formal "eminentemente sensível". Na verdade, porém, qualquer sistema de pensamento que possa afastar-se, no decurso de suas deduções formais elaboradas, de seus próprios pressupostos materiais – necessários, embora não explícitos –, ou que alegue ser capaz de transferi-los para uma "esfera das emoções" separada, só pode conduzir à total arbitrariedade em questões de tamanha importância – literalmente, de importância vital.

Nesse contexto, estrutura-se a defesa em prol da análise ontológico-genética do conhecimento matemático e o ensino direcionado para a formação do pensamento teórico, sustentado por suas relações essenciais, com vistas à compreensão das potencialidades e limitações do próprio conhecimento. Porém, de modo que problemas de "importância vital" não sejam reduzidos a "problemas formais". Tais aspectos são determinações do objeto de ensino, o que nos mobiliza a direcionar nossas atenções para ele.

Conforme pontuamos, a necessidade da atuação do indivíduo em uma realidade humanizada que lhe antecede, impulsiona-o em direção à apropriação de aspectos possibilitadores da sua contínua reprodução como indivíduo. No outro polo, torna-se imprescindível a reprodução, nos indivíduos, das capacidades necessárias para a realização das atividades essenciais com vistas à ininterrupta reprodução da sociedade. Nesse processo, tanto a sociedade se reproduz quanto o indivíduo passa a se constituir como individualidade. Tal aspecto é, para Lukács (2013, p. 422), fundamental do ser social, pois

> por um lado, a totalidade da sociedade, em seu processo histórico de reprodução, e, por outro lado, o homem que se desenvolve nela da mera singularidade para a individualidade constituem os dois polos, cuja inter-relação expressa a característica essencial desse complexo do ser, tornando visível, exatamente nela, a essência não mais muda do gênero humano.

[211] Segundo Mészáros (2009), o filósofo se arrependeria posteriormente, condenando esse seu posicionamento.

Com base nessas palavras, segundo Costa (2012), é possível considerar que o autor magiar entende o processo de desenvolvimento da humanidade em um duplo sentido: da reprodução histórica e da transformação da pura singularidade em individualidade – ou, nos termos utilizados no presente capítulo, no sentido da filogênese e da ontogênese –, o que constitui sua essência humano-genérica.

Essa relação dialética, com o desenvolvimento e a complexificação do ser social, impulsiona a criação de estruturas específicas, as quais se tornam o lócus privilegiado para a realização de atividades voltadas, em última instância, à reprodução social, por meio da reprodução nos indivíduos das características humanas historicamente elaboradas. Nesse cenário, são desenvolvidas atividades específicas para tal fim, no âmbito da educação escolar.

Nessa esfera, a atividade desenvolvida no espaço e tempo estabelecidos pela aula – entendida como momento de objetivação de camadas estruturais da prática social oriundas da necessidade de reprodução social – é, em geral, realizada por estudantes e professores, mas possibilitada por diversos outros indivíduos, estruturas e instituições. Não cabe aqui a análise sobre os diferentes determinantes condicionadores de tal atividade. Vamos nos ater apenas àqueles diretamente relacionados ao nosso objeto, isto é, ao objeto de ensino de Cálculo. Isso porque ele só faz sentido na atividade desenvolvida na unidade formada pelas relações anteriormente mencionadas. Em decorrência, pressupõe a compreensão dos sujeitos caracterizados por serem indivíduos concretos, em condições de desempenhar papéis distintos com determinadas funções estabelecidas e normatizadas pelas relações sociais.

Nesses termos, o objeto de ensino de Cálculo é compreendido como um ente ideal, existente na unidade em movimento da atividade como objeto que, em sua proposição, estabelece-se por meio da atividade conjunta do professor e do estudante, condicionado pelo currículo e pelas pressões sociais, histórica e culturalmente formadas que o moldam. Vale citar a interpretação de Iliénkov (1977, p. 287) sobre a dialética entre produção e consumo segundo a qual, na forma de "capacidade ativa do ser humano, como agente da produção social, o objeto, na qualidade de produto da produção, existe idealmente, isto é, como imagem interior, como necessidade, como motivo e fim da atividade humana". Ao estender essa interpretação para o contexto da atividade coletiva de estudo escolar, torna-se viável considerar a existência do objeto de ensino como: "capacidade ativa" que "existe idealmente", "imagem interior, como necessidade, como motivo e fim da atividade humana". Nesse caso, a atividade coletiva de estudo escolar.

Como destacado, esse objeto existe, inicialmente, no conjunto das relações estabelecidas e postas em movimento numa conjuntura estruturada da comunidade escolar e, mais especificamente, no coletivo formado pelos sujeitos que compartilham o tempo e o espaço da aula. Tais relações, como totalidade constitutiva e constituinte da realidade, são formadas por relações específicas, algumas internas e outras externas. Conforme Bhaskar (1998, p. 222), "uma relação R_{AB} pode ser definida como *interna* se e somente se A não fosse aquilo que *essencialmente* é a menos que B seja relacionado a A do modo que é. R_{AB} é simetricamente interna se o mesmo se aplicar também a B"[212]. Dentre as relações constitutivas do fenômeno do ensino escolar, podemos citar a relação professor-aluno, simetricamente interna, e a relação professor-Estado, assimetricamente interna. Enquanto a primeira fornece elementos para considerarmos a unidade formada pela relação entre os sujeitos, a segunda nos permite apropriar o papel social desempenhado pelo professor, atribuído pela sociedade e legitimado pelo Estado, o que pressupõe características que o tornam indispensável naquele contexto. Essas relações, assim como muitas outras, são constitutivas do ensino escolar e não podem ser desconsideradas na abordagem do fenômeno analisado.

Nesse sentido, em uma aula na qual o objeto, por exemplo, são as formas de ação oriundas da apropriação dos conhecimentos relativos ao Cálculo, é possível entender que, decorrente das exigências sociais para exercer a função de professor, este já esteja familiarizado com os conceitos e práticas sociais histórica e socialmente estabelecidos e valorados que compõem o corpo organizado de conhecimentos condensado no currículo escolar. Além disso, não basta apenas o domínio de tais conhecimentos e práticas sociais, é necessário também que elabore e/ou proponha tarefas para que os estudantes realizem ações adequadas a essa prática no intuito de se apropriar do objeto e motivo da atividade sintetizada em tais conceitos. Ao se apropriar do motivo e objeto da atividade, é possível que o estudante adquira autonomia para agir em situações que necessitem de tais práticas. O professor, como sujeito de uma atividade colaborativa com o estudante, passa a ser um elemento constitutivo da totalidade que torna realidade o conhecimento na relação vivenciada pelo conjunto de sujeitos. Desse modo, na atividade conjunta, o objeto e o motivo da atividade são apropriados pelos estudantes como algo que, desde o início, apresenta-se como relação social.

Analisando com base em outros aspectos, nesse coletivo de sujeitos com papéis e funções sociais distintas, o objeto, inicialmente, apresenta-se para o professor como sendo o de

---

[212] "A relation R_{AB} may be defined as *internal* if and only if A would not be what it *essentially* is unless B is related to it in the way that it is. R_{AB} is *symmetrically internal* if the same applies also to B".

sua atividade profissional. Esta, por sua vez, é estabelecida pelo processo de reprodução que adquire características definidas na sociedade capitalista. Alicerçados em Leontiev (2004), é possível considerar a existência de motivos conflitantes, coexistentes na atividade do professor e que estão relacionados às hierarquias estabelecidas por sua personalidade. Além disso, essa forma de organização da reprodução social impõe condições, indicadores das possibilidades do desenvolvimento da referida atividade. Tal cenário é um dos determinantes para a constituição do objeto de ensino do Cálculo, pois a própria sociabilidade capitalista exerce influências para que os indivíduos se apropriem dos elementos necessários à reprodução do capital, seja na forma de produtores de mercadorias ou de consumidores. A pressão exercida pela sociedade sobre a educação escolar pode moldar a constituição do currículo e, por consequência, as finalidades de ensino que visam à simples reprodução dessa forma de organização social.[213] Nesse contexto, o professor realiza escolhas, entre as alternativas postas, para a proposição e direção da atividade coletiva de estudo escolar que, por sua vez, delineiam o conteúdo do objeto de ensino. A questão emergente nesse ponto se situa na relação entre a finalidade e o conteúdo do objeto de conhecimento na constituição do objeto de ensino, isto é, sua manifestação na relação dialética entre o conteúdo do objeto do conhecimento e sua objetivação como componente do objeto de ensino.

No que diz respeito ao polo dos estudantes, tais determinações também se fazem presentes. Porém, conforme Roth e Goulart (2017), o objeto nem sempre é estabelecido de forma concreta no início da realização da atividade. É possível considerar, entretanto, que "uma prática matemática que pode ser prescrita no futuro para um aluno existe, efetivamente, no presente *como* a relação social da qual o aluno é parte constitutiva" (Roth; Goulart, 2017, p. 181). Em muitas situações, é no desenvolvimento da atividade que tal prática passa a ser apropriada como forma de atividade humana. Esse processo, o qual Radford (2019, 2021a) interpreta como transformação do saber em conhecimento – objetivada na forma de conceito pelos indivíduos –, adquire determinado conteúdo em dependência do conteúdo da atividade realizada que, por sua vez, relaciona-se às condições gerais de sua materialização. Na esteira de Moretti e Radford (2023), entendemos que a natureza do objeto de ensino do Cálculo é atravessada por aspectos que necessitam levar em consideração a unidade entre filogênese e ontogênese, isto é, força movente do desenvolvimento cultural na atividade humana. Isso nos coloca na posição de entender que o objeto do conhecimento tem um certo conteúdo,

[213] Como sinalizamos, abordamos a problemática da relação entre o ensino de matemática e a formação do indivíduo em nossa dissertação de mestrado (Spacek, 2012) e em dois artigos derivados dela (Spacek; Ortigara, 2018, 2022).

determinado pela história da atividade que o produziu e pela atividade encarnada na proposição e relações estabelecidas na atividade coletiva de estudo escolar.

Nesse contexto, cabe ao professor – que intenta formar nos estudantes os modos de pensamento mais desenvolvidos na atualidade, em termos de complexidade e abrangência, isto é, pensamento teórico (Davídov, 1988; Davýdov, [198-?]) – a proposição de tarefas de estudo que os coloquem em situações com elementos contraditórios, as quais necessitem de um novo elemento, uma nova forma de ação, até então desconhecidos pelos sujeitos (Ilyenkov, 2007a; 2007b). Para Ilyenkov (2007c), é tarefa do professor criar um sistema de condições de ação que conduza o sujeito a agir de um modo determinado pelas possibilidades fornecidas pelo conceito a ser apropriado. Isso permite ao sujeito a apreensão das legalidades do objeto como uma "regra", isto é, forma subjetiva de lidar com o objeto. Sobre essas bases é que o objeto se apresenta de forma única para o sujeito, o que torna desnecessária a atividade especial de "aplicação" do conhecimento sobre o objeto.[214]

> Nessas condições, se o ponto de partida é a ação real com um objeto, acompanhada da observação do método de ação (reflexão), a regra é assimilada diretamente como um requerimento para a ação com o *objeto* – em outras palavras, diretamente na forma de uma coisa. O conhecimento, então, aparece para o estudante precisamente como o *conhecimento da coisa*, e não como uma estrutura especial situada fora da coisa que todavia precisa ser "aplicada" a ela, sob a forma de algumas ações especiais. [...] [o sujeito] encontra perante ele apenas *um só* objeto, porque desde o ponto de partida ele se *funde* com o outro objeto (conhecimento). Isso ocorre porque ele se funde como o sujeito da ação com o objeto, como conhecimento personificado, que possui correlação direta com as coisas, isto é, *conhecimento das coisas*. Portanto, não como conhecimento sobre frases que outras pessoas usam em referência a essas coisas[215] (Ilienkov, 2007c, p. 74).

Com um significado semelhante, mas apresentando suas especificidades, foi cunhado, no Brasil, por membros do GEPAPe, o conceito de situação desencadeadora de aprendizagem, que tem como objetivo principal "proporcionar a necessidade de apropriação do conceito pelo estudante, de modo que suas ações sejam realizadas em busca da solução de um problema que o mobilize para a atividade de aprendizagem – a apropriação dos conhecimentos" (Moura *et al*, 2016, p. 116). Tais situações podem ser meios de direcionamento das relações

---

[214] Retornaremos a essa questão no próximo capítulo.

[215] "Provided that the starting point is real action with an object, accompanied by observation of the method of action ('reflexion'), the rule is mastered directly as a requirement imposed on action by the object—in other words, directly in the form of a thing. Knowledge then appears to the student precisely as knowledge of the thing, and not as a special structure situated outside the thing that still somehow has to be 'applied' to this thing by performing some sort of special actions. […] In the other case he finds before him only one single object, because from the very start he merges with the other object (with knowledge). This occurs because he emerges as the subject of action with the object, as personified knowledge, as knowledge that has direct mutual relation with things, as knowledge of things. And not knowledge of the phrases that other people have used in reference to these things".

estabelecidas na atividade para o objeto de ensino, de modo que o estudante possa entrar em contato com as potencialidades formadas pela humanidade em seu processo histórico de desenvolvimento.

Com base nessas ações e tarefas, o objeto de ensino se estabelece como a forma final[216] a ser apropriada que se manifesta na totalidade da atividade coletiva de estudo escolar. De tal modo, o objeto aparece como uma relação social de que estudante e professor são partes constitutivas. O professor apresenta um papel imprescindível, pois direciona o processo e domina a prática matemática que é finalidade dessa atividade, o que garante a presença da forma final do objeto almejado como uma relação presente desde o início na totalidade da atividade. Esse movimento não escapa da influência de aspectos subjetivos dos indivíduos decorrente da exteriorização dos sujeitos. Isso é oriundo da natureza do processo, porque a objetivação do objeto de ensino, que se constitui como relações entre os sujeitos, adquire conteúdo em relações que envolvem a exteriorização de aspectos subjetivos dos sujeitos expressos na fala, gestos, entonação, entre outros aspectos.

Ancorados na argumentação realizada, consideramos, a despeito das diferentes funções que tentam atribuir à educação emanadas da constante necessidade de reprodução do capital, cabe a esse complexo garantir a reprodução do ser social. O modo pelo qual isso é realizado ocorre por meio da imposição de pressões sobre os indivíduos para que se torne necessária a apropriação dos saberes, como formas potenciais de ação historicamente constituídas. Desse modo, o elemento com prioridade ontológica na atividade coletiva de estudo escolar é o conhecimento objetivado na forma de objeto a ser ensinado/apropriado, pois

[216] Em Vigotski (2018) encontramos uma discussão sobre a forma final de uma determinada função psicológica superior, no meio em que o indivíduo se insere. O autor bielo-russo entende que no início do desenvolvimento da fala, por exemplo, a criança a possui apenas em forma inicial. É a convivência e o diálogo com os adultos que dominam a forma final, o principal motor de seu desenvolvimento. Isto quer dizer que no entorno da criança, em sua situação social, apresenta-se, desde o início, a forma final do desenvolvimento da fala. Tal consideração não significa que a fala da criança, ao término do seu desenvolvimento, será idêntica à fala dos adultos, pois entra em cena, também, o modo como a criança internaliza essa função psicológica superior. Esse processo está umbilicalmente ligado com uma lei que recebe uma de suas formulações do seguinte modo: "toda função psíquica superior surge em cena duas vezes: inicialmente, como atividade coletiva, social, ou seja, como função interpsíquica, e, pela segunda vez, como atividade individual, como um meio interno de pensamento da criança, como uma função intrapsíquica" (Vigotski, 2021b, p. 262). Importa apontar que tais processos dizem respeito ao desenvolvimento das funções psicológicas superiores. Radford (2021a) põe esse aspecto em relevo ao destacar que essa delimitação fornece elementos que se referem a um problema cognitivo, e não necessariamente educativo, apesar de possuírem interrelações. Contudo, entendemos que as considerações acerca da presença da forma final como relações entre os sujeitos, assim como o entendimento das funções psicológicas superiores como funções interpsíquicas, podem ajudar a caracterizar aspectos ontológicos do objeto de ensino. Porém, tal fato não anula a necessidade de compreender que tal objeto é apropriado ativamente pelos estudantes na qualidade de conceitos, o que implica considerar o modo como eles se apropriam desse objeto.

direciona a atuação dos sujeitos. Porém, esse conhecimento adquire determinado conteúdo em dependência da qualidade da atividade realizada.

Em resumo, o objeto de ensino adquire um conteúdo determinado, materializado nas relações estabelecidas na atividade coletiva de estudo escolar. As formas de organização e desenvolvimento dessa atividade, assim como as condições objetivas e subjetivas dos sujeitos é que se configuram como determinantes do seu conteúdo. Nesse sentido, a mobilização dos sujeitos, mediante situações que os coloquem em movimento e proporcionem o seu encontro e atualização/apropriação do saber matemático, é um dos elementos essenciais para a sua objetivação. Esse processo, por sua vez, é uma síntese do desenvolvimento histórico e cultural da sociedade e se apresenta, nessa atividade, como momento enredado no complexo da reprodução. É necessário, para a compreensão do objeto de tal atividade, que se explicite o modo pelo qual a relação entre o desenvolvimento filogenético e ontogenético atua em tal dinâmica. Por esse motivo, o presente capítulo explorou essas questões, das quais destacamos os seguintes pontos nevrálgicos: 1) a necessidade da apropriação dos conhecimentos, pelos indivíduos, para o processo de reprodução e desenvolvimento do ser social; 2) a inconsistência da teoria recapitulacionista para explicar a formação dos indivíduos; 3) as formas de atividade consideradas como aspecto ideal da realidade cultural humana e elo entre o desenvolvimento filogenético e ontogenético; 4) a pré-existência e independência da realidade humanizada condensada na esfera ideal para com o indivíduo singular e a consequente necessidade de sua apropriação; 5) a atividade como meio de atualização dos saberes e apropriação dos conhecimentos; 6) o caráter determinado, por um conjunto de fatores, do objeto de ensino, no contexto da atividade; 7) a relação de dependência entre o conteúdo do objeto de ensino e o processo de desenvolvimento da atividade.

Esse movimento teórico de exposição dos determinantes da relação entre o objeto do Cálculo e sua manifestação como objeto de ensino nos permite volver a atenção para os modos de sua materialização expressos em pesquisas que se propõem a estruturar e pôr em movimento organizações de ensino de Cálculo fundamentadas na abordagem histórico-cultural. Esse processo, realizado por meio da análise das tarefas propostas nas teses citadas, é expresso no próximo capítulo de nosso trabalho.

6 A MANIFESTAÇÃO DO OBJETO DE ENSINO DO CÁLCULO EM TAREFAS QUE COMPÕEM A ORGANIZAÇÃO DO ENSINO DE PESQUISAS QUE SE ANUNCIAM EMBASADAS NA TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL

Realizada a exposição dos resultados das investigações teóricas consideradas essenciais para a apreensão do movimento de constituição de nosso objeto, ocupar-nos-emos, no presente capítulo, da análise de tarefas que se estabelecem como sínteses das finalidades e condições de organizações de ensino expostas em teses que apresentam alguma proposta de ensino do Cálculo cujo aporte teórico se anuncia alicerçado em autores vinculados à teoria histórico-cultural. Antes, não obstante, consideramos importante fazer uma breve apresentação das teses e esclarecer novamente os critérios de seleção que condicionaram sua inclusão na análise. Na sequência, e antecedendo a análise das tarefas, elaboramos, na primeira seção deste capítulo, uma exposição dos pressupostos da referida teoria que fundamentam, em cada uma das teses, a proposição das tarefas.

A tese de Bezerra (2016), intitulada *A organização do ensino de Cálculo Diferencial e Integral na perspectiva da Teoria da Formação por Etapas das Ações Mentais de Galperin*, propõe-se a responder ao seguinte problema:

> Quais contribuições a organização do ensino de Cálculo na perspectiva da Teoria da Formação por Etapas das Ações Mentais, trazem para a aprendizagem dos conceitos de Limite, Derivada e Integral dos acadêmicos de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Roraima – IFRR? (Bezerra, 2016, p. 13).

Para respondê-lo, organiza o ensino de Cálculo em um curso de licenciatura com a adoção de uma estratégia cujo ponto de partida e elemento orientador é a resolução de problemas. Combina os passos para a resolução de problemas elaborado por Polya (1995) com a teoria da formação por etapas das ações mentais e conceitos[217] de Galperin (1987, 2017)[218]. Seu objetivo é a proposição de um ensino que favoreça a aprendizagem dos estudantes.

Fundamentado em Galperin (1987, 2017), além de Talízina (1988), Talizina (2009) e Majmutov (1983) – também referenciados por Bezerra (2016) –, o trabalho de Oliveira (2021) intitulado *Contribuições do sistema didático Galperin, Talízina e Majmutov para formação da*

[217] Para nos referirmos a essa teoria, optamos pela denominação *teoria da formação por etapas das ações mentais e conceitos* de Galperin (1982, p. 15). Manteremos essa expressão mesmo quando os autores analisados empregarem outra para se remeter a essa teoria.

[218] Utilizaremos as edições das obras a que tivemos acesso ao invés das edições citadas nas teses analisadas. Além disso, homogeneizaremos as referências a termos e expressões conceituais, de modo a conservar as formas distintas apenas nas citações diretas ou quando tivermos a intenção de contrastar as interpretações dos autores.

habilidade de resolver problemas discentes em Cálculo Diferencial e Integral em estudantes de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco defende a tese de que a

> [...] utilização do sistema didático formado pela teoria de formação por etapas das ações mentais de Galperin, pela direção da atividade de estudo de Talízina e pelo ensino problematizador de Majmutov contribui para habilidade de resolver problema em Cálculo Diferencial e Integral nos estudantes de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco (Oliveira, 2021, p. 24).

Ao almejar esse fim, a autora adota o conceito de Atividade de Situação Problema Discente (ASPD), sintetizado em Mendoza e Delgado (2020), para elaborar e reelaborar a orientação, aos estudantes, no processo de formação da habilidade de resolver problemas.

A observância dos critérios estabelecidos para a seleção do material a ser analisado fica nítida, pois as duas teses apresentam propostas detalhadas vinculadas ao ensino de Cálculo. Além disso, fundamentam-se em teóricos costumeiramente ligados, na academia, à escola conhecida como teoria histórico-cultural. Basta mencionar que a teoria da formação por etapas da atividade mental e dos conceitos, formulada por Galperin, estrutura-se sobre "conceitos chaves da psicologia soviética da escola de Vygotsky, tais como: a natureza histórico-social da psique humana; seu estudo sob o ponto de vista da atividade; o princípio da unidade das formas externas (materiais) e internas (psíquicas) da atividade humana" (Núñez; Oliveira, 2013, p. 288). Ademais, Shuare (2017) sublinha que o próprio Galperin e seus discípulos atribuem fundamental importância ao método genético-formativo vigotskiano.

A pesquisa desenvolvida por Prevot (2019), intitulada *Uma Abordagem com Uso de M-Learning na Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral em Cursos de Engenharia Baseada em ABP e Modelagem Matemática*, estabelece o objetivo de

> [...] desenvolver, apresentar e aplicar, num estudo de caso, uma abordagem metodológica sistematizada para o ensino de CDI em cursos de Engenharia, que combine a Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP / PBL), que use como estratégia didática a Modelagem Matemática (MM), mais a incorporação da *m-learning*, esta última fundamentada na Teoria da Atividade (TA), com o auxílio de dispositivos móveis (*smartphones*), dotados de apps matemáticos[219] (Prevot, 2019, p. 27).

A proposta de intervenção traz uma diversidade de teorias e metodologias, a fim de combiná-las na forma de uma proposição de ensino de Cálculo. Esta tem como um de seus elementos a Teoria da Atividade na versão desenvolvida por Engeström (2013).

---

[219] As siglas ABP, MM e TA significam, respectivamente, Aprendizagem Baseada em Problemas, Modelagem Matemática e Teoria da Atividade.

Por sua vez, o trabalho de Farias (2015), denominado *Introdução a noções de cálculo diferencial e integral no ensino médio no contexto das TIC: implicações para prática do professor que ensina matemática*, anuncia que se ancora na Teoria da Atividade elaborada por Engeström (2013, 2016a, 2016b). No campo de ensino, explicita sua fundamentação no conceito de Atividade Orientadora de Ensino (AOE), desenvolvida por Moura (2002). Para a pesquisa, a adoção desse constructo teórico "implica em trazer mais próximo a ideia de Atividade segundo a Teoria da Atividade na perspectiva de Leontiev e Ergeström[220] para o contexto educacional" (Farias, 2015, p. 13). Tem como finalidade a busca por subsídios para responder ao problema, considerado o motivo da atividade de pesquisa, assim formulado: "quais são as possíveis implicações da prática do professor de Matemática quando inter-relaciona noções de Cálculo Diferencial e Integral ao ensinar Funções no Ensino Médio, mediante utilização das TIC?" (Farias, 2015, p. 12). Para tal intento, realiza um curso de extensão com alunos e professores. A autora, contudo, elege como sujeitos das pesquisas professores que atuam no Ensino Médio ou com formação inicial e/ou continuada de professores. Os encontros, realizados de forma virtual, constituíram-se como uma "Atividade de Ensino" composta por leituras e discussões de texto, bem como apreciação e análise de "*Tarefas Exploratório-Investigativa"*.

Novamente é possível constatar a observância dos critérios que estabelecemos, pois as duas teses formulam propostas de ensino de Cálculo, para cursos de Engenharia e para a formação de professores, respectivamente, que se anunciam fundamentadas em elaborações teóricas vinculadas à teoria histórico-cultural, em especial com base nos trabalhos desenvolvidos por Engeström (2013, 2016a, 2016b). A teoria elaborada pelo autor (2016a), denominada de *aprendizagem expansiva*, conforme Engeström e Sannino (2016), tem, entre suas raízes, ideias fundamentais elaboradas por Vigotski – conceito de zona de desenvolvimento iminente[221] –, Leontiev – origem e diferenciação entre ação e atividade e a noção de atividade orientada ao objeto –, Ilienkov – conceito dialético de contradição como tensões históricas que se desenvolvem e podem ser detectadas em sistemas de atividades – e

[220] Entendemos que, pelo restante da obra e contexto da discussão, a autora tenha cometido um erro de grafia e se refira a Yrjö Engeström.

[221] Optamos por utilizar a tradução do conceito de *zona blijaichego razvitia* (*зоны ближайшего развития*) como *zona de desenvolvimento iminente* em detrimento de outras expressões como *zona de desenvolvimento proximal* e *zona de desenvolvimento próximo*. Para tal escolha, apoiamo-nos em Prestes (2010) que, fundamentada em uma análise teórica, bem como no fato de o termo *blijaichego* (*ближайшего*), em russo, significar *próximo* no grau superlativo sintético absoluto, isto é, *mais próximo*, *proximíssimo* ou *imediato*, considera que a característica essencial do conceito diz respeito a possibilidades do desenvolvimento, ao invés da necessidade e imediatismo de sua realização. Apesar de adotarmos tal tradução, não consideramos problemática a utilização de traduções como *zona de desenvolvimento proximal* ou *zona de desenvolvimento próximo*.

Davidov – aprendizagem com base na dialética de ascensão do abstrato ao concreto. Dado que esses elementos se apresentam centrais na teoria, é possível a sua vinculação ao programa de pesquisa iniciado por Vigotski e seus colaboradores, conhecido, no ambiente acadêmico, como teoria histórico-cultural.

Aprofundados os motivos de inclusão das referidas teses na análise e explicitadas de forma sintética as problemáticas que enfrentam, vemo-nos impelidos a perscrutar alguns aspectos relativos aos procedimentos analíticos. Um primeiro ponto a ser destacado é o de não objetivarmos avaliar o mérito e os resultados alcançados pelas pesquisas. Entendemos que, além de não possuirmos os requisitos necessários para tal empreitada, fugiria do escopo de nossa pesquisa, pois direcionamo-nos para as tarefas propostas, apesar de as considerarmos no quadro mais amplo em que foram desenvolvidas. Além disso, é preciso pôr em evidência que as teses arroladas foram submetidas aos momentos de validação com professores da área, o que, de certa maneira, garante o atendimento dos requisitos necessários e esperados de uma pesquisa acadêmica.

Um segundo ponto é que, apesar de obedecerem aos critérios estabelecidos para a escolha dos dados, não são todas as pesquisas selecionadas que possuem como centralidade e meta a organização e avaliação de uma proposta de ensino de Cálculo, pois pode ser esse um contexto para atingir outro objetivo. Por consequência, aspectos orientadores das tarefas e que são centrais para nossa análise são apresentados de maneira tangencial ou se encontram subjacentes ao texto das teses. Isso nos exige, em alguns casos, uma postura metodológica em direção aos indícios de possibilidade para nos orientar sobre o entendimento dos autores em relação a esses temas, assim também indicar as possíveis implicações à constituição do objeto de ensino do Cálculo.

O terceiro ponto diz respeito à seleção das tarefas analisadas, bem como à organização de sua exposição. Como destacado na seção que se ocupa da metodologia, o isolado dessa ação investigativa é formado por tarefas direcionadas à apropriação dos conceitos de derivada e integral. Entretanto, exceto Prevot (2019), os demais trabalhos estruturam a exposição das tarefas referentes a esses conceitos, ao eleger como ponto de partida o conceito de função e/ou limite. Isso torna insustentável, ao desconsiderar as tarefas elaboradas com a finalidade de abordar tais conceitos, a análise da essência das demais tarefas.

Por fim, é importante frisar a relevância das contribuições das referidas pesquisas para a constituição de um campo de investigação voltado à organização do ensino de Cálculo fundamentado na teoria histórico-cultural. Nesse sentido, os possíveis elementos levantados, com base em um viés crítico-analítico, não esvaziam sua substancial riqueza ou reduzem as

contribuições desses trabalhos para os estudos relativos ao ensino de Cálculo. Nosso propósito, de tal modo, é contribuir para o enriquecimento de futuras pesquisas e da atividade coletiva de estudo escolar, no âmbito da atuação em que essas investigações foram pioneiras.

A exposição da síntese analítica está organizada em três seções. Elegemos como alvo da primeira delas a exposição dos principais elementos teórico-conceituais que fundamentam as propostas, o que permite apreender a função e o papel das tarefas na estrutura do trabalho.

A segunda seção se ocupa do conteúdo matemático intrínseco às tarefas. Tal seção subdivide-se em três subseções, cujo foco é a análise do conteúdo almejado pela proposição das tarefas que envolvem os conceitos de função e limite, derivada e, por fim, integral.

A terceira seção dedica-se à síntese dos principais traços constitutivos do objeto de ensino do Cálculo manifestados nas teses. Assim, articularemos os principais resultados da análise, de modo a constituir uma imagem de nosso objeto, como um processo concreto em movimento.

6.1 FUNDAMENTOS TEÓRICO-METODOLÓGICOS DAS ORGANIZAÇÕES DE ENSINO PROPOSTAS NAS TESES ANALISADAS

Na presente seção, temos como objetivo expor os fundamentos teórico-metodológicos que sustentam as proposições de ensino nas quais são propostas as tarefas analisadas. Em acréscimo, isso nos permitirá evidenciar a problemática envolvida na relação entre o modo de organização do ensino e a objetivação do objeto do Cálculo como objeto de ensino. De tal modo, a exposição terá como elemento norteador a categoria atividade e as concepções de ensino e aprendizagem que norteiam suas organizações de ensino e, por consequência, as objetivações do objeto de ensino do Cálculo. Desse modo, ao desenharmos o quadro com base no papel da atividade e na concepção de ensino e aprendizagem, teremos subsídios para compreender o modo como esses elementos influenciam a proposição de problemas e/ou tarefas, que se constituem como relações sociais históricas as quais, manifestadas de uma determinada maneira no ensino, colocam os estudantes em contato com uma determinada forma de atividade humana.

Duas razões nos impulsionam a começar a exposição pelo papel que ocupa a categoria atividade nas teses analisadas. Primeiramente, por a considerarmos, no contexto do ensino, a unidade de análise do processo de constituição do objeto do Cálculo. Esse motivo, explorado especialmente no capítulo anterior, conduz-nos a buscar evidenciar o seu papel nas

pesquisas. Isso porque elas se anunciam com fundamentos na Teoria da Atividade, apesar de indicarem outras vertentes. Assim, a exposição da concepção de atividade permite apreender como a relação do sujeito com o objeto do Cálculo, que no âmbito do ensino ganha qualidade de objeto de ensino, é planejada e objetivada. Tal categoria pode apresentar um caráter estruturante ou interpretativo e também se constituir em centralidade para a análise do processo de ensino. Essas diferentes maneiras de considerar a atividade podem se tornar determinantes para a constituição do objeto de ensino do Cálculo. Compreendemos que sua análise lança luz para apreensão do modo como o objeto do Cálculo se objetiva na qualidade de objeto de ensino nas propostas analisadas.

Articuladas ao conceito de atividade, exporemos as concepções de ensino e aprendizagem que norteiam as organizações de ensino. Esse empreendimento possui a finalidade de ser suporte para a apreensão dos conteúdos das tarefas, consideradas no contexto em que são propostas. Reforçamos que nosso objetivo não é realizar uma crítica dos fundamentos teórico-metodológicos adotados, ou das interpretações realizadas nas teses, mas apreender o contexto e a intencionalidade das propostas de ensino apresentadas.

Em Bezerra (2016) e Oliveira (2021), a Teoria da Atividade se manifesta pelas formulações da teoria da formação por etapas das ações mentais e dos conceitos, de P. Ya. Galperin. Esse psicólogo soviético defende que o objeto da psicologia não engloba a totalidade dos fenômenos psíquicos e condutas em todos os seus aspectos, pois necessita que o foco se volte para a atividade do sujeito na solução de tarefas de orientação. Assim, como o "processo de orientação do sujeito é uma situação dada, a formação, a estrutura e a dinâmica desta atividade orientadora constitui o objeto da psicologia"[222] (Galperin, 1982, p. 62). Por consequência, o estudo do surgimento do plano das imagens que orientam o sujeito torna-se indispensável e é alçado a princípio geral de sua teoria (Shuare, 2017).

Para Gal'perin (1992a), o estudo da estrutura da atividade de orientação – composta, dentre outros elementos, por sua motivação, imagens, ações nos níveis de imagem e os vários instrumentos com que essas ações mentais se tornam possíveis – deve ocorrer em seu processo de formação. Os fenômenos psíquicos que compõem a atividade de orientação somente se tornam acessíveis por meio da estruturação e formação de ações novas, com base em critérios e propriedades previamente planejadas, constituídas na conversão de ações externas em ações mentais, uma vez que elas são as "portas de entrada" (Galperin, 2017, p. 199) da vida psíquica.

[222] "El proceso de orientación del sujeto es una situación dada, la formación, la estructura y la dinámica de esta actividad orientadora constituye el objeto de la psicología".

O modo pelo qual responde à pergunta sobre a natureza dos processos mentais e a forma de acesso ao seu objeto de estudo conduziram Galperin a formular sua teoria da formação por etapas das ações mentais e dos conceitos. Além de responder a essas necessidades, permitiu-lhe apreender as formas concretas das atividades em seu processo de formação. Dentre os diversos âmbitos em que o psicólogo soviético realizou investigações, destaca-se a esfera da formação escolar, o que disseminou, no Ocidente, sua fama como um psicólogo educacional (Arievitch, 2003). Por isso, é justificável a adoção dessa teoria nas propostas de Bezerra (2016) e Oliveira (2021), apesar de Puentes (2021) advertir que a teoria da formação por etapas das ações mentais e conceitos foi concebida para entender a ocorrência dos processos cognitivos no contexto dos anos iniciais da educação primária, período marcado pelo estudo como atividade principal[223], cujo conteúdo é a formação do pensamento teórico.

Em Bezerra (2016, p. 18), entre os seis diferentes objetivos específicos, encontram-se os de: "organizar o ensino a partir do processo de assimilação da teoria de Galperin"; "construir o sistema de ações referendado nessa teoria para resolução de problemas envolvendo os conceitos de Limite, Derivada e Integral de função de uma variável real"; e "proceder a intervenção pedagógica utilizando os sistemas de ações planejados". Esses objetivos se refletem nas intenções da autora, dentre as quais sublinhamos a de

> [...] contribuir com uma reflexão acerca das potencialidades das teorias desenvolvidas por Vigotski e seus seguidores, sobretudo, a teoria da Formação por etapas das Ações mentais de Galperin, entender as teses fundamentais desses teóricos e dialogar com eles, visando a compreensão do nosso objeto de estudo [...] (Bezerra, 2016, p. 17).

Para atingir os referidos objetivos, a autora divide a sua proposta em três unidades – compreensão do conceito de limite de função; estudo das derivadas e regras de diferenciação; estudo das integrais – e adota como critério de organização a afinidade conceitual. Essas unidades são compostas por três fases vinculadas ao processo de pesquisa: diagnóstico, fase mediadora e formativa e teste final. Cada uma delas foi composta por um sistema de *Tarefas de Compreensão Conceitual*, do qual é apresentado um recorte para fins de análise. As tarefas são organizadas de modo que suas resoluções se realizem por uma combinação das etapas de formação das ações mentais e conceitos com as fases de resolução de problemas de Polya (1995). As etapas de formação estão fundamentadas nos trabalhos de Galperin (1995a, 2017) e descritas como etapas dos processos de assimilação por Talizina (2009) e Talízina (1988), quais

[223] A atividade principal ou guia, de acordo com Leontiev (1991), é aquela que rege o desenvolvimento do indivíduo em determinado período de sua vida.

sejam: etapa motivacional; etapa da elaboração do esquema da base orientadora da ação (BOA); etapa da realização da ação em forma material (ou materializada); etapa da formação da ação como verbal externa; etapa da formação como ação em linguagem externa "para si"; e etapa da formação da ação em linguagem interna.[224] Por sua vez, as fases de resolução de problemas são aquelas elaboradas por Polya (1995): compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto.[225]

A etapa inicial destacada por Bezerra (2016) é a motivacional, denominada de etapa zero. Esta tem por objetivo a formação de motivos – que necessitam ser mantidos durante todo o processo de assimilação – para que os estudantes se apropriem do objeto (Mendoza; Delgado, 2016a). Conforme Núñez (2009), os motivos podem ser internos – interesse cognoscitivo, de busca do conhecimento – ou externos – não conectados diretamente aos conhecimentos estudados. Para o autor, a criação dos motivos internos fornece, ao estudante, um impulso mais efetivo na adoção e realização das tarefas de estudo. Bezerra (2016) considera que, em sua proposta, essa etapa ocorre pela "utilização de problemas vinculados a situações reais e partindo de conceitos que os estudantes já possuem na sua estrutura cognitiva" (Bezerra, 2016, p. 87). Tal intento suscitou um estudo preliminar com o objetivo de

> [...] conhecer o nível conceitual em que se encontravam os estudantes e provocar nos mesmos **interesse** pela aprendizagem dos novos conceitos. Esse estudo foi concretizado por meio da aplicação de tarefas que envolviam **situações do cotidiano** dos alunos, buscando criar necessidade cognitiva para o estudo de cada tema [...] (Bezerra, 2016, p. 80, grifo nosso).

Essa postura é corroborada por Talizina (2009), para quem uma das vias de criação das motivações cognitivas é a introdução de situações-problema. Contudo, na concepção de Bezerra (2016), tais situações-problema possuem uma determinada qualidade, por isso se estabelecem como *tarefas aplicadas* que envolvem *situações do cotidiano* ou *situações reais*. Grifamos que não encontramos o sentido atribuído à categoria do *cotidiano* e, consequentemente, de *situação do cotidiano* que, pelos indícios apresentados, aproximam-se dos aspectos imediatos das situações em que o estudante está inserido, especialmente em contextos não escolares. A mesma dúvida pode ser transferida para os conceitos de *real* e

[224] Puentes (2021) identifica, entre dezenove trabalhos de Galperin, a proposição de quatro estruturas distintas. Optamos por utilizar a estrutura, aparentemente adotada por Bezerra (2016) e Oliveira (2021), utilizada por Talizina (2009) e Talízina (1988), por serem aquelas que mais se aproximam com a de Galperin (1995a). É possível encontrar entre os textos consultados e os analisados algumas diferenças nas expressões empregadas para se referir a determinados conceitos, porém, em nosso entendimento, não alteram tão intensivamente os seus significados.
[225] Em Bezerra (2016), a última etapa aparece como Análise da Solução. Optamos por adotar o termo Retrospecto, conforme empregado em Polya (1995).

situações reais. Vinculados a esse entendimento, encontram-se indícios de uma crença, implícita na pesquisa, de que situações do cotidiano e situações reais, assim também problemas direcionados à "aplicação prática" (Bezerra, 2016, p. 81), possuem o poder de despertar, de modo quase automático, o interesse dos estudantes. É possível identificar essa acepção em todas as suas seções da análise referentes à etapa motivacional – seções 3.4, 5.1.4.1, 5.2.4.1 e 5.3.4.1.

A primeira etapa, a da formação da base orientadora da ação (BOA), tem papel fundamental na teoria de Galperin (1987). O autor entende que uma mesma ação pode ser realizada de modos diversos por pessoas distintas, em virtude da multiplicidade das capacidades e da compreensão dos indivíduos. Estas, por sua vez, são, respectivamente, modos de designação subjetiva das condições da parte orientativa e executiva de uma ação. A parte orientativa é fundamental para a forma de execução da ação, pois

> [...] constitui a instância diretiva e, no fundamental, dela depende a qualidade da execução. Todas as situações em que, segundo o plano de ensino, deve-se empregar esta ação indicam o conjunto de exigências empregadas na ação a formar e, simultaneamente, o conjunto de propriedades que respondem a estas exigências e que devem ser formadas[226] (Galperin, 1987, p. 127).

Conforme Núñez (2009), a base orientadora da ação manifesta as condições em que o indivíduo se baseia para exercer a atividade. Ao sujeito, a fim de realizar eficazmente a ação, faz-se necessário o estabelecimento de elementos dos objetos da ação, das condições, dos meios de controle, e o limite de realização da atividade.

Galperin (1995b) destaca a existência de três bases orientadoras de ensino, ampliadas ao número de oito em Talízina (1988). A autora evidencia que quatro foram encontradas por via experimental e as demais teoricamente. A sua diferenciação e classificação é realizada com base: no grau de generalização, no caráter detalhado ou plenitude dos reflexos das condições que determinam o êxito da ação e no modo de sua elaboração. Dentre todas, a considerada, pelos autores, mais adequada para o desenvolvimento do ensino é a conhecida como BOA III. Esta é completa no que diz respeito ao reflexo das condições de execução da ação, geral no que se refere aos conhecimentos a serem formados, e obtida de modo independente.

---

[226] "[...] constituye la instancia directiva y, en lo fundamental, de ella depende la calidad de la ejecución. Todas las situaciones en las que, según el plan de enseñanza, debe emplearse esta acción señalan el conjunto de exigencias presentadas a la acción a formar y, simultáneamente, el conjunto de propiedades que responden a estas exigencias y que deben ser formadas".

Em confluência com as bases teóricas adotadas na pesquisa, Bezerra (2016, p. 18) estabelece um de seus objetivos: análise do "uso da Base Orientadora da Ação (BOA) do tipo III pelos alunos na resolução das tarefas propostas em Cálculo". A opção por essa base orientadora de ensino é justificada por contemplar, entre outras vantagens: a sua propensão ao avanço rápido na apropriação da ação, a minimização dos erros e a esfera ampla de transferência. Além disso, possui "mais aproximação com o objeto de estudo, no que se refere à apropriação dos conceitos de Limites, Derivadas e Integral de Função de uma variável real"[227] (Bezerra, 2016, p. 81). A objetivação e formação da base orientadora da ação almejada ocorreu em situações em que os estudantes

> [...] recebiam as orientações para a realização das tarefas destacando todas as partes estruturais e funcionais da atividade (orientação, execução e controle) de modo que estes tomassem conhecimento necessário sobre a ação a ser realizada, bem como também a sequência de etapas e aspectos conceituais e procedimentais que deveriam utilizar para execução das tarefas (Bezerra, 2016, p. 81).

Na proposta, essa etapa é identificada com as fases "compreender o problema" e "estabelecer um plano", de Polya (1995). Isso nos conduz ao entendimento de que, na pesquisa, cada tarefa se constitui como uma atividade a ser realizada pelos estudantes e, consequentemente, apropriada no contexto do ensino. Tal compreensão é corroborada em diversos momentos da descrição e análise da intervenção, dos quais citamos: "[...] trabalhamos diversas atividades, das quais selecionamos duas (Tarefas 3 e 4 – Unidade II) [...]" (Bezerra, 2016, p. 196); "Durante esse processo da elaboração da BOA, os estudantes em contato com as atividades [...]" (Bezerra, 2016, p. 197); e "[...] as aulas práticas com resolução das atividades [...]" (Bezerra, 2016, p. 158). Entretanto, se cada tarefa corresponde a uma atividade, nesse ciclo de resolução da tarefa se deve fazer presente a etapa de motivação. Isso conduziria a uma possível contradição – ou pelo menos a uma lacuna conceitual –, pois, para a autora (Bezerra, 2016, p. 80), a objetivação dessa etapa decorre da proposição de "aplicação de tarefas que envolviam situações do cotidiano do aluno". Assim, se cada tarefa é uma atividade e, cada atividade necessita de uma etapa motivacional e, se a etapa motivacional corresponde à proposição de tarefas que se constituem como *situações do cotidiano* do estudante ou *situações reais*, por consequência, toda tarefa deve ter a qualidade de *situação do cotidiano* ou *situação real*. Consideramos isso um problema, pois não foi encontrada nenhuma caracterização dessas qualidades das tarefas, o que impossibilita verificar se, na concepção da autora, todas elas

[227] Adiantamos que não conseguimos encontrar as justificativas que fundamentam a afirmação da autora.

possuem ou não essa característica. Outro ponto que se desdobra da identificação da tarefa com a atividade é a necessidade de formação da BOA para cada uma ou para cada grupo delas que lide com novo aspecto da ação. Isso porque a proposição das atividades iniciaria um novo ciclo com conteúdo e ações ainda não apropriadas, o que necessita – para a assimilação com base em determinadas qualidades – que as etapas do processo de formação das ações mentais sejam percorridas.

Vale destacar que não foi possível localizar "as partes estruturais e funcionais" das atividades concretas de cada ação almejada na proposta. O processo de interação e proposição – com destaque dado para a participação dos estudantes – é evidenciado. Não obstante, o seu conteúdo ficou escamoteado ou reduzido a alguns elementos.

Importa dizer que, em Galperin (1995b), a formação da base orientadora da ação se refere ao processo orientativo. Talizina (2009) coaduna com essa visão e considera que a aprendizagem do estudante não se resume à apropriação da lógica e do conhecimento prévio da ação, mas depende também de sua execução, o que conduz à etapa seguinte da proposição.

O momento no qual efetivamente começa a formação da ação é na forma material ou materializada, que se estabelece como a primeira forma da ação a ser assimilada (Galperin, 2017). No início, a ação tem um caráter especial, pois só pode ser demonstrada externamente, o que lhe confere, nas palavras do autor (Galperin, 2017, p. 201), sua "materialidade". Nessa etapa, aquilo sobre o qual age o sujeito pode ser o próprio objeto – forma material –, sua representação e a das próprias ações que se realizam com ele – forma materializada. Refletem-se, nessas representações, as propriedades essenciais e as relações de mudanças sucessivas. Bezerra (2016) se ancora em Galperin para indicar que nessa ação é importante o uso de mapas ou fichas da atividade, que servem de suporte material aos sujeitos na execução dela.[228] Entretanto, a importância atribuída aos mapas não se objetiva como parte constituinte explícita da proposta da autora.

Outro elemento importante diz respeito às representações, ao reproduzirem "as propriedades essenciais [...] e as relações materiais e suas mudanças sucessivas" (Galperin, 2017, p. 201), o que é destacado por Bezerra (2016). No entanto, esse aspecto, em nosso entendimento essencial para a teoria de Galperin, possui pouca relevância na proposta. Nossa afirmação se justifica uma vez que consta o *contexto essencial* das tarefas, e não as relações essenciais dos conteúdos do Cálculo que os fundamentam. Trata-se, pois, de algo que, caso já

[228] A autora indica, na tese, a seguinte obra: Galperin (1986). Porém, dentre as referências da tese, encontramos apenas Galperin (1986a), versão equivalente à obra consultada e citada, por nós, como Galperin (2017). Contudo, não localizamos nenhuma indicação do uso de mapas no texto por nós consultado.

fosse desenvolvido, eximir-nos-ia da responsabilidade de realizar grande parte da pesquisa em processo de exposição nesta tese.

Na descrição da organização da proposta, Bezerra (2016, p. 81) explicita que essa etapa foi realizada por meio de tarefas que incluíam "ações externas". Nestas, foram introduzidos recursos computacionais e tecnológicos, como também a construção de gráficos. Em dita descrição, encontramos indícios que nos levam a considerar uma duplicidade de entendimentos sobre tal etapa. Tal compreensão provém, por um lado, da identificação dessa etapa com a fase de "execução do plano" de Polya (1995), com a justificativa dos usos das tarefas e os recursos citados. E, por outro, da interpretação de que essa etapa tem como essencial a sua natureza "prática", pois "as aulas expositivas não são suficientes", logo, tornam-se necessárias "as aulas práticas com resolução das atividades", que "causam mais acessibilidade de questionamentos, pois a professora tem a possibilidade de estar mais próxima nesse acompanhamento" (Bezerra, 2016, p. 158). Aqui emergem duas possíveis interpretações do significado de *prática*. A primeira é de que *prática* é o processo no qual o estudante está envolvido ativamente em alguma tarefa, isto é, encontra-se em estado de movimento ou atuação. A segunda traz, em seu bojo, a *prática* como uma forma de aplicação do conteúdo em uma *situação real* ou *cotidiana*, conforme destacado. A primeira se faz presente nos indícios que relacionam a etapa aqui descrita com a fase de execução do plano de Polya (1995), enquanto a segunda aparece nas tarefas escolhidas para a análise realizada na seção 5.2.4.3 da tese. Além disso, a autora afirma, na análise da formação da referida etapa, que os problemas escolhidos para compor o sistema de tarefas dessa etapa objetivavam promover "maior **sociabilidade** com aplicação matemática no cálculo, anteriormente, conhecida como pura e abstrata, na concepção dos estudantes" (Bezerra, 2016, p. 157, grifo nosso).

A terceira etapa, a formação da ação verbal externa, ocorre pela abreviação da ação no plano material, por intermédio da generalização do que é essencial no objeto. Também pela identificação do conteúdo constante na diferenciação do objeto da ação e de suas operações, isto é, o processo em que a ação é estereotipada (Galperin, 2017). Isso permite uma realização abreviada da ação, que só é possível pelo rompimento do laço direto com o objeto na passagem da etapa anterior para a atual, constituindo-se como reflexo verbal exato. No ensino, a análise proposta não se baseia mais nos objetos ou suas representações, mas basicamente em suas descrições (Talizina, 2009). Galperin (2017) destaca três mudanças que têm início nessa etapa: 1) a ação verbal se configura como reflexo da ação realizada com o objeto e, além disso, como sua comunicação; 2) o conceito passa a substituir o objeto, em que se elimina a limitação da

ação na etapa anterior; 3) com a redução e abreviação da ação nessa etapa, ela passa a se resumir a uma ação por fórmula.

Em sua proposta, Bezerra (2016) privilegiou o desenvolvimento das tarefas, pelos estudantes, em grupos. Todavia, o controle ocorreu de maneira individual, com vistas à verbalização do modo de realização da ação por cada estudante, que deveria explicar, pela escrita e fala, os processos realizados na obtenção da resposta encontrada. A autora destaca que inicialmente os estudantes apresentaram dificuldades em explanar o que faziam, mas no decorrer do desenvolvimento da proposta, adquiriam mais desenvoltura nesse procedimento.

Na etapa seguinte, linguagem interna para si, ocorre uma abreviação da execução da ação e uma mudança essencial na função da linguagem, que deixa de ser elemento de organização e comunicação e se torna um meio de organização interna, individualizado, isto é, sem participação direta de outras pessoas. Talizina (2009) a considera uma etapa transitória entre a formação da ação verbal externa e a derradeira, das ações mentais. Nesta, o produto de todo o processo, iniciado na etapa anterior pela abreviação da forma verbal e sua execução "para si" (Galperin, 1995a), internaliza-se, transforma-se em função mental. Com a sua formação, a ação mental – reduzida e automatizada, isto é, realizada por fórmulas – passa a desempenhar o papel de forma de pensamento, acessível aos outros indivíduos somente como produto. De tal modo, o processo se torna individual, o que dispensa a participação substancial de outras pessoas. Em Bezerra (2016), essa etapa era identificada com a fase do retrospecto de Polya (1995), na qual o estudante se incumbe da análise de suas próprias respostas.

Em linhas gerais, na tese de Bezerra (2016), a categoria da atividade ocupa uma posição central e exerce uma função estrutural oriunda da adoção da teoria da formação por etapas das ações mentais e conceitos. Em contrapartida, como poderá ser destacado na análise das tarefas, a centralidade da referida categoria esvazia o papel do conteúdo do conhecimento matemático a ser apropriado, o que, por consequência, implica o conteúdo do objeto de ensino do Cálculo.

No que se refere às concepções de ensino e aprendizagem, assim como em Prevot (2019), em Bezerra (2016) é possível encontrar conceitos e termos oriundos das teorias construtivistas. Como exemplo, podemos citar o conceito de interação empregado pela autora para, na discussão sobre o que intitula de correntes epistemológicas, denominar tanto Vigotski como Piaget como representantes do "construtivismo/interacionismo" (Bezerra, 2016, p. 24). Essa apropriação de conceitos da teoria piagetiana também se faz presente na interpretação do conceito vigotskiano de zona de desenvolvimento iminente. Para a autora (2016, p. 52), há nas

obras de Vigotski dois níveis de desenvolvimento que o auxiliariam na elaboração do referido conceito: o real e o potencial.

> O nível de desenvolvimento real corresponde aquilo que o sujeito já sabe e é caracterizado pela solução de situações problemas de modo independente. Já o nível de desenvolvimento potencial se refere aos processos ainda em estado incipiente, nesse nível a solução de problemas ocorre sob a orientação de uma pessoa experiente na área. A zona de desenvolvimento proximal (ZDP) é exatamente a distância que existe entre esses dois níveis. Assim é importante salientar que a aprendizagem escolar deve ocorrer por meio de intervenções feitas por professores na ZDP, pois é exatamente nesta zona que a aprendizagem vai ocorrer (Bezerra, 2016, p. 52).

Em termos cognitivos, na relação estabelecida entre professor e estudante,

> [...] o professor ao criar zonas de desenvolvimento proximal, estaria acelerando o surgimento de funções ainda pouco desenvolvida, isso poderia ocorrer por meio de questionamentos e da correção das atividades do aluno no intuito de **provocar um desequilíbio** [*sic*] **na sua estrutura cognitiva** fazendo-o avançar à uma reestruturação mais elaborada (Bezerra, 2016, p. 53, grifo nosso).[229]

Tal interpretação possibilita que entendamos as relações entre professor e estudantes, na tese em questão, por intermédio do estabelecimento, por parte do professor, de situações que promovam desequilíbrio nas estruturas cognitivas dos estudantes, o que fomenta condições para a sua reestruturação. Tal processo é entendido como aquele que gera condições para a constituição de estruturas com novas qualidades. Esse sincretismo teórico também se explicita na exposição do conceito de internalização, considerado pela autora como central para a teoria de Vigotski. Conforme a explicitação realizada na tese aqui em análise, o conceito de internalização teria sido comprovado empiricamente no campo da linguagem, mais especificamente no da linguagem egocêntrica. A autora, alicerçada na concepção piagetiana, à qual Vigotski (2001) endereçou uma crítica radical ao tratar da linguagem egocêntrica, entende que com "o passar dos tempos, por meio da socialização, a criança deixa de ser egocêntrica" (Bezerra, 2016, p. 50). Na sequência, de modo oposto, expressa a internalização como

> [...] um processo gradual o qual os sujeitos se apropriam dos instrumentos socialmente construídos e a interiorização progressiva das operações psicológicas constituídas inicialmente na vida social. [...] não diz respeito somente a acumulação de domínios sobre os instrumentos variados, com um caráter puramente aditivo, é também um processo de reorganização da atividade psicológica do sujeito como produto de sua participação em situações sociais específicas (Bezerra, 2016, p. 50).

[229] As problemáticas envolvidas nessa interpretação da zona de desenvolvimento iminente exigiriam uma análise especial. Tal fato, importante para a apreensão do referido conceito vigotskiano, é incompatível com a intenção da presente seção, logo, não será levada adiante.

Resumidamente, é possível considerar que as concepções de ensino e aprendizagem de Bezerra (2016) são sustentadas pela combinação do conceito de internalização com base em Vigotski e na teoria da formação das etapas mentais e conceitos de Galperin, discutida novamente mais adiante, e elementos do construtivismo, como a relação entre desequilíbrio e reestruturação, concebida nessa teoria como uma propriedade autorregulatória do organismo no processo tendencial de equilibração da relação assimilação e acomodação.

No que se refere à questão da concepção de tarefas e problemas, para Bezerra (2016, p. 29-30), a resolução de problemas é uma "atividade" que "implica ação em nível de processos cognitivos – atenção, percepção, memória, raciocínio lógico, concentração, inteligência, esquemas, entre outros [...]". A resolução de problemas é alçada à condição de ponto de partida e orientação da aprendizagem dos conhecimentos do Cálculo Diferencial e Integral. Essa proposta toma como base o que chama de *Tarefas de Compreensão Conceitual*, uma combinação entre os passos de resolução dos problemas de Polya (1995) e as etapas de formação das ações mentais e conceitos de Galperin. Tais tarefas formam um sistema que foi apresentado aos estudantes em "ordem gradual de dificuldade de modo que na sua solução os estudantes pudessem aplicar de forma explícita ou implicitamente as etapas criadas para a resolução das *Tarefas de Compreensão Conceitual*" (Bezerra, 2016, p. 82). Não nos alongaremos muito na descrição da proposta, pois o essencial já foi apresentado.

Oliveira (2021) comunga com diversos elementos teórico-conceituais de Bezerra (2016). Apresenta uma proposta de organização de ensino para a formação da habilidade de resolver problemas de Cálculo, fundamentada no que designa de "sistema didático Gaperin-Talízina-Majmutov" (Oliveira, 2021, p. 56). Considera como núcleo desse sistema: a teoria da formação das ações mentais e conceitos de Galperin, da direção da atividade de estudo de Talizina e o ensino problematizador de Majmutov (1983).

A adjetivação desse corpo teórico como "sistema didático" se ancora em Puentes e Longarezi (2020). Para estes autores, conforme Oliveira (2021, p. 56), um sistema didático é "um conjunto inter-relacionado de objetivos educacionais, onde os princípios de sua organização, os conteúdos da educação, as formas organizacionais e os métodos de ensino estão condicionados ao alcance dos objetivos de aprendizagem adotados pela comunidade

educativa"[230]. Puentes e Longarezi (2020) também são referenciados para referendar a qualificação da combinação das teorias de Galperin e Talizina como "sistema didático".

Vale destacar o papel das teorias de Galperin e Talizina bem como de Majmutov na pesquisa de Oliveira (2021). As contribuições de Galperin decorrem da base teórica que sustenta as etapas de assimilação, já descritas, e o detalhamento da participação dos estudantes. Por sua vez, a contribuição de Talizina, além das suas investigações sobre a formação por etapas das ações mentais e dos conceitos, centra-se na direção da atividade de estudo que embasa o processo de ensino e aprendizagem em sua totalidade. Não obstante, a categoria de "problema discente"[231] é oriunda dos trabalhos de Majmutov. A síntese formulada é expressa na forma de um "sistema didático", nominado por Mendoza e Delgado (2021, p. 233) de "sistema didático Galperin-Talízina-Majmutov".

Sobre esses pressupostos, o objetivo geral a ser alcançado por Oliveira (2021, p. 24) é:

> Analisar as contribuições da utilização do sistema didático Galperin-Talízina-Majmutov no processo de desenvolvimento da habilidade de resolver de [*sic*] problemas discentes em Cálculo Diferencial e Integral em estudantes de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco.

A estruturação da proposta de organização do ensino é bastante complexa e tem como elemento central o conceito de habilidade, entendido como "um tipo de *atividade*" (Oliveira, 2021, p. 38). Mais especificamente, refere-se ao "conteúdo daquelas ações dominadas pelo homem, estruturadas em operações ordenadas e orientadas a atingir um objetivo, permitindo ao sujeito interagir com determinados objetos da realidade e com outras pessoas" (Oliveira, 2021, p. 38).

A finalidade da proposta, como é possível verificar no objetivo geral, é a formação da habilidade de "resolver problemas discentes em Cálculo Diferencial e Integral". Tal habilidade se desenvolve, segundo a autora, com base em um sistema de ações compostas por um sistema de operações que mobilizam um conjunto de conhecimentos conceituais e procedimentais na esfera de conhecimentos que são o alvo. As ações a serem apropriadas foram formuladas com amparo na proposta metodológica da Atividade de Situação Problema Discente

---

[230] Vale aqui destacar que essa conceituação adotada por Puentes e Longarezi (2020) é de autoria de Vallev e Zinnatova (2013), conforme explicitado pelos autores.

[231] O termo utilizado na versão consultada do texto de Majmutov (1983, p. 8) é "*problema docente*". Adotamos, assim como Oliveira (2021), a tradução problema discente, decorrente da teoria elaborada por Majmutov (1983), ao considerarmos que no ensino problematizado, a finalidade está ligada ao surgimento e solução do problema na perspectiva do estudante.

(ASPD), desenvolvida nos trabalhos de Mendoza e Delgado (2016b, 2020, 2021). A referida proposta foi elaborada, inicialmente, estabelecendo uma correlação entre as fases de resolução de problemas matemáticos de Polya (1995) e a Teoria da Atividade. Também ganha a forma adotada por Oliveira (2021) ao incorporar as contribuições de Majmutov (1983). Nesse momento, vale explicitar os argumentos que permitem – tanto no trabalho de Bezerra (2016) quanto na proposta de Mendoza e Delgado (2016b, 2020, 2021) e, por consequência, de Oliveira (2021) – justificar a necessidade, segundo os autores, da combinação e superação da teoria sobre a resolução de problemas desenvolvida por Polya (1995).

O argumento principal se encontra na crítica de Talízina (1988) a um número de trabalhos, dentre os quais o de Polya (1995) é expoente, dedicados a elaborar regras e indicações de modos de agir dos estudantes em uma dada direção, mas que pressupõe como existentes determinadas características, inerentes aos mesmos. Esses estudos atribuem ao trabalho pedagógico a função de apenas direcionar a forma de agir. Em oposição a esse delineamento, Talízina (1988) considera que o essencial é a formação da própria habilidade. Sustentados nessa crítica, Mendoza e Delgado (2016b) elaboram o conceito de Atividade de Situação Problema[232]. Propõem a transformação do processo de resolução de problemas, elaborado por Polya (1995), em uma proposta metodológica consubstanciada por uma teoria psicológica adequada. Tal teoria, segundo os autores, conceberia as fases de resolução de problemas como ações compostas por um sistema de operações invariantes no contexto de uma atividade. Nesse sentido, a Atividade de Situação Problema Discente se constitui como uma

> Atividade de Estudo orientada pelo objetivo de resolver problemas discentes, na zona de desenvolvimento proximal[233], em um contexto de ensino aprendizagem, no qual exista uma interação entre o professor, o estudante e a tarefa com caráter problematizador; com o uso da tecnologia disponível e de outros recursos didáticos, para transitar pelos diferentes estados do processo de assimilação de formação por etapas das ações metais (Mendoza; Delgado, 2020, p. 191).

Destacamos como essa rica base conceitual remete à proposta apresentada por Bezerra (2016), pois propõe a resolução de tarefas em que os estudantes buscam sua solução orientada por um conjunto de quatro ações. Nessa esteira, Oliveira (2021) organiza um sistema de tarefas, com determinadas particularidades, que visam à transformação em problemas a

---

[232] A designação da teoria passa de Atividade de Situação Problema para Atividade de Situação Problema Discente, em Mendoza e Delgado (2020), quando os autores qualificam a proposta ao incluir as ideias sobre *problema discente* elaboradas por Majmutov (1983).

[233] Assim como pontuado na nota de rodapé número 229, entendemos que a discussão acerca da interpretação do conceito de zona de desenvolvimento iminente que emana dessa definição, bem como a coerência da teoria evocada, em geral, não se enquadra no objetivo da presente seção.

serem resolvidos pelos estudantes. Além disso, leva em consideração a teoria da formação por etapas das ações mentais e conceitos de Galperin na direção da Atividade de Estudos de Talizina e articulada com a teoria do ensino problematizador de Majmutov. Entretanto, pensamos que há diferenças basilares entre as duas pesquisas. Pode-se apontar, dentre variados aspectos que diferenciam as duas propostas, a constelação de elementos teóricos combinados na forma de um sistema em Oliveira (2021). O destaque é para a combinação do ensino problematizador de Majmutov (1983) e a Atividade de Situação Problema Discente de Mendoza e Delgado (2016b, 2020, 2021). Tal elemento de distinção explica-se, dentre diversas outras razões, pelos momentos de realização das pesquisas, o que tem como consequência diferentes graus de desenvolvimento das teorias adotadas. Um segundo ponto de distinção, emanado da composição metodológica e conceitual, decorre da descrição das operações invariantes em Oliveira (2021). Essas operações compõem as ações e são elementos que orientam o controle. Tal sistema de operações é um modelo da Atividade de Situação Problema Discente adaptado para um conjunto de tarefas que compõem as unidades de *Funções*, *Limites* e *Derivadas*. Além disso, eles exercem papel importante na produção e análise dos dados.

Vale salientar que a descrição e separação desse sistema de operações constitui uma etapa específica a ser realizada pelo estudante – formação e implementação do Esquema da Base Orientadora Completa da Ação (EBOCA) (Gal'perin, 1989, 1992b) –, o que pode ser considerado outro elemento que diferencia as duas pesquisas. O referido esquema é a base orientadora desejada e estruturada pelo professor e estudantes, que sintetizam as condições essenciais para a execução e controle da ação. Conforme Núñez, Ramalho e Oliveira (2016), esse é um esquema externo que auxilia na reconfiguração da base orientadora dos estudantes, isto é, constitui-se uma referência à reflexão. Em Oliveira (2021), a elaboração do EBOCA objetivou-se na proposta de uma tarefa problematizadora, resolvida pela professora-pesquisadora em colaboração com os estudantes. Além disso, identificou e registrou cada operação com o intuito de compor um sistema de operações da atividade de solução de problemas discentes.

E, por fim, o ponto que consideramos mais substancial é que Oliveira (2021) atribui como sua finalidade a formação da habilidade de resolver problemas discentes. Essa distinção torna a discussão dos ciclos da atividade – levada a cabo pela resolução das tarefas – e a proposta, em sua totalidade, como uma unidade sistematizada. Isso porque a formação dessa habilidade ocorre pelo desenvolvimento das etapas que, por sua vez, decorrem da solução de problemas, pelos estudantes, com determinadas características e indicadores específicos. Vale destacar que o conteúdo almejado é a formação da habilidade – atividade – de resolver

problemas. Trata-se, pois, do *modelo do objeto,* entendido por Núñez, Ramalho e Oliveira (2016, p. 42) como aquilo que "revela o conteúdo conceitual" a ser formado e, em Oliveira (2021, p. 55), é a

> [...] habilidade de resolver problemas discentes matemáticos que envolvem a contradição entre o conhecimento conhecido e o desconhecido (pelo estudante), estabelecendo uma correlação consciente entre o conhecido e o desconhecido, com a finalidade de assimilar novos conhecimentos (matemáticos) conceituais e procedimentais.

Em suma, tanto em Bezerra (2016) quanto em Oliveira (2021) encontramos propostas delineadas com base na teoria da formação por etapas das ações mentais e conceitos de Galperin. A categoria da atividade, nessa conjuntura, possui um duplo caráter: princípio explanatório da possibilidade de conhecimento e, concomitantemente, objeto de estudo. Porém, apesar das similaridades, as teses apresentam aspectos que diferenciam as propostas e constituem suas particularidades, conforme visamos destacar.

No que se refere à concepção de ensino e aprendizagem, em Oliveira (2021), como destacado na definição da Atividade de Situação Problema Discente, o professor é considerado um sujeito promotor de situações-problema que são atravessadas pelo que a autora considera como contradições objetivas, interpretadas pela relação entre o conhecido e o desconhecido. O professor é, portanto, entendido como mediador entre o conhecido e o desconhecido pelos estudantes, como fica explícito quando Oliveira (2021, p. 60), ao justificar a adoção da teoria de Majmutov (1983) no contexto da teoria da Atividade de Situação Problema Discente, considera que ela apresenta formulações que "corroboram e complementam a fundamentação do sistema didático, tais como o papel das tarefas problematizadoras e função mediadora do professor [...]". Por sua vez, a aprendizagem e a formação da habilidade de resolver problemas discentes é interpretada pelo prisma da teoria da formação por etapas das ações mentais e conceitos de Galperin. Tal teoria tem como fundamentos a lei de transformação das funções psicointelectuais superiores de funções interpsíquicas em intrapsíquicas. De tal modo, seguindo Leontiev (2004), para quem a internalização é a formação do plano da consciência e não simplesmente a transferência da atividade externa para um suposto plano pré-existente, Galperin (2017) entende que a internalização da ação e a formação das imagens correspondentes tem papel central na formação e desenvolvimento do plano mental, sem as quais é impossível a realização da própria ação. Nesse contexto, para Oliveira (2021, p. 58), "Galperin define com clareza o processo de assimilação por meio da transformação da ação externa (material) em ação interna (psíquica) [...]".

Esse processo de assimilação na teoria de Galperin, entendido por nós como sinônimo de internalização, necessita de algumas considerações adicionais. Segundo Arievitch (2003) e Arievitch e van der Veer (1995), para Galperin, o plano mental e sua formação por meio da internalização da ação são fenômenos objetivos, isto é, possuem uma correspondência oriunda do fato de as ações mentais não se resumirem a uma transposição simples ou independente das ações materiais. Constituem-se, segundo os autores, como uma forma abreviada e dissociada da existência material, no tempo e espaço, de atuação do sujeito pela qual ele as realiza de forma similar sem a necessidade de ação direta sobre o objeto. Tal fato seria um indicativo de que as ações mentais apresentam o mesmo conteúdo objetivo das ações materiais, porém em um plano próprio.

Com base nesse elemento, Arievitch e van der Veer (1995) defendem que o conceito de internalização, apesar de carregar o estigma da fratura cartesiana entre o externo e o interno e entre o mental e o corporal/prático, pode ser considerado apropriado para caracterizar a apropriação da realidade humanizada pelos indivíduos humanos. O argumento se fundamenta na distinção – que, segundo os autores, pode ser encontrada nas obras de Galperin – entre três planos de ação: o material – dependente da manipulação com os objetos; o perceptual – sem manipulação material, mas dependente de uma ação sobre a percepção dos objetos materiais; e o plano mental – independente da presença dos objetos materiais. Desse modo, o processo de apropriação, como uma forma geral de aquisição de nova experiência para o sujeito, tem uma possível especificidade na formação do plano mental do ser humano, fato inexistente entre as outras esferas de ser. Como a internalização é o processo de formação do plano mental, e enfatizamos que em Galperin possui caráter objetivo constitutivo da atividade do sujeito, esse conceito passa a ser empregado para designar a formação e apropriação das funções interpsíquicas, transformadas em intrapsíquicas, ao mesmo tempo que superaria possíveis dicotomias e dualismos.[234]

Nesse cenário, para Oliveira (2021), a formação da habilidade ocorre, portanto, no processo de assimilação das ações externas como meios de formação de ações mentais e conceitos, que se convertem em possibilidades de atuação dos sujeitos. Com base em Núñez

[234] Destacamos que há críticas de autores que compartilham de pressupostos da teoria histórico-cultural ao conceito de internalização, especialmente no que se refere à relação entre os planos externos e internos da atividade. A título de exemplo, citamos apenas um dos problemas apontados por Radford (2021a), para quem a caracterização da similaridade da estrutura da atividade interna e externa, concomitantemente ao posicionamento da primeira como orientadora da segunda, conduz à necessidade de uma atividade orientadora da atividade interna, o que desencadearia uma cadeia em que, necessariamente, dever-se-ia assumir um primeiro plano orientador, processo que não é bem definido na teoria.

(2009), a autora considera a habilidade como "o conteúdo daquelas ações dominadas pelo homem, estruturadas em operações ordenadas e orientadas a atingir um objetivo, permitindo ao sujeito interagir com determinados objetos da realidade e com outras pessoas" (Oliveira, 2021, p. 38). Isso a conduz a entender

> [...] a habilidade de resolver problemas discentes, como um tipo de atividade, constitui um sistema de ações motivadas, cada uma composta por um sistema de operações (invariante operacional) que mobiliza um conjunto de conhecimentos conceitual e procedimental para resolver problemas discentes dentro dos limites de aplicação do Cálculo Diferencial e Integral (Função, Limite e Derivada) (Oliveira, 2021, p. 38).

No contexto de sua obra, Oliveira (2021) utiliza-se do ferramental teórico desenvolvido por Majmutov (1983) para distinguir uma série de conceitos e elaborar o que denomina de sistema de ensino, posicionando em seu centro o conceito de problema discente. Dentre os conceitos que o autor trabalha e diferencia estão os de tarefa, problema discente e situação problema (Majmutov, 1983).[235] Esse conjunto de conceitos se relaciona ao de contradição, em especial aquela engendrada na relação entre o conhecimento conhecido e o desconhecido.

Para Majmutov (1983) um problema, particularmente o problema científico como categoria lógica, é uma tarefa a ser investigada e resolvida. Assim, o problema não é identificado com a pergunta nem com a tarefa. Não é toda pergunta, segundo o autor, que expressa um problema. A pergunta pode se constituir como uma forma linguística de expressão do problema discente na forma de categoria lógico-psicológica. A tarefa, por sua vez, é a expressão de uma situação em que se manifestam condições e finalidade, isto é, dados e requisitos, expressos objetivamente no objeto, sem a relação com o sujeito. "A *tarefa* é um fenômeno *objetivo*, para o aluno existe desde o início em forma *material* (em sons ou signos), e se transforma em fenômeno subjetivo somente depois que se percebe e se toma consciência dela"[236] (Majmutov, 1983, p. 129).

A análise realizada pelo sujeito de uma situação, com o enredamento de condições e finalidade, ao ser identificada como uma relação de contradição e incorporada como necessidade – o que gera o processo de surgimento de motivos que mobilizem o sujeito em busca de elementos desconhecidos para a solução da tarefa –, transforma a tarefa em um

---

[235] É curioso que, mesmo com essas distinções, Davídov (1988) considere não estar nítida a diferenciação entre os conceitos de tarefa e problema.

[236] "La *tarea* es un fenómeno *objetivo*, para el alumno existe desde el inicio mismo en forma *material* (en sonidos o en signos), y se transforma en fenómeno subjetivo solo después que se percibe y se toma conciencia de ella".

problema discente. De tal modo, o problema discente é "um fenômeno subjetivo e existe na consciência do aluno na forma ideal, no pensamento, da mesma maneira que qualquer juízo, desde que não se aperfeiçoe logicamente e se expresse (na forma de oração) nos sons da linguagem ou em letras (signos) da escrita"[237] (Majmutov, 1983, p. 129).

Em linhas gerais, as tarefas, transformadas em problema discente, ocupam papel importante na pesquisa de Oliveira (2021) e compõem um sistema orientado à formação da habilidade de resolver problemas discentes. Dessa maneira, organizadas com base na teoria de Galperin, elas são desenvolvidas de modos distintos em cada etapa, porém apresentam suas particularidades, especialmente no que se refere ao conteúdo matemático.

Os outros dois trabalhos, Farias (2015) e Prevot (2019), anunciam, entre suas fundamentações, a Teoria da Atividade, com foco nas elaborações de Yrjö Engeström. Por isso, antes de realizarmos a exposição das particularidades das teses, debruçar-nos-emos sobre os principais elementos da teoria do pesquisador finlandês. Para tanto, apoiamo-nos em alguns textos de sua autoria, referenciados nas teses analisadas, e de comentadores de sua obra.

Kaptelinin (2005) considera que a Teoria da Atividade elaborada por Engeström apresenta particularidades, e, portanto, distanciamentos daquela desenvolvida por Leontiev e seus colaboradores, apesar da adoção de alguns de seus princípios básicos. No que se refere especificamente ao conceito de objeto, Kaptelinin (2005) entende que, decorrente da sua abordagem psicológica, o autor soviético foca no objeto pelo prisma do indivíduo, apesar de seu inextricável caráter social. Considera que Leontiev (2021) "predominantemente lida com atividades que têm lugar no nível individual, isto é, atividades como unidades da vida individual dos seres humanos, de sujeitos individuais"[238] (Kaptelinin, 2005, p. 9). Tal entendimento não interdita a consideração de sua realização coletiva, contudo, em última instância, o foco recai sobre a realização individual da atividade.

Em sua interpretação, Kaptelinin (2005) defende que o exemplo da caçada[239], elaborado por Leontiev (2004), não almeja a introdução de uma leitura referente à realização coletiva da atividade. Em vez disso, ilustra a dissociação, no plano do indivíduo, entre atividades e ações, entre motivos e fins. Em outras palavras, o objetivo de Leontiev (2004) é demonstrar, pelo prisma da história, como a dissociação entre motivos e finalidades, presentes

---

[237] "El *problema docente* es un fenómeno *subjetivo* y existe en la *conciencia* del alumno en *forma ideal*, en el pensamiento, de la misma manera que cualquier juicio, mientras no se perfeccione lógicamente y se exprese (en forma de oración) en los sonidos del lenguaje o en las letras (signos) de la escritura".

[238] "[...] was predominantly dealing with activities taking place at the individual level, that is, activities as units of life of individual human beings, individual subjects".

[239] O leitor pode encontrar esse exemplo em Leontiev (2004, p. 82).

na atividade dos indivíduos, é oriunda da divisão do trabalho na atividade coletiva. Isso, em última instância, não contradiz, mas corrobora a ideia de que seu objeto de estudos é a atividade em nível psicológico.

Tal constatação, segundo Kaptelinin (2005), foi considerada empecilho, por alguns acadêmicos, para a aplicação dos princípios dessa teoria em outras disciplinas que possuíam como objeto de estudo atividades supraindividuais. Dentre eles, cita-se Engeström (2013, 2016a) que, ao mudar o foco da análise, parte do princípio de que a atividade é estritamente coletiva. Os indivíduos, portanto, passam a ser sempre considerados pelo ponto de vista da atividade coletiva, por realizar ações em um contexto sistêmico que os relaciona com outros componentes da citada coletividade. O foco é, portanto, transferido do domínio da psicologia para a transformação organizacional (Kaptelinin, 2005; Bakhurst, 2023).

A atividade, para Engeström (2013, 2016a, 2016b), realiza-se coletivamente por comunidades. O conceito de mediação, encontrado em diversos autores que ele considera como seus antecessores, tem papel central e lhe permite *expandir* o modelo da atividade de Leontiev por criar outro, fundado nas relações entre sujeito, objeto e comunidade. As relações bilaterais entre esses elementos – sujeito e objeto, sujeito e comunidade, comunidade e objeto –, respectivamente, são mediadas por ferramentas, regras e divisão de trabalho. A relação entre esses componentes é sintetizada em um modelo geral de um sistema de atividade (Figura 11), estruturado em forma triangular com, no mínimo, seis componentes: sujeito; objeto; comunidade; regras; divisão de trabalho; instrumentos, ferramentas e signos (artefatos).

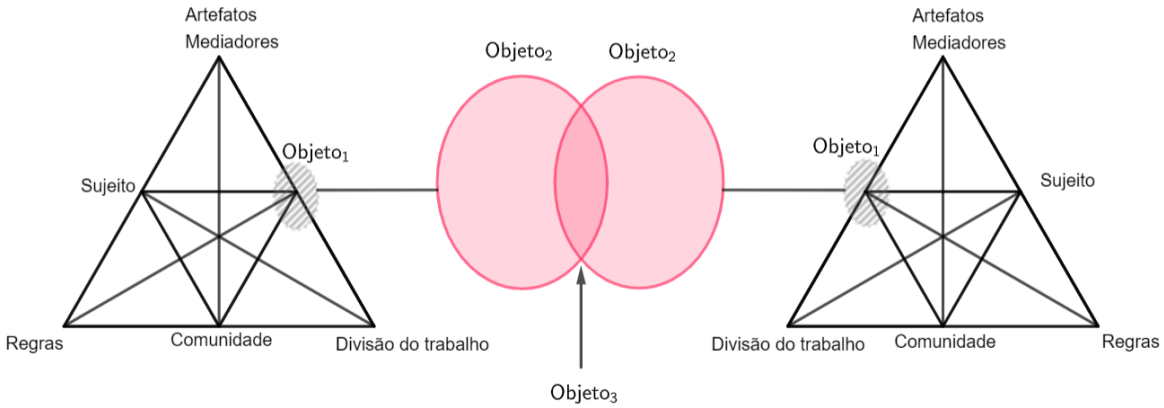
No esquema, os sujeitos são indivíduos ou subgrupo que realizam a atividade. O objeto é a "matéria prima" ou "espaço problema" para o qual a atividade se direciona (Engeström, Saninno, 2016). Os instrumentos, ferramentas e signos são os meios que auxiliam a transformar o objeto no resultado esperado. A comunidade é composta pelos indivíduos ou subgrupos que compartilham do mesmo objeto geral. As regras se referem a normas, convenções e padrões, implícitos e explícitos, que regulam as ações dentro do sistema de atividade. Por fim, a divisão do trabalho diz respeito ao modo de compartilhamento das responsabilidades pela comunidade. Além disso, no esquema, cada triângulo menor compõe um subsistema – produção, troca, consumo e distribuição –, para os quais não nos ateremos, pois consideramos que não são essenciais à discussão aqui realizada.

Figura 11 – Estrutura da atividade conforme Engeström

Fonte: Engeström (2016a, p. 105).

O sistema se torna mais complexo, pois, com base na proposta do autor (Engeström, 2016a), são engendradas pesquisas que consideram unidade de análise pelo menos dois sistemas de atividades interconectadas, o que gera "instrumentos conceituais para entender o diálogo, as perspectivas múltiplas e as redes de sistemas de atividades em interação" (Engeström, 2013, p. 71).[240]

Figura 12 – Modelo mínimo representacional de interação entre sistemas de atividades



Fonte: Engeström (2013, p. 72).

[240] Cabe citar que Engeström (2013) realiza a leitura do desenvolvimento da Teoria da Atividade destacando três gerações. A primeira, marcada pelo trabalho de Vigotski e seu modelo triangular, põe em evidência o papel da mediação. A segunda geração centra-se nos trabalhos de Leontiev e sua explicação sobre a diferença entre ação individual e atividade coletiva – a Figura 11 representa um modelo dessa atividade realizada por Engeström (2016a), que é entendido como uma expansão do modelo original de Vigotski. A terceira geração surge com o desafio especial de compreender os processos relativos à diversidade cultural (Figura 12). Nossa leitura é a de que Farias (2015) e Prevot (2019) se ancoram na leitura da segunda geração da teoria pelas lentes das elaborações de Engeström.

Para Engeström (2013), cinco princípios resumem a Teoria da Atividade. O primeiro diz respeito ao sistema coletivo de atividade, mediado por artefatos e orientado a objetos e em conexão com outros sistemas de atividades como unidade de análise primordial. Ou seja, "Os sistemas de atividade se realizam e reproduzem ao gerarem ações e operações" (Engeström, 2013, p. 72). O segundo se refere à multiplicidade de vozes de um sistema de atividade, isto é, sua composição é sempre entendida como uma comunidade com múltiplos pontos de vista, tradições e interesses, criados pela divisão de trabalho, com diferentes posições dos participantes. O terceiro confere à historicidade o papel de elemento indispensável para apreensão dos problemas e potências dos sistemas de atividades. Nesse sentido, para Engeström (2013, p. 72-73), a própria "história deve ser estudada como história local da atividade e seus objetos e como história das ideias teóricas e instrumentos que moldaram a atividade". O quarto princípio faz referência às contradições como fonte das mudanças e desenvolvimentos, em que elas são interpretadas como acumulações estruturais de tensão nos e entre sistemas de atividade. Por fim, o quinto confere a possibilidade de transformações expansivas no sistema de atividade, ocorridas quando contradições internas geram uma reconceitualização do objeto e motivo da atividade que leva à ampliação das ações e operações da atividade anterior.

Para Engeström (2013, 2016a), a aprendizagem é entendida como expansão do sistema de atividade. Em outras palavras, a aprendizagem como expansão se relaciona com a forma pela qual os sistemas de atividade se desenvolvem, bem como o modo como os sujeitos passam a agir para que isso se objetive. A contradição é alçada à categoria central para a realização do processo de expansão. Para o autor (2016a), a atividade humana possui contradições internas oriundas de sua natureza dual como produção social total e produção específica. Assim, "a contradição é renovada com o conflito entre *ações individuais* e *o sistema de atividade total*" (Engeström, 2016a, p. 109). A principal contradição emerge da divisão do trabalho e, especificamente no sistema capitalista, encontra-se sintetizada na mercadoria como encarnação da relação contraditória entre valor de uso e valor de troca. O conflito gerado por essa natureza dual da mercadoria no sistema capitalista é considerado pelo autor (2016a) como uma contradição primária, conflito interno que se localiza em cada ângulo do triângulo da atividade (Figura 11). Por sua vez, contradições secundárias são aquelas que surgem entre os ângulos, isto é, entre os componentes do modelo. A contradição terciária tem lugar quando representantes da cultura apresentam objeto e motivo de uma atividade culturalmente mais avançada como forma dominante da atividade central. Por fim, as contradições quaternárias emergem na relação da atividade central com as atividades vizinhas essenciais.

A existência de contradições no interior do sistema de atividade produz "*distúrbios*" que podem produzir modificações em seus componentes e, por fim, no caso da alteração de seu objeto, desencadear o processo de expansão da atividade. Essa expansão é o que o autor chama de atividade de aprendizagem. Nessa direção, o essencial para tal tipo de atividade é

> [...] a produção, objetiva e socialmente, de novas estruturas de atividades (incluindo novos objetos, instrumentos, etc.) a partir de ações que manifestam as contradições internas de formas precedentes da atividade em questão. A atividade de aprendizagem é um domínio da expansão das ações para uma nova atividade. Enquanto o tradicional ir-à-escola é essencialmente uma produção-de-sujeitos e a ciência tradicional é essencialmente uma atividade de produção-de-instrumentos, a atividade de aprendizagem é uma atividade de produção-de-atividade (Engeström, 2016a, p. 150).

Como modo de exemplificar, o autor cita o ingresso das crianças na escola. Nesse período, conforme Engeström (2016a), decorrente de uma cultura estabelecida, a criança é colocada em um contexto em que vivencia práticas sociais específicas que o autor denomina de ir-à-escola. Nesse cenário, ela passa a executar ações discretas e contraditórias aos motivos que a impulsionam a ir-à-escola. Socialmente, espera-se que ela entre em contato com essas ações, o que "significa que o objeto mais importante da atividade de aprendizagem nesta idade é o desenvolvimento da *própria* atividade de aprendizagem" (Engeström, 2016a, p. 160). A apropriação desse objeto ocorre pela expansão das ações discretas de aprendizagem, contraditórias no ir-à-escola, e a formação de um novo sistema de atividade de aprendizagem. Em suma, para o autor (2016a), a *atividade de aprendizagem* pode ser entendida como *aprendizagem por expansão*.

Em Engeström (2013) e Engeström e Saninno (2016), encontramos ações fundamentais para o ciclo de expansão da atividade (Figura 13). O primeiro ponto se relaciona a uma contradição primária, constituindo-se como a ação de questionamento conflituoso da prática existente. A segunda ação é a análise da situação, em busca de suas causas e mecanismos explanatórios. A modelagem é considerada a terceira ação e visa transformar as relações explanatórias em um modelo simplificado que seja observável e transmissível. O exame desse modelo figura como a quarta ação, enquanto sua implementação, a quinta. A sexta ação é a reflexão sobre o processo, e a sétima se constitui como a consolidação dos resultados em uma nova forma estável.

Figura 13 – Ações para a aprendizagem e contradições correspondentes no ciclo de aprendizagem expansiva

Fonte: Engeström (2013, p. 87).

Para Engeström (1999) o processo de expansão da atividade é, concomitantemente, um movimento constante de subsunção da externalização à internalização. Para o autor, toda nova atividade requer análise reflexiva sobre a estrutura da atividade existente, o que solicita a apropriação dos modelos e instrumentos culturais avançados como forma de superar as suas contradições internas. Nesse sentido, o começo do ciclo expansivo de um sistema de atividade apresenta forte ênfase na internalização dos modos de sua realização pelos iniciantes. Nessa fase, o processo de externalização, segundo o autor (1999, p. 33), ocorre na forma de "inovações individuais discretas"[241]. Porém, com o desenvolvimento do ciclo, a internalização passa a ganhar a forma de uma autorreflexão crítica, enquanto a externalização ganha forma de busca por soluções. Esse processo perdura até a solidificação de um novo modelo de atividade que substitua o anterior.

Com base na digressão realizada, é possível apreender com maior profundidade os determinantes teóricos emanados da teoria histórico-cultural que fundamentam as propostas de Farias (2015) e Prevot (2019). Em Farias (2015), a Atividade de Ensino é aquela que envolve "o professor como sujeito, o ensino da Matemática como objeto de estudo e o uso da tecnologia como artefatos físicos (concreto) e conceituais em direção ao objeto dentro de uma perspectiva sócio-histórica cultural" (Farias, 2015, p. 18). Apesar de se embasar em outros autores historicamente vinculados à teoria histórico-cultural, o protagonismo é assumido pela

[241] "[...] externalization occurs first in the form of discrete individual innovations".

formulação do sistema de atividades de Engeström (2013, 2016a) e da Comunidade de Práticas, com destaque aos trabalhos de Ettiene Wenger (1998) e colaboradores. Não abordaremos esta última teoria, pois entendemos que sua análise e descrição, bem como o seu papel na pesquisa de Farias (2015) não acrescentam elementos essenciais para a apreensão de nosso objeto.

Assim como em Engeström (2016a), o conceito de mediação tem posição especial no trabalho de Farias (2015). A autora afirma que a mediação é "um aspecto fundamental na Atividade e que a comunicação, a interação, o compartilhamento de ideias constituem-se aspectos inerentes à Teoria da Atividade" (Farias, 2015, p. 16). Em diversos pontos, esse conceito é apontado como determinante para a aprendizagem dos estudantes na atividade de ensino. Inclusive é alicerçada na presença desses elementos mediadores que a utilização da categoria da atividade é justificada na pesquisa, pois as mudanças ocorridas no seu processo são entendidas com base neles. Nesse sentido,

> [...] a Atividade é tomada por um processo de incessantes mudanças decorrentes de conflitos e rupturas, onde se inserem concepções múltiplas da comunidade, promovendo transformações que podem ser compreendidas do ponto de vista histórico e sociocultural, tendo em vista os mediadores materiais e simbólicos (conceituais) e essa é a nossa perspectiva quanto à importância da Atividade para esta pesquisa (Farias, 2015, p. 34).

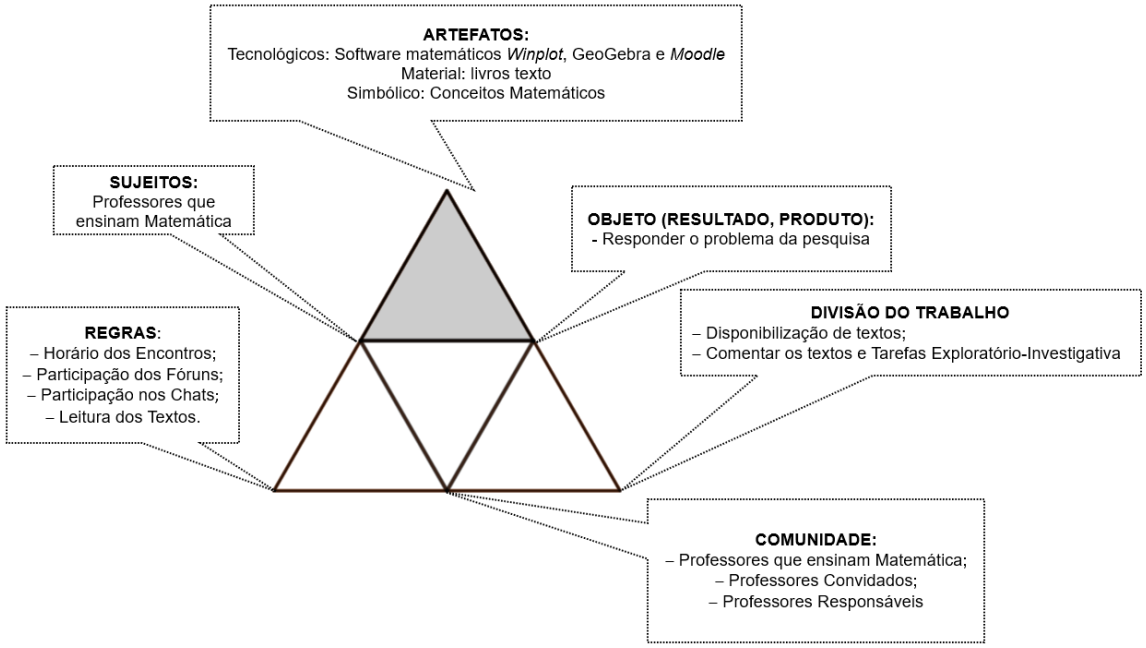
O trabalho de pesquisa foi organizado em encontros síncronos e atividades assíncronas, realizados de forma remota, com professores de matemática. Em cada um desses encontros, em geral, foram discutidos textos previamente selecionados, além da análise de *tarefas exploratório-investigativas* de ensino de Cálculo voltadas ao Ensino Médio. Dentre o conjunto dos participantes, encontravam-se professores convidados, que eram encarregados da condução de determinadas ações. Na exposição da análise desse processo, encontramos a sua modelação com base no sistema de atividade, pois, no entendimento da autora, a Teoria da Atividade fornece

> [...] fundamentos que podem ser aplicados à natureza de qualquer Atividade. Neste trabalho de pesquisa atentamos às Atividades de Ensino como ações que envolvem a mediação do sujeito, condicionada às ferramentas conceituais e materiais e pela qual é situada em um contexto e dirigida a um resultado. Além disso, como afirma Kuutti (1996), possibilita analisar a transformação do objeto de estudo (problema da pesquisa - motivo da existência da atividade) em um resultado. [...] Além disso, podemos afirmar que na forma de organização do trabalho metodológico da pesquisa o conceito de Atividade foi considerado (Farias, 2015, p. 252).

A autora interpreta que o sistema de atividade gerado (Figura 14) possui como motivo responder ao problema da pesquisa. Isso seria uma pré-condição necessária para a

realização da atividade de ensino e ao engajamento dos professores participantes, sujeitos da atividade. O objeto, portanto, é anunciado como a parte objetiva da pesquisa, seus possíveis resultados/respostas ao problema. As regras são os princípios e regulamentos implícitos e explícitos da comunidade, formada pelos professores participantes, os professores convidados, a pesquisadora e os professores responsáveis. Ditas regras eram compostas pelos horários dos encontros, a participação nos Fóruns e nos *Chats*, bem como a leitura prévia dos textos sugeridos. Por conseguinte, pressupõem a existência de uma divisão do trabalho que confere a cada membro da comunidade um papel e um conjunto de responsabilidades. Por sua vez, os artefatos eram os softwares matemáticos, plataformas, livros textos, artigos e os conceitos matemáticos abordados.

Figura 14 – Esquema de representação do triângulo do que Farias (2015) denomina de Atividade de Ensino de sua pesquisa



Fonte: Farias (2015, p. 253).

Nesses termos, a Teoria da Atividade de Engeström (2013, 2016a) é, em Farias (2015), considerada um elemento importante, apesar de sua força se concentrar na função interpretativa, isto é, como instrumento analítico. Isso é percebido na assertiva de que seus fundamentos "podem ser aplicados à natureza de qualquer Atividade" (Farias, 2015, p. 252). Tal entendimento está em consonância com a concepção ocidental da referida teoria, que tem em Engeström um de seus maiores representantes. Em dita interpretação, a atividade é objeto de estudo ou de manejo científico, enquanto, entre os representantes soviéticos, é entendida como princípio explanatório, o que conduz a problemas científicos distintos (Hakkarainen,

2004). Com fins comparativos, basta lembrar que a proposta de Galperin parte da atividade como princípio explicativo da formação das ações mentais e da cognição em geral. Com base nisso, ele propõe a formação dessas ações com fins de sua apreensão nesse processo. Em Engeström (2016a), no entanto, a atividade é considerada um método de modelar sistemas dela, não para entender o fenômeno, mas para facilitar sua prática, em especial um modo de modelação de transformações organizacionais (Bakhurst, 2023). A função interpretativa da atividade aparece, na análise de Farias (2015), ao detalhar os elementos que compõem o sistema para auxiliar na modelagem da pesquisa, todavia sem adquirir uma função explicativa de sua constituição e das transformações ocorridas no curso realizado.

Desse modo, a autora interpreta o processo de aprendizagem – ou aprendizagem expansiva –, decorrente da pesquisa realizada, com base nos princípios que resumem a Teoria da Atividade (Engeström, 2013), considerando que o "4º princípio (Contradições internas) e o 5º princípio (Transformações expansivas) se consolidaram na pesquisa, por meio das discussões realizadas nos Chat, Fóruns, em cada encontro síncrono e assíncrono" o que lhe conduz à interpretação de que as

> [...] contradições muitas vezes sobre a problemática da pesquisa ou assuntos diversos promoveram debates quantitativos e qualitativos, expandindo o sistema de Atividade, considerando que os momentos de reflexão sobre as leituras realizadas, apreciação das Tarefas Exploratório–investigativas, na elaboração de Tarefas e questões colocadas pelos Professores Docentes – mediadores dos encontros junto aos PP, foram significamente [*sic*] relevantes, no sentido que contradições manifestaram-se como fontes de mudança, transformação da Atividade e de desenvolvimento para todos (Farias, 2015, p. 256)

No que se refere às tarefas, denominadas de *tarefas exploratório-investigativas*, elas foram sugeridas na perspectiva de abordar "problemas envolvendo conceitos de Cálculo, tendo como ponto de partida os conteúdos inerentes ao currículo proposto no Ensino Médio, em particular o estudo de função" (Farias, 2015, p. 156). O intuito era que, na realização de sua análise, os professores participantes "procurassem perceber o papel desempenhado pelo conceito de Função, valorizando a ideia do pensamento funcional, inerente a noções de variação e dependência" (Farias, 2016, p. 157). Encontramos indícios que apontam para duas finalidades na análise dessas tarefas: desenvolvimento da analiticidade e criticidade dos professores, e utilização de material para apreender os elementos considerados centrais para a proposta de ensino de Cálculo no Ensino Médio.

Importa-nos frisar que as concepções de atividade, assim como sobre ensino e aprendizagem, são distintas entre as propostas analisadas. Tais diferenciações são expressões

dos contrastes existentes entre as concepções soviéticas e ocidentais, sobretudo no que diz respeito à referida categoria. Dentre esses contrastes, é possível grifar as fundamentações teóricas que alicerçam as propostas de Leontiev e Engeström. Conforme Cong-Lem (2022a, 2022b), os trabalhos de Leontiev têm suas raízes fortemente estaqueadas no marxismo-leninismo, bem como em um purismo metodológico. Deste deriva a sua condenação a qualquer polissemia metodológica, uma "sopa eclética que cozinham agora, cada um à sua maneira, psicólogos que buscam reputação de 'mentes abertas'" (Leontiev, 2021, p. 26). Desse modo,

> [...] a ciência psicológica soviética seguiu um caminho completamente distinto. Seu pluralismo metodológico foi contraposto por uma metodologia marxista-leninista única, que permitiu penetrar a real natureza do psiquismo, da consciência humana. Foram iniciadas buscas persistentes por uma solução para os principais problemas teóricos da psicologia com base no marxismo (Leontiev, 2021, p. 26).

Por outro lado, o pluralismo metodológico é um dos elementos fundamentais da proposta de Engeström (2013, 2016a). Para Kaptelinin (2005), na teorização da atividade de Engeström, os postulados e elaborações teóricas de Leontiev são apenas ponto de referência de uma combinação de várias outras fontes e teorias. A intenção de Engeström (1999, p. 20) é a constituição de um arcabouço conceitual multidisciplinar como sustentáculo de uma nova teoria:

> Muitos podem temer que a teoria da atividade se tornará uma combinação eclética de ideias antes de ter a chance de redefinir sua própria essência. Contudo, ao entender que isso é uma possibilidade, antecipo que a verdadeira reconstrução expansiva da teoria da atividade irá conduzir, na verdade, a um novo tipo de teoria.[242]

O ecletismo teórico da formulação de Engeström permite que Prevot (2019) a empregue no desenvolvimento de sua pesquisa. Nela, o autor desenvolve, apresenta e aplica uma abordagem metodológica para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral em cursos de Engenharia, em combinação com a Aprendizagem Baseada em Problemas e a Modelagem Matemática, incorporadas ao *m-learning*[243] fundamentado na Teoria da Atividade. A intenção, nas palavras do autor, foi "mostrar que esses elementos combinados podem formar um arcabouço metodológico mais robusto, uma vez que possuem convergências e que são

[242] "Some may fear that activity theory will turn into an eclectic combination of ideas before it has a chance to redefine its own core. Although I realise that such a potential exists, I anticipate that the current expansive reconstruction of activity theory will actually lead to a new type of theory".
[243] *M-learning* ou *Mobile Learning* é uma modalidade de *E-Learning*, ou *Eletronic Learning*, que se utiliza de dispositivo eletrônicos móveis como instrumentos de aprendizagem.

complementares, nos pontos em que isoladamente poderiam ser mais vulneráveis" (Prevot, 2019, p. 141).

Em diversos pontos da tese, encontram-se indícios que nos permitem inferir que o conceito de atividade, com base em Engeström (2013), é um recurso metodológico para justificar a concepção de organização de ensino que reverbera preceitos do que atualmente tem se popularizado com a denominação de *metodologias ativas*. Identificamos tal entendimento em um trecho no qual o autor explica os motivos da adoção das referidas metodologias em seu trabalho:

> [...] as três metodologias convergem, pelo fato delas valorizarem e se basearem no trabalho em grupo, de que o ensino e a aprendizagem passam a ser **centradas no aluno** e de que o professor assume o **papel de facilitador**, **orientador** e **parceiro** no processo de ensino e aprendizagem. Em consequência, as três teorias trabalham com a **construção do conhecimento**, **a partir de situações reais** (ABP, MM), pela **interação com o meio** (TA), pela existência de fatores de motivação (Prevot, 2019, p. 141, grifo nosso).

Essa leitura da Teoria da Atividade como uma metodologia ativa também aparece como um pressuposto do trabalho, expresso em uma das perguntas de pesquisa: "O que mostram as pesquisas de professores pesquisadores sobre o uso de **metodologias ativas**, tais como a ABP/PBL, a MM e a TA no ensino de CDI, em cursos de Engenharia?" (Prevot, 2019, p. 22, grifo nosso). É possível inferir que a Teoria da Atividade tem a função de justificar uma concepção de ensino que prioriza: a "interação com o meio", a "existência de fatores de motivação", assim como a centralidade do estudante e a crítica do modelo tradicional em que o estudante ocupa papel de elemento passivo de influência (Prevot, 2019). Tais traços ficam evidentes ao se considerar que os fundamentos teóricos dessa teoria apenas são empregados na forma de prescrições metodológicas.

É sintomático dessa postura teórico-metodológica que, dentre as elaborações da Teoria da Atividade, o autor tenha adotado a formulação de Engeström (2013). Isso é coerente com a proposta de Prevot (2019), pois a Teoria da Atividade de Engeström combina maleabilidade teórica (Bakhurst, 2023) com o pressuposto do desenvolvimento coletivo do sistema de atividade.

> Nesse sentido, a ABP, MM e a *m-learning*, quando associadas à TA, possuem o reforço e a valorização dos aspectos sociais, humanos e cognitivos, em especial, o **trabalho em grupo**, fazendo com que a aplicação das duas primeiras não se limite apenas à [*sic*] solucionar problemas, valorizando e melhorando, de maneira significativa, a motivação e a relevância dos conteúdos trabalhados nas atividades da ABP e da MM (Prevot, 2019, p. 143, negrito nosso).

Diante do exposto, observam-se indícios de uma concepção funcional da atividade, isto é, categoria indicadora das condições de se contrapor às teorias que concebem o estudante como um elemento passivo do processo de aprendizagem. Desse modo, a atividade não possui centralidade, pois é utilizada para justificação ou fundamentação de posturas metodológicas. Nessa perspectiva, "a TA é um aporte teórico robusto, para aplicação da *m-learning* e para proporcionar-lhe sentido" (Prevot, 2019, p. 143).

Nesse quadro conceitual, encontramos uma inversão teórico-metodológica que é condizente com o contexto geral da pesquisa, expressa na Teoria da Atividade como componente de justificativa da escolha da modalidade de *m-learning*. Nesse sentido, para o autor a Teoria da Atividade concebe

> [...] a aprendizagem como um processo de construção de conhecimento que ocorre num meio social, mediado por artefatos, neste caso, a tecnologia, a qual, no atual estado de arte, fornece condições para que a aprendizagem ocorra em qualquer local e momento. Nesta visão, a TA pode ser considerada, para dar suporte teórico a teorias de aprendizagem móvel (Prevot, 2019, p. 124).

Como consta nas linhas citadas, a aprendizagem é vista como um processo de construção mediada por artefatos. Em sua pesquisa, desenvolvida na forma de um minicurso de extensão, dentre os artefatos disponíveis, cabe aos *smartphones* o protagonismo.

No que diz respeito ao conceito de problema, Prevot (2019) o concebe nos marcos da Atividade Baseada em Problemas. Para o autor, essa proposta "promove uma aprendizagem baseada na construção de conhecimentos, o que ultrapassa a mera recepção passiva e acumulação de informações, as quais muitas vezes não levam o aluno a compreender o porquê de estar aprendendo determinados conteúdos" (Prevot, 2019, p. 43-44). Para estruturar sua proposta, Prevot (2019) se alicerça em um esquema que organiza em dez passos a proposta da Atividade Baseada em Problemas formulado por Ribeiro (2008). Esses passos são: 1) introdução e definição do problema, com ajuda do tutor/professor; 2) levantamento das hipóteses; 3) tentativa de solução com base em conhecimentos prévios; 4) levantamento de pontos ou questões que possam ser esclarecidos pelo professor/tutor; 5) planejamento do trabalho do grupo; 6) estudos independentes; 7) compartilhamento de informações no grupo; 8) aplicação dos conhecimentos na solução do problema; 9) apresentação das soluções do grupo; 10) autoavaliação do processo e de pares. O conceito de problema, por sua vez, é concebido, dentro dos marcos teóricos da referida proposta metodológica, como um de seus elementos centrais. No item 3.1.2 de sua tese, intitulado *Características de um Problema na ABP*, Prevot

(2019) descreve distintos aspectos desejáveis de um problema, sustentando-se em seus preceitos teóricos. Também encontramos uma definição de problema na proposta metodológica adotada, entendido como "[...] a melhor forma de se fazer algo (um projeto de engenharia, um tratamento médico, uma obra de arte, uma composição musical, etc.), cujo caminho é desconhecido" (Ribeiro, 2008 *apud* Prevot, 2019, p. 54).

A exposição dos elementos aqui abordados nos permite apontar o contexto e a finalidade da proposição das tarefas nas propostas analisadas. Desse modo, a análise, a ser desenvolvida na seção seguinte, permitirá que sejam apontadas as relações entre elas, as finalidades delineadas pelos professores e as condições oriundas de sua proposição, indicando as relações entre os seus componentes e o conteúdo da atividade na qual entram em movimento.

6.2 O CONTEÚDO MATEMÁTICO DO OBJETO DE ENSINO DO CÁLCULO

Na presente seção, ocupar-nos-emos da análise do conteúdo matemático e seus desdobramentos nas propostas descritas pelas teses escolhidas. Isso é proveniente do entendimento de que as tarefas e/ou problemas, no contexto do ensino do objeto do Cálculo, são essenciais para as organizações de ensino descritas nos trabalhos que eles integram. É a partir deles que se materializam as intencionalidades almejadas pelos professores-pesquisadores. Além disso, indicam determinadas condições para que o processo de objetivação do objeto de ensino ocorra. De tal modo, as tarefas/problemas são entendidos por nós como momentos do processo de ensino que fornecem direção para as relações estabelecidas entre estudantes e professor. Nesse sentido, possibilitam ao professor apontar a intencionalidade e direção da aprendizagem a ser realizada, e ao estudante indicar ao professor o que é necessário para que isso ocorra, em um processo dialético e unitário de desenvolvimento do ensino (Roth; Radford, 2010, 2011). Nesse contexto, torna-se importante a análise das tarefas no intuito de apreender, como processo objetivado e descrito, o objeto de ensino do Cálculo em seu movimento constitutivo.

Convém explicitar que, conforme detalhado no primeiro capítulo, focamos nos conceitos de derivada e integral, delimitadores da seleção do material de análise, pois eles são considerados nucleares à constituição do campo de saberes que se denomina Cálculo. Entretanto, devido às particularidades dos trabalhos, a proporção de tarefas que se concentram no conceito de derivada é maior que as centradas no conceito de integral. Isso fica evidente, por exemplo, na não abordagem do conceito de integral por Oliveira (2021), decorrente da decretação de estado de pandemia no período de realização de sua proposta. Além disso, em

Bezerra (2016), Oliveira (2021) e Farias (2015), como consequência da abordagem *standard* do Cálculo, isto é, do currículo baseado na sequência Cauchy-Weierstrass, é adotado, como base, o conceito de limite.

Nesse contexto, decidimos analisar algumas tarefas antecedentes ao conceito de derivada que cumpriam o papel de seu fundamento lógico. A escolha pela análise de um conjunto de tarefas representativas dos principais traços dos conceitos também foi utilizada ao expormos aquelas relativas ao conceito de derivada e integral. Em geral, a opção foi por tarefas que possuíssem papel introdutório ou que fossem representantes de alguma característica importante para auxiliar-nos na apropriação do conteúdo do objeto de ensino.

Como consequência das escolhas realizadas, a presente seção será subdividida em três subseções. Na primeira, o leitor encontrará uma discussão sobre as tarefas voltadas ao ensino dos conceitos de função e limite; na segunda, sobre o conceito de derivada. A terceira se dedicará à análise do conceito de integral.

6.2.1 Análise do conteúdo matemático das tarefas relativas aos conceitos de função e limite

Selecionamos, para a exposição da análise desta subseção, quatro tarefas propostas por Bezerra (2016), três por Oliveira (2021) e uma por Farias (2015).

A primeira tarefa (Quadro 2) que compunha a fase diagnóstica e foi analisada por Bezerra (2016), no contexto da etapa motivacional, possui a seguinte formulação:

Quadro 2 – Tarefa 01 – Unidade I – Bezerra (2016)

Uma fábrica tem três anos de funcionamento e produz por ano um determinado número de unidades de um artigo; devido ao desgaste das máquinas a produção começou a diminuir. A função $f(x) = 8000 - 1000x$ representa os dados da tabela abaixo:

x (anos)	1	2	3
y (prod.)	7000	6000	5000

Responder:

a) Qual será o prognóstico da produção para os próximos dois anos? Justifique sua resposta.
b) Seguindo o mesmo comportamento de produção, em quanto tempo a produção pode parar? Justifique sua resposta.
c) Represente graficamente a função $f(x)$.

Fonte: Bezerra (2016, p. 92).

Segundo a autora (2016, p. 92), o conceito a ser abordado é o de "Funções e Modelos" com o objetivo de "avaliar a compreensão dos estudantes acerca da aplicação do conceito de Função". Destaca que o "contexto essencial" é "solucionar um modelo de função afim para determinar um prognóstico" (Bezerra, 2016, p. 107).

Em Oliveira (2021), dentre as tarefas da avaliação diagnóstica inicial, encontra-se a seguinte:

Quadro 3 – Tarefa 4.AD e Tarefa IV-MO[244] – Oliveira (2021)

Desde o início do mês, o reservatório de água de um condomínio vem perdendo água uma taxa constante. No dia 12, o reservatório está com 36 litros d'água; no dia 21, está apenas com 18 litros. *a) Expresse a quantidade de água no reservatório em função do tempo.* *b) Quantos litros de água havia no reservatório no dia 4?* *c) Em quantos dias ficarão sem água, a partir do dia 21? Justifique.*

Fonte: Oliveira (2021, p. 77).

O objetivo aqui é "identificar o nível dos estudantes com relação à habilidade de resolver problemas utilizando o conhecimento conceitual e procedimental de Função" (Oliveira, 2021, p. 75) e, mais especificamente, "coletar dados referentes ao desempenho dos participantes durante a realização das 4 ações, ou seja, na formulação do problema discente, na construção do núcleo conceitual e procedimental, na solução e na análise da sua resolução" (Oliveira, 2021, p. 77). Para a autora, a forma de realização das ações é material, estruturada sobre a base da contradição entre o conceito de função linear e o processo de conversão da língua materna para a representação na linguagem algébrica. Isso implica a contradição entre o conhecido – conceito de função – e o desconhecido – conversão entre as diferentes representações. Espera-se que o estudante consiga "fazer a relação entre a representação da função por meio de palavras, modelando a função com uma representação algébrica, para conseguir responder o que está sendo solicitado no problema" (Oliveira, 2021, p. 77). A mesma tarefa é proposta, novamente, na etapa motivacional, pois grande parte dos estudantes apresentaram dificuldades em sua resolução.

Em uma primeira aproximação às tarefas descritas, consideradas como situação do cotidiano pelas autoras, é possível notar semelhanças relativas ao conteúdo almejado, bem

[244] As abreviações que aparecem na identificação das tarefas descritas no trabalho de Oliveira (2021) dizem respeito à relação entre a etapa da teoria da formação das ações mentais e conceitos e o papel da avaliação desenvolvida da pesquisa. As siglas AD, MO, OE, EM, EV e AF significam, respectivamente, Avaliação Diagnóstica Inicial, Motivação e Atualização, Orientação e Estruturação do EBOCA da ASPD, Desenvolvimento das Ações na Forma Materializada, Desenvolvimento das Ações na Forma Verbal Externa e Avaliação Diagnóstica Final.

como à intencionalidade de suas proposições. Consideramos a tarefa proposta por Bezerra (2016) com ausências, em sua formulação, de aspectos que possibilitem, ao estudante, estruturar sua própria linha de solução. Pode-se verificar que, na sua formulação, não se estabelece, explicitamente, a relação entre a expressão algébrica da função e a situação apresentada, mas sim entre a expressão algébrica e uma representação tabular. Além disso, as variáveis x e y, nessa representação, vinculam-se a duas qualidades distintas, x a *anos* – unidade de medida da grandeza tempo – e y à grandeza produção. Isso tem implicações, pois entendemos ser possível, com os dados presentes, elaborar distintas interpretações. Para que a função seja de fato representada por um segmento de reta, conforme almejado pela autora, é preciso que a variável y represente a capacidade de produção da fábrica, e não a produção efetiva. Tal fato se explica pela observação dos momentos singulares em que, ao se igualar a variável tempo a um número racional não inteiro – por exemplo $x = 0{,}5$ –, não se obterá a quantidade de unidades produzidas – no exemplo $y = 7500$ –, pois o cálculo dessa quantidade não possui um movimento linear, haja vista que ela diminui no decorrer do ano. Além disso, no final do primeiro ano o total de unidades produzidas será menor que a capacidade de produção na metade do mesmo período – no caso analisado $y = 7000$. Outra forma de interpretar é considerar y a representação da produção anual e x o tempo medido em anos, porém com o campo de variação do tempo determinado pelo conjunto dos números naturais, o que não expressaria uma função contínua.

Para a autora, a ação essencial exigida tem como cerne a utilização do conceito de função afim para a solução do que é solicitado na tarefa. Questionamo-nos, contudo, quais os nexos conceituais a serem destacados do conceito de função, visto que não está em primeiro plano, conforme é possível perceber, a relação de variação e acumulação de relações quantitativas entre grandezas variáveis, em geral, num determinado campo de variação.

No caso de Oliveira (2021), a tarefa conduz ao conceito desejado ao informar que o reservatório perde água a uma taxa constante. Vale salientar que a indicação do conceito de taxa remete ao conceito de derivada, ideia importante quando o objetivo é abordar os conceitos do Cálculo. Além disso, há uma expressão clara de quais grandezas são necessárias no estabelecimento da relação – a quantidade de água no reservatório e o tempo. Por outro lado, não é exigida do estudante a identificação das variáveis, pois elas estão destacadas e relacionadas de antemão. Além disso, apesar de tratar de um nexo importante dos conceitos de função – campo de variação (Sousa, 2004) –, a finalidade da tarefa não explicita de modo claro a sua intencionalidade, uma vez que expressar a quantidade de água em função do tempo não necessariamente precisa ser realizado por meio da representação algébrica. O estudante pode solucionar os demais itens com a adoção de um procedimento aritmético, por meio de uma

tabela de valores, ou ainda com o auxílio da construção de um gráfico, o que responderia ao exigido na primeira questão.

Outro ponto a ser destacado remete aos aspectos pelos quais a tarefa é proposta com a pressuposição de que o conceito de função linear é o conhecido, e a conversão entre representações desse conceito é o desconhecido. Não é necessário adotar uma fundamentação teórica como a de Duval (2009) – divergente da teoria histórico-cultural –, que evidencia, entre outros aspectos, o papel do processo de conversão entre sistemas de representações distintos, em especial sistemas semióticos, para que se considere problemático conceber que o estudante tenha se apropriado do conceito de função linear sem que seja capaz de realizar ditas conversões. Basta apenas questionarmos acerca da possibilidade de apropriação da abstração substancial do conceito de função sem a realização de conversões entre distintas representações. Grife-se que, após a apresentação dessa tarefa na fase motivacional, a autora descreve que foi realizada "[...] uma abordagem sobre o núcleo conceitual e procedimental envolvendo Função e suas diferentes representações [...]" (Oliveira, 2021, p. 140). A afirmação gerou-nos curiosidade sobre quais elementos e relações comporiam tal núcleo, uma vez que não encontramos indicações sobre isso no trabalho.

Essa parte introdutória é chamada de fase diagnóstica por Bezerra (2016) e faz parte da avaliação diagnóstica inicial por Oliveira (2021). É seguida, em Bezerra (2016), pela proposição de tarefas para a introdução do conceito de limite e, em Oliveira (2021), pela etapa de motivação e atualização. Oliveira (2021), além da tarefa analisada, propõe outras três com a finalidade de discutir o conceito de problema com os estudantes. A primeira envolve soma simples, a segunda é relativa ao quadrado mágico de três linhas e três colunas, no qual a soma de cada linha, coluna ou diagonal deve ser igual a quinze, e a última é a do cálculo do limite de uma função particular. Não descreveremos as três tarefas, apenas a intenção da autora ao propô-las. A finalidade é discutir, com os estudantes, a concepção segundo a qual um problema depende do modo como o sujeito enfrenta sua resolução. Assim, não o considera algo a ser realizado no nível automatizado ou que está além de sua capacidade de solucioná-lo. Dessa forma, na interpretação da autora (Oliveira, 2021, p. 138), somente "se a resolução for efetivada de forma à estimular o raciocínio do estudante e tenha alguma novidade para ele, ou seja, se o estudante conseguir articular os conhecimentos já adquiridos com novos conhecimentos, logo tem-se configurado um problema para este aluno". Fundamentada nessa concepção, conduz o diálogo em direção a uma reclassificação das referidas tarefas, e à compreensão de que somente a segunda pode se constituir como problema para a turma.

Seguido desse grupo de tarefas, Oliveira (2021) elabora uma outra com o intuito de orientar e estruturar o Esquema da Base Completa de Orientação da Ação da Atividade de Situação Problema Discente, redigida do seguinte modo:

Quadro 4 – Tarefa 1.EB – Oliveira (2021)

Considerando $f(x) = x^2 - 4x + 3$, de qual valor $f(x)$ se aproxima quando x se aproxima de 4 por ambos os lados, mas não pode ser 4?

Fonte: Oliveira (2021, p. 124).

A tarefa foi proposta para ser resolvida pelos estudantes com orientação da professora-pesquisadora. Sua finalidade se volta à identificação das operações realizadas em cada ação de resolução de problemas para compor o sistema invariante de operações da Atividade de Situação Problema Discente. Sua objetivação ocorreu na forma de um cartão de orientação, com a função de orientação geral no processo de resolução de problemas. Como conhecimentos necessários, a autora cita o conceito de função, bem como "a ideia matemática de proximidade" (Oliveira, 2021, p. 124).

Na sequência utiliza-se de tarefas similares, com alternância entre as famílias de funções envolvidas: função quadrática, função racional e função definida por partes. Tem a intenção de explorar o conceito intuitivo de limite pela ideia de aproximação. Além disso, busca a conversão das representações das funções da forma algébrica para a tabular e gráfica. Isso, segundo a autora, requer um conhecimento procedimental acerca da movimentação dos pontos associados à ideia de proximidade, pois os "estudantes tem domínio de representações matemáticas de elementos estáticos e desconhecem a representação matemática de elementos dinâmicos" (Oliveira, 2021, p. 126). O desconhecido, elevado a elemento constituidor da finalidade dessa tarefa, é o significado de "se $x \to a$ então $f(x) \to L$. (considerando a ideia matemática de *muito próximo* por *ambos os lados*)" (Oliveira, 2021, p. 126).

Nesse ponto, cabe-nos tensionar sobre a relação entre o estático e o dinâmico, sustentada nas discussões realizadas no capítulo 3. É possível inferir que a ausência da análise ontológica sobre o objeto do Cálculo pode engendrar situações, propostas pelos professores, em que os estudantes entendam o conceito de função como um processo de correlação entre elementos de dois conjuntos distintos de modo estático. Nesse caso, busca coordenar esse entendimento com a ideia de movimento e variação no estudo do Cálculo, e, de modo específico, no estudo do conceito de limite. O professor de Cálculo, por sua vez, necessita tomar posição diante dessas alternativas. Isso exige-lhe conhecimento sobre as nuances envolvidas

nesses distintos modos de abordagem do conceito. Independentemente de qualquer escolha, é mister, no ensino que busca a formação do pensamento teórico dos estudantes, considerar o que temos defendido como relação essencial do Cálculo: relação de variação e acumulação de relações quantitativas entre grandezas variáveis em geral. Tal essencialidade tem suas bases na relação essencial do conhecimento algébrico: "**relação quantitativa entre as grandezas variáveis de forma geral**" (Panossian, 2014, p. 110).

Em Oliveira (2021), é possível perceber uma ênfase na interpretação dinâmica, bem como na ideia de proximidade, por enfatizar o "movimento" de x no processo de resolução do problema. Essa abordagem é sustentada nas metáforas[245] do movimento, da aproximação e da proximidade (Williams, 1991; Oehrtman, 2009). Um primeiro ponto a ser levantado é sobre a que se refere a autora com uma "ideia matemática de proximidade". Quando podemos considerar, dentro do conjunto dos reais ou na reta real que dois valores estão próximos? Quão próximo seria o suficiente para delimitarmos o limite da função?

Williams (1991), em uma pesquisa com estudantes sobre suas concepções de limite, encontrou, entre as mais constantes, justamente aquelas ligadas ao movimento e com base na ideia de proximidade. Para o autor, os estudantes interpretam as palavras *aproximando* e *chegando perto* de duas possíveis maneiras:

> [...] como descrevendo o processo físico de avaliação de uma função em diferentes números, que são escolhidos ao longo do tempo para estar cada vez mais perto do valor s, ou como descrevendo o processo mental de imaginar os pontos sobre um gráfico movendo cada vez mais perto do ponto limite[246] (Williams, 1991, p. 228).

Essa última forma de pensamento é bastante similar à intenção da tarefa analisada. Na descrição de diálogos realizados na aula em que foi proposta, encontramos a seguinte

---

[245] Duarte (2001), na análise das tentativas de aproximação entre Piaget e Vigotski dentro dos quadros do construtivismo, realiza uma crítica ao uso do conceito de metáfora, posicionando-o como parte das análises discursivas. Para o autor (2001, p. 100), a escolha do termo *metáfora* ao invés de *conceito* possivelmente é realizada devido a este último poder "levar à idéia de uma representação mental de algo que tenha existência objetiva e poderia também levar à idéia de uma teoria na qual os vários conceitos articulam-se de forma coerente, numa relação parte e todo". Apesar de concordarmos com o argumento utilizado, e pela leitura realizada por Duarte (2001) dos autores que ele analisa, optamos por manter o termo metáfora, primeiramente para nos atermos aos termos empregados pelos autores por nós referenciados, depois por realizarmos uma leitura do contexto de seu uso. Tal movimento permite-nos interpretar a metáfora, nesse cenário, como uma espécie de analogia das imagens oriundas da vida cotidiana transpostas, por meio da linguagem, para o plano do estudo dos conceitos matemáticos. Cabe também frisar que a utilização, na análise, de autores que não comungam com os princípios da teoria histórico-cultural, tem caráter pontual.

[246] "[…] as describing the physical process of evaluating a function at different numbers, which are chosen over time to be closer and closer to the value s, or as describing the mental process of imagining the points on a graph moving closer and closer to the limit point".

passagem que corrobora nossa interpretação: "PR[247] – *De acordo com as condições, ele realmente está em movimento...se aproximando do 4 por ambos os lados...e assumindo diferentes valores nesta movimentação... Daqui a pouco, vamos pensar numa estratégia para encontrar o resultado*" (Oliveira, 2021, p. 145). As linhas que transcrevem parte do diálogo também podem ser associadas à metáfora da proximidade, que possivelmente emerge de uma interpretação evocadora de imagens de espaço, composto por pontos ilustradores das localizações e distâncias (Oehrtman, 2009). Porém, é possível contrastar a metáfora do movimento com a da proximidade quando Oliveira (2021, p. 162) indaga aos estudantes "como representar matematicamente algo que é muito muito próximo, quase igual" e não obtém respostas, "pois o conhecimento conhecido e dominado por eles é apenas de *igual* $(=)$, *maior*$(>)$, *menor* $(<)$ ou *diferente* $(\neq)$, ainda não conhecem *tender à* $(\rightarrow)$". Ou seja, na narrativa subjaz uma interpretação que confunde a relação de aproximação, representada pelo símbolo $\approx$, com processo de limite ou, caso queira, com a ideia de aproximação.

No estudo de Williams (1991) é identificada, entre os estudantes, uma tendência de não abandono das concepções formadas sobre os conceitos em decorrência da ausência de necessidade de formulação de outra que seja mais generalizada. Nesse sentido, o autor aponta que é desejável ao ensino, quando da abordagem formal do conceito de limite, produzir nos estudantes a necessidade do processo de formalização. Essa situação, pelo que pudemos constatar, não é alcançada em Oliveira (2021). Após a solução de uma tarefa similar à referenciada, a autora realiza o que chama de processo de formalização. Isso ocorreu quando "[...] foram negociadas as notações com seus respectivos significados 'se $x \rightarrow a$ então $f(x) \rightarrow L$' utilizando os números usados nas tarefas no lugar das letras e formalizando com a representação de um caso geral, colocando as letras no lugar de números" (Oliveira, 2021, p. 162-163). Tal processo pode ser caracterizado como um movimento do particular – tarefas utilizando números – para o geral – substituição das situações particulares por outras com letras na formação de um modelo do conceito de limite.

Sustentados pelas análises realizadas por Davídov (1988) e Davýdov [198-?], podemos considerar o processo de generalização descrito como empírico, uma vez que tem como base a busca por traços comuns e a sua substituição por um modelo geral. O geral, nessas circunstâncias, é entendido como o repetível, estável e invariante de uma classe de fenômenos, o que constitui seu aspecto essencial. Nesse contexto, a palavra do professor organiza a

[247] Professora.

observação do estudante que, pela análise e observação, busca destacar o essencial do não essencial fixando o processo no modelo a fim de expressar o conceito generalizador (Davídov, 1988). Tal movimento fica mais explícito quando, na sequência da resolução da tarefa anteriormente descrita, seguem-se outras duas, com a indicação do novo conhecimento a ser sistematizado, "a definição intuitiva de Limite" (Oliveira, 2021, p. 163).

É possível destacar outro ponto, presente na formulação da tarefa, que pode obstaculizar a formação do conceito de limite pelos estudantes. Tall e Vinner (1981) defendem que expressões com linguagem dinâmica, como a empregada no problema – "[...] qual valor $f(x)$ se aproxima quando x se aproxima de a por ambos os lados, *mas não pode ser a*?" –, em geral fortalece um entendimento, pelo estudante, de que $f(x) \neq c$, quando $\lim_{x \to a} f(x) = c$.

O conceito formal de limite, utilizado com base na aritmetização da Análise, decorre da especificação da linguagem dinâmica. Nesse sentido, pode-se perceber que para realizar a aproximação, entendida no contexto do movimento, Oliveira (2021) conduz um diálogo no qual, em um dado momento, sugere aos estudantes a realização de processos de atribuição de números para x, o que implica, consequentemente, a determinação de valores distintos para $f(x)$. É sugerida a organização desses dados em uma tabela, a fim de capturar a tendência geral da relação. Tal procedimento, comumente denominado de abordagem intuitiva de limite, é realizado, nesse caso, por meios aritméticos. Frisamos que a atribuição de valores arbitrários na tabela é um processo aritmético que, caso o professor intente evidenciar uma concepção dinâmica, não o expressa de modo explícito. Do que o estudante pode se apropriar não é, necessariamente, o movimento ou a variação de x. Em vez disso, a atenção se volta para uma variedade de números que essa variável pode assumir. Quando os módulos das diferenças entre esses números e aquele de que se deseja avaliar o limite – 4, no caso da tarefa analisada – forem cada vez menores, o módulo das diferenças dos respectivos $f(x)$, dependentes deles, com um valor determinado, denominado de limite, será cada vez menor também. No caso da representação gráfica – principalmente com os softwares gráficos e dinâmicos, utilizados pela pesquisadora para avaliar a solução do problema –, contudo, a dinamicidade fica mais evidente. Isso torna possível enfatizar, com o deslocamento do ponto, a relação tendencial estabelecida entre os números atribuídos a x e os valores de $f(x)$, com $f(x) = y$. É necessário sublinhar que, além do que é apontado por Tall e Vinner (1981), a abordagem intuitiva, pelo menos nas tarefas analisadas, pode fortalecer a concepção de monotonicidade da função na vizinhança de x. Trata-se de algo que se assemelha à concepção defendida por D'Alembert sobre limite, apesar de ele só considerar o limite unilateralmente.

É importante sublinhar que o processo orientado de busca do limite pela abordagem intuitiva pode conduzir às situações destacadas. No entanto, também possui potencial de fornecer um modo de agir, não geral, mas que, caso se vincule e organize de modo a evidenciar a ideia vizinhança, pode auxiliar os estudantes a entrar em contato com o conceito de limite, similar àquele que permite avaliar o comportamento da função na vizinhança de um ponto, independentemente do valor que se assuma nesse ponto. Conforme Caraça (2003, p. 274), "o *limite duma função num ponto não depende do valor da função nesse ponto; depende sim, do conjunto dos valores da função na vizinhança desse ponto, é o resultado da sua interdependência"*.

A Tarefa 1.EB foi seguida de outras, que compunham a etapa de desenvolvimento da habilidade em sua forma materializada e apresentavam conteúdo similar. O primeiro par de tarefas[248] era idêntico ao da Tarefa 1.EB, com alteração do foco da formação do sistema invariante de operações para a sua aplicação na forma materializada. Com a mesma centralidade, foram apresentados os pares de tarefas seguintes, os quais modificam as funções de polinomiais de 2º grau para funções racionais e definidas por partes. A ênfase recaiu na possibilidade do valor de x de que se buscava o limite não fazer parte do domínio, bem como a inexistência de limite quando os limites laterais são distintos. Conforme a autora, isso possibilitou que fossem sistematizadas, colaborativamente, as condições de existência de um limite, além do conceito de limites laterais e suas respectivas notações.[249] Destacamos que, em nosso entendimento, essa etapa é considerada materializada por Oliveira (2021) não porque os estudantes analisam o conteúdo conceitual em estudo na referida forma, mas por se ancorarem nela para a formação da ação. Isso significa que a forma materializada da ação advém da esquematização da estrutura da Atividade de Situação Problema Discente, objetivada no cartão de orientação que serve de material orientativo para os estudantes. Por sua vez, em Bezerra (2016), segundo sublinhado, encontramos indícios de que a etapa materializada é associada à característica da tarefa de ser resolvida de forma "prática" e/ou se configurar como uma tarefa do "cotidiano" ou "situação real".

Oliveira (2021), ainda na fase materializada, propõe algumas tarefas sobre o conceito de continuidade. Sua intenção é que os estudantes se fundamentem no conhecimento

---

[248] Nessa etapa, os estudantes foram organizados em duplas e cada participante da dupla foi incumbido de resolver uma tarefa distinta daquela do seu colega. Enquanto um resolvia a tarefa de forma detalhada, o outro acompanhava a sua resolução, atento ao cumprimento das operações descritas no cartão de orientação (Oliveira, 2021).

[249] Consideramos, entretanto, que as duas questões possuem valor limite. A Tarefa 3A.EM decorre do fato de que $x \to -1$ e $f(x)$ é descontínua em $x = 1$, enquanto na Tarefa 3B.EM temos $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$.

conceitual e procedimental de limite, a fim de identificar a continuidade de uma função ao atribuir a x um determinado número, utilizando-se do conceito de limite. Em seguida, são propostas outras tarefas para explorar elementos que se tornarão base para introdução do conceito de derivada, como por exemplo, a inclinação da reta tangente e a taxa de variação instantânea no contexto da velocidade. Optamos por analisar, nesta subseção, a questão da relação entre reta secante e reta tangente por meio da variação do coeficiente angular da secante, pois aparece também em Bezerra (2016) e Farias (2015).

Quadro 5 – Tarefa 6 A.EM – Oliveira (2021)

Usando o conhecimento sobre limite, encontre a equação da reta tangente à parábola $y = 4x - x^2$ no ponto P(1,3). Justifique sua resolução.

Fonte: Oliveira (2021, p. 129).

Quadro 6 – Tarefa 4 – Unidade I – Bezerra (2016); Tarefa 1 – Problema 1 – Farias (2015)

Encontre uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2$, no ponto P(1,1).

Fonte: Bezerra (2016, p. 123); Farias (2015, p. 306).[250]

Em Oliveira (2021), é esperado que os estudantes utilizem conhecimento procedimental de movimentação da reta secante à curva, de modo a aproximá-la da reta tangente. Desse modo, a contradição objetiva se localizaria "na mobilização dos conhecimentos sobre as diferentes representações de Função e sobre Limite (já conhecidos) para representar algebricamente a referida movimentação da reta secante" (Oliveira, 2021, p. 129). Em Bezerra (2016), a tarefa é introduzida na fase mediadora e tem como objetivo compreender "o comportamento da inclinação das retas secantes em direção a reta tangente" (Bezerra, 2016, p. 126). Por sua vez, em Farias (2015) é a primeira tarefa proposta e sucede uma introdução sobre o conceito de tangente.

Farias (2015) propõe a solução com base no conceito de inclinação de uma reta, cujo ponto conhecido é P(1,1) e se considera, também, um ponto genérico Q(x, x^2). Isso possibilita determinar uma expressão que relacione o coeficiente angular da reta em função do número assumido por *x*. É escolhido um intervalo no qual o número 1 está contido e realiza o processo intuitivo de determinação do limite. Encontrado o valor do coeficiente angular igual a 2, torna-se possível à autora determinar o coeficiente linear da reta, ou seja, formar a equação

[250] Essa tarefa, bem como uma possível resolução, pode ser encontrada em Stewart (2006, p. 87-88).

da reta tangente. Na sequência, a sugestão é a realização desse processo no *software Geogebra* a fim de evidenciar a visualização do movimento da reta secante. Esta tem como limite a reta tangente quando ao valor limite da função que determina o coeficiente angular em função de x é atribuído o valor 2. Importa citar que na tabela de valores do cálculo do limite na forma intuitiva é utilizado o símbolo de aproximadamente ($\cong$) para indicar o valor do limite. Isso caracteriza uma visão de infinito potencial, presente também na obra de Arquimedes.

Em Bezerra (2016), a referida tarefa surge na fase mediadora e formativa. Tem como objetivo analisar "a compreensão do estudante, na sua forma materializada e descritiva" e possui como "ação essencial" a "compreensão do comportamento da inclinação da reta secante em direção a [*sic*] reta tangente" (Bezerra, 2016, p. 123). A solução almejada, ao que indica a análise da autora das soluções desenvolvidas pelos estudantes, segue na mesma linha de Farias (2015), exceto pela não menção ao uso de gráficos. Do mesmo modo, Oliveira (2021) propõe tal tarefa com a intenção de que os estudantes mobilizem "[...] o conhecimento procedimental de movimentação da reta secante à curva fazendo-a bem próxima à reta tangente (posição limite), em seguida, representem algebricamente esse movimento da secante utilizando a ideia de limite" (Oliveira, 2021, p. 129). A contradição objetiva, segundo a autora, encontra-se na relação entre a mobilização dos conhecimentos sobre as diferentes representações do conceito de função e limite para descrever, algebricamente, a referida movimentação da reta secante.

Entendemos que essa tarefa explicita um grande número de conceitos inter-relacionados, quais sejam: reta tangente, reta secante, coeficiente angular, coeficiente linear, equação da reta, função, limite, entre outros. Tal conjunto de conceitos fundamenta a significação geométrica da derivada de uma função em um ponto, o que é importante para a apropriação desse conceito. Contudo, vale ressaltar que, para a introdução do conceito de derivada, é imprescindível que a variação das diferenças entre as coordenadas dos pontos, colocadas na forma de razão, no seu limite, propicie a possibilidade de encontrar o coeficiente angular da reta tangente nesse ponto. Além disso, essa tarefa fornece margem para a emergência da metáfora do colapso ao se definir o conceito de derivada (Oehrtman, 2009). Isso ocorre quando, combinado com a metáfora do movimento, considera-se que o triângulo retângulo constituído pelo segmento de reta AB – por exemplo, A(x, y) e B$(x + \Delta x, y + \Delta y)$ – da reta secante definida por esses dois pontos que também pertencem à curva que descreve a função $f(x) = y$, junto com outros dois segmentos – no exemplo, de medidas Δx e Δy –, com B se movimentando em direção a A, conduz ao movimento de alteração do triângulo de modo que

ele é colapsado na forma de um ponto quando B ocupa a posição de A, que, por consequência, transforma a secante em tangente.

No que diz respeito à tentativa de formalização do conceito de limite, Bezerra (2016) elabora a Tarefa 07, que compõe a análise da etapa externa para si da teoria de formação por etapas das ações mentais e conceitos. A finalidade é a explicação de uma igualdade representativa do limite da função, conforme é possível verificar no Quadro 7.

Quadro 7 – Tarefa 07 – Unidade I – Bezerra (2016)

Explique o que você compreende pela expressão $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$. É possível que nessa expressão $f(2) = 2$? Justifique sua resposta.

Fonte: Bezerra (2016, p. 94).

A necessidade de justificação da resposta, aparentemente, possui relação com a posição na estrutura das etapas propostas – externa para si. A tarefa surge para o estudante como uma explicação dos elementos que compõem a representação simbólica do limite de uma função em um ponto. É importante citar que Bezerra (2016) considera como contexto essencial a interpretação da "definição $\lim_{x\to a} f(x) = L$, no modelo $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$" (Bezerra, 2016, p. 127). Conforme a autora, a definição do conceito de limite de uma função foi desenvolvida "[...] em aula prática" (Bezerra, 2016, p. 124). Pode-se contestar, no entanto, que a simples expressão $\lim_{x\to a} f(x) = L$ é uma definição sem que sejam definidos os seus elementos constituidores. Aparentemente, a abordagem da definição de limite é guiada pela elaboração de Weierstrass, conhecida pelo uso de ε (épsilon) e δ (delta).[251] Entretanto, não encontramos indícios de que é a ela que a autora se remete nessa tarefa. A intenção almejada, em nosso entendimento, é que o estudante interprete qual o significado de cada elemento e símbolo na referida expressão. Como não conseguimos identificar a definição de limite desenvolvida em colaboração com os estudantes, resta-nos inferir as implicações dessa tarefa no conjunto da proposição. A autora, ao tomar como ponto de partida algumas situações particulares que exploram determinados elementos do conceito de limite, expôs a definição e, na sequência, enfatizou uma interpretação do modelo com base na comparação dos referidos elementos. Esse processo, assim como discutido em outro ponto acerca de uma tarefa de Oliveira (2021), também apresenta características da generalização empírica. A comparação entre o modelo e a definição tem por

[251] Embasamo-nos no diálogo descrito em Bezerra (2016, p. 158-159).

intuito a explicação, pelo estudante – com os termos utilizados e introduzidos pelo professor –, dos traços comuns entre os dois, bem como aquilo que é variável.

A tarefa descrita, caso utilizada com o intuito de que o estudante, segundo o que a autora chama de definição e que podemos entender como modelo geral, transforme-o de modo a estudar seus componentes, pode ser um modo de ele se apropriar das relações que são estabelecidas no modelo. Essa transformação do modelo, contudo, na perspectiva de Davídov (1988), tem como alicerce a essência do objeto, isto é, sua relação essencial, o que não conseguimos identificar nas tarefas explicitadas na tese da autora.

Não nos ateremos à análise do conceito de continuidade, mas é possível que se aproxime, no que se refere ao conteúdo, às tarefas propostas em Bezerra (2016) e Oliveira (2021), pois o foco está na continuidade em um ponto com o auxílio do conceito de limites laterais.

Para concluir a primeira unidade, Bezerra (2016) elabora uma questão (Tarefa 09) que almeja a produção da necessidade de o estudante discutir a tendência ao infinito da função, nas vizinhanças de um ponto. Cabe ressaltar que, com exceção dessa tarefa, nas teses analisadas, os conceitos de limites infinitos e limites no infinito possuem papel de coadjuvantes. Constatamos que, entre as três expressões conceituais do conceito de limite – limite de uma sequência, o limite de uma função em um ponto e limite da função no infinito (Fernández-Plaza; Simpson, 2016) –, a atenção recai principalmente para o limite de uma função em um ponto. A falta de tais conexões não propicia, de forma explícita, que o conceito possa ser expandido e utilizado para a compreensão do comportamento de uma determinada função em geral. Isso se reduz a um pré-requisito para definir o conceito de derivada e integral.

Para Bezerra (2016), a Tarefa 09 (Quadro 8) "propõe a explicação da definição de limites infinitos na análise contextual para identificar o custo percentual de remoção de resíduos tóxicos, como objetivo do problema, com base na definição" (Bezerra, 2016, p. 141).

Quadro 8 – Tarefa 09 – Unidade I – Bezerra (2016)

O custo para remover $x\%$ de resíduos tóxicos num aterro é dado $S(x) = \frac{0{,}8x}{100-x}$ com $0 < x < 100$. a) Calcule $\lim_{x \to 100^-} S(x)$ b) Interprete o resultado obtido

Fonte: Bezerra (2016, p. 94).

Primeiramente, é preciso questionar qual definição se faz necessária para solucionar a tarefa. Além disso, chamou-nos a atenção que a análise das respostas dos estudantes realizada pela autora fomenta, para nós, certas dúvidas não sanadas no próprio texto. Foi considerado

como solução adequada o limite igual a 80, o que é adotado como padrão para as demais respostas analisadas. Isso é decorrente, no que pudemos entender, do fato de $S(99) = 79{,}2$, encontrado por um dos estudantes com o auxílio da abordagem intuitiva. Porém, caso se continue o processo, é possível determinar $S(99{,}9999999) = 799999999{,}2$. Portanto, sugere que a tendência da função na vizinhança à esquerda de 100 é aumentar infinitamente. Isso pode ser comprovado ao resolver o limite, analiticamente, e encontrar, assim, $\lim_{x \to 100^-} S(x) = +\infty$. Tal solução não é considerada correta na análise desenvolvida pela autora, como é possível verificar no excerto a seguir, no qual considera correta a solução de um estudante cujo valor do limite é igual a 80: "No final da questão o aluno descreve o seguinte texto: '*Destacando o intervalo que determina a função da porcentagem do custo. Quanto mais distante de 100 pela esquerda, menor o custo*'. No entanto, o valor máximo é de 80%" (Bezerra, 2016, p. 144). Tais comentários não ficam muito claros, pois para a autora, na solução da tarefa, o estudante "teve que analisar o custo para remoção dos resíduos tóxicos, a partir da compreensão do conceito de limites infinitos e concluir que, quanto mais próximo de 100 forem os valores de x pela esquerda, o limite tende a mais infinito" (Bezerra, 2016, p. 141).

Em geral, é possível inferir das pesquisas propositoras de tarefas sobre os conceitos de função e limite que elas não adotam uma abordagem que privilegia a relação de variação entre as grandezas variáveis, assim como os conceitos de variável, campo de variação e interdependência. A unidade formada por tal relação e os citados conceitos, contudo, é o que constitui a essência do conceito de limite. O processo de generalização, por sua vez, parte do particular para o geral, isto é, de exemplos específicos para os gerais, constituídos pelo ponto de vista formal. Além disso, no que se refere ao conceito de limite, ao ser considerado o alicerce para a introdução do conceito de derivada e de integral, seu conteúdo é esvaziado de características próprias, por exemplo, os limites infinitos e limite no infinito, o que reduz seu poder explicativo. Outro ponto a ser destacado é a ênfase na abordagem intuitiva do limite e de funções monótonas. Isso pode obstaculizar o significado mais geral desse conceito. Soma-se a esse quadro a tentativa de buscar uma significação que sublinhe o movimento, por meio de recursos, dentre eles, as tabelas de relacionamento de valores. Por sua vez, a abordagem da definição de limite não adota por base uma necessidade do estudante, mas é oriunda de um processo de generalização de tarefas de mesmo tipo.

6.2.2 Análise do conteúdo matemático das tarefas relativas ao conceito de derivada

A presente seção se ocupará de analisar a estruturação das propostas para o ensino do conceito de derivadas. Com exceção de Prevot (2019), os trabalhos o abordam adotando como ponto de partida a significação da derivada como inclinação da reta tangente. Nesse sentido, em Farias (2015), na Tarefa 2, é apresentado um vínculo mais direto com a determinação da reta tangente em um ponto sobre uma determinada curva com o conceito de limite. Na discussão, buscou estabelecer o movimento de covariação entre as variáveis e a inclinação da reta. Para tanto, considera o limite da razão da diferença das coordenadas das ordenadas sobre a diferença das abscissas de dois pontos sobre uma curva contínua em um intervalo dado representar a referida inclinação em um dos pontos escolhidos. Tal procedimento é seguido da homogeneização dos símbolos, o que permite a determinação da seguinte igualdade: $m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$ em que $\Delta x = x_2 - x_1$, $f(x_1 + \Delta x) = f(x_2)$ e $m(x_1)$ é o coeficiente angular da reta tangente no ponto de abscissa x_1.

Em seguida, Farias (2015) propõe uma tarefa similar à representada no Quadro 5, analisado na subseção anterior. Com base nela, apresenta a definição de derivada para qualquer valor de x do domínio da função. Porém, percebemos uma lacuna pela falta de relação explícita entre a determinação da reta tangente – que parte da medida de sua inclinação – e a definição de derivada, apresentada na sua forma geral e seguida de especificação.

> A derivada de uma função f é denotada por f', tal que seu valor em qualquer número x do domínio de f seja dado por:
> $f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ se esse limite existir
> Se x_1 for um determinado número no domínio de f, então: $f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$. Note que a inclinação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(x_1, f(x_1))$ é precisamente a derivada de f calculada em x_1 (Farias, 2015, p. 308).

No decorrer da análise, o leitor observará que, em sua maioria, as tarefas apresentadas não realizam conexões que evidenciam as particularidades das propriedades pontuais, locais e globais das funções e de suas derivadas. A diferenciação entre essas três propriedades de uma dada função f de uma variável real é importante, pois permite que o estudante analise aspectos distintos do comportamento da função. Isso é possível de ser observado em Oliveira (2021), por optar por introduzir o conceito de derivada com tarefas fundamentadas no conceito de limite que envolvem situações com coeficiente angular da reta tangente, além de velocidade, no contexto do movimento mecânico, e corrente elétrica. Essas tarefas fazem parte da etapa de desenvolvimento das ações na forma materializada e tinham o

objetivo de que os estudantes "pudessem utilizar o conhecimento conceitual e procedimental de Limite para resolver problemas envolvendo taxa de variação instantânea e sua representação gráfica" (Oliveira, 2021, p. 129). Uma entre elas (Quadro 10) possui características importantes, pois destaca aspectos essenciais da relação entre o conceito de limite e o de derivada.

Quadro 9 – Tarefa 7A.EM – Oliveira (2021)

O deslocamento (em metros) de uma partícula movendo-se ao longo de uma reta é dado pela equação $s = t^2 - 8t + 18$*, onde* t *é medido em segundos* *a) Encontre as velocidades médias sobre os seguintes intervalos de tempo: i)* $[3\ ;\ 4]$*; ii)* $[3{,}5\ ;\ 4]$*; iii)* $[4\ ;\ 5]$ *iv)* $[4\ ;\ 4{,}5]$ *b) Encontre a velocidade instantânea quando* $t = 4$*.* *c) Represente graficamente as velocidades médias da parte a). Represente graficamente a velocidade instantânea da parte b).*

Fonte: Oliveira (2021, p. 129-130).

A tarefa, ao abordar o conceito de derivada por meio da variação da razão entre distância percorrida pelo tempo decorrido, segundo Oliveira (2021), engendra uma dificuldade de relacionar o conceito de limite – conhecido – e o conceito de velocidade instantânea – desconhecido. Tal dificuldade é considerada como a contradição envolvida. No procedimento de solução, o estudante, para determinar a velocidade média, necessita determinar a razão expressa pela fórmula $V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Com o cálculo da velocidade nos quatro intervalos solicitados, todos os quais apresentando como um de seus valores limitantes 4 segundos, gera-se um conjunto de valores que podem ser dispostos em uma determinada ordem que explicite uma tendência. Isso permite inferir que essa velocidade, em 4 segundos, é igual a 0 metros por segundo. Assim, apesar da pequena quantidade de itens solicitando o cálculo da velocidade média, o que, com base na abordagem intuitiva pode ser insuficiente para a apropriação do comportamento da função na vizinhança especificada, a tarefa fornece condições para evidenciar aspectos essenciais do conceito de derivada e do Cálculo em geral, bem como, por intermédio do último item, vincular esses elementos à interpretação gráfica. Essas condições emergem da possibilidade de coordenação da relação de interdependência entre grandezas variáveis, limite, função e continuidade, de modo a subsidiar a introdução do conceito de derivada. Todavia, é necessário apontar certas ausências percebidas por nós. Por exemplo, algum elemento que suscite a discussão sobre o conceito de infinito; uma articulação mais robusta da relação entre a representação da velocidade média no gráfico e o coeficiente angular da reta; e a explicitação dos encadeamentos entre os conceitos de reta tangente, velocidade e derivada.

Não identificamos, também, em todos os trabalhos, inter-relações explícitas entre o conceito de limite e derivada, além da supracitada passagem de Farias (2015). Além disso, foram poucas as manifestações de articulação explícita entre limite e derivada reunidas nas tarefas apresentadas. Em Bezerra (2016), por exemplo, na fase diagnóstica é proposta a Tarefa 2 com o objetivo de os estudantes explicarem a derivada da função em um ponto determinado, sem que o leitor consiga se apropriar do modo como o conceito foi abordado no processo de ensino.

Quadro 10 – Tarefa 2 – Unidade II – Bezerra (2016)

Como você explicaria a alguém o que é derivada de uma função f no ponto x_0?

Fonte: Bezerra (2016, p. 95).

Como a autora afirma que não expôs todas as formas de introdução do conteúdo, ficamos impedidos de capturar o enfoque atribuído ao conceito de derivada na sua proposição. Salientamos que seu foco é a significação de derivada no ponto. Apesar disso, não se explicita a vinculação da expressão simbólica com a geométrica. Isso é constatado, também, entre os professores sujeitos da pesquisa de Park (2015). O leitor observará que, em praticamente todas as tarefas apresentadas, há preponderância da derivada da função em um ponto, isto é, nas propriedades pontuais das funções. Vale sublinhar que a derivada não possui significado restrito a essa manifestação. No estudo do Cálculo, a apropriação da derivada como função é o maior grau de generalização, pois possibilita o estudo tanto das propriedades pontuais da função inicial quanto das suas propriedades locais e globais. Panero, Arzarello e Sabena (2016), com base na literatura[252], consideram que a propriedade de f em um ponto x_0 é pontual se apresenta dependência apenas do valor que f assume em x_0, enquanto é local se depende de f em alguma vizinhança de x_0. Por fim, é global quando adquire validade em intervalos. No caso do ensino da derivada, como presente na pesquisa de Park (2015), é possível que ocorram passagens diretas da derivada no ponto para a derivada local e global pela simples alteração do símbolo literal do ponto para o de variável, isto é, x_0 por x. Em Farias (2015), conforme pontuado, há o movimento contrário, isto é, passagem da derivada como função para a derivada pontual. Nas outras teses, em decorrência de suas particularidades, não identificamos como se objetivou esse processo. Sem dúvida, há uma tendência em direção à determinação da função derivada como ferramenta do cálculo da derivada em um ponto.

[252] Os autores se fundamentam em Maschietto (2002, 2008), Rogalski (2008) e Vandebrouck (2011).

Em Oliveira (2021), por exemplo, as tarefas da etapa seguinte de formação das ações mentais e conceitos – desenvolvimento das ações na forma verbal externa – são marcadas pelo significado da derivada como coeficiente angular da reta tangente em um ponto de uma função, em que inclui o conceito de taxa de variação entre grandezas em determinados contextos. Citamos uma tarefa que, em seu processo de solução, relaciona a derivada da função com a derivada em um ponto, com apoio no conceito de taxa de variação.

Quadro 11 – Tarefa 10A.EV – Oliveira (2021)

Estima-se que daqui a t anos a população de uma certa comunidade suburbana será de $P(t) = 20 - \frac{6}{(t+1)}$ milhares de habitantes. Deduza a expressão da taxa de variação da população em relação ao tempo e calcule a taxa de crescimento da população daqui a 9 anos. Explique para seu colega sua resolução e registre a justificativa da sua resposta.

Fonte: Oliveira (2021, p. 132).

A autora entende que a situação envolve como o conhecido o conceito de derivada, e como o desconhecido o crescimento populacional, em especial interpretados, pelos estudantes, como uma contradição entre o conceito de derivada e o de taxa de variação instantânea. O intuito é de que os estudantes

> [...] utilizem o conhecimento conceitual e procedimental de Derivada para relacioná-lo com o cálculo da taxa de variação instantânea em diferentes situações. A contradição objetiva prevista nestas tarefas também reside em mobilizar os conhecimentos (já conhecido) para estabelecer esta relação derivada e taxa de variação instantânea, porém em contextos diferentes (Oliveira, 2021, p. 133).

Acerca do conhecimento conceitual e procedimental de derivada, há indicação de que são resumidos a um significado particular, a saber, do coeficiente angular da reta tangente, conforme se percebe no excerto a seguir, localizado em um quadro, que o estabelece como o "conhecido" de uma série de tarefas:

> Conhecimento conceitual e procedimental de Derivada:
> Definição de Derivada:
> A inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ em um ponto $P(a, f(a))$ é:
> $$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
> Conhecimento procedimental das propriedades de Derivada (Oliveira, 2021, p. 121).

Além da desvinculação do conceito de taxa de variação instantânea e do conceito de derivada, pairaram-nos dúvidas sobre o modo pelo qual foi realizada a conexão entre a definição apresentada e a resolução da tarefa citada. Isso porque ela requer a determinação da

derivada no ponto em um contexto no qual o encadeamento entre a derivada como inclinação da reta tangente e a taxa de variação instantânea é indireto. Além disso, exige, pelo modo de formulação da tarefa, primeiramente a determinação da derivada como função para que, na sequência, determine-se a derivada em um ponto. Em outras palavras, a ligação entre a taxa de variação instantânea e derivada – em especial, em sua significação de coeficiente angular da reta tangente – é tematizada na tarefa, de modo que pressupõe a desvinculação da derivada de tal taxa da função. Essa conexão ocorre apenas discursivamente. No referente à relação entre as grandezas, nota-se que é determinada de modo explícito – tempo e população. Por esse motivo, o estudante pode solucionar a tarefa por procedimento algorítmico, isto é, identificando a função com um modelo e aplicando uma regra de derivação específica, o que White e Mitchelmore (1996) denominam de foco manipulatório.

Análise similar pode ser realizada sobre a Tarefa 4, apresentada por Bezerra (2016) na fase mediadora e formativa com o objetivo de avaliar se os estudantes "possuíam habilidades para fazer aplicação do conceito de derivada" (Bezerra, 2016, p. 95).

Quadro 12 – Tarefa 4 – Unidade II – Bezerra (2016)

Uma equação do movimento é dada por $s = 2t^3 - 9t^2$, onde s está em metros e t, em segundos. Encontre o instante em que a aceleração é zero. Explique sua resposta.

Fonte: Bezerra (2016, p. 95).

O diferencial dessa tarefa para a anterior encontra-se na necessidade de determinar a derivada de segunda ordem e igualar a expressão a zero. Nesse caso, o estudante deve encontrar a derivada como taxa de variação da distância em relação ao tempo, isto é, a função da velocidade para, em seguida, determinar a taxa de variação dessa taxa de variação, em nova relação com o tempo. É esse processo que fornece a aceleração em função do tempo. Tal taxa de variação deve ser igualada a zero, o que propicia as condições de encontrar o instante requerido. Aqui, a possibilidade de dúvidas diz respeito, novamente, ao modo pelo qual essa relação foi apresentada aos estudantes. Portanto, inspira questionamento sobre o conteúdo almejado com essas tarefas. Há indícios de que o objeto não é constituído sobre a relação essencial peculiar à origem do Cálculo. Isso, possivelmente, aponta para formas de ação que possuem abrangência limitada sobre os fenômenos a capturar. Nesse sentido, uma parte considerável das tarefas, como estão expostas, não trazem subsídios para que o modo de ação dos conceitos abordados, de forma especial o de derivada, seja objetivado no objeto de ensino de maneira substancial. Em suma, são raríssimas as evidências de como as tarefas abordam os modos gerais de ação, pois dão margem para que elas sejam solucionadas de modo algorítmico.

Entendemos que esse é o ponto apropriado para discutirmos determinados aspectos gerais da formulação das tarefas presentes nas teses analisadas. Para tal, exporemos resumidamente uma discussão acerca da natureza do conceito de habilidade formulado por Ilyenkov (2007a). O autor narra e analisa um debate teórico envolvendo Rubinstein e os adeptos da "teoria da internalização", entre eles Leontiev e Galperin, acerca da formação das habilidades. Rubinstein[253], segundo Ilyenkov (2007a), acusa a citada teoria de superestimar as condições externas na formação da habilidade, o que, em última instância, seria a anulação do sujeito no processo de aprendizagem. No que diz respeito a possíveis aspectos procedimentais, pode-se apontar desdobramentos dos modos de apropriação das habilidades na forma de decomposição. Assim, segundo Ilyenkov (2007a, p. 58), aquilo que

> [...] é chamado "habilidade", no sentido preciso da palavra, não pode, de fato, ser "decomposta" analiticamente em séries de operações (*skills*) e indicadores para a sua ativação sem extinguir um dos mais importantes componentes da "habilidade" – a capacidade de agir onde não há método de ação dado antecipadamente ou onde não há "indicador" para ativar uma ou outra das "operações" dadas.[254]

Rubinstein sugeriria que as condições internas, no processo de ensino, deveriam ser consideradas como determinações importantes. Porém, segundo Ilyenkov (2007a), o psicólogo soviético falha ao não explicitar de forma clara o seu entendimento sobre a natureza dessas condições internas e de sua formação. Na visão de Ilyenkov (2007a), as condições internas e, mais especificamente, o núcleo interno da habilidade – isto é, o elemento produtivo, ativo e criativo dentro dela – são também produtos da atividade. Isso significa ser imprescindível situações em que o indivíduo necessite agir como sujeito, e não de acordo com um esquema memorizado e ativado por um indicador de aplicabilidade. Essas situações possuiriam como características o conflito entre as operações apropriadas pelos sujeitos e os indicadores para a sua ativação. Portanto, induziriam o sujeito a superar tal dificuldade ao encontrar um novo modo de agir. Essa característica pode ser notada na proposta de Majmutov (1983), especialmente naquilo que o autor denomina de contradição entre o conhecido e o desconhecido. Em outras palavras, conforme Ilyenkov (2007a, 2007b), a situação que coloca o indivíduo como sujeito no processo é aquela marcada por uma antinomia, isto é, uma

---

[253] Há elementos que nos levam a crer que o texto a que Ilyenkov (2007a) se refere é Rubinstein (2017).

[254] "[...] is called 'ability' in the precise sense of the word cannot, indeed, be 'decomposed' analytically into series of operations (skills) and indicators for their activation without extinguishing one of the most important components of 'ability'— the capacity to act where there is no method of action given in advance or where there is no 'indicator' for activating one or another of the given 'operations'".

contradição formalmente indissolúvel, nas condições dadas, a ser necessariamente solucionada, mas para a qual o sujeito ainda não possui resposta ou meio para agir.

Tal debate nos permite alguns questionamentos sobre o potencial antinômico, nas palavras de Ilyenkov (2007a, 2007b), que as tarefas analisadas possuem. Além disso, não encontramos discussões sobre a vinculação dessas tarefas com a abstração substancial do Cálculo. Tais questionamentos são fundantes, se tomarmos como exemplo as teses embasadas na teoria da formação por etapas das ações mentais e conceitos. Importa lembrar que o sistematizador dessa teoria, Galperin (1987), elabora uma proposta de ensino de matemática para os anos iniciais de escolarização em que elege como ponto de partida uma tomada de posição ontológica em relação ao objeto do saber matemático. Além disso, a ausência de tal tomada de posição e de sua objetivação nas tarefas tornam válidas as críticas realizadas por Rubinstein.

Retornando à questão das antinomias, é possível identificar que parte importante das tarefas analisadas apresenta as variáveis e suas relações explicitadas de antemão. Elas solicitam a utilização de determinados conceitos, considerados "indicadores", mas que não necessariamente produzem um processo de busca por ações introdutoras de elementos mediadores entre o conhecido e o desconhecido. Questionamo-nos como as exigências implícitas nas tarefas do tipo "Encontre o instante inicial em que a aceleração é zero" e "Deduza a expressão da taxa de variação da população em relação ao tempo" podem se constituir como uma antinomia que possibilite ao estudante a apropriação dos conceitos almejados.[255] As contradições explicitadas podem ser consideradas externas à tarefa, o que limita as formas de atuação dos sujeitos. Parte-se de uma possível condição de "carência" do estudante, não estabelecendo as condições de que ela seja sentida e conscientizada de modo que o mobilize na busca por uma nova forma de agir para suprimi-la.

Porém, como intentamos frisar, no decurso da presente tese, nossa análise é sustentada pelas descrições objetivadas nos textos analisados. Isso permite que, decorrente do caráter estático da objetivação de uma pesquisa, os determinantes apresentados como substanciais aos dados podem ter se apresentado de modo distinto. Tal pressuposto alteraria o conteúdo do objeto de ensino, pois entendemos, assim como Majmutov (1983), que o êxito do ensino depende da seleção e elaboração das tarefas e da direção sistemática de seu curso de solução. Esse intento, porém, não altera o entendimento de as tarefas não expressarem uma

[255] Não nos ateremos aqui à exemplificação das situações que podem ser consideradas como antinômicas no ensino. O leitor, caso deseje, encontrará exemplos que dizem respeito ao ensino de matemática ao consultar Majmutov (1983, p. 128), Ilyenkov (2007b) e Rosa (2012) e Давыдов, Горбов e Микулина (1997).

relação antinômica que exija a sua superação pela introdução dos conceitos que direcionariam a atividade dos estudantes. Realizadas essas considerações – que o leitor atento pode perceber não se referirem apenas às tarefas com foco no conteúdo de derivadas –, volveremos novamente nossa atenção à centralidade da subseção.

Em alguns casos, como o apresentado na Tarefa 2 (Quadro 8), a "aplicação" do conceito e de sua definição é realizada de forma direta. Tal característica é nítida na proposta de Prevot (2019). Envolvia grupos de três a quatro estudantes com a experiência de ter cursado a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Eles recebiam dois exercícios de revisão e duas "situações-problemas contextualizadas, com enunciado mais elaborado, típicas da área de Engenharia" (Prevot, 2019, p. 145). Também era disponibilizado, aos estudantes, um diagrama de blocos contendo as etapas da proposta[256] e endereços para sites de pesquisa. O exercício de revisão de derivada (Quadro 13) exige atenção dos estudantes para estabelecer as relações entre pontos característicos de uma função que possui uma determinada representação gráfica e possíveis implicações de seus significados "físicos".

Quadro 13 – Exercício 1 – Prevot (2019)

Encontrar a derivada da função $f(x) = 2x^2 + 80x^{-1}$, e determine seus pontos característicos (máximos, mínimos, inflexão), caso existam, utilizando, nesta ordem: a) Método analítico algébrico manual. b) Um aplicativo matemático, para conferir o resultado (baixe e instale em seu smartphone, se necessário) – Sugestões de aplicativos: PhotoMath, Malmath, Wolfram|Alpha, Symbolab. Qual aplicativo foi usado? R: _____ Em sua opinião, o resultado obtido possui algum significado físico? Explique brevemente.

Fonte: Prevot (2019, p. 214).

A intenção do autor é incorporar o uso de aplicativos no processo de ensino. Entretanto, o ponto que objetivamos destacar diz respeito à relação entre o resultado nos planos do estudo físico e matemático. O caso apresentado tem possibilidades gerais de interpretação na medida em que o contexto é estritamente matemático. Nesse caso, as respostas dos estudantes dependem das experiências que possuem com outras situações nas quais o conceito de derivada é exigido. Tal tarefa antecede a seguinte:

Quadro 14 – Situação-problema 2 – Prevot (2019)

Agora, um problema real (Adaptado de MACHADO, 1988): Uma lata de cerveja normalmente possui formato cilíndrico e volume de cerca de 360 ml, em cuja fabricação se utiliza uma chapa de alumínio, que sofre uma

[256] Ver páginas 274 e 275

conformação, seguida da fixação da tampa. Determinar o valor do diâmetro da lata, de modo que a quantidade de material utilizada na sua fabricação seja a menor possível. Use aplicativo matemático. Qual aplicativo foi usado? R: _____ Em sua opinião, o resultado obtido possui algum significado físico? Explique.

Fonte: Prevot (2019, p. 214).

Esse tipo de tarefa é comumente conhecido como problema de otimização e, com outras formulações, com exceção de Bezerra (2016), aparece nas outras teses analisadas (Quadro 14 e Quadro 15).

Quadro 15 – Tarefa 12A.EV – Oliveira (2021)

Considerando um retângulo com área igual a 64 m², determine o menor perímetro possível. Explique para seu colega sua resolução e registre a justificativa da sua resposta.

Fonte: Oliveira (2021, p. 134).

Quadro 16 – Problema 1 – Tarefa 3 – Farias (2015)

Um fazendeiro tem 1200m de cerca e quer cercar um campo retangular que está na margem de um rio reto. Ele não precisa cercar ao longo do rio. Na investigação do problema, use o Winplot para; a) Simular a área que deverá ser cercada; b) Modelar a função a partir da figura do retângulo que representa a área cercada; c) Construir o gráfico da função a partir do modelo da cerca; d) Investigar as dimensões do campo que tem maior área.

Fonte: Farias (2015, p. 309).

Em Prevot (2019) esse problema é entendido como "real" e possui a intencionalidade do estabelecimento de conexões entre o problema e a formação dos estudantes. Por sua vez, Farias (2015, p. 309) estabelece o objetivo de "mobilizar distintas representações matemáticas inter-relacionando a área do retângulo que representa o pasto à representação gráfica da função associada ao conceito de máximo de função". Os itens elaborados exigem que o estudante realize algumas investigações que lhe permitam a apropriação do conceito almejado em distintas formas de significação. Porém, tomam como ponto de partida uma situação particular. Em Oliveira (2021, p. 133), a situação proposta compõe a etapa de desenvolvimento da ação na forma verbal externa. Seu intuito é "aplicar o conhecimento conceitual e procedimental de Derivada para resolver problemas envolvendo Otimização, explicando e justificando as operações da ASPD utilizadas na resolução para continuar o processo de internalização das ações".

A organização das propostas tem um sentido determinado, comum à estrutura curricular dos cursos de Cálculo que, no que se refere à derivada, partem de sua significação inicial para uma aplicação em problemas de otimização. Convém relembrar ao leitor que esse

tipo de problema é bastante similar àquele enfrentado por Fermat e lhe possibilitou encontrar um método de solução de problemas de mesmo tipo, bem como de tangentes a determinadas curvas. Nesse sentido, é possível nos questionarmos se a inversão dessa ordem de apresentação – com a introdução do conceito de derivada por meio de uma tarefa que envolva o processo de otimização – poderia se objetivar como uma tarefa que carregue, em seu bojo, uma antinomia, para os estudantes, que só seria solucionada pela introdução do conceito de derivada. Isso pode ocorrer, mas é necessário, primeiramente, a identificação das grandezas variáveis, seu campo de variação, sua relação de dependência e, principalmente, o controle da variação de tal variação. Uma postura desse tipo torna possível que o conhecimento, em seu estado inicial, estabeleça-se como referente ao do objeto, isto é, que possibilite uma forma de ação com ou sobre o objeto. Nesse quadro, a busca por relacionar o *conhecer* e o *aplicar* se torna desnecessária e passa a ser parte plena do desenvolvimento do processo de apropriação do objeto. Sobre o tema, vale sublinhar que, para Ilienkov (2016d, p. 40), essa dualidade entre *conhecer* e *aplicar* só faz sentido

> [...] quando a pessoa dominou não o conhecimento de um *objeto*, mas, em vez disso, o conhecimento de alguma outra coisa. E essa "outra coisa" só pode ser um sistema de frases sobre um objeto, apreendido independentemente dele ou somente com uma conexão imaginária, tênue e facilmente quebrável com ele, um sistema de palavras, termos, símbolos, signos e suas combinações estáveis, como é legitimado na vida diária [...]. Ou seja, a *linguagem* (em particular, a "linguagem da ciência"), com seu fornecimento de palavras e suas organizações sintáticas e "estruturas" próprias. Ou, em outras palavras, o objeto *como representado na linguagem disponível*, como um objeto já verbalizado.

Em suma, os traços passíveis de apontarmos – em uma parte importante das tarefas que visam abordar o conceito de derivada com sua significação no ponto – são: a falta de destaque do processo de variação e acumulação de relações quantitativas entre grandezas variáveis em geral; a lógica da apresentação e abordagem do conceito seguido da sua aplicação; e a tendência à formulação de tarefas com dados e objetivos explícitos.

6.2.3 Análise do conteúdo matemático das tarefas relativas ao conceito de integral

Neste ponto, voltaremos as atenções para as tarefas que envolvem o conceito de integral. O leitor perceberá que não analisaremos, nesta subseção, nenhuma tarefa de Oliveira (2021), pois, conforme mencionamos, a autora não o abordou em sua proposta.

A Tarefa 7 proposta por Farias (2015) visa desenvolver as noções do conceito de limite por intermédio do processo de exaustão. Optamos por analisá-la nesta subseção voltada

ao conceito de integral, pois, apesar da intenção da autora, entendemos que possui, na forma de sua elaboração, potencial para conectar ambos os conceitos – limite e integral –, de acordo com a discussão realizada no capítulo 3. Convém acrescentar a conjectura de que a tarefa, por ser a última da sequência de ensino proposta, retoma o conceito de limite com o que entendemos ser a intenção de servir de elemento introdutório do conceito de integral.

A tarefa resume-se a um método construtivo utilizando o software *Geogebra*, assim como ocorre em outras tarefas elaboradas (Farias, 2015). É solicitada a construção de um círculo e polígonos inscritos que possuam cada vez mais lados. Na sequência, com a intenção de discutir a noção intuitiva de limite, elaboram-se questões sobre a relação estabelecida entre a variação – aumento – do número de lados do polígono, bem como os seus respectivos perímetros e o comprimento da circunferência. Isso permitiria, por um processo indutivo, a percepção de que o limite do perímetro, em função do aumento do número de lados do polígono inscrito, é igual ao comprimento da circunferência. Na sequência, com as figuras construídas, questiona-se sobre a relação existente entre os lados dos polígonos e suas áreas. O intuito se volta à observação da ideia de que o limite da área do polígono, quando o número de lados aumenta potencialmente ao infinito, torna-se igual à área do círculo no qual o polígono está inscrito.

No que diz respeito ao conceito de limite, um aspecto a ser destacado é a evidenciação da relação de variação entre as grandezas, representadas, em sua dinâmica, por intermédio do emprego do software. Busca-se evidenciar que o limite desse processo é o perímetro ou área da figura em que o polígono é inscrito. Isso ocorre pelas operações que tendem a pôr em relevo a relação entre a variação do número de lados do polígono inscrito e, em dependência dela, a variação do perímetro ou da área dessa figura. Em sua intencionalidade, apresenta-se um processo dirigido pelo professor, que orientaria e descreveria as operações a serem realizadas, bem como apontaria quais os aspectos necessários a serem observados. Ou seja, assim como as demais tarefas de Farias (2015), há uma indicação, em sua descrição, de um viés construtivo, seguido de perguntas que suportam a tomada de consciência sobre as relações fundamentais, mobilizadas nas tarefas.

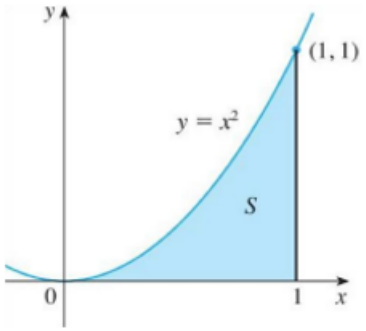
Podemos dizer que a tarefa possui inspirações no processo de exaustão elaborado por Eudoxo. Nesse sentido, apresenta, em nosso entendimento, potencialidades para a introdução do conceito de integral, apesar de não ser a intenção explícita da autora. As relações entre grandezas distintas e variáveis, a covariação, a tendência de variação infinita de uma das grandezas, o limite como conceito necessário e fundamental do processo e a ideia de acumulação podem ser tencionadas de modo a evidenciar os traços determinantes do conceito

de integral. É possível, por exemplo, explorar a relação inversamente proporcional das variáveis, isto é, a interconexão entre o aumento do número de lados e a diminuição do comprimento de cada um deles. Lembramos, contudo, que esse processo necessita ser conduzido de modo que os conceitos de variabilidade e funcionalidade sejam abordados, bem como a modelação do processo na forma da soma característica $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ com Δx_iindefinidamente pequeno.[257]

O significado da integral como soma de áreas também é abordado por Bezerra (2016), tanto na fase diagnóstica quanto na fase mediadora.

Quadro 17 – Tarefa 1 – Unidade III – Bezerra (2016)

Use os retângulos para estimar a área da região parabólica S ilustrada na figura. A área está sob a parábola $y = x^2$ de 0 até 1.



Fonte: Bezerra (2016, p. 96).

Quadro 18 – Tarefa 2 – Bezerra (2016)

Ache uma aproximação para a integral $\int_0^4 (x^2 - 3x)dx$ usando uma soma de Riemann com extremos direitos e $n = 8$. Explique o significado do cálculo realizado.

Fonte: Bezerra (2016, p. 96).

Em comparação com a tarefa dos polígonos inscritos de Farias (2015), em Bezerra (2016) o contexto das funções está estabelecido e explicitado na sua representação geométrica (Tarefa 1), também na sua representação algébrica (Tarefa 1 e Tarefa 2). O alvo é a solução do "problema da área da região S fazendo uso do conceito de limite das somas das áreas dos retângulos proximantes" (Bezerra, 2016, p. 207-208). Isso para formular a ideia de integral

[257] Para uma exposição da dedução da área de um círculo utilizando o processo descrito e sua relação com a integral, consultar Flemming e Gonçalves (2006, p. 256-258).

definida, no caso da primeira, e calcular a integral definida de uma função com base no estudo da área de retângulos que utiliza a soma de Riemann, no caso da segunda.

Além dos elementos destacados, nas análises de tarefas com outros conteúdos e conceitos, é importante sublinhar que a relação entre área e integral é importante, porém não é dada de antemão. O relacionamento entre a área e sua determinação por triângulos pode se transformar em aspecto estruturador e vir a expressar a relação essencial que fundamenta o conceito de integral, caso ela esteja enredada pela ideia de acumulação. Assim como o conceito de derivada expressa a relação de variação de relações quantitativas entre grandezas variáveis em geral, a integral representa o processo de acumulação, no contexto de uma relação quantitativa entre grandezas variáveis interdependentes, de uma das variáveis em um intervalo em que a outra varia.

Na descrição do desenvolvimento da Tarefa 1, são apresentadas orientações aos estudantes primeiramente na forma de analogia com o conceito de tangente e, em seguida, com orientação mais direta:

> A professora lembrou que, ao definir uma tangente, primeiro foi aproximado a inclinação da reta tangente por inclinações de retas secantes, tomando o limite dessas aproximações. Então a professora pediu que os estudantes pensassem numa ideia similar para calcular a área da região. [...] Outra orientação dada pela professora: "*Vocês devem aproximar a região S por retângulos e depois tomar o limite das áreas desses retângulos à medida que o número de retângulos vai aumentando*" (Bezerra, 2016, p. 204-205).

Não conseguimos entender quais os elementos análogos entre a determinação da tangente e do cálculo de áreas. A orientação seguinte, porém, é prescritiva e nos autoriza a realizar um questionamento acerca da margem de exploração e investigação tornada possível aos estudantes. Tal postura da professora permite-nos novamente identificar, nessa forma de desenvolvimento e encaminhamento da resolução da tarefa, características descritas por Davídov (1988) e Davýdov [198-?] que fortalecem a formação do conhecimento empírico. Além disso, como a passagem entre a Tarefa 1 e a Tarefa 2 não é detalhada, há um impedimento para a compreensão de como os estudantes entram em contato com o significado atual do conceito de integral.

Prevot (2019) segue a mesma linha das tarefas de derivadas para formular as seguintes:

Quadro 19 – Exercício 3 – Prevot (2019)

Resolver a integral $\int_0^h \sqrt{4-(y-2)^2}$, usando, nesta ordem:

a) Método analítico algébrico manual (Sugestão: substituição trigonométrica);
b) Um aplicativo matemático, para conferir o resultado (baixe e instale em seu smartphone, se necessário) – Sugestões de aplicativos: PhotoMath, Malmath, Wolfram|Alpha, Symbolab.

Qual aplicativo foi usado? R: _____

Em sua opinião, o resultado obtido possui algum significado físico? Explique brevemente.

Fonte: Prevot (2019, p. 214).

Quadro 20 – Situação-problema 4 – Prevot (2019)

Agora, um problema real (Adaptado de ORO e KRIPKA, 2011): Um caminhão tanque, possui um tanque, de comprimento L e diâmetro D, constituído de um cilindro posicionado na horizontal, conforme a figura abaixo, usado para armazenamento e transporte de líquidos. Encontre um modelo matemático, que permita determinar o volume de líquido armazenado, dada uma determinada altura h. Com o modelo matemático obtido, determine o volume de líquido para $L = 10\ m$, D= $2\ m$ e $h = 0{,}8\ m$, $h = 1\ m$ e $h = 1{,}5\ m$. Use aplicativo matemático.

Qual aplicativo foi usado? R: _____

Em sua opinião, o resultado obtido possui algum significado físico? Explique.

Fonte: Prevot (2019, p. 214-215).

A função do exercício 3 é colocar o estudante em contato com um processo de integração – por substituição trigonométrica – que requisita o mesmo modo de ação da Situação-problema 4. Uma característica a ser destacada é a utilização de uma variável para o limite superior do intervalo de integração, o que permite o levantamento de hipóteses e a exploração da integral como um processo de acumulação. Tal situação se objetiva parcialmente na tarefa de modelação quando é solicitado que o estudante determine o volume do líquido para o comprimento das dimensões indicadas. Vale lembrar que Prevot (2019) visa investigar a incorporação do *m-learning* no ensino com estudantes que já cursaram a cadeira de Cálculo. O seu objetivo não é, necessariamente, introduzir os conceitos, o que explica o pequeno número de tarefas e suas características. O caráter exploratório do processo de resolução é um aspecto importante para a mobilização dos estudantes, porém a finalidade da tarefa, voltada para a "aplicação" dos conceitos, bem como a ausência da intenção de destacar os elementos essenciais dos conceitos reduz o poder de contribuição para a formação e desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes.

No que se refere à questão da "aplicação" por meio da formulação do modelo matemático da situação, nos moldes que são apresentados pela pesquisa, podemos considerar que essa postura é proveniente do *princípio do caráter consciente* do ensino tradicional (Davídov; Slobódchikov, 1991; Davydov, 2017). Segundo Davídov e Slobódchikov (1991), o princípio do caráter consciente possui certa sensatez ao se opor à memorização mecânica e à escolástica. Sua debilidade, porém, emana do fato de entender que os conhecimentos devem ser apresentados na forma de abstrações verbais claras, necessitando, em período posterior, que sejam correlacionadas, pelo estudante, com uma imagem sensorial exata e definida. O resultado

de tal forma de compreensão do processo de apropriação tem como desdobramento a redução dos conhecimentos à conexão entre os significados das palavras e de seus respectivos correlatos sensoriais. Assim, o

> [...] "caráter consciente" convive com o fato, permanentemente demonstrado na escola, de que os conhecimentos estão separados dos processos de seu emprego (na didática, inclusive, estabelece-se o princípio especial de "unir os conhecimentos e sua utilização": deve-se reunir o que tem sido separado desde o início)[258] (Davídov; Slobódchikov, 1991, p. 128).

A proposta de Prevot (2019), conforme se pôde demonstrar, é guiada por esse princípio. Como consequência, a desvinculação daquilo que está unido tem que ser realizada por intermédio de uma atividade especial, a "'atividade de correlacionar conhecimento com objeto', em que 'conhecimento' e 'objeto' são pensados como duas coisas diferentes, distintas da própria pessoa" (Ilienkov, 2016d, p. 39). A mutilação da relação conhecimento e objeto decorrente da apresentação dos conhecimentos na forma de abstrações verbais e o seu enredamento posterior com as imagens sensoriais correspondentes não redunda em outro modo de pensar senão o pensamento empírico (Davídov; Slobódchikov, 1991).

A crítica endereçada a esse traço característico da proposição de Prevot (2019) pode igualmente ser utilizada na análise da última tarefa apresentada no trabalho de Bezerra (2016). A pesquisadora teve como propósito "avaliar a compreensão dos estudantes acerca da aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo" (Bezerra, 2016, p. 97). Ademais, por ser a única tarefa apresentada na fase final, cabe a ela "visualizar a aprendizagem dos estudantes por meio do progresso nas etapas descritas por Galperin (1959) na sua teoria, que passa de material a mental" (Bezerra, 2016, p. 213).

Quadro 21 – Tarefa 3 – Bezerra (2016)

Uma empresa possui uma máquina que se deprecia a uma taxa contínua $f = f(t)$, onde t é o tempo medido em meses desde seu último recondicionamento. Como a cada vez que a máquina é recondicionada incorre-se a um custo fixo A, a empresa deseja determinar o tempo ótimo T (em meses) entre os recondicionamentos. Explique por que $\int_0^t f(s)ds$ representa a perda do valor da máquina sobre o período de tempo t desde o último recondicionamento.

Fonte: Bezerra (2016, p. 97)[259].

[258] "Otra paradoja es que semejante 'carácter consciente' convive con el hecho, permanentemente señalado en la escuela, de que los conocimientos están separados de los procedimientos de su empleo (en la didáctica incluso se plantea el principio especial de "unir los conocimientos y su utilización": hay que reunir lo que ha sido separado desde el inicio)".

[259] O leitor encontra essa tarefa também em Stewart (2006, p. 400).

Dentre as teses analisadas, essa é a única tarefa que trata do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC). A solução exige uma articulação entre o significado da derivada como taxa de variação – depreciação – e a integral como antiderivada. Se $F(t) = \int_0^t f(s)ds$, então $F'(t) = f(t)$. Como $f(t)$ representa a taxa de depreciação, então $F(t)$ representa a perda de valor no intervalo $[0, t]$.

O elemento ausente nas tarefas apresentadas é, novamente, a abstração substancial do Cálculo. A ideia de acumulação pode ser interpretada na Situação-problema 4 de Prevot (2019) e, possivelmente, na adaptação da tarefa de limite de Farias (2015). Porém, na forma como são encaminhadas as suas soluções não há um tratamento que as evidencie. Além disso, vale grifar a ênfase na tentativa de "aplicação" em Prevot (2019) e no caráter construtivo de Farias (2015). Por fim, cabe ainda frisar o viés estático adquirido pelas tarefas, proveniente da ausência de uma contradição interna. Isso, por sua vez, redunda da estreiteza das condições e do caráter diretivo do comando que denota o que é exigido.

6.3 A OBJETIVAÇÃO DO OBJETO DE ENSINO DO CÁLCULO EM TAREFAS EXPLICITADAS DE PESQUISAS QUE SE ANUNCIAM FUNDAMENTADAS NA TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL

Com o intuito de deixar mais claros os principais resultados do processo objetivado nas páginas anteriores, consideramos imprescindível uma sistematização dos determinantes do processo de objetivação do objeto de ensino do Cálculo – à luz dos determinantes oriundos da discussão realizada nos capítulos anteriores – nas pesquisas analisadas, adotando como unidade as tarefas que compõem o processo de organização do ensino.

O essencial do movimento analítico pode ser resumido na assertiva da existência de uma relação de determinação mútua entre a forma e o conteúdo no processo de ensino, em que o segundo é polo com prioridade ontológica. Apesar dela, a relação de determinação só pode ser apropriada dialeticamente, o que exige a captura dessas categorias em movimento. A manifestação desse processo, no caso do ensino, encontra-se na unidade formada pela interdependência entre o objeto do conhecimento do Cálculo e o objeto de ensino do Cálculo.

O objeto de ensino do Cálculo – como constatado na investigação – adquire determinado conteúdo conforme, dentre outros elementos, a formulação e a proposição das tarefas que colocam os estudantes em contato com ele. O conteúdo oriundo da solução das tarefas é determinado, em especial, pela finalidade e condições apresentadas para o seu

desenvolvimento. Isso imprime-lhe uma direção que, por consequência, aponta para um conteúdo a ser apropriado na forma de conhecimento matemático. Além disso, o conteúdo do objeto apropriado é determinado, também, pelo conteúdo das relações estabelecidas na atividade conjunta, guiadas pelas condições gerais nas quais estão inseridas. Ou seja, pelo conteúdo das ações e operações realizadas para sua solução. Por sua vez, a estruturação das propostas e os modos pelos quais organizam e entendem o processo de apropriação do conhecimento apresentam influências na constituição do objeto de ensino. Isso porque reúnem certos determinantes, entre eles a concepção acerca da necessidade e contribuição da apropriação dos conhecimentos abordados no ensino de Cálculo. Esses são indispensáveis para o desenvolvimento dos estudantes, finalidade do ensino que, por consequência orienta o processo de realização das ações necessárias para a apropriação desse conhecimento.

O elemento aglutinador desses aspectos é a tarefa, entendida como a unidade formada entre finalidade e condições de realização das ações (Davídov, 1988; Leontiev, 2021). Nela encontram-se condensadas a finalidade posta, cuja existência configura-se como uma realidade para o professor – o que pressupõe sua presença na unidade da atividade coletiva –, e as condições de sua realização, o que limita e direciona a atuação dos sujeitos. A relação entre finalidade e condições põe em evidência uma tensão entre as ações necessárias em situações determinadas e as possibilidades dos indivíduos de as realizarem. Desse modo, as formas de elaboração, proposição e desenvolvimento das tarefas reúnem os traços essenciais para a materialização do conteúdo a ser objetivado no objeto de ensino do Cálculo. Como síntese das intencionalidades, elas tendem a dirigir o movimento da atividade e, portanto, o conteúdo a ser apropriado, o que consubstancia o objeto de ensino.

Em nossa análise, foram identificadas tendências que nos fornecem condições de capturar o movimento de concretização da relação entre objeto de ensino do Cálculo e objeto do Cálculo na atividade. A ênfase nos modos, respectivamente, de estruturação da proposta pelo pesquisador e de solução das tarefas pelos estudantes, em detrimento da sistematização e sua formulação centradas no conteúdo teórico dos conhecimentos do Cálculo, indicam que a referência norteadora à constituição do objeto de ensino é um conhecimento reificado. Portanto, contraria a intencionalidade dos pesquisadores. As tarefas presentes nas teses analisadas, em geral, apresentam tensões orientadas por aspectos externos. Por essa razão, dificultam a apropriação do objeto da atividade, além de restringir os determinantes mobilizadores da atuação dos sujeitos – estudantes. Isso é uma decorrência das limitações das tarefas em proporcionar, aos estudantes, situações fomentadoras de antinomias, isto é, contradições formalmente indissolúveis nas condições dadas que os mobilizem na busca de novas formas de

ação. Desse modo, apresentam entre suas características: a não exigência de elementos mediadores; uma formulação que requisita a solução por meio de vias construtivas orientadas pelo professor; a não apresentação clara de suas finalidades; e possibilidades de resolução por métodos algorítmicos. Soma-se, ainda, o papel central da palavra do professor como direcionador da observação do estudante e sintetizador dos aspectos considerados essenciais. Tais características resultam na apropriação do conhecimento reduzido a formas particulares dos modos de ação possibilitados por esses conhecimentos.

Como as tarefas não são fundamentadas na relação essencial e geneticamente inicial do Cálculo, sintoma da ausência de uma discussão ontológica sobre o objeto do Cálculo, restringem-se à possibilidade de organização do ensino em um sistema complexo e unitário. Por consequência, determinadas passagens e vínculos entre os conceitos, ao não serem seu alvo, implicam a emergência da necessidade de conexão lógica que, em geral, ocorre no plano verbal.

Tais elementos nos possibilitam, portanto, salientar a relação dialética entre o conhecimento a ser apropriado e as formas de organização das situações em que o estudante tem contato com ele. Em outras palavras, é posto em tela uma constelação de determinantes da atividade consubstanciados no objeto de ensino. São eles que determinam o conteúdo do conhecimento a ser apropriado, concomitante à constatação de que tal conteúdo se constitui em elemento norteador para a organização das condições de emergência e objetivação do objeto de ensino. Portanto, a forma como é organizado o ensino pressupõe um conteúdo do objeto do conhecimento a ser apropriado que direciona a realização de diversos aspectos na unidade da atividade. Desse modo, é no processo de desenvolvimento dessa atividade que os objetos adquirem determinado conteúdo. Se o objeto de ensino pressupõe um determinado conteúdo do objeto do conhecimento a ser apropriado, logo, é no movimento de objetivação do objeto de ensino na atividade que ele ganha materialidade. Especificamente, podemos afirmar que, se a organização do ensino é formulada sobre um sistema de tarefas que não busca expressar a abstração substancial do Cálculo, então são criadas condições que dificultam a apropriação do conteúdo teórico dos conhecimentos do Cálculo. Esse aspecto é condição necessária, mas não suficiente, para tal fim, pois depende do modo como essas tarefas são desenvolvidas na atividade coletiva de estudo escolar.

Com base na leitura dialética dessa relação, é possível sustentar a interpretação de que no processo de constituição do objeto de ensino do Cálculo nas teses analisadas – apesar de se anunciarem sustentadas na teoria histórico-cultural – o conteúdo objetivado do objeto do Cálculo se manifesta dissociado dos seus elementos essenciais. Por decorrência, apresenta um

caráter fragmentado, estático, que manifesta a presença de nexos importantes apenas no plano superficial.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O movimento analítico imprimido na pesquisa e descrito nas páginas anteriores, estabelece as condições para a realização de uma síntese que intente demonstrar a razoabilidade de nossa tese inicial, isto é, de que no processo de constituição do objeto de ensino do Cálculo se manifesta e se objetiva um determinado conteúdo do objeto do Cálculo. Dentre os elementos norteadores de nossa investigação e da exposição dos seus resultados que visam sustentar a referida tese, encontra-se uma hipótese: a análise ontológica do objeto de ensino do Cálculo lança luz sobre aspectos essenciais acerca do conteúdo do objeto do Cálculo objetivado na atividade coletiva de estudo escolar. Também traz um problema: Qual o estatuto ontológico da relação entre o objeto do Cálculo e o objeto de seu ensino no contexto da educação escolar? Essas duas formulações, orientadoras da pesquisa, requereram ações para sua confirmação e solução, respectivamente.

Uma das ações desenvolvidas foi a análise de tarefas que compunham as propostas de organização de ensino explicitadas em teses – nomeadamente, Farias (2015), Bezerra (2016), Prevot (2019) e Oliveira (2021) – que se anunciam fundamentadas na teoria histórico-cultural. Esse movimento visou encontrar as possíveis relações entre os elementos constitutivos da natureza do objeto do Cálculo e sua manifestação como objeto de ensino. A análise das tarefas permitiu, também, a realização do tensionamento entre a proposta de organização do ensino de Cálculo e o conteúdo do conhecimento que passa a ser objetivado na forma de objeto de ensino. Fica cristalino que a organização do ensino dificilmente contribui para o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes caso não seja antecedida por uma tomada de posição ontológica ante o saber e o conhecimento que o consubstancia. Esse é um aspecto importante para a constituição do objeto de ensino que tenha como centralidade o objeto do conhecimento a ser apropriado, pois possibilita a apreensão dos determinantes e relações essenciais deste visando torná-lo objeto de ensino. Tal postura, porém, é esvaziada de significado ao não se refletir na elaboração, organização, proposição e desenvolvimento das tarefas. Nesse sentido, a tese de Davídov (1988) que coloca o conteúdo como prioridade em relação à determinação dos métodos de ensino pode ser considerada correta.

No que se refere ao nosso objeto, é possível afirmar que a perda de protagonismo do conteúdo matemático na elaboração dos métodos faz com que, no processo de realização da atividade, o objeto do conhecimento matemático se expresse na forma de conceitos estanques e fragmentados. Isso, possivelmente, estabelece as condições de formação do pensamento empírico dos estudantes. Em outras palavras, tal situação produz obstáculos para que os

estudantes se apropriem do sistema conceitual do Cálculo como um complexo estruturado e coerente em contínuo movimento.

Essa constatação só foi possível porque nossa análise esteve ancorada em uma postura metodológica guiada pela busca da abstração substancial e dos nexos conceituais que compõem o sistema conceitual do Cálculo. Tal postura se instituiu como outra ação de pesquisa. Por sua vez, tal ação se fundamentou nos resultados de outra, que buscava explicitar a natureza do conhecimento matemático em geral e dos conhecimentos abordados no Cálculo em particular.

Essa finalidade nos impulsionou na busca pelos determinantes genéticos que possibilitam o surgimento da atividade matemática. Encontramos a sua gênese no processo de trabalho, categoria que, segundo Lukács (2013), possui prioridade ontológica para a explicação do ser social. Essa categoria é formada por momentos sintéticos da relação estabelecida entre teleologia e causalidade, que exprime a relação entre sujeito e objeto no processo de transformação da realidade e reprodução contínua do novo pelo ser humano. Nessa atividade estão colocados dois componentes evidenciadores da inseparabilidade da teleologia e da causalidade, bem como da unidade formada por sujeito e objeto: o pôr dos fins e a investigação dos meios. Desse modo, conforme Lukács (2013), para a realização do pôr do fim, a investigação dos meios deve capturar um conhecimento sobre as gêneses causais dos processos objetivos cujo desenvolvimento pode auxiliar a atingir o fim posto. Essa investigação serve a uma dupla função na esfera do ser social: pôr em evidência aquilo que governa os objetos independentemente da consciência e encontrar novas conexões e modos de organização do real para desencadear um movimento que possibilite a efetivação do fim teleologicamente posto. Nesse contexto, a atividade matemática exerce a função de capturar e interpretar na consciência momentos da realidade que são expressos na forma de relações.

Pela atividade matemática, as relações reais de uma realidade complexa e heterogênea são sintetizadas e homogeneizadas em um plano matemático. Neste, destacam-se apenas as propriedades dos objetos que dizem respeito a uma determinada qualidade dos objetos da realidade. Sobre essas bases, por exemplo, entendemos que a quantidade é a especificação da qualidade de um objeto, em outras palavras, a qualidade de uma qualidade (Caraça, 2003; Prado Júnior, 1963). O modo como o ser humano se apropria desses aspectos exige o estabelecimento de relações e de sua fixação na forma de escalas, baseadas em um elemento tomado como referência para a sua constituição, de modo a representar o grau pelo qual ele aparece nos objetos. Por decorrência, gera o conceito de grandeza e, com mais mediações, o de número (Prado Júnior, 1963). Contudo, quando o indivíduo se depara com um objeto

matemático – por exemplo o número –, a cadeia de abstrações e os movimentos de sistematização dos processos de estabelecimento das relações se escondem sob a forma *entificada* do produto (Prado Júnior, 1963). A realidade da atividade que está na base do conceito surge perante ele estaticamente, de maneira que, em muitos casos, aparenta exercer um poder extraterreno sobre a sua vida. Isso conduz a diversas consequências, como por exemplo, ao misticismo.

Somente sobre essas bases, compreendendo que a atividade matemática tem por objetivo refletir, na forma de conceitos constituídos em última instância como relações, que os conhecimentos que compõem o Cálculo passam a ser elaborados e sistematizados. Porém, é necessário sublinhar que, decorrente de sua gênese, a atividade matemática não é livre das influências das diversas formas de relacionamento do ser humano com a realidade. Apesar de sua natureza desantropomorfizadora, ela é influenciada por uma gama de outros aspectos constitutivos do ser social, emanadas, por exemplo, das esferas econômicas, políticas, morais, artísticas, entre outras. Tais dimensões direcionam e influem no modo como se desenvolve a história social e, por consequência, a história do pensamento matemático.

Ao tomarmos como ponto de partida esse cenário, empenhamo-nos, em certo momento da realização da pesquisa, na busca por episódios históricos explicitadores das tensões que evidenciassem o movimento de desenvolvimento do conhecimento do Cálculo. Isso nos possibilitou encontrar, como aspecto norteador desse processo, a tentativa do ser humano entender a relação entre a fluência e a permanência, bem como entre a unicidade e multiplicidade do real. As relações dialéticas entre esses pares de categorias que expressam, nas palavras de Marx (2011, p. 59), "formas de ser, determinações da existência", isto é, momentos da realidade, constituem-se como pano de fundo que possibilita apreender o movimento de desenvolvimento dos conceitos do Cálculo. Realizamos um estudo crítico, baseado em historiografias, a fim de identificar os movimentos constitutivos do saber matemático e o conjunto de necessidades, internas e externas, que possibilitavam suas diferentes formas de materialização. Essa ação nos propiciou um conjunto de elementos para sustentar a constatação de que a abstração substancial do Cálculo são as relações entre a variação e a acumulação de relações quantitativas entre grandezas variáveis em geral. Alicerçados nessa observação, torna-se concreto o sistema complexo e unitário do Cálculo, que é erguido sobre conceitos como os de limite, continuidade, séries, derivada e integral. Acresce-se, ainda, as relações conceituais que lhes dão fundamento, como finito/infinito, infinitamente pequeno/infinitamente grande, discreto/contínuo, local/global, unidade/multiplicidade e variabilidade/permanência.

A identificação da referida abstração substancial não é suficiente para compreender de que maneira o objeto do conhecimento do Cálculo se manifesta como objeto de ensino, pois ele só adquire conteúdo em seu processo de objetivação. Para explicitar o conteúdo do conhecimento matemático como forma de atualização e materialização de um saber histórica e socialmente elaborado, surgiu a necessidade de explicitar a leitura que realizamos sobre o modo como comparecem os condicionantes históricos na constituição do objeto de ensino na atividade coletiva de estudo escolar.

Para que o leitor melhor pudesse entender nossos pressupostos teórico-metodológicos, desenhamos um debate sobre a relação entre o modo pelo qual o processo histórico de desenvolvimento do real ocorre e a forma como ele é apropriado e interpretado conceitualmente pelo ser humano. Trata-se, pois, da relação entre o lógico e o histórico no processo de apreensão da realidade. Consideramo-lo importante, uma vez que a relação categorial posta em destaque se faz presente, em particular na constituição do objeto de ensino, e em geral no complexo da educação. Nesse movimento dialético, estabelecido entre os diferentes estratos da esfera do ser social, materializa-se o contínuo movimento de sua reprodução. À educação, como esfera mais ampla, fica incumbido o papel de mobilizar os indivíduos a se apropriarem de conhecimentos, habilidades, comportamentos e atitudes historicamente elaborados, sem os quais sua possibilidade de reprodução individual é limitada. Contudo, como o momento predominante do ser social é a reprodução do novo, esse processo de educação se objetiva de modo que essas aptidões e funções humanas são apropriações particulares que adquirem determinado conteúdo, a depender das formas de organização da reprodução social. O tom do debate foi dado pelo contraste entre as interpretações de autores que seguem uma tradição iniciada por Engels (1982, 2017) e, principalmente, pelos trabalhos de Lukács (2010, 2012, 2013). Elegemos, como relações orientadoras, aquelas estabelecidas entre as categorias essência e fenômeno, necessidade e acaso.

Esse movimento de explicitação pôde sustentar uma interpretação da solução para o problema teórico da relação entre ontogênese e filogênese no desenvolvimento humano elaborada por Davídov (1988) com base na categoria do ideal (Iliénkov, 1977; Ilienkov, 2016a, 2016b), considerada pelo psicólogo e didata soviético como lógica, como sendo, na verdade, ontológica. Portanto, a problemática da relação entre o desenvolvimento histórico dos saberes e conhecimentos e o seu processo de apropriação e vínculo com o desenvolvimento do indivíduo só pode ser resolvida se sustentada em uma correta apreensão da categoria do ideal.

O ideal, para Iliénkov (1977) e Ilienkov (2016a, 2016b), apenas é interpretado com base no conceito de atividade. A transformação da realidade, oriunda do momento

predominante – reprodução do novo –, introduz elementos com características que somente fazem sentido no âmbito da prática social. Assim, os significados sociais referentes aos objetos criados pela prática humana passam a ganhar objetividade. Ao mesmo tempo, tornam-se imprescindíveis para os indivíduos e para a sociedade, pois se transformam em meios de garantir o seu processo de reprodução. A esfera ideal diz respeito, nesse contexto, às formas de atividade condensadas na realidade como cultura. Desse modo, os objetos matemáticos podem ser considerados ideais, pois constituem-se como encarnação de possibilidades de ação que permitem, aos indivíduos, atuar de uma determinada maneira. Por exemplo, no conceito de derivada de uma função estão condensadas as capacidades de realização da ação de investigação e controle da relação de variação entre as grandezas variáveis interdependentes. Por sua vez, o conceito de integral de uma função encarna a capacidade de realização da ação de reflexão e controle sobre o processo de acumulação da relação de variação de grandezas interdependentes.

A esfera do ideal, ao representar relações entre seres humanos e entre eles e objetos (Roth, 2020), reproduz-se sempre pela atividade humana que lhe confere um conteúdo determinado. Entendemos que Radford (2013, 2021a), com fundamentos nessa categoria, estabelece os conceitos de saber e conhecimento que nos auxiliam na apropriação da relação entre o objeto de ensino do Cálculo e o objeto do Cálculo ao reforçar o papel da atividade. Segundo Radford (2021a), é pela atividade que o saber, como arquétipo histórico de ações coletivas, é colocado em movimento, o que torna certos tipos de ação e reflexão mais concretos. Nesse movimento, o saber se materializa como conhecimento. Portanto, pela atividade, o saber, forma ideal de ações, é materializado por meio da realização concreta das ações. No contexto escolar, a atividade, ao se estruturar com base em um objeto de ensino, tem como referência um determinado saber matemático que adquire conteúdo específico, isto é, materializa-se ou se atualiza, por intermédio do modo pelo qual são realizadas as próprias ações.

Ao volver nossa atenção novamente para a relação essencial da presente pesquisa, a relação entre o objeto de ensino do Cálculo e o objeto do Cálculo, interpretamos que o objeto de ensino, ao ser guiado pelo conteúdo do conhecimento a ensinar, é determinado pelo conteúdo das relações envolvidas nessa atividade. Esta se materializa pela síntese entre o conteúdo do objeto do conhecimento e outras finalidades atribuídas ao ensino. Desse modo, o conteúdo do objeto de ensino é determinado tanto pelo conhecimento matemático contido na base da constituição da finalidade, quanto pelo conteúdo das relações que põem em movimento os sujeitos em direção a essa finalidade. Tal fato pode ser evidenciado na proposição das tarefas, isto é, unidade entre finalidade e condições (Davídov, 1988; Leontiev, 2021). Uma condição necessária, mas não suficiente, é que o ensino voltado para a formação do pensamento teórico

dos estudantes estruture-se com base em um sistema de tarefas que expresse a abstração substancial do Cálculo. Tal intencionalidade só se torna uma realidade caso, no movimento de solução das tarefas, a atividade realizada, para a qual o objeto de ensino é elemento determinado e determinante, desenvolva-se de determinado modo, ou seja, depende de outros elementos e finalidades que consubstanciam o ensino.

Essas relações se manifestam no processo de constituição e resolução das tarefas analisadas por nós. As pesquisas que propõem tais tarefas, de modo geral, em sua estruturação e organização do ensino, foram orientadas por um determinado conteúdo do objeto do Cálculo. O conteúdo do conhecimento matemático – capturado, principalmente, pela análise das tarefas – apresenta potencial limitado de explicação do mundo. Isso ocorre na medida em que não é orientado – ou pelo menos, não manifesta ser – por uma visão unitária do objeto do Cálculo. Em sua formulação, as tarefas das teses analisadas, em geral, não apresentam antinomias – no sentido atribuído por Ilyenkov (2007a) – que explicitem a necessidade de apropriação do conhecimento pelo estudante. Isso tem por consequência que a palavra do professor passa a ser organizadora e orientadora das observações dos estudantes, em busca de determinados determinantes do conteúdo. Além disso, cumpre a função de preencher as lacunas que interligam as tarefas. Podemos acrescentar que, em geral, o processo de generalização segue do particular para o geral, guiado pelos elementos repetidos, ou seja, estimuladores das generalizações empíricas.

A análise ontológica da natureza e do modo de manifestação do objeto de ensino do Cálculo possibilitou, portanto, a apropriação do modo de manifestação do conteúdo do objeto do Cálculo na constituição do objeto de ensino do Cálculo, confirmando nossa hipótese inicial.

Devido à natureza do nosso objeto – entendido como "síntese de múltiplas determinações" – e do ineliminável caráter processual da realidade, compreendemos que contribui para desvelar a natureza da relação recíproca entre objeto do conhecimento e objeto de ensino. Além disso, emergem algumas problemáticas que fogem ao escopo da presente investigação, mas que podem contribuir para aprofundar o nosso entendimento acerca dela. Dentre elas, destacamos: Qual é a contribuição da apropriação do Cálculo para o desenvolvimento do indivíduo, ao se pensar na relação entre aprendizagem e desenvolvimento? Qual é o papel social do Cálculo para a reprodução social? Ao considerar a abstração substancial do Cálculo, qual é a sequência de disposição dos conteúdos que o põem, de modo mais efetivo, em evidência? Quais seriam as possíveis formulações dessas tarefas?

Essas questões estão postas também em um contexto no qual consideramos necessário um aumento das pesquisas sobre o ensino de Cálculo que compreendam o processo de ensino e de aprendizagem com base em fundamentos da teoria histórico-cultural. Sendo assim, o desafio que fica posto é o de organizar o processo de ensino sustentado nos princípios teóricos dessa teoria, não apenas no referente à utilização de instrumentos analíticos-interpretativos do processo de ensino, mas também no que diz respeito à organização de experimentos multidisciplinares. Para tanto, faz-se necessário que eles se estabeleçam de maneira estruturada com vista à constituição de um objeto de ensino que possibilite ao estudante se apropriar do que lhe é próprio e essencial. Desse modo, o conjunto de determinantes desenvolvidos na presente pesquisa pode, potencialmente, contribuir em tal empreitada. Isso ocorre, porque o relacionamento entre objeto do Cálculo e sua objetivação como objeto de ensino apresenta elementos para subsidiar tais tarefas, sempre na perspectiva da pesquisa em educação matemática como um complexo em constante movimento de vir-a-ser.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, Nicola. **Dicionário de filosofia**. 5. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ALEKSANDROV, A. D. Vision general de la matematica. *In*: ALEKSANDROV, A. D.; KOLMOGOROV, A. N.; LAURENTIEV, M. A. *et al*. **La matemática:** su contenido, métodos y significado. I. Madrid: Alianza, 1973. p. 17-89.

ARAUJO, Elaine Sampaio; MORAES, Silvia Pereira Gonzaga. Dos princípios da pesquisa em educação como atividade. *In*: MOURA, Manoel Oriosvaldo (org.). **Educação escolar e pesquisa na teoria histórico-cultural**. São Paulo: Edições Loyola, 2017. p. 71-100.

ARANA, Hermas Gonçalves. **Positivismo:** reabrindo o debate. Campinas: Autores Associados, 2007**.**

ARISTÓTELES. **Metafísica.** 2. ed. São Paulo: Edipro, 2012.

ARIEVITCH, Igor M. A Potencial for an Integrated View of Development and Learning: Galperin's Contribution to Sociocultural Psychology. **Mind, Culture, and Activity**, [California], v. 10, n. 4, p. 278-288, 2003.

ARIEVITCH, Igor; van der VEER, René. Furthering the Internalization Debate: Gal'perin's Contribution. **Human Development**, [*s. l.*], v. 38, n. 2, p. 113-126, 1995.

AZERI, Siyaves. The match of "Ideals": The historical necessity of the interconnection between mathematics and physical sciences. **Social Epistemology**, [*s. l.*], v. 35, n. 1, 2021.

BAKHURST, David. **Consciousness and revolution in Soviet Philosophy**: From Bolsheviks to Evald Ilyenkov. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

BAKHURST, David. Reflections on Activity Theory. In: BAKHUSRT, David. **The Heart of the Matter**: Ilyenkov, Vygotsky and the Courage of Thought. Leiden: Brill, 2023. p. 302-318.

BALDINO, Roberto Ribeiro. Cálculo Infinitesimal: passado ou futuro? **Temas & Debates**, [s. *l.*], n. 6, p. 5-21, 1995.

BALDINO, Roberto Ribeiro. Infinitésimos: Quem Ri por Último? **Boletim GEPEM**, [Seropédica], n. 36, p. 69-82, fev. 2000.

BARDI, Jason Socrates. **A guerra do cálculo**. 3. ed. Rio de Janeiro: Record, 2016.

BARON, Margart E. **Curso de história da matemática:** origens e desenvolvimento do Cálculo – Unidade 1: A Matemática Grega. Brasília: Universidade de Brasília, 1985a.

BARON, Margaret E. **Curso de História da Matemática**: origens e desenvolvimento do Cálculo – Unidade 2: Indivisíveis e infinitésimos. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985b.

BARON, Margaret E.; BOS, H. J. M. **Curso de História da Matemática:** origens e desenvolvimento do Cálculo – Unidade 3: Newton e Leibniz. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.

BARREIRA, César Mortari. Engels contra Marx? Do lógico/histórico aos níveis de abstração. **Verinotio – Revista on-line de Filosofia e Ciências Humanas**, Rio das Ostras, v. 26, n. 2, p. 110-133, jul./dez. 2020.

BEDIENT, Jack. Cálculo no Japão. *In*: BOYER, Carl B. **Cálculo**: Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula. v. 6, São Paulo: Atual, 1992a. p. 81-83.

BEDIENT, Jack. Infinitésimos na Índia. *In*: BOYER, Carl B. **Cálculo**: Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula. v. 6, São Paulo: Atual, 1992b. p. 83-86.

BERKELEY, George. O analista: ou um discurso dirigido a um matemático infiel. Onde se examina se o objeto, os princípios e as inferências da análise moderna são mais distintamente concebidos ou mais obviamente deduzidos do que os mistérios religiosos e as questões de fé. **Scientiae Studia**, São Paulo, v. 8, n. 4, p. 633-676, dez. 2010.

BEZERRA, Nilra Jane Filgueira. **A organização do ensino de Cálculo Diferencial e Integral na perspectiva da Teoria da Formação por Etapas das Ações Mentais de Galperin**. 2016. 262 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) – Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática – REAMEC, Cuiabá, 2016.

BHASKAR, Roy. Societies. *In*: ARCHER, Margaret; BHASKAR, Roy; COLLIER, Andrew; LAWSON, Tony; NORRIE, Alan. **Critical Realism:** Essential Reading. London: Routledge, 1998. p. 206-257.

BHASKAR, Roy. **A realist theory of science**. London: Routledge, 2008.

BICUDO, Irineu. Platão e a Matemática. **Letras Clássicas**, [*s. l.*], n. 2, p. 301-315, 1998.

BLASZCZYK, Piotr; KATZ, Mikhail G.; SHERRY, David. Ten Misconceptions from the History of Analysis and Their Debunking. **Foundations of Science**, [*s. l.*], v. 18, n. 1, p.43-74, Mar. 2013.

BOS, H. J. M. Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus. History. **Archive for History of Exact Sciences**, [*s. l.*], v. 14, n. 1, p. 1-90, Mar. 1974.

BOS, H. J. M. **Curso de História da Matemática:** Origens e Desenvolvimento do Cálculo – Unidade 4: O Cálculo no século XVIII 1: Fundamentos. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.

BOYER, Carl B. **The history of the Calculus and its conceptual development**. New York: Dover, 1959.

BOYER, Carl B. História do Cálculo. *In*: BOYER, Carl. B. **Cálculo**: Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula. v. 6, São Paulo: Atual, 1992. p. 1-28.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

BRESSOUD, David; GHEDAMSI, Imène; MARTINEZ-LUACES, Victor; TÖRNER, Günter. **Teaching and Learning Calculus**. Hamburg: ICME-13-Springer Open, 2016.

BURN, Robert P. Integration, a genetic approach. **Nordisk Matematikk Didaktikk**, [*s. l.*], v. 7, n. 1, p. 7-27, 1999.

BURN, Bob. (2005). The vice: Some historical inspired and proof-generated steps to limits of sequences. **Educational Studies in Mathematics**, [s. *l.*], v. 60, n. 3, p. 269–295, Nov. 2005.

CAJORI, Florian. **Uma Histórica da Matemática.** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** 5. ed. Lisboa: Gradija, 2003.

CARLSON, Marilyn P.; PERSSON, Joni; SMITH, Nancy. Developing and connecting calculus students' notions of rate-of-change and accumulation: the Fundamental Theorem of Calculus. *In*: **Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education-North America**. 27. PATEMEN, Neil A.; DOUGHERT, Barbara J.; ZILLIOX, Joseph T. (Ed.). **Proceedings of the 2003 joint meeting of PME and PMENA**, v. 2, Honolulu: University of Hawaii, 2003. p. 166-172.

CASTANHO, Sérgio. **Teoria da história e história da educação:** por uma história cultural não culturalista. Campinas: Autores Associados, 2010.

CAVAZOTTI, Maria Auxiliadora. **Educação e conhecimento científico**: inflexões pós-modernas, Campinas: Autores Associados, 2010.

CHAIKLIN, Seth. The meaning and origin of the activity concept in Soviet psychology – with primary focus on A. N. Leontiev's approach. **Theory & Psychology**, [*s. l.*], v. 29, n. 1, p. 3-29, Feb. 2019.

CHASIN, J. **Marx**: estatuto ontológico e resolução metodológica. São Paulo: Boitempo, 2009.

CHAUÍ, Marilena de Souza. **Introdução à história da filosofia**: dos pré-socráticos a Aristóteles. v. 1, São Paulo: Brasiliense, 1994.

CHAUÍ, Marilena de Souza. **Escritos sobre a universidade**. São Paulo: Editora UNESP, 2001.

CHEPTULIN, Alexandre. **A dialética materialista:** categorias e leis da dialética. São Paulo: Alfa-Omega, 2004.

COLES, Alf. A Relational View of Mathematical Concepts. *In*: FREITAS, Elizabeth; SINCLAIR, Nathalie; COLES, Alf (Ed.). **What is a Mathematical Concept?** Cambridge: Cambridge University Press. 2017. p. 205-222.

COLES, Alf. Commentary on a Special Issue: Davydov's Approach in the XXI Century. **Educational Studies in Mathematics,** [s. *l.*], v. 106, n. 3, p. 471-478, Mar. 2021.

COMTE, Auguste. Curso de Filosofia Positiva. *In*: COMTE, Auguste. **Auguste Comte**: Os pensadores. São Paulo: Nova Cultural, 1996. p. 21-68.

CONG-LEM, Ngo. Unravelling Cultural-Historical Activity Theory (CHAT): Leontiev's and Engeström's Approaches to Activity Theory**. Knowledge Cultures**, [New York], v. 10, n. 1, p. 84-103, 2022a.

CONG-LEM, N. Vygotsky's, Leontiev's and Engeström's Cultural-Historical (Activity) Theories: Overview, Clarifications and Implications. **Integrative Psychological and Behavioral Science**, [*s. l.*], v. 56, n. 4, p. 1091-1112, Dec. 2022b.

COSTA, Gilmasa Macedo da. **Indivíduo e sociedade**: sobre a teoria de personalidade em Georg Lukács. 2. ed. São Paulo: Instituto Lukács, 2012.

DALMOLIN, Beatriz Alves da Silva. **A tricotomização entre aritmética, álgebra e geometria nos erros apresentados por estudantes da disciplina de cálculo diferencial integral I**. 2015. 105 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2015.

DANTZIG, Tobias. **Número:** a Linguagem da ciência. Rio de janeiro: Zahar, 1970.

DAVÍDOV, Vasili. **La ensenãnza escolar y el desarrollo psíquico:** Investigación psicológica, teórica y experimental. Mosccú: Editorial Progreso, 1988.

DAVÍDOV, V. V.; SLOBÓDCHIKOV, V. I. La enseñanza que desarrolla en la escuela del desarrollo. *In*: MUDRIK, Anatoliy Viktorovich (comp.). **La educación y la enseñanza:** una mirada al futuro. Moscú: Editorial Progreso, 1991. p. 118-145.

DAVYDOV, V. V. Logical and Psychological Problems of Elementary Mathematics as an Academic Subject. *In*: STEFEE, Leslie P. (Ed.). **Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics;** Vol. VII: Children's capacity for learning mathematics. [*s. l.*: *s. n.*], 1975. p. 55-108.

DAVYDOV, Vasily V. Development Pedagogy and the Theory of Recapitulation. **Journal of Siberian Federal University. Humanities & Social Sciences**. [Siberia], v. 5, n. 11, p. 1542-1548, 2012.

DAVYDOV, Vasily Vasilyevich. Análise dos princípios didáticos da escola tradicional e dos possíveis princípios do ensino em um futuro próximo. *In*: LONGAREZI, Andréa Maturano; PUENTES, Roberto Valdés (org.). **Ensino Desenvolvimental***:* Antologia: Livro I. Uberlândia: Editora EDUFU, 2017. p. 211-224.

DAVÝDOV, V. V. **Tipos de generalización en la enseñanza.** Havana: Pueblo y educación, [198-?].

DELLA VOLPE, Galvano. **A Lógica como Ciência Histórica.** Lisboa: Edições 70, 1984.

DIAS, Marlene Alves; ARTIGUE, Michèle; JAHN, Ana Paula; CAMPOS, Tania M. M. A comparative study of the secondary tertiary transition. *In*: PINTO, Márcia F.; KAWASAKI, Teresinha F. (Ed.). **Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education:** Mathematics in Different Settings. 34., **Proceedings** [...], v. 2. Belo Horizonte: UFMG, 2010. p. 129-136.

DIAS, Marisa da Silva. **Formação da imagem conceitual da reta real: um estudo do desenvolvimento do conceito na perspectiva lógico-histórica.** 2007. 252 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação da USP, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

DIAS, Marisa da Silva.; MORETTI, Vanessa Dias. **Números e operações:** elementos lógico-históricos para atividade de ensino. Curitiba: InterSaberes, 2012.

DUARTE, Newton. **A Relação entre o Lógico e o Histórico no Ensino de Matemática Elementar**. 1987. 185 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Centro de Educação e Ciências Humanas, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 1987.

DUARTE, Newton. **Vigotski e o "aprender a aprender"**: crítica às apropriações neoliberais e pós-modernas da teoria vigotskiana. 2. ed. Campinas: Autores Associados, 2001.

DUARTE, N. **Educação escolar, teoria do cotidiano e a escola de Vigotski**. 4. ed. Campinas: Autores Associados, 2007.

DUARTE, Newton. **A individualidade para si:** contribuição a uma teoria histórico-crítica da formação do indivíduo. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2013.

DUARTE, Newton. O significado político da objetividade do conhecimento e de sua difusão: argumentos contra o negacionismo e o relativismo. **Germinal: marxismo e educação em debate**, [*s. l.*], v. 14, n. 3, p. 55-72, dez. 2022.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano**: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Fascículo I. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

EDWARDS, C. H. **The historical development of the calculus**. New York: Springer-Verlag, 1979.

ELY, Robert. Teaching calculus with infinitesimals and differentials. **ZDM**, [*s. l.*], v. 53, p. 591-604, June 2021.

ENGELS, F. Discurso diante da sepultura de Marx. *In*: MARX, K; ENGELS, F. **Obras escolhidas.** v. 2. São Paulo: Alfa-Omega, [19--]. p. 349-352.

ENGELS, Friedrich. **Carta a W. Borgius**. 1894. Disponível em: https://www.marxists.org/portugues/marx/1894/01/25.htm. Acesso em: 07 nov. 2023.

ENGELS, Friedrich. Karl Marx, "Para a Crítica da Economia Política". *In*: MARX, K; ENGELS, F. **Obras escolhidas**. v. 1. Lisboa: "Avante", 1982. p. 534-543.

ENGELS, F. Sobre o papel do trabalho na transformação do macaco em homem. *In*: ANTUNES, Ricardo (org.). **A Dialética do trabalho.** 2. ed. São Paulo: Expressão Popular, 2013. p. 13-29.

ENGELS, Friedrich. **Anti-Düring**: a revolução da ciência segundo o senhor Eugen Düring. São Paulo: Boitempo, 2015.

ENGELS, Friedrich. Lei do valor e taxa de lucro. *In*: MARX, Karl. **O capital**: crítica da economia política: livro III: o processo global da produção capitalista. São Paulo: Boitempo, 2017. p. 952-968.

ENGELS, Friedrich. **Dialética da natureza**. São Paulo: Boitempo, 2020.

ENGESTRÖM, Yrjö. Activity theory and individual and social transformation. *In*: ENGESTRÖM, Yrjö; MIETTINEN, Reijo; PUNAMÄKI, Raija-Leena (Ed.). **Perspectives on activity theory.** Cambridge University Press, 1999. p. 19-38.

ENGESTRÖM, Yrjö. Aprendizagem expansiva: por uma reconceituação pela teoria da atividade. *In*: ILLERIS, Knud (org.). **Teorias contemporâneas da aprendizagem**. Porto Alegre: Penso, 2013. p. 68-90.

ENGESTRÖM, Yrjö. **Aprendizagem Expansiva**. 2. ed. Campinas: Pontes Editores, 2016a.

ENGESTRÖM, Yrjö. Aprendizagem Expansiva: Dez anos depois. *In*: ENGESTRÖM, Yrjö. **Aprendizagem Expansiva**. 2. ed. Campinas, Pontes Editores, 2016b. p. 13-28.

ENGESTRÖM, Yrjö.; SANNINO, Annalisa. Estudos de aprendizagem expansiva: Fundamentos, descobertas e futuros desafios. *In*: ENGESTRÖM, Yrjö. **Aprendizagem Expansiva**. 2. ed. Campinas: Pontes Editores, 2016. p. 367-431.

ERNEST, P. Is mathematics discovered or invented? **Philosofy of Mathematics Education Journal**, [Exerter], v. 12, Nov. 1999. Disponível em: http://webdoc.sub.gwdg.de/edoc/e/pome/pome12/article2.htm Acesso em: 18 out. 2023.

EUCLIDES. **Os elementos**. São Paulo: UNESP, 2009.

FARIAS, Maria Margarete do Rosário. **Introdução a noções de cálculo diferencial e integral no ensino médio no contexto das TIC: implicações para prática do professor que ensina matemática**. 2015. 292 f. Tese - (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2015.

FERNÁNDEZ-PLAZA, José Antonio; SIMPSON, Adrian. Three concept or one? Student's understanding of basic limit concepts. **Educational Studies in Mathematics**, v. 93, n. 3, p. 315-332, Nov. 2016.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A**: Funções, limite, derivação e integração. 6. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

FLORES, Crisólogo Dolores. **La variación y la derivada**. 2. ed. México: Díaz de Santos, 2013.

FURINGHETTI, Fulvia; RADFORD, Luis. Contrasts and oblique connections between historical conceptual developments and classroom learning in mathematics. *In* ENGLISH, Lyn D.; KIRSHNER, David. (Ed.) **Handbook of International Research in Mathematics Education**. 2nd. New York: Routledge, 2008. p. 626-655.

GAL'PERIN, P. Ia. Organization of Mental Activity and the Effectiveness of Learning. **Soviet Psychology**, [*s. l.*], v. 27, n. 3, p. 65-82, 1989.

GAL'PERIN, P. Ia. The Problem of Activity in Soviet Psychology. **Journal of Russian & East European Psychology**, [*s. l.*], v. 30, n. 4, p. 37-59, 1992a.

GAL'PERIN, P. Ia. Stage-by-Stage Formation as a Method of Psychological Investigation. **Journal of Russian & East European Psychology**, [*s. l.*] v. 30, n. 4, p. 60-80, 1992b.

GALPERIN, P. Sobre la investigación del desarrollo intelectual del niño. *In*: SHUARE, Marta (comp.). **La psicología evolutiva y pedagógica en la URSS**: Antologia. Moscú: Editorial Progresso, 1987. p. 125-142.

GALPERIN, P. Ya. **Introducción a la psicología**. Habana: Pueblo y Educación, 1982.

GALPERIN, P. Ya. Acerca del lenguaje interno. *In*: ROJAS, Luis Quintanar (comp.). **La formacion de las funciones psicologicas durante el desarrollo del niño**. Tlaxcala: Universidad Autónoma de Tlaxcala, 1995a. p. 57-65.

GALPERIN, P. Ya. Tipos de orientación y tipos de formación de las acciones y de los conceptos. In: ROJAS, Luis Quintanar (comp.). **La formacion de las funciones psicologicas durante el desarrollo del niño**. Tlaxcala: Universidad Autónoma de Tlaxcala, 1995b. p. 41-45.

GALPERIN, Piotr Yakovlevich. A formação dos conceitos e as ações mentais. *In*: LONGAREZI, Andréa Maturano; PUENTES, Roberto Valdés (org). **Ensino desenvolvimental**: antologia. Livro 1. Uberlândia: EDUFU, 2017. p. 199-210.

GHEDAMSI, Imène; LECORRE, Thomas. Transition from high school to university calculus: a study of connection. **ZDM**, [*s. l.*], v. 53, n. 3, p. 563-575, June 2021.

GONZÁLEZ, Alberto Matías; AQUINO, Orlando Fernández. Crítica da lógica dialética de Pavel V. Kopnin: pertinência para a investigação educativa e prática pedagógica. **Perspectiva**, [*s. l.*], v. 36, n. 3, p. 1007-1030, jul./set. 2018.

GONZÁLEZ, Luis Español. La Dialéctica del Cálculo Infinitesimal. **ILUIL**, [*s. l.*], v. 27, p. 357-399, 2004.

GONZÁLEZ-MARTÍN, Alejandro S.; CORREIA DE SÁ, Carlos. Historical-epistemological dimension of the improper integral as a guide for new teaching practices. *In*: **History and epistemology in mathematics education**, 5., BARBIN, Evelyn; STEHLÍKOVÁ, Nad'a; TZANAKIS, Constantinos (Ed.). **Proceedings of the 5th European Summer University**, Praga: Plzeň, 2008. p. 211-223.

GRABINER, Judith V. The Changing Concept of Change: The Derivative from Fermat to Weierstrass. **Mathematics Magazine**, [*s. l.*], v. 56, n. 4, p. 195-206, Sep. 1983a.

GRABINER, Judith V. Who Gave You the Epsilon? Cauchy and the Origins of Rigours Calculus. **The American Mathematical Monthly**, [s. *l.*], v. 90, n. 3, p. 185-194, Mar. 1983b.

GRANDE, Ricardo Mendes; SMILGYS, Thaís Helena. Dialética e matemática em Marx. *In*: SILVA, Ricardo Scucuglia R. da (org.). **Processos formativos em educação matemática**: perspectivas filosóficas e pragmáticas. Porto Alegre: Fi, 2018. p. 67-94.

GRATTAN-GUINESS, Ivor. O que foi e o que deveria ser o Cálculo? **Zetetiké,** Campinas, SP, v. 5, n. 1, p. 69-94. jan./jun. 1997.

GRATTAN-GUINESS, I. The mathematics of the past: distinguishing its history from our heritage. **Historia Mathematica**, [*s. l.*], v. 31, n. 2, p. 163-185, May 2004.

GUARINO, Reinaldo. **Dicionário Russo-Português**. São Paulo: Pomnite Books, 2019.

GYÖNGYÖSI, Erika; SOLOVEJ, Jan Philip; WINSLØW, Carl. Using CAS based work to ease the transition from calculus to real analysis. *In*: **Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**, 7., PYTLAK, Marta; ROWLAND, Tim; SWOBODA, Ewa (Ed.). **Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**. Rzeszów: [*s. n.*], 2011. p. 2002-2011.

HAKKARAINEN, Pentti. Challenges of Activity Theory. **Journal of Russian & East European Psychology**, [*s. l.*], v. 42, n. 2, p. 3-11, Mar.-Apr. 2004.

HEDEGAARD, Mariane. A zona de desenvolvimento proximal como base para o ensino. *In*: DANIELS, Harry (org.). **Uma introdução a Vygotsky**. São Paulo: Loyola, 2002. p. 199-227.

HEGEL, George Wilhelm Friedrich. **Fenomenologia do espírito**. 9. ed. Petrópolis: Vozes; Bragança Paulista: Editora Universitária São Francisco, 2014.

ILIÉNKOV, E. V. **Lógica Dialéctica:** Ensayos de historia y teoría. Moscú: Progresso, 1977.

ILIENKOV, E. V. Lo lógico y lo histórico. **Cuestiones de materialismo dialéctico**. Elementos de dialéctica. Moscú, pp. 310-343, 1960. Disponível em: www.marxists.org/espanol/ilienkov/lo-logico-y-lo-historico.pdf . Acesso em: 07 nov. 2023.

ILIENKOV, E. V. A dialética do Ideal. *In*: ILIENKOV, E. V. **A dialética do ideal**: escritos de E. V. Ilienkov. Curitiba: Ed. UFPR, 2016a. p. 147-224.

ILIENKOV, E. V. O Conceito de Ideal. *In*: ILIENKOV, E. V. **A dialética do ideal**: escritos de E. V. Ilienkov. Curitiba: Ed. UFPR, 2016b. p. 107-145.

ILIENKOV, E. V. O Universal. *In*: ILIENKOV, E. V. **A dialética do ideal**: escritos de E. V. Ilienkov. Curitiba: Ed. UFPR, 2016c. p. 75-106.

ILIENKOV, E. V. Atividade e Conhecimento. *In*: ILIENKOV, E. V. **A dialética do ideal**: escritos de E. V. Ilienkov. Curitiba: Ed. UFPR, 2016d. p. 39-50.

ILYENKOV, E. V. On the Nature of Ability. **Journal of Russian and East European Psychology**, n. 45, n. 4, p. 56-63, 2007a.

ILYENKOV, E. V. Our Schools Must Teach How to Think! **Journal of Russian and East European Psychology**, v. 45, n. 4, p. 69-74, 2007b.

ILYENKOV, E. V. A Contribution on the Question of the Concept of "Activity" and Its Significance for Pedagogy. **Journal of Russian and East European Psychology**, v. 45, n. 4, p. 9-49, 2007c.

ILYENKOV, E. V. **The Dialectics of the Abstract and the Concrete in Marx's Capital**. Delhi: Aakar books, 2008.

IRMEN, F. **Langenscheidts Taschenwörterbuch**: der portugiesischen und deutschen sprache. 11 ed. Berlin-München: Langenscheidt, 1980.

JAPIASSÚ, Hilton; MARCONDES, Danilo. **Dicionário Básico de Filosofia**. 3. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2001.

KAPUT, James J. Democratizing Acess to Calculus: New Routes to Old Roots. SCHOENFELD, Alan H. (Ed.). **Mathematical Thinking and Problem-Solving**. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, 1994.

KAPTELININ, Victor. The Object of Activity: Making Sense of Sense-Maker. **Mind, Culture, and Activity**, [California], v. 12, n. 1, p. 4-18, 2005.

KLEINER, Israel. History of infinitely small and infinitely large in calculus. **Educational Studies in Mathematics**, [*s. l.*], v. 48, n. 2-3, p. 137-174, Nov. 2001.

KNORR, Wilbur R. The impact of modern mathematics on ancient mathematics. **Revue d'histoire des mathématiques**, [*s. l.*], v. 7, n. 1, p.121-135, 2001.

KOLMÓGOROV, Andrei Nikolaievich. Matemáticas. **La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española**, [s. *l.*], v. 9, n. 1, p. 108-141, enero-abr. 2006.

KOPNIN, P. V. **Fundamentos Lógicos da Ciência**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1972.

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento.** Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

KOSIK, Karel. **Dialética do concreto**. 2. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1976.

LAWVERE, F. William. An elementary theory of the categories sets (long version) with commentary. **Reprints in Theory and Applications of Categories**, [*s. l.*], n. 11, p. 1-35, 2005.

LEFEBVRE, Henri. **Lógica Formal, Lógica Dialética**. 5 ed. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1991.

LEMES, Núbia Cristina dos Santos. **Evidências da produção de sentidos dos princípios da proposta didática lógico-histórica da álgebra por professores de matemática em atividade de ensino.** 2012. 155 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2012.

LÊNIN, Vladímir Ilitch. **Cadernos filosóficos:** Hegel. São Paulo: Boitempo, 2018.

LEONTIEV, Alexis N. Uma contribuição à teoria do desenvolvimento da psique infantil. *In*: VIGOTSKII, Lev Semenovich; LURIA, Alexander Romanovich; LEONTIEV, Alexis N. **linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. 3. ed. São Paulo: Ícone, 1991. p. 59-84.

LEONTIEV, Alexis. **O Desenvolvimento do Psiquismo**. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2004.

LEONTIEV, Aleksei Nikolaevitch. As necessidades e os motivos da atividade. *In*: LONGAREZI, Andréa Maturano; PUENTES, Roberto Valdés (org.). **Ensino Desenvolvimental:** Antologia**.** Livro 1. Uberlândia: EDUFU, 2017. p. 39-58.

LEONTIEV, Aleksei N. **Atividade. Consciência. Personalidade.** Bauru: Mireveja, 2021.

LESSA, Sérgio. Notas sobre a historicidade da essência em Lukács. **Revista Novos Rumos,** [*s. l.*], v. 14, n. 30, p. 22-30, 1999.

LESSA, Sérgio. **Para compreender a ontologia de Lukács**. 4. ed. Maceió: Coletivo Veredas, 2016a.

LESSA, Sérgio. **Mundo dos homens**: trabalho na ontologia de Lukács. 3. ed. Maceió: Coletivo Veredas, 2016b.

LESSA, Sérgio. Possibilidade, lei e acaso: os físicos e seus cíclotrons. *In*: VEDDA, Miguel; COSTA, Gilmaisa; ALCÂNTARA, Norma (org.). **Anuário Lukács 2016**. São Paulo: Instituto Lukács, 2016c. p. 313-366.

LÖWY, Michael. **Marxismo contra Positivismo**. São Paulo: Cortez, 2018.

LUKÁCS, György. As tarefas da filosofia marxista na nova democracia. *In*: LUKÁCS, György. **O *jovem Marx* e outros escritos de filosofia**. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 2009a. p. 55-87.

LUKÁCS, György. As bases ontológicas do pensamento e da atividade do homem. *In*: LUKÁCS, György. **O *jovem Marx* e outros escritos de filosofia**. 2. Ed. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 2009b. p. 225-245.

LUKÁCS, György. **Prolegômenos para uma ontologia do ser social:** questões de princípios para uma ontologia hoje tornada possível. São Paulo: Boitempo, 2010.

LUKÁCS, György. **Para uma ontologia do ser social I**. São Paulo: Boitempo, 2012.

LUKÁCS, György. **Para uma ontologia do ser social 2**. São Paulo: Boitempo, 2013.

LUKÁCS, Georg. **Conversando com Lukács:** entrevista a Léo Kofler, Wolfgang Abendroth e Hanz Heinz Holz. São Paulo: Instituto Lukács, 2014.

LUKÁCS, Georg. **Pensamento Vivido:** autobiografia em diálogo. São Paulo: Instituto Lukács, 2017.

LUKÁCS, Georg. **Prolegômenos e Para uma ontologia do ser social**: Obras de Georg Lukács volume 13. Maceió: Coletivo Veredas, 2018a.

LUKÁCS, Georg. **Para uma ontologia do ser social**: Obras de Georg Lukács volume 14. Maceió: Coletivo Veredas, 2018b.

LUKÁCS, Georg. **Introdução a uma estética Marxista**: Sobre a Particularidade como Categoria Estética. São Paulo: Instituto Lukács, 2018c.

LUKÁCS, György. **Estética**: a peculiaridade do estético, volume 1. São Paulo: Boitempo, 2023.

MACHADO, Nilson José. **Matemática por assunto:** noções de cálculo. v. 9. [São Paulo]: Scipione, 1988.

MACHADO, Nílson José. **Matemática e realidade:** das concepções às ações docentes. 8. ed. São Paulo: Cortez, 2013.

MAJMUTOV, M. I. **La enseñanza problémica**. Habana: Pueblo y Educación, 1983.

MARX, K. **Carta ao diretor da revista russa Otiechéstvennie Zapiski**. nov. 1877. Disponível em: https://www.marxists.org/portugues/marx/1877/11/revista.htm. Acesso em: 07 nov. 2023.

MARX, Karl. **Mathematical Manuscripts of Karl Marx.** London: New Park Publications, 1983.

MARX, Karl. **O Capital:** Crítica da Economia Política. Livro I v. 1, 9. ed. São Paulo: Difel, 1984.

MARK, Karl. 1. Ad Feuerbach. *In*: MARX, Karl; ENGELS, Friedrich. **A ideologia alemã**: Crítica da mais recente filosofia alemã em seus representantes Feuerbach, B. Bauer e Stirner, e do socialismo alemão em seus diferentes profetas (1845-1846). São Paulo: Boitempo, 2007. p. 533-535.

MARX, Karl. **Manuscritos econômico-filosóficos.** São Paulo: Boitempo, 2010.

MARX, Karl. **Grundrisse**: manuscritos econômicos de 1857-1858: esboços da crítica da economia política. São Paulo: Boitempo, 2011.

MARX, Karl; ENGELS, Friedrich. **A ideologia alemã**: crítica da mais recente filosofia alemã em seus representantes Feuerbach, B. Bauer e Stirner, e do socialismo alemão em seus diferentes profetas (1845-1846). São Paulo: Boitempo, 2007.

MASCHIETTO, M. **L'enseignement de l'analyse au lycée: les débuts du jeu global/local dans l'environnement de calculatrices**. 2002. 395 f. Thesis (Doctorate in Mathematics Education) - Université Paris 7 et Università di Torino, Paris, 2002.

MASCHIETTO, M. Graphic calculators and micro-straightness: analysis of a didactic engineering. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, [*s. l.*], v. 13, n. 3, p. 207- 230, Dez. 2008.

MENDOZA, Héctor José García; DELGADO, Oscar Tintorer. A didática da matemática fundamentada na teoria de formação por etapas das ações mentais de Galperin. *In*: NÚÑEZ, Isauro Beltrán; RAMALHO, Betania Leite (org.). **Galperin e a teoria da formação planejada por etapas das ações mentais e dos conceitos**: pesquisas e experiências para um ensino inovador. Campinas: Mercado das Letras, 2016a. p. 133-162.

MENDOZA, Héctor José García; DELGADO, Oscar Tintorer. Organización de la Actividad de Situaciones Problema em Matemática. **Atenas**, [*s. l.*], v.3, n. 35, p. 31-36, 2016b.

MENDOZA, Héctor Jose García; DELGADO, Oscar Tintorer. Proposta de um esquema da base orientadora completa da ação da atividade de situações problema discente. **Obutchénie**. **Revista De Didática E Psicologia Pedagógica**, [*s. l.*], v. 4, n. 1, p. 180-200, jan./abr. 2020.

MENDOZA, Héctor José García; DELGADO, Oscar Tintorer. Contribuições do sistema didático Galperin, Talízina e Majmutov para resolução de problemas. In: LONGAREZI, Andréa Maturano; PUENTES Roberto Valdés (org.). **Ensino Desenvolvimental**: Sistema Galperin-Talízina. Guarujá - São Paulo: Editora Científica Digital Ltda, 2021. p. 231-248.

MENEGUETTI, Renata Cristina Geromel. **Constituição do saber matemático**: **reflexões filosóficas e históricas**. Londrina: EDUEL, 2010.

MÉSZÁROS, István. **Estrutura social e formas de consciência**: a determinação social do método. São Paulo: Boitempo, 2009.

MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria Ângela. **História na Educação Matemática**: propostas e desafios. 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2021.

MORAES, Maria Célia Marcondes de. Os "pós-ismos" e outras querelas ideológicas. **Perspectiva**, Florianópolis, v. 14, n. 25, p. 45-60, jan./jun. 1996.

MORAES, Maria Célia Marcondes de; DUAYER, Mario. História, estórias: morte do "real" ou derrota do pensamento? **Perspectiva**, Florianópolis, v. 16, n. 29, p. 63-74, jan./jun. 1998.

MORAES, Edvaldo Alves de. **Interface entre história e ensino de matemática: um movimento lógico-histórico da medição do tempo e a atividade orientadora de ensino**. 2018. 137 p. Dissertação (Mestrado em Docência para a Educação Básica) – Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Bauru, 2018.

MORENO-ARMELLA, Luis. An essential tension in mathematics education. **ZDM,** [*s. l.*], v. 46, n. 4, p. 621-633, Aug. 2014.

MORETTI, Vanessa Dias. O problema lógico-histórico, aprendizagem conceitual e formação de professores de matemática. **Poiésis**, Tubarão, Número Especial, p. 29-44, jan./jun. 2014.

MORETTI, Vanessa Dias; RADFORD, Luis. Abordagem histórico-dialética dos conceitos na organização do ensino da matemática. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 49, p. 1-16, 2023.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de. **O educador matemático na coletividade de formação:** uma experiência com a escola pública. 2000. 131 f. Tese (Livre-Docência em Metodologia do Ensino de Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2000.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de. A Atividade de Ensino como ação formadora. *In*: CASTRO, Amélia Domingos de; CARVALHO, Anna Maria Pessoa de (org.). **Ensinar a ensinar:** didática para a escola. São Paulo: Editora Pioneira. 2002. p. 143-162.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de; ARAUJO, Elaine Sampaio; SOUZA, Flávia Dias; PANOSSIAN, Maria Lucia; MORETTI, Vanessa Dias. A Atividade Orientadora de Ensino como Unidade entre Ensino e Aprendizagem. *In*: MOURA, Manoel Oriosvaldo de (org.). **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. 2. ed. Campinas: Autores Associados, 2016. p. 93-125.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de; ARAUJO, Elaine Sampaio; SERRÃO, Maria Isabel Batista. Atividade Orientadora de Ensino: fundamentos. **Linhas Críticas**, Brasília, v. 24, p. 411-430, 2018.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de; SFORNI, Marta Sueli de Faria; ARAÚJO, Elaine Sampaio. Objetivação e Apropriação de Conhecimentos na atividade Orientadora de ensino. **Revista Teoria e Prática da Educação**, Maringá, v. 14, n. 1, p. 39-50, jan./abr. 2011.

NASCIMENTO, Carolina Picchetti. **A atividade pedagógica da Educação Física:** a proposição dos objetos de ensino e o desenvolvimento das atividades da cultura corporal. 2014. 293 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

NETTO, José Paulo. Relendo a Teoria Marxista da História. *In*: SAVIANI, Demerval; LOMBARDI, José Claudinei; SANFELICE, José Luis. **História e história da educação**. 4. ed. Campinas: Autores Associados, 2010. p. 55-70.

NETTO, José Paulo. **Introdução ao estudo do método de Marx**. São Paulo: Expressão Popular, 2011.

NETTO, José Paulo. Apresentação. *In*: ENGELS, F. **Anti-Düring**: a revolução da ciência segundo o senhor Eugen Düring.São Paulo: Boitempo, 2015. p. 9-28.

NÚÑEZ, Isauro Beltrán. **Vygotsky, Leontiev e Galperin**: formação de conceitos e princípios didáticos. Brasília: Liber Livro, 2009.

NÚÑEZ, Isauro Beltrán; OLIVEIRA, Marcus Vinícius de Faria. P. Ya. Galperin: A vida e a obra do criador da teoria da formação por etapas das ações mentais e dos conceitos. *In*: LONGAREZI, Andréa Maturano; PUENTES, Roberto Valdés (org.). **Ensino**

Desenvolvimental: vida, pensamento e obras dos principais representantes russos. Uberlândia: EDUFU, 2013. p. 283-313.

NÚÑEZ, Isauro Beltrán; RAMALHO, Betania Leite; OLIVEIRA, Marcus Vinícius de Faria. A Formação de habilidades gerais no contexto escolar: contribuições da teoria de P. Ya. Galperin. *In*: NÚÑEZ, Isauro Beltrán; RAMALHO, Betania Leite (org.). **Galperin e a teoria da formação planejada por etapas das ações mentais e dos conceitos**: pesquisas e experiências para um ensino inovador. Campinas: Mercado de Letras, 2016. p. 23-78.

OEHRTMAN, Michael. Collapsing Dimensions, Physical Limitation, and Other Student Metaphors for Limit Concepts. **Journal for Research in Mathematics Education**, [*s. l.*], v. 40, n. 4, p. 396-426, jul. 2009.

OLIVEIRA; Maria Cristina Araújo de; RAAD; Marcos Ribeiro. A existência de uma cultura escolar de reprovação no ensino de Cálculo. **BOLETIM GEPEM**, [*s. l.*], n. 61, p. 125-137, jul./dez. 2012.

OLIVEIRA, Naralina Viana Soares da Silva. **Contribuições do sistema didático Galperin, Talízina e Majmutov para formação da habilidade de resolver problemas discentes em Cálculo Diferencial e Integral em estudantes de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco**. 2021, 247 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) – Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática – REAMEC, Belém - PA, 2021.

ORTIGARA, Vidalcir. **Ausência sentida nos estudos de Educação Física**: **a determinação ontológica do ser social**. 2002. 230 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2002.

OS PENSADORES: Pré-socráticos. São Paulo: Nova Cultural, 1996.

PANERO, Monica; ARZARELLO, Ferdinando; SABENA, Cristina. The Mathematical Work with the Derivative of a Function: Teachers' Practices with the Idea of "Generic". **Bolema**, Rio Claro, v. 30, n. 54, p. 265-286, abr. 2016.

PANOSSIAN, Maria Lucia. **O movimento histórico é lógico dos conceitos algébricos como princípio para constituição do objeto de ensino de álgebra**. 2014. 317 p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

PANOSSIAN, Maria Lucia; MORETTI, Vanessa Dias; SOUZA, Flávia Dias de. Relações entre movimento histórico e lógico de um conceito, desenvolvimento do pensamento teórico e conteúdo escolar. *In*: MOURA, Manoel Oriosvaldo de (org.). **Educação escolar e pesquisa na teoria histórico-cultural.** São Paulo: Edições Loyola, 2017. p. 125-152.

PANOSSIAN, Maria Lucia; NASCIMENTO, Carolina Picchetti. O conceito de objeto de ensino na Atividade Pedagógica. **Obutchénie. Revista De Didática E Psicologia Pedagógica**, [*s. l.*], v. 6, n. 2, p. 334-357, mai./ago. 2022.

PANOSSIAN, Maria Lucia; SOUSA, Maria do Carmo de; MOURA, Manoel Oriosvaldo de. Nexos conceituais do conhecimento algébrico: um estudo a partir do movimento histórico e lógico. *In*: MORETTI, Vanessa Dias; CEDRO, Wellington Lima (org.). **Educação**

matemática e a teoria histórico-cultural: um olhar sobre as pesquisas. Campinas: Mercado das Letras, 2017. p. 125-160.

PARK, Jungeun. Is the derivative a function? If so, how do we teach it? **Educational Studies in Mathematics**, v. 89, n. 2, p. 233-250, Apr. 2015

PINO, Angel. **As marcas do humano**: às origens da constituição cultural da criança na perspectiva de Lev S. Vigotski. São Paulo: Cortez, 2005.

PILIPENKO, N. V. Necesidad y casualidade. *In*: ROSENTAL, M. M.; STRAKS, G. M. **Categorias del Materialismo Dialectico**. Ciudad de Mexico: Grijalbo, 1960. p. 124-155.

PRADO JÚNIOR, Caio. **Dialética do Conhecimento**. Tomo 1. 4. ed. São Paulo: Brasiliense, 1963.

PRESTES, Zoia Ribeiro. **Quando não é quase a mesma coisa: análise de traduções de Lev Semionovitch Vigotski no Brasil: repercussões no campo educacional.** 2010, 295 f. (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de Brasília, Brasília, 2010.

PREVOT, Fulvio Bianco. **Uma Abordagem com Uso de *M-Learning* na Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral em Cursos de Engenharia Baseada em ABP e Modelagem Matemática**. 2019, 218 p. (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade de Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2019.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: interciência, 1995.

PUENTES, Roberto Valdés; LONGAREZI, Andréa Maturano. Sistemas didáticos desenvolvimentais: precisões conceituais, metodológicas e tipológicas. **Obutchénie. Revista De Didática E Psicologia Pedagógica,** [s. *l.*], v. 4, n. 1, p. 201-242, jan./abr. 2020.

PUENTES, Roberto Valdés. Sistema Galperin-Talízina: um estudo introdutório da Teoria da Formação por Etapas das Ações Mentais e dos Conceitos. *In*: LONGAREZI, Andréa Maturano; PUENTES, Roberto Valdés (org.). **Ensino desenvolvimental**: Sistema Galperin-Talízina. Guarujá: Científica Digital, 2021. p. 117-147.

QUINTERO, Claudia Patricia Quintero. **Desarrollo del pensamiento teórico de estudiantes de grado undécimo en un proceso de objetivación del concepto de límite de una función**. 2018. 235 f. Tesis (Doctorado en Educación) – Facultad de Educación, Universidad de Antioquia, Medellín, 2018.

RADFORD, Luis. On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. **For the Learning of Mathematics**, Edmonton, v. 17, n. 1, p. 26-33, Feb. 1997.

RADFORD, Luis. The eye as a theoretician: seeing structures in generalizing activities. **For the Learning of Mathematics**, Edmonton, v. 30, n. 2, p. 2-7, July 2010.

RADFORD, Luis. **Cognição Matemática:** História, Antropologia e Epistemologia. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

RADFORD, Luis. Three key Concepts of the theory of objectification: Knoledge, knowing, and learning. **Journal of Research in Mathematics Education**, [*s. l.*], v. 2, n. 1, p. 7-44, Feb. 2013.

RADFORD, Luis. Phenomenology, Praxis, and the Question of Mathematical Objects. **Educación Matemática**, [*s. l.*], v. 26, Especial 25 anos, p. 124-145, marzo 2014.

RADFORD, Luis. On the epistemology of the Theory of Objectification. *In*: **11th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**. JANKVIST, Uffe Thomas; Van den HEUVEL-PANHUIZEN, Marja; VELDHUIS, Michiel (Ed.). **Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**, Utrecht, p. 3062-3069, 2019.

RADFORD, Luis. **Teoria da objetivação**: uma perspectiva Vygotskiana sobre conhecer e vir a ser no ensino e aprendizagem da matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2021a.

RADFORD, Luis. Davydov's concept of the concept and its dialectical materialist background. **Educational Studies in Mathematics**, [*s. l.*], v. 106, n. 3, p. 327-342, Mar. 2021b.

RADFORD, Luis. Sujeto, objeto, cultura y la formación del Conocimiento. **REMATEC**, Belém, v. 18, n. 45, p. 1-22, 2023.

RADICE, Lucio Lombardo. De los "Manuscritos Matemáticos" de K. Marx. *In*: MARX, Karl; ENGELS, Friedrich. **Cartas sobre las ciencias de la naturaleza y las matemáticas**. Barcelona: Anagrama, 1975. p. 157-165.

REZENDE, Wanderley Moura. **O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica.** 2003. 468 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

RIBEIRO, Luís Roberto de Camargo. Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL) na Educação em Engenharia. **Revista de Ensino de Engenharia**, Brasília, v. 27, n. 2, p. 23-32, 2008.

RÍBNIKOV, K. **Historia de las matemáticas**. Moscú: Mir, 1987.

ROGALSKI, M. Les rapports entre local et global: mathématiques, rôle en physique élémentaire, questions didactiques. *In*: VIENNOT, L. (Ed.). **Didactique, épistémologie et histoire des sciences**. Paris: Presses Universitaires de France, 2008, p. 61-87.

ROSA, Josélia Euzébio da. **Proposições de Davydov para o ensino de matemática no primeiro ano escolar: inter-relações dos sistemas de significações numéricas**. 2012. 244 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

ROSENTAL, M. M. Lo Lógico y lo Histórico. *In*: ROSENTAL, M. M.; STRAKS, G. M. **Categorias del Materialismo Dialectico.** Ciudad de Mexico: Grijalbo, 1960. p. 324-357.

RORTY, Richard. **A Filosofia e o espelho da natureza**. 3. ed. Rio de Janeiro: Relume-Dumará, 1994.

ROTH, Wolff-Michael. The Ideal in Mathematics: A Spinozist-Marxian Elaboration and Revision of the Theory of Knowledge Objectification. **Outlines–Critical Practice Studies**, [*s. l.*], v. 21, n. 2, p. 60-88, 2020.

ROTH, Wolff-Michael; GOULART, Maria Inês Mafra. O conhecimento matemático pode ser construído? Uma crítica Histórico-Cultural às concepções de atividade de aprendizagem orientadas ao objeto. *In*: MORETTI, Vanessa Dias; CEDRO, Wellington Lima (org.). **Educação matemática e a teoria histórico-cultural**: um olhar sobre as pesquisas. Campinas: Mercado de Letras, 2017. p. 161-193.

ROTH, Wolff-Michael; RADFORD, Luis. Re/thinking the Zone of Proximal Development (Symmetrically). **Mind, Culture, and Activity**, [California], v. 17, n. 4, p. 299-307, 2010.

ROTH, Wolff-Michael; RADFORD, Luis. **A Cultural-Historical Perspective on Mathematics Teaching and Learning**. Rotterdam: Sense, 2011.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

RUBINSTEIN, Sergei L. Problemas das faculdades e questões da teoria psicológica. *In*: LONGAREZI, Andréa Maturano; PUENTES, Roberto Valdés (org.). **Ensino desenvolvimental**: antologia – livro I. Uberlândia: EDUFU, 2017. p. 111-122.

SALDANHA, Luis; THOMPSON, Patrick W. Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. *In*: BERENSON, Sarah; DAWKINS, Karen; BLANTON, Maria; COULOMBE, Wendy; KOLB, John; NORWOOD, Karen; STIFF, Lee. (Ed.). **Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education-North America.** v. 1, **Proceedings** [...], Raleigh: North Carolina State University, 1998. p. 298-304.

SAVIANI, Demerval. **Educação:** do senso comum à consciência filosófica. 12 ed. São Paulo: Cortez, 1996.

SAVIANI, Demerval. Do senso comum à Ciência da Educação: o lugar estratégico da Pós-graduação. *In*: SILVA, Alex Sander da; SILVA, Ilton Benoni da; ORTIGARA, Vidalcir (org.). **Educação, pesquisa e produção do conhecimento**: abordagens contemporâneas. Criciúma: Ed. UNESC, 2013. p. 23-38.

SCRIBA, Christoph J.; DAUBEN, Joseph W. **Writing the history of mathematics**: its historical development. Basel: Birkhäuser: 2002.

SCRIBNER, Sylvia. Vygotsky's uses of history. *In*: WERTSCH, James V. (Ed.) **Culture, communication, and cognition**: Vigotskian perspectives. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. p. 119-145.

SFARD, Anna. On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. **Educational Studies in Mathematics**, [*s. l.*], v. 22, n. 1, p. 1-36, Feb. 1991.

SHAPIRO, Stewart. **Filosofia da Matemática**. Lisboa: Edições 70, 2016.

SHERRY, David. Don't take me half the way: On Berkeley on mathematical reasoning. **Studies in History and Philosophical Science**, [*s. l.*], v. 24, n. 2, 207-225, 1993.

SHUARE, Marta. **A Psicologia soviética**: meu olhar. São Paulo: Terracota, 2017.

SIERPINSKA, Anna. Humanities students and epistemological obstacles relating limites. **Educational Studies in Mathematics**, [*s. l.*], v. 18, n. 4, p. 371-397, Nov. 1987.

SILVA, Jairo José. **Filosofias da matemática.** São Paulo: Editora UNESP, 2007.

SILVA, Josyleine Aparecida Bento. **Objetos de Aprendizagem aplicados ao ensino de trigonometria: revelando elementos a partir do movimento histórico e lógico**. 2018. 123 f. Dissertação (Mestrado em Formação Científica, Educacional e Tecnológica) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2018.

SILVA, Rafael Siqueira. **Um estudo sobre o movimento Lógico-Histórico do conceito de Continuidade**. 2019. 219 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2019.

SILVA, Ricardo Scucuglia Rodrigues da; BALIEIRO FILHO, Inocêncio Fernandes; TOTTI, Luis Augusto Schimidt; BERTOLUCCI, Giovana Aparecida. Aspectos estéticos em demonstrações de Bonaventura Cavalieri. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [*s. l.*], v. 08, n. 22, p. 55-70, 2021.

SILVEIRA, Gisele Mezzari. **Unidade entre Lógico e Histórico no movimento conceitual do sistema de numeração proposta por Davýdov e colaboradores para o ensino das operações da adição e subtração**. 2015. 186 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2015.

SMITH, David Eugene. **History of Mathematics**. Vol. II. New York: Dover publications, 1958.

SMITH, Nicholas D. Plato on knowledge as power. **Journal of the History of Philosophy**, [Baltimore] v. 38, n. 2, p. 145-168, Apr. 2000

SOFRONAS, Kimberly S.; DEFRANCO, Thomas C.; VINSONHALER, Charles; GORGIEVSKI, Nicholas; SCHROEDER, Larissa; HAMELIN, Chris. What does it mean for a student to understand the first-year calculus? Perspectives of 24 experts. **The Journal of Mathematical Behavior**, [*s. l.*], v. 30, n. 2, p. 131-148, June 2011.

SOUSA, Maria do Carmo de. **O ensino de álgebra em uma perspectiva lógico-histórica: um estudo das elaborações correlatas de professores do ensino fundamental**. 2004. 285 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 2004.

SOUSA, Maria do Carmo de. O movimento lógico-histórico enquanto perspectiva didática para o ensino da matemática. **Obutchénie. Revista De Didática E Psicologia Pedagógica**, [*s. l.*], v. 2, n. 1, p. 40-68, jan./abr. 2018.

SOUSA, Maria do Carmo de; PANOSSIAN, Maria Lucia; CEDRO, Wellington Lima. **Do movimento lógico e histórico à organização do ensino:** o percurso dos conceitos algébricos. Campinas: Mercado de Letras, 2014.

SPACEK, Iuri Kieslarck. **A Relação entre Atividade de Ensino de Matemática e a Formação da Individualidade Discente**. 2012. 156 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2012.

SPACEK, Iuri Kieslarck; CANDIOTTO, William Casagrande. A categoria utilidade subjacente às tendências em Educação Matemática: discussão a partir da Pedagogia Histórico-Crítica. **Research, Society and Development**, [*s. l.*], v. 10, n. 2, p. 1-9, 2021.

SPACEK, Iuri Kieslarck; ORTIGARA, Vidalcir. A concepção de formação do indivíduo subjacente à finalidade da atividade de ensino de professores de matemática. **Educação e Cultura Contemporânea**, [s. *l.*], v. 15, n. 38, p. 115-140, jan./mar. 2018.

SPACEK, Iuri Kieslarck; ORTIGARA, Vidalcir. O papel da Matemática na vida cotidiana: uma análise das concepções de professores de Matemática. **Roteiro**, [*s. l.*], v. 47, p. 1-24, jan./dez. 2022.

STEWART, James. **Cálculo**. v. 1. 5. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2006.

STRUIK, Dirk J. Marx and mathematics. **Science & Society**, New York, v. 12, n. 1, p.181-196, winter 1948.

STRUIK, D. J. **A source book in mathematics, 1200-1800**. Princeton: Princeton University Press, 1986.

STRUIK, Dirk J. **História concisa das matemáticas**. Lisboa: Gradiva, 1989.

STRØMHOLM, Per. Fermat's methods of maxima and minima and of tangents. A reconstruction. **Archive for History of Exact Sciences**. [*s. l.*], v. 5, n. 1, p. 47-69, Jan. 1968.

SUÁREZ, Xenaro García. Prólogo dos Manuscritos matemáticos de Karl Marx. *In*: MARX, Karl. **Manuscritos matemáticos.** Galicia: Edicións Xerais de Galicia, 1987. p. 9-41.

TALÍZINA, N. **Psicologia de la enseñanza**. Moscu: Progresso, 1988.

TALIZINA, Nina. **La teoría de la actividad aplicada a la enseñanza**. Puebla: Universidad Autónoma de Puebla, 2009

TALL, David; VINNER, Shlomo. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**. Dordrecht-Boston, v. 12, n. 2, p. 151-169, May 1981.

TERTULIAN, Nicolas. Sobre o método ontológico-genético em Filosofia. **Perspectiva**, Florianópolis, v. 27, n. 2, p. 375-408, jul./dez. 2009.

TEZA, Daniela da Rosa. **O ensino do raciocínio combinatório: considerações a partir do movimento histórico e lógico**. 2018. 103 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2018.

THOMPSON, Patrick W.; CARLSON, Marilyn P. Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. *In*: CAI, Jinfa (Ed.). **Compendium for research in mathematics education**. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 2017. p. 421-456.

THOMPSON, Patrick W.; HAREL, Guershon. Ideas foundational to calculus learning and their links to students' difficulties. **ZDM,** [*s. l.*], v. 53, n. 3, p. 507-519, June 2021.

THOMPSON, Patrick W.; SILVERMAN, Jason. The concept of accumulation in calculus. *In*: CARLSON, Marilyn P.; RASMUSSEN, Chris. (Ed.). **Making the connection**: Research and teaching in undergraduate mathematics. Whashington: Mathematical Association of America, 2008. p. 43-52.

TOEPLITZ, Otto. **The calculus**: a genetic approach. Chicago: University of Chicago Press, 2007.

TONET, Ivo. **Método científico:** uma abordagem ontológica. 2. ed. Maceió: Coletivo Veredas, 2018.

TREVISAN, André Luis; MENDES, Marcele Tavares. Integral antes de derivada? Derivada antes de Integral? Limite, no final? Uma proposta para organizar um curso de Cálculo. **Educação. Matemática. Pesquisa.**, São Paulo, v. 19, n. 3, p. 353-373, 2017.

VALLEV, A. A.; ZINNATOVA, D. M. **Sistemas didáticos alternativos no exterior (século XX).** Kazan: Monografia, 2013.

VANDEBROUCK, F. Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. **Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives**, Strasbourg, v. 16, p. 149-185, 2011.

VIGOTSKI, Lev Semenovich. **A construção do pensamento e da linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

VIGOTSKI, L. S. Quarta aula. O problema do meio na pedologia. *In*: VIGOTSKI, L. S. **Sete aulas de L. S. Vigotski sobre os fundamentos da pedologia**. Rio de Janeiro: E-Papers, 2018. p. 73-91.

VIGOTSKI, L. S. **História do desenvolvimento das funções mentais superiores**. São Paulo: WMF Martins Fontes, 2021a.

VIGOTSKI, Lev Semionovitch. O problema da instrução e do desenvolvimento mental na idade escolar. *In*: VIGOTSKI, Lev Semionovitch. **Psicologia, educação e desenvolvimento**: escritos de L. S. Vigotski. São Paulo: Expressão Popular, 2021b. p. 241-268.

VIGOTSKI, Lev Semionovitch. Sobre a análise pedológica do processo pedagógico. *In*: VIGOTSKI, Lev Semionovitch. **Psicologia, educação e desenvolvimento**: escritos de L. S. Vigotski. São Paulo: Expressão Popular, 2021c. p.143-174.

VYGOTSKI, Lev Semiónovich. **Obras escogidas**. Tomo IV. Madrid: Visor Dis, 1996.

WARTOFSKY, Marx W. **Models**. Dordrecht: D. Reidel, 1979.

WENGER, Etienne. **Communities of Practice:** learning, meaning and Identity. Cambridge, USA: Cambridge University, 1998.

WHITE, Paul; MITCHELMORE, Michael. Conceptual Knowledge in Introductory Calculus. **Journal for Research in Mathematics Educational**, [*s. l.*], v. 21, n. 1, p. 79-95, jan. 1996.

WIGNER, E. The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. **Communications in Pure and Applied Mathematics**, [*s. l.*], v. 13, n. 1, 1960.

WILLIANS, Steven R. Models of Limit Held by College Calculus Students. **Journal for Research in Mathematics Education**, [*s. l.*], v. 22, n. 3, p. 219-236, May. 1991.

WOOD, Ellen Meiksins. Em defesa da História: o marxismo e a agenda pós-moderna. **Crítica Marxista**, [*s. l.*], n. 3, p. 118-127, 1996.

YERUSHALMY, Michal; SWIDAN, Osama. Signifying the accumulation graph in a dynamic and multi-representation environment. **Educational Studies in Mathematics**, [*s. l.*], v. 80, p. 287-306, July 2012.

ZILSEL, Edgar. As raízes sociais da ciência. **Khronos: Revista de História da Ciência**, São Paulo, n. 6, p. 113-116, dez. 2018.

ДАВЫДОВ, В. В.; ГОРБОВ, С. Ф.; МИКУЛИНА Г. Г. **Математика**, 1-Kjiacc. Mockba: Mnpoc - Apryc, 1997.

ДАВЫДОВ, В. В. **Проблемы развивающего обучения:** Опыт теоретического и экспериментального психологического исследования. Москва: Педагогика, 1986.

ДАВЫДОВ, В. В. **Виды обобщения в обучении:** логико-психологические проблемы построения учебных предметов. 2 ed. Москва: Педагогическое Общество России, 2000.

APÊNDICE - Teses e dissertações que abordam a relação entre o lógico e o histórico

Realizamos a pesquisa buscando no título, resumo ou palavras-chave das pesquisas os termos "Histórico-Lógico", "Lógico-Histórico" ou as expressões "Histórico e Lógico", "Lógico e Histórico", "Lógico e o Histórico" e "Histórico e o Lógico". Destacamos as pesquisas que se relacionam à educação escolar, em especial no que se refere ao ensino de matemática.

Nas referências, buscamos identificar a presença de autores como Kopnin (1978, 1972), Rosental (1960) e Ilienkov (1960). Na sequência, realizamos a pesquisa utilizando a palavra "histórico" ou "histórica" entre as referências para encontrar os textos em que estava explícita, no título, a relação entre o lógico e o histórico. A tabela abaixo apresenta os resultados, destacando as referências utilizadas por pesquisas que se utilizam de alguma forma da relação entre o lógico e o histórico. Aquelas referências que não foram citados no corpo de nossa tese se apresentam com sua descrição completa. Busca realizada no 10/11/2022.

Banco Digital de Teses e Dissertações (BDTD)

O destaque foi feito se o trabalho atendesse aos seguintes critérios:

1 - Vínculo explícito no resumo com a teoria histórico-cultural ou autores afins;

2 - Estudos no âmbito da Educação Matemática.

Obs.: Resultados já apresentados anteriormente foram omitidos.

a) Expressão: "Histórico-Lógico"

- 16 entradas (11 teses e 5 dissertações)

- Excluindo resultados iguais na pesquisa: 15 entradas - (11 teses e 4 dissertações)

Destaques: 3 trabalhos (1 tese e 2 dissertações)

Autor(a)	Título	Tipo	Instituição	Ano	Referências que abordam a relação entre o Lógico e o Histórico
CAMARGO. M. V. S. P.	Contribuições da Atividade Orientadora de Ensino para a organização do ensino de álgebra	Dissertação	Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)	2020	- Kopnin (1978) - Lemes (2012) - Moretti (2014) - Sousa (2004) - SOUSA, M. do C. de. O ensino de matemática da educação básica na perspectiva lógico-histórica. Perspectivas da Educação Matemática, Campo Grande, v. 7, n. 13, 2014. - Sousa (2018) - SOUSA, M. do C. de; MOURA, M. O. de. O lógico-histórico enquanto perspectiva didática para o ensino de Matemática: contribuições para a organização do trabalho docente. *In:* ENDIPE, 18., 2016, Cuiabá. Anais... Cuiabá: UFMT, 2016. Disponível em: https://www.ufmt.br/endipe2016/xviii-endipe/. Acesso em: 23 set. 2017. - Sousa, Panossian e Cedro (2014)
SILVA, A. L.	O ensino de função exponencial para além das aparências	Dissertação	Universidade Federal do Paraná (UFPR)	2018	- Kopnin (1978)

					-SOUSA, M. C.; MOURA, M. O. O movimento lógico-histórico em atividades de ensino de matemática: unidade dialética entre ensino e aprendizagem. *In:* IIX Encontro Nacional de Educação Matemática, São Paulo, 2016. - Panossian (2014) - Moretti (2014)
SOUSA, M. C.	O ensino de álgebra numa perspectiva lógico-histórica: um estudo das elaborações correlatas de professores do ensino fundamental	Tese	Universidade Estadual de Campinas (Unicamp)	2004	- Kopnin (1978) - MOISÉS, R. P. A resolução de problemas na perspectiva histórico/lógica: o problema em movimento. Faculdade de Educação. USP/SP. Dissertação de Mestrado, 1999. - LANNER DE MOURA, A. R.; SOUSA, M. C. O lógico-histórico: uma perspectiva didática da álgebra na formação de professores. Goiânia, XI Endipe – Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino, 2002. - LANNER DE MOURA, A. R.; SOUSA, M. C. Quando professores do ensino fundamental pensam sobre o lógico-histórico da álgebra. Faculdade de educação, UNICAMP/SP, VI EPRAPEM – Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, p. 581 – 587, 2002. - LANNER DE MOURA, A. R.; SOUSA, M. C. O lógico-histórico: uma perspectiva para o ensino da álgebra. Viseu/Portugal, Actas XIII SIEM – Seminário de Investigação em Educação Matemática, p. 345 – 363, 2002.

b) Expressão: "Lógico-Histórico"

- 82 entradas (34 teses e 48 dissertações)

- Excluindo resultados iguais na pesquisa: 79 entradas (34 teses e 45 dissertações)

Destaques: 26 trabalhos (8 teses e 18 dissertações)

Foi suprimido um trabalho que apareceu no primeiro quadro (SOUSA, 2004).

Autor(a)	Título	Tipo	Instituição	Ano	Referências que abordam a relação entre o Lógico e o Histórico
SARMENTO, A. K. C.	O desenvolvimento lógico-histórico do conceito de medida e o processo de significação na atividade pedagógica	Tese	Universidade de São Paulo (USP)	2019	- Kopnin (1978) [observação: não está entre as referências, mas é citado no corpo do texto] - KOPNIN, P. V. Logica dialectica. México: Editorial Grijalbo, 1966. - Moretti (2014) - Panossian (2014) - Panossian, Moretti e Sousa (2017)
LIMA, W. F. R.	Uma sequência didática para o ensino de poliedros explorando o movimento lógico-histórico do conceito	Dissertação	Universidade Federal de São Carlos (UFSCar)	2017	- Kopnin (1972, 1978) - LEANDRO, E. G., SOUZA. M. C. Contribuições do Marxismo para a Atividade de Pesquisa da Educação Matemática na Perspectiva Lógico Histórica. VII EMEM – Encontro Mineiro de Educação Matemática.
RODRIGUES, R. V. R.	A construção e utilização de um objeto de aprendizagem através da perspectiva lógico-histórica na formação do conceito números inteiros	Dissertação	Universidade Estadual Paulista (Unesp)	2009	- Kopnin (1978) - Dias (2007) - RODRIGUES, R. V. R.; SCHLÜNZEN, K. J. Desenvolvendo um Objeto de Aprendizagem através de uma perspectiva lógico-histórica. *In:* Anais do XIII Taller Internacional de Software Educativo - TISE 2008, 2-4 de dez. de 2008, p. 120-129, Santiago Chile, 2008. - Sousa (2004) - SOUSA, M. C. Quando professores têm a oportunidade de elaborar atividades de ensino de Matemática na perspectiva lógico-histórica. Boletim de Educação Matemática – BOLEMA, ano 22, nº 32, Rio Claro: UNESP, 2009. p. 83-99.
DIAS, M. S.	Formação da imagem conceitual da reta real: um estudo do desenvolvimento do conceito na perspectiva lógico-histórica	Tese	Universidade de São Paulo (USP)	2007	- Kopnin (1978) - DIAS, M. S.; COBIANCHI, A. S. Correlação do lógico e do histórico no ensino dos números reais. *In:* ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7. 2004, São Paulo. Anais... São Paulo: FEUSP, 2004. - LANNER DE MOURA, A. R.; SOUSA, M. C. O lógico-histórico: uma perspectiva didática da álgebra na formação de professores. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE DIDÁTICA E PRÁTICA DE ENSINO, 11, 2002, Anais... - MOISÉS, R. P. A resolução de problemas na perspectiva histórico-lógica: o problema em movimento. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 1999. - Sousa (2004)
REZENDE, J. P.	Sentidos e significados manifestos por licenciandos e pós-	Dissertação	Universidade Federal de São	2016	- Kopnin (1978)

	graduandos ao produzirem atividades de ensino de matemática na perspectiva lógico-histórica		Carlos (UFSCar)		- ABREU, R. P. Investigando os Conceitos de Limite e Continuidade a partir da perspectiva Lógico-Histórica. 2010. 100p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Departamento de Ciências Exatas, Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2010. - ABREU, R. F. Uma abordagem lógico-histórica da geometria em atividades orientadoras de ensino. 2013. 100p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Departamento de Ciências Exatas, Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2013. - Dias (2007) - DIAS, M. da S.; SAITO, F. Interface entre História da Matemática e Ensino: uma aproximação entre historiografia e perspectiva lógico-histórica. *In:* Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2009, Brasília. Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Brasília: SBEM, 2009, p. G05. - Duarte (1987) - Lemes (2012) - MOISÉS, R. P. A resolução de problemas na perspectiva histórico/lógica: o problema em movimento. 1999. 157f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação. USP/SP, São Paulo, 1999. - Moretti (2014) - MORETTI, V. D. O Problema Lógico-histórico na formação de professores de Matemática em Atividade de Ensino. *In:* PBL2010 Internacional Conference - Problem-Based Learning and Active Learning Methodologies, 2010, São Paulo. PBL 2010 - Congresso Internacional, 2010. - MOURA, A. R. L.; SOUSA, M. C. O lógico-histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: dois olhares diferentes. **Zetetiké**, v.13, n. 24, p. 11-45, 2005. - MOURA, M. O. de. Conceitos algébricos: do movimento lógico-histórico à organização do ensino. *In:* SOUSA, M. C.; PANOSSIAN, M. L.; CEDRO, W. L. Do movimento lógico e histórico à organização do ensino: o percurso dos conceitos algébricos. 1. ed. Campinas, SP: Mercado das Letras, 2014, 184 p. - PANOSSIAN, M. L. Entre o movimento lógico-histórico dos conceitos e a organização do ensino de álgebra: o exemplo das equações. 2012. In. XVI ENDIPE - Encontro Nacional de Didática e Práticas de Ensino, n.16, 2012, Campinas. Anais do XVI ENDIPE. Campinas, 2012. - PANOSSIAN (2014) - SANTOS, T. S. dos. O lógico-histórico e as geometrias não-euclidianas. 2012. *In:* VII Encontro de Produção Científica e Tecnológica (EPCT), n. 7, Campo Mourão. Anais do VII Encontro de Produção

					Científica e Tecnológica (EPCT), Campo Mourão, 2012. - Sousa (2004) - SOUSA, M. C. Quando professores têm a oportunidade de elaborar atividades de matemática na perspectiva lógico-histórica. *In:* Revista Bolema, Rio Claro, SP, ano 22, n.32, pp.83-99, 2009. - Sousa, Panossian e Cedro (2014)
SANTOS, T. S. S.	Atividade orientadora de ensino de geometrias na perspectiva lógico-histórica: unidade entre ensino e aprendizagem na formação inicial de professores de matemática	Tese	Universidade Federal de São Carlos (UFSCar)	2015	- Kopnin (1978) - Sousa (2004) - Dias (2007) - LANNER DE MOURA, A. R.; SOUSA, M. S. O lógico-histórico da álgebra nas séries iniciais. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. Anais... Recife: SBEM, 2004. - LIMA, L. C.; TAKAZAKI, M.; MOISÉS, R. P. Elementar é o essencial. São Paulo: CTEAC, 1998, publicada por LANNER DE MOURA, A. R.; SOUSA, M. S. O lógico-histórico da álgebra nas séries iniciais. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. Anais... Recife: SBEM, 2004. - SOUSA, M. C. Quando professores têm a oportunidade de elaborar atividades de ensino de matemática na perspectiva lógico-histórica. Bolema, Rio Claro, ano 22, n. 32, p. 83-99, 2009. - Sousa (2004) - Panossian (2014)
RIBEIRO, L. N.	Uma análise do movimento de constituição da ementa da disciplina de álgebra linear na licenciatura em matemática	Dissertação	Universidade Federal de Goiás (UFG)	2018	- Kopnin (1978) - Sousa (2014) - Sousa, Panossian e Cedro (2014)
POZEBON, S.	A formação de futuros professores de matemática: o movimento de aprendizagem da docência em um espaço formativo para o ensino de medidas	Tese	Universidade Federal de Santa Maria (UFSM)	2017	- Kopnin (1978) - LANNER DE MOURA, A. R. O lógico-histórico: uma perspectiva didática da álgebra na formação de professores. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE DIDÁTICA E PRÁTICA DE ENSINO. Endipe, 11., Goiânia, 26 a 29 de maio de 2002. - Panossian (2014) - Panossian, Moretti e Souza (2017) - SOUSA, M. C. O ensino de matemática da Educação Básica na perspectiva lógico-histórica. Perspectivas em Educação Matemática, Campo Grande, v. 7, n. 13, p. 60-83, 2014. Sousa, Panossian e Cedro (2014)
TRINDADE, C. R.	O movimento de ensinar e aprender álgebra no ensino fundamental	Dissertação	Universidade Federal de Santa Maria (UFSM)	2017	- Kopnin (1978) - LANNER DE MOURA, A. R.; SOUSA, M. C. Lógico-histórico: uma perspectiva para o ensino de álgebra. Anais VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2004.

					- LANNER DE MOURA, A. R.; SOUSA, M. C. O lógico-histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: dois olhares diferentes. **Zetetiké**, v. 13, n. 24, 2005. - Sousa (2014) - Sousa, Panossian e Cedro (2014)
FRAGA, M. A.	Significação do ângulo: indícios do conceito em atividades de localização	Dissertação	Universidade de São Paulo (USP)	2016	- Kopnin (1978) - Panossian (2014) - Sousa (2014)
FERREIRA, E. S. M.	Quando a atividade de ensino dá ao conceito matemático a qualidade de educar	Dissertação	Universidade Estadual de Campinas (Unicamp)	2005	- Kopnin (1978) - MOISÉS, R. P. A resolução de problemas na perspectiva histórica/lógica: o problema em movimento. Faculdade de Educação, USP/SP. Dissertação de Mestrado, 1999. - Sousa (2004)
PANOSSIAN, M. L.	Manifestações do pensamento e da linguagem algébrica de estudantes: indicadores para a organização do ensino	Dissertação	Universidade de São Paulo (USP)	2008	- Kopnin (1978) - MOISÉS, R. P. A resolução de problemas na perspectiva histórica/lógica: o problema em movimento. Faculdade de Educação, USP/SP. Dissertação de Mestrado, 1999. - Sousa (2004)
ZÜGE, V.	Professores dos anos iniciais do ensino fundamental em formação: um olhar a partir de discussões sobre o sistema de numeração decimal no contexto do programa pacto nacional pela alfabetização na idade certa	Dissertação	Universidade Federal de Santa Maria (UFSM)	2015	- Kopnin (1978) - Dias e Moretti, 2011
SILVEIRA, M. G.	Unidade entre lógico e histórico no movimento conceitual do sistema de numeração proposta por Davýdov e colaboradores para o ensino das operações da adição e subtração	Dissertação	Universidade do Sul de Santa Catarina (Unisul)	2015	- Kopnin (1978) - Rosental (1960) - ROSENTAL, M. M. Principios de lógica dialectica. Tradução: Augusto Vidal Roget. Ediciones Pueblos Unidos. Montevideo, Uruguai, 1962. - Duarte (1987) - Panossian (2014)
ARAÚJO, N. A.	O professor em atividade de aprendizagem de conceitos matemáticos	Tese	Universidade de São Paulo (USP)	2015	- Kopnin (1978) - LANNER DE MOURA, A. R.; SOUSA, M. C. Lógico-histórico: uma perspectiva para o ensino de álgebra. Anais do VIII ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática – Comunicação Científica – GT 1 – Educação Matemática nas Séries Iniciais, Recife/PE, 15 a 18 de maio, 2004.
NORO, I. M.	Do aprender ao ensinar álgebra: formação de futuros professores que ensinam matemática	Dissertação	Universidade Federal de Santa Maria (UFSM)	2020	- Kopnin (1978) - LANNER DE MOURA, A. R.; SOUSA, M. C. Lógico-histórico: uma perspectiva para o ensino de álgebra. Anais do VIII ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática – Comunicação Científica – GT 1 – Educação Matemática nas Séries Iniciais, Recife/PE, 15 a 18 de maio, 2004. - LANNER DE MOURA, A. R.; SOUSA, M. C. O lógico-histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: dois

					olhares diferentes. **Zetetiké**, Campinas-SP, v. 13, n. 2, p. 11-46, 2005. - PANOSSIAN, M. L.; MOURA, M. O. Entre o movimento lógico-histórico e o ensino da álgebra: o caso particular das sequências. *In*: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3. Anais [...]. 2012. - Sousa (2014) - Sousa, Panossian e Cedro (2014)
LUCION, P.	A organização do ensino de matemática no contexto de inclusão	Dissertação	Universidade Federal de Santa Maria (UFSM)	2015	- Kopnin (1978) - LANNER DE MOURA, A. R.; SOUSA, M. C. O lógico-histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: dois olhares diferentes. **Zetetiké**, Campinas-SP, v. 13, n. 2, p. 11-46, 2005.
BEMME, L. S. B.	Características da aprendizagem docente de professores que ensinam matemática: articulações em uma comunidade de prática	Tese	Universidade Franciscana (UFN)	2020	- Kopnin (1978)
PORTO, K. M.	Formação de sistemas conceituais e educação escolar: articulações entre os pressupostos da psicologia histórico-cultural e da pedagogia histórico-crítica	Dissertação	Universidade do Estadual Paulista (Unesp)	2017	- Kopnin (1978)
CUNHA, A. L. A.	Ensino de estatística: uma proposta fundamentada na teoria do ensino desenvolvimental	Dissertação	Pontíficia Universidade Católica de Goiás (PUC)	2014	- Kopnin (1978) [Observação: é citado como epígrafe de uma seção, mas não aparece nas referências]
PEREIRA, A. J.	Contribuições da pedagogia histórico-crítica para o ensino da geometria espacial no ciclo de alfabetização	Dissertação	Universidade do Estadual Paulista (Unesp)	2016	---
MORAES, M. S.	Setor trigonal: contribuições de uma atividade didática na formação de conceitos matemáticos na interface entre história e ensino de matemática	Dissertação	Universidade do Estadual Paulista (Unesp)	2017	- Kopnin (1978) - DIAS, M. da S.; SAITO, F. Interface entre história da matemática e ensino: uma aproximação entre historiografia e perspectiva lógico-histórica. *In:* IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2009, Brasília. Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Brasília: SBEM, 2009. p. G05-G05.
FELIPE, N. A.	A significação dos números inteiros por estudantes cegos e de baixa visão a partir do material soroban dos inteiros	Dissertação	Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)	2021	- Kopnin (1978) - RODRIGUES, R. V. R. A construção e utilização de um Objeto de Aprendizagem através da perspectiva lógico-histórica na formação do conceito números inteiros. 2009. 219 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Tecnologia, 2009. - Sousa (2004)
ASSIS, A. M. M.	Atividade de estudo do conceito de transformação linear na perspectiva da teoria do ensino desenvolvimental de V. V. Davydov	Tese	Pontíficia Universidade Católica de Goiás (PUC)	2018	- Sousa, Panossian e Cedro (2014) - Kopnin (1978) - Rosental e Straks (1960)

VASCONCELOS, L. O.	O conceito de função nas pesquisas dos encontros nacionais de educação matemática (1987-2013)	Dissertação	Universidade Federal de São Carlos (UFSCar)	2015	- Kopnin (1978) - LANNER DE MOURA, A., SOUSA, M. O lógico-histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: dois olhares diferentes. **Zetetiké**, Campinas, v. 14, n. 24, p. 11- 45, 2005. - Sousa (2014)

c) Expressão: "Lógico e Histórico"

- 43 entradas (16 teses e 27 dissertações)

- Excluindo resultados iguais na pesquisa: 42 entradas - (16 teses e 26 dissertações)

Destaques: 4 trabalhos (1 tese e 3 dissertações)

Foram suprimidos dois trabalhos que apareceram nos quadros anteriores (SILVEIRA, 2015; DIAS, 2007).

Autor(a)	Título	Tipo	Instituição	Ano	Referências que abordam relação entre o Lógico e o Histórico
SANTOS, C. O.	O movimento conceitual de fração a partir dos fundamentos da lógica dialética para o modo de organização do ensino	Dissertação	Universidade do Sul de Santa Catarina (Unisul)	2017	- Kopnin (1978) - Rosental (1960) - Duarte (1987) - Silveira (2015)
ROSA, V. M. G.	Aprendizagem da equação do 2º grau – uma análise da utilização da teoria do ensino desenvolvimental	Dissertação	Universidade Católica de Goiás (PUC)	2009	- Sousa (2004) - MOURA, A. R. L.; SOUSA, M. C. Lógico-histórico: uma perspectiva para o ensino da álgebra. Anais. VIII ENEM – Comunicação Científica GT 1 – Educação Matemática nas Séries Iniciais, 2004.

d) Expressão: "Histórico e Lógico"

- 29 entradas (10 teses e 19 dissertações)

- Excluindo resultados iguais na pesquisa: 28 entradas - (10 teses e 18 dissertações)

Destaques: 4 trabalhos (1 tese e 3 dissertações)

Foram suprimidos dois trabalhos que apareceram nos quadros anteriores (SILVA, 2018; TEZA, 2018; PANOSSIAN, 2014).

Autor(a)	Título	Tipo	Instituição	Ano	Referências que abordam a relação entre o Lógico e o Histórico
SILVA, J. A. B.	Objetos de aprendizagem aplicados ao ensino da trigonometria: revelando elementos a partir do movimento histórico e lógico	Dissertação	Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)	2018	- Kopnin (1978) - Panossian (2014) - Rodrigues (2009) - Sousa (2004) - SOUSA, M. C. O movimento lógico-histórico enquanto perspectiva didática para o ensino de Matemática. **Obutchénie. R.**

					De Didat. E Psic. Pedag. Uberlândia, MG, v.2, n.1, p.40-68, jan./abr. 2018.

e) Expressão: "Histórico e o Lógico"

- 33 entradas (16 teses e 17 dissertações)

Destaques: 2 trabalhos (1 tese e 1 dissertações)

Foram suprimidos dois trabalhos que apareceram nos quadros anteriores (ASSIS, 2018; REZENDE, 2015).

f) Expressão: "Lógico e o Histórico"

- 38 entradas (17 teses e 21 dissertações)

- Excluindo resultados iguais na pesquisa: 237 entradas - (17 teses e 20 dissertações)

Destaques: 3 trabalhos (3 dissertações)

Foram suprimidos dois trabalhos que apareceram nos quadros anteriores (SILVEIRA, 2015; SANTOS, 2017).

Autor(a)	**Título**	**Tipo**	**Instituição**	**Ano**	**Referências que abordam a relação entre o Lógico e o Histórico**
MESSENDER, H. N.	Apropriação dos conceitos de função: uma análise histórico-cultural	Dissertação	Universidade Federal da Bahia (UFBA)	2019	- Panossian (2014)