

UNIVERSIDADE DO EXTREMO SUL CATARINENSE – UNESC
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
DOUTORADO EM EDUCAÇÃO

ELOIR FÁTIMA MONDARDO CARDOSO

**CONCEITO DE NÚMERO NO SISTEMA DE ENSINO ELKONIN-DAVÍDOV:
POSSIBILIDADE DE SUA APROPRIAÇÃO POR ESTUDANTES BRASILEIROS**

CRICIÚMA

2024

ELOIR FÁTIMA MONDARDO CARDOSO

**CONCEITO DE NÚMERO NO SISTEMA DE ENSINO ELKONIN-DAVÍDOV:
POSSIBILIDADE DE SUA APROPRIAÇÃO POR ESTUDANTES BRASILEIROS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade do Extremo Sul Catarinense – UNESC, como requisito para a obtenção do título de Doutora em Educação.

Orientador: Prof. Dr. Vidalcir Ortigara

CRICIÚMA

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

C268c Cardoso, Eloir Fátima Mondardo.

Conceito de número no sistema de ensino Elkonin-Davídov : possibilidade de sua apropriação por estudantes brasileiros / Eloir Fátima Mondardo Cardoso. - 2024.

231 p. : il.

Tese (Doutorado) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Programa de Pós-Graduação em Educação, Criciúma, 2024.

Orientação: Vidalcir Ortigara.

1. Sistema Elkonin-Davídov. 2. Número - Conceito. 3. Teoria da atividade de estudo. 4. Primeiro ciclo do ensino fundamental. I. Título.

CDD. 22. ed. 372.7

ELOIR FÁTIMA MONDARDO CARDOSO

**CONCEITO DE NÚMERO NO SISTEMA DE ENSINO ELKONIN-DAVÍDOV:
POSSIBILIDADE DE SUA APROPRIAÇÃO POR ESTUDANTES BRASILEIROS**

Esta tese foi julgada e aprovada para obtenção do Grau de doutora em 15 de fevereiro de 2024 na área de Educação no Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade do Extremo Sul Catarinense.

Criciúma, 15 de fevereiro de 2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Vidalcir Ortigara - Doutor - (UNESC) – Orientador

Prof. Alex Sander da Silva - Doutor - (UNESC)

Prof^a Marta Sueli de Faria Sforni - Doutora - (UEM)

Prof^a Giselma Cecília Serconek - Doutora – (UEM)

Prof^a Josélia Euzébio da Rosa - Doutora - (UNISUL)

Para Arlindo, Helena, Henrique, Heloisa, Heitor e
Bernardo.

AGRADECIMENTOS

Em uma perspectiva que se fundamenta na formação humana pelo coletivo é difícil agradecer e contemplar todas as pessoas que contribuíram significativamente para a realização deste trabalho. Em nome de todas e todos, agradeço em especial:

Aos meus pais Erotides Mondardo (*in memoriam*) e Edésia Aléssio Mondardo, por nos incentivar, a mim e as minhas irmãs, a buscar a liberdade por meio do estudo;

Ao meu esposo Arlindo, pela cumplicidade, apoio, tolerância, compreensão pela ausência e por tanto amor dedicado à nossa família;

Aos filhos Helena, Henrique, Heloisa e Heitor, por me ensinarem o amor e a ver a vida com olhos de investigadora;

Ao querido e amado neto Bernardo, por me mostrar que é possível amar infinitamente;

Aos genros Chrystian, Jean e Murilo, pelo apoio.

Ao professor Dr. Ademir Damazio, orientador de toda a trajetória acadêmica desde a graduação (mais de 40 anos). Esse tempo de convivência possibilitou que além de orientador o professor Ademir se tornasse um grande amigo. Obrigada por ensinar o respeito, a disponibilidade, a doação, a ética...;

Ao orientador professor Dr. Vidalcir Ortigara, pela atenção, incentivo e apoio em um momento difícil dada as mudanças ocorridas no processo de elaboração deste trabalho;

Aos professores membros da banca de qualificação e defesa, Alex Sander da Silva, Marta Sueli de Faria Sforni, Giselma Cecília Serconek e Josélia Euzébio da Rosa, pela disponibilidade e contribuições para o aprofundamento do estudo;

Aos professores, funcionários e colegas do Programa de Pós-Graduação em Educação da Unesc;

Aos estudantes do primeiro ano classe 11 e à professora Rafaela, pela oportunidade de vivenciar uma experiência que jamais sairá de minha memória;

Aos membros dos grupos de pesquisa GPEMAHC – Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: uma Abordagem Histórico-Cultural e TEDMAT – Grupo de Pesquisa Teoria do Ensino Desenvolvidor pelos estudos, discussões, apoio e companheirismo;

Aos bolsistas Marco Antonio Antunes Vieira, Fabrícia Medeiros Nunes, Gabriela Durand e Amanda da Silva Medeiros, pelas filmagens das aulas do experimento e transcrições dos vídeos, em especial, à Bruna Corrêa Francisco, além das filmagens, auxiliou na formatação e organização dos apêndices e anexo;

Aos meus irmãos de sangue Salete, Maristela, Edésia Marisa, Carlos, Ricardo e Renato e amigos, que acompanharam e incentivaram este momento tão importante para minha formação;

Ao FUMDES – Fundo de apoio à manutenção e ao desenvolvimento da educação superior, pelo auxílio financeiro;

À Universidade do Extremo Sul Catarinense.

Muito Obrigada!

Na perspectiva do Ensino Desenvolvimental, “o concreto deixa de ser a aparência física dos recursos didáticos objetivais, mas o próprio conceito. Em vez de se preocupar com as características externas dos objetos, os estudantes buscam saídas no próprio pensamento inerentes ao conceito. Nesse processo, o concreto, por exemplo em Matemática, não é as coisas a serem medidas, contadas e classificadas, mas as soluções que se estabelecem por traduzirem a essência do conceito. Porém, essa concretude não é dada pronta.”

Ademir Damazio (2023, p. 261-262)

RESUMO

A motivação para investigar a possibilidade de estudantes brasileiros se apropriarem do conceito de número por meio das tarefas de estudo do sistema Elkonin-Davídov no primeiro ano escolar, foi a manifestação de acadêmicos dos cursos de Matemática e Pedagogia e professores que atuam na área de Matemática de que esse modo de organização do ensino é muito “difícil” para eles e, portanto, os estudantes brasileiros não teriam condições de acompanhar seu desdobramento e conseqüentemente aprender. Tais manifestações têm referência no modo de organizar o ensino de número vigente no Brasil, cujo foco é a contagem discreta de objetos. No sistema Elkonin-Davídov, o número decorre da relação entre grandezas contínuas e discretas, a qual possibilita a apropriação do conceito de número em nível teórico desde o primeiro ano escolar. Nesse contexto, o objetivo da investigação configurou-se em analisar a possibilidade dos estudantes do primeiro ano escolar de uma escola pública, envolvidos em um Experimento Didático, apropriarem-se do conceito de número com base nas tarefas de estudo elaboradas sob as premissas do sistema de organização do ensino Elkonin-Davídov. Defende-se a tese de que os estudantes brasileiros do primeiro ano escolar realizam as tarefas de estudo e se apropriam do conteúdo do conceito de número no sistema Elkonin-Davídov. Adota-se como matriz o método psicológico genético-modelador da Teoria Histórico-Cultural de Vygotski. Os fundamentos pedagógicos pautam-se na proposta do Ensino Desenvolvimental no modo de organização Elkonin-Davídov. A fonte dos dados para análise foram os vídeos e o registro de campo do Experimento Didático realizado em uma escola pública municipal, situada no sul de Santa Catarina, em uma classe do primeiro ano escolar. Realizou-se o experimento no período de junho a dezembro de 2021. Desenvolveram-se 145 tarefas particulares de estudo presentes nos seis primeiros capítulos do livro de orientação ao professor e do livro didático do referido modo de organização do ensino. A análise foi organizada em três seções relativas aos temas: a) comparação de figuras por suas características: cor, forma, tamanho e posição; b) modos de medição das grandezas e operações com as grandezas; c) introdução do conceito de número e reta numérica. Na primeira, as tarefas de estudo têm, em sua essência, o objetivo de propiciar que os estudantes se apropriem da ação investigativa. Na sequência, o conjunto de tarefas têm a finalidade de discutir a necessidade de introduzir os modos de comparar as grandezas contínuas (comprimento, área, volume e massa) e encaminhar os estudantes para a análise das diferenças (maior ou menor) em relação às grandezas e a possibilidade de quantificá-las. Na última seção, as tarefas trazem, em sua essência, a abstração do número em nível teórico, que se concretiza no modelo universal na representação geométrica, algébrica e aritmética na reta numérica. O desenvolvimento do experimento evidenciou que é possível aos estudantes do primeiro ano escolar apropriarem-se do conceito teórico do número, quando o ensino é organizado por meio da comparação e relação entre as grandezas. Ao final, a maioria dos estudantes conseguiu representar os números na reta numérica e associar a comparação das grandezas pela medição. Para essa efetivação, é preciso nos libertamos do ensino com foco exclusivo às quantidades discretas relacionadas a objetos isolados que se encontra fossilizado em seu pensamento. O conceito de número na perspectiva do sistema Elkonin-Davídov é novo na realidade brasileira e sua implementação exigirá primeiramente que o professor se aproprie de seu conteúdo e do modo de organização de seu ensino. Assim, o ponto de partida do professor (pensamento teórico) coincide com o ponto de chegada do estudante, quando o conceito não é apresentado pronto.

Palavras-chave: Sistema Elkonin-Davídov; Experimento Didático; tarefa de estudo; conceito de número; primeiro ano escolar.

ABSTRACT

The motivation for investigating the possibility of Brazilian students learning the concept of number through the study tasks of the Elkonin-Davídov system in the first year of primary school originated from Mathematics and Pedagogy academic students' and Mathematics teachers' comments, that this way of organizing teaching is too "difficult" for them and, therefore, Brazilian students would not be able to follow its unfolding and consequently learn. These comments have reference to the way of organizing the teaching of number in Brazil, which focuses on the discrete counting of objects. In the Elkonin-Davídov system, number derives from the relationship between continuous and discrete quantities, which enables the concept of number to be appropriated at a theoretical level from the first year of primary school. In this context, the aim of the research was to analyse the possibility of first-year students from a public school, involved in a Didactic Experiment, appropriating the concept of number based on the study tasks developed under the premises of the Elkonin-Davídov teaching organization system. The thesis is that Brazilian students in the first year of primary school carry out study activities and learn the content related to the concept of number in the Elkonin-Davidov system. The psychological method of genetic modeling from Vygotsky's Historical-Cultural Theory is adopted as a matrix. The pedagogical foundations are based on the proposal of Developmental Teaching in the Elkonin-Davídov mode of organization. The data source for the analysis were the videos and records of the Didactic Experiment carried out in a municipal public school, located in the south of Santa Catarina, in a first year of primary school. The experiment took place from June to December 2021. A number of 145 particular study tasks were developed in the first six chapters of the teacher guidance book and the textbook on the aforementioned method of teaching organization. The analysis was organized into three sections relating to the themes: a) comparing figures by their characteristics: color, shape, size and position; b) ways of measuring quantities and operations with quantities; c) introducing the concept of numbers and the number line. In the first section, the essence of the study tasks is to encourage students to take ownership of investigative action. Next, the set of tasks aims to discuss the need to introduce ways of comparing continuous quantities (length, area, volume and mass) and to guide students toward analyzing the differences (larger or smaller) in relation to the quantities and the possibility of quantifying them. In the last section, the tasks bring in their essence the abstraction of the number at a theoretical level, which is concretized in the universal model in the geometric, algebraic and arithmetic representation on the number line. The development of the experiment showed that it is possible for students in the first year of primary school to grasp the theoretical concept of number when teaching is organized around comparing and relating quantities. In the end, most students were able to represent the numbers on the number line and associate the comparison of quantities with measurement. To achieve this, teachers have to break free from teaching with an exclusive focus on discrete quantities related to isolated objects that are fossilized in their thinking. The concept of number from the perspective of the Elkonin-Davídov system is new in Brazil and its implementation will first require teachers to master its content and the way they organize their teaching. Thus, the teacher's starting point (theoretical thinking) coincides with the student's arrival point, when the concept is not presented ready-made.

Keywords: Elkonin-Davidov system; teaching experiment; study task; number concept; first grade of primary school.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1- Casa com a ausência de uma coluna	74
Figura 2 - Comparação dos objetos pela cor, forma e tamanho da altura	76
Figura 3 - Conjunto de xícaras	77
Figura 4 - Pares de vagões.....	79
Figura 5 - Verificação das medidas dos lados dos vagões	80
Figura 6 - Sobreposição do recorte nas superfícies dos vagões	81
Figura 7 - Figuras geométricas com a mesma cor	82
Figura 8 - Figuras geométricas com cores e formas diferentes	85
Figura 9 - Figuras geométricas com cores, formas e tamanhos diferentes.....	86
Figura 10 - Recortes agrupados pela forma e pelo tamanho	90
Figura 11 - Recortes agrupados pela forma.....	91
Figura 12 - Recortes agrupados pela cor	92
Figura 13 - Quadrados de diferentes cores	93
Figura 14 - Círculos de cores diferentes.....	95
Figura 15 - Representação gestual para representação do triângulo	96
Figura 16 - Posição das figuras geométricas	96
Figura 17 - Círculos posicionados à esquerda do quadrado	97
Figura 18 - Círculos posicionados à direita da estrela e entre o quadrado e a estrela	98
Figura 19 - Figuras geométricas diferentes pela cor, forma, tamanho e posição	99
Figura 20 - Figuras geométricas de cores e formas diferentes	101
Figura 21 - Figuras geométricas de cores e formas diferentes	101
Figura 22 - Figuras geométricas de cores e formas diferentes	101
Figura 23 - Recortes amarelos não circulares.....	103
Figura 24 - Quadrados de cores iguais e diferentes tamanhos	104
Figura 25 - Quadrados de cores iguais e diferentes tamanhos	105
Figura 26 - Quadrados de cores iguais e diferentes tamanhos	111
Figura 27 - Linha curva, linhas retas e pontos.....	111
Figura 28 - Linhas retas e curvas.....	112
Figura 29 - Intersecção das linhas reta e curva.....	113
Figura 30 - Indicação das representações dos pontos.....	113
Figura 31 - Linha reta e segmento	114
Figura 32 - Representação de uma linha reta	114

Figura 33 - Procedimento de segurar a régua para fazer a linha reta	115
Figura 34 - Representação dos pontos na linha reta pelos estudantes	116
Figura 35 - Manifestação dos estudantes.....	116
Figura 36 - Orientação para pintar espaço entre dois pontos na linha reta.....	118
Figura 37 - Representação de segmentos extraídos da linha reta	118
Figura 38 - Segmentos de reta extraídos da linha reta.....	119
Figura 39 - Aproximação dos recortes pelos comprimentos da altura	123
Figura 40 - Aproximação dos recortes pelos comprimentos da largura	124
Figura 41 - Pares de segmentos	125
Figura 42 - Modo incorreto de comparação dos segmentos.....	126
Figura 43 - Modo correto de comparação dos segmentos	127
Figura 44 - Modo incorreto de comparação dos segmentos.....	128
Figura 45 - Linha reta e linha quebrada aberta.....	129
Figura 46 - Linha quebrada fechada	130
Figura 47 - Recortes com o mesmo formato	132
Figura 48 - Comparação de recortes.....	133
Figura 49 - Sobreposição do recorte amarelo no verde	133
Figura 50 - Modo correto de comparar comprimentos e área	135
Figura 51 - Identificação do recorte com maior superfície	136
Figura 52 - Sobreposição dos recortes triangulares.....	137
Figura 53 - Triângulos iguais pelo comprimento da altura e diferentes pelo comprimento da largura e pela área.....	138
Figura 54 - Representação de pares de recortes (mesma cor e forma) com comprimentos da altura e largura iguais	139
Figura 55 - Comparação dos recortes pela grandeza comprimento.....	139
Figura 56 - Altura do recorte triangular indicada pela estudante	140
Figura 57 - Identificação da altura de recortes ou figuras com forma triangular	140
Figura 58 - Figuras planas de cores e formas diferentes	141
Figura 59 - Comparação do volume de caixas	145
Figura 60 - Segmentos que indicam a quantidade de líquido em cada recipiente.....	148
Figura 61 - Medição da largura do recorte com a régua.....	150
Figura 62 - Igualando os volumes	151
Figura 63 - Esquema de arcos.....	152
Figura 64 - Experimento objeta e gráfico do volume do recipiente	153

Figura 65 - Representação literal dos volumes.....	154
Figura 66 - Esquema de letras e seta	155
Figura 67 - Alteração da grandeza área	156
Figura 68 - Representação gráfica e literal da alteração da grandeza área.....	156
Figura 69 - Representações objetual, gráfica e literal da igualdade da grandeza massa	159
Figura 70 - Comparação da grandeza massa na balança de dois pratos	160
Figura 71 - Símbolos matemáticos que expressam a diferença maior e menor da grandeza massa	162
Figura 72 - Igualdade e desigualdade de grandezas	163
Figura 73 - Identificação do elemento mediador.....	167
Figura 74 - Marcas que representam a quantidade de medidas repetidas	168
Figura 75 - Registro das medidas com as palavras.....	169
Figura 76 - Registro da medição com as palavras da parlenda	169
Figura 77 - Estudantes realizando a medição com a unidade de medida e a palavra.....	172
Figura 78 - Confirmação dos tamanhos dos barbantes com a palavra medida “PEIXE”	173
Figura 79 - Medição com a unidade de medida composta	176
Figura 80 - Medição da grandeza “A” com a medida composta “C” pelos estudantes.....	177
Figura 81 - Medição com a unidade de medida composta por três círculos	178
Figura 82 - Construção da grandeza “T”	178
Figura 83 - Elaboração da grandeza “T” com base na relação com os esquemas	179
Figura 84 - Medição do volume do recipiente e registro no esquema.....	182
Figura 85 - Esquema que introduz a reta numérica	182
Figura 86 - Composição do volume T	183
Figura 87 - Representação do modo correto e errado das medidas no esquema	183
Figura 88 - Construção da reta numérica.....	185
Figura 89 - Construção da reta numérica.....	185
Figura 90 - Experimento objetual da representação abstrata do número na reta numérica.....	187
Figura 91 - Processo de medição do líquido da garrafa	188
Figura 92 - Construção da reta numérica.....	189
Figura 93 - Produção da reta numérica por uma estudante	189

SUMÁRIO

1	CONTEXTUALIZAÇÃO DA PESQUISA	15
1.1	MÉTODO DE INVESTIGAÇÃO COM FUNDAMENTOS DA TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL	32
1.2	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA	41
2	PRINCÍPIOS TEÓRICOS DA ORGANIZAÇÃO DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL	49
2.1	PRINCÍPIOS DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL	49
2.2	ATIVIDADE GUIA E ATIVIDADE DE ESTUDO.....	54
2.2.1	Atividade de estudo do conceito de número	60
3	DESENVOLVIMENTO E ANÁLISE DO EXPERIMENTO DIDÁTICO.....	71
3.1	COMPARAÇÃO DE FIGURAS E OBJETOS POR SUAS CARACTERÍSTICAS: COR, FORMA, TAMANHO E POSIÇÃO.....	73
3.2	MODOS DE MEDIÇÃO DAS GRANDEZAS E OPERAÇÕES COM GRANDEZAS	108
3.2.1	Pontos, segmentos de reta, linhas retas e curvas.....	109
3.2.2	Grandeza comprimento.....	121
3.2.3	Grandeza área.....	131
3.2.4	Grandeza volume	141
3.2.5	Alteração das grandezas.....	147
3.3	INTRODUÇÃO DO CONCEITO DE NÚMERO E RETA NUMÉRICA	165
3.3.1	Comparação das grandezas com a unidade de medida.....	166
3.3.2	Palavras marcas e uso de parlendas no processo de medição das grandezas	168
3.3.3	Unidades de medidas compostas e o modelo universal	175
3.3.4	Introdução e comparação de números na reta numérica	180
4	ESTUDANTES BRASILEIROS CUMPREM AS TAREFAS DE ESTUDO PARA APROPRIAÇÃO DO CONTEÚDO TEÓRICO DO CONCEITO DE NÚMERO	191
	REFERÊNCIAS.....	199
	APÊNDICE A – COMPARAÇÃO DE FIGURAS E OBJETOS POR SUAS CARACTERÍSTICAS: COR, FORMA, TAMANHO E POSIÇÃO	207
	APÊNDICE B – MODOS DE MEDIÇÃO DAS GRANDEZAS E OPERAÇÕES COM GRANDEZAS	211

APÊNDICE C – INTRODUÇÃO DO CONCEITO DE NÚMERO E RETA NUMÉRICA.....	223
ANEXO A – APROPRIAÇÕES DOS ESTUDANTES	229

1 CONTEXTUALIZAÇÃO DA PESQUISA

O motivo de investigação deste estudo advém de inquietações vividas no contexto educacional, tanto profissional quanto da pesquisa. Na experiência profissional, como professora de Matemática por mais de 30 anos na Educação Básica e no Ensino Superior; na pesquisa, como membro do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: uma Abordagem Histórico-Cultural (GPEMAHC). Ao iniciar a vida profissional como professora de Matemática na rede estadual de ensino de Santa Catarina, na Educação Básica, no ano de 1986, especialmente no Ensino Fundamental – Anos Finais –, algumas necessidades começaram a emergir em relação ao modo de organizar as aulas, estruturadas principalmente por meio do uso do livro didático. Nossa insatisfação, naquele momento, impulsionou-nos a buscar algo que superasse e explicasse tal sentimento.

A resposta começou a ser desenhada nos anos de 1990, quando participamos de uma formação continuada em que o palestrante trouxe ao debate os fundamentos da Teoria Histórico-Cultural (THC). Na mesma época, em Santa Catarina, estava em discussão a produção e implementação de uma Proposta Curricular que orientasse a prática pedagógica dos professores da rede estadual de ensino, propiciando um primeiro ensaio para o estudo da THC. Diante da necessidade de aprofundar o entendimento acerca dos fundamentos teóricos da referida proposta, alguns professores de Matemática da região de Criciúma-SC se organizaram e formaram um grupo de estudos que, mais tarde, por volta dos anos 2000, consolidou-se como grupo de pesquisa cadastrado no diretório de grupos do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), o mencionado GPEMAHC, sob a coordenação do Prof. Dr. Ademir Damazio, condição que permanece até a atualidade. O objetivo do grupo é o estudo do processo de formação/apropriação de conceitos matemáticos. Sua base de análise são as atividades de ensino e de estudo, que tomam como referência os pressupostos da Teoria Histórico-Cultural e da Teoria da Atividade, tais como expostos por Vigotski, Davídov¹, Leontiev, Rubinstein e Galperin.

Em nossa atuação no Ensino Superior, na função de professora de *Estágio Supervisionado* no curso de Matemática e da disciplina de *Processos Pedagógicos de Matemática*, no curso de Pedagogia, deparamo-nos com muitos questionamentos por parte dos

¹ Tendo em vista as diferenças nas traduções dos nomes próprios do alfabeto cirílico para o alfabeto ocidental, os nomes dos autores russos aparecem com várias grafias. Nossa opção é pelo uso da grafia Vigotski e Davídov para mencionar os autores, sem relação com suas obras. Porém, nas citações será mantida a escrita conforme apresentada na edição em referência.

acadêmicos sobre o modo de organizar o ensino de matemática sob os fundamentos em uma teoria desconhecida para eles. Sempre no início de um novo semestre, no curso de Pedagogia, solicitamos aos acadêmicos que produzam o plano de uma aula sobre o conceito de número para ser desenvolvido em uma turma do primeiro ano do Ensino Fundamental. Em síntese, é solicitado que cada acadêmico, individualmente, explique como introduzir o conceito de número para crianças que estão iniciando a atividade de estudo desse conceito. A maioria explicita que seria por meio de um diálogo ou mesmo de uma exposição, para que o aluno compreenda que o número é algo palpável que está presente no dia a dia de cada um. As manifestações se evidenciam nas falas: *“Explicar aos alunos que os números estão presentes no dia a dia de todos e, assim, perguntar em que momento fazem uso dos números”*; ou ainda, *“No início a professora pergunta se os alunos conhecem ou se já viram números em algum lugar, por exemplo, na sala de aula ou em casa.”* Outra manifestação é o número relacionado à contagem discreta de objetos nos limites dos números naturais: *“Em aula, explica-se que tudo podemos contar, inclusive nossos pertences.”* São comuns exemplos de situações em que os estudantes deveriam vivenciar aplicações cotidianas, como receitas de bolos, simulação de compras no mercado com o uso de dinheiro (representações de cédulas monetárias), entre outras. Essas preocupações dos acadêmicos do curso de Pedagogia são reveladoras da compreensão do conceito de número em sua dimensão empírica, decorrente da formação do ensino tradicional². Davidov (2019a, p. 172-173) assim explicita seu entendimento sobre essa questão:

A generalização empírico-formal, que surge no homem durante a solução de uma série de tarefas práticas concretas, garante a assimilação de certa soma de conhecimentos elaborados. O princípio (modo) de desenvolvimento do material relacionado com essa generalização, e que se aplica nas primeiras séries do nível fundamental, tem um grande significado na vida da criança, dando-lhe a precisão e disciplina a seu trabalho intelectual durante a classificação e descrição dos objetos. Porém, o processo de assimilação dos conhecimentos elaborados permanece aqui dentro dos limites da atividade cotidiana de manipulação objetiva que a criança realiza, e não cria as premissas necessárias para a formação da atividade propriamente de estudo com o conteúdo e a estrutura correspondentes.

² Davidov (1987, p. 143-144) denomina escola tradicional a um sistema de educação europeia que se formou com o nascimento do sistema de produção capitalista. Por muitos anos o método de ensino com a finalidade de formação da sociedade correspondia ao conteúdo utilitário-empírico, base do sensualismo clássico. Referimo-nos aqui ao ensino tradicional de acordo com denominação de Davidov, Slobódchikov (1991, p. 119-120, tradução nossa). “A pedagogia ‘estagnada’ analisa o homem apenas como objeto de manipulações didático-pedagógicas, utilizando para isso, basicamente, métodos autoritários”. “La pedagogía ‘estancada’ analiza al hombre sólo como objetos de manipulaciones didáctico-educativas, utilizando con este objetivo, en lo fundamental, métodos autoritarios” (no original)

Portanto, nosso desafio, desde 2012, centra-se em refletir sobre a importância de um ensino que aborde os conceitos matemáticos de modo que os estudantes apreendam seu conteúdo teórico, de acordo com os pressupostos do Ensino Desenvolvidor, em seu modo de organização no sistema Elkonin-Davídov³. Contudo, a dúvida em relação à relevância e à possibilidade de desenvolvimento do ensino de matemática – com esse fim – em sala de aula, tem predominado na fala dos acadêmicos nos cursos de Pedagogia e de Matemática. A mesma posição é manifestada por professores do Ensino Fundamental das redes de ensino pública e particular quando dos cursos de formação continuada nos quais atuamos como docente formador⁴.

Ao se depararem com o modo de organização do ensino do conceito de número do sistema Elkonin-Davídov, os acadêmicos e também os professores que atuam nas instituições escolares manifestam-se contrários à possibilidade de desenvolvimento desse ensino com estudantes do primeiro ano escolar. O argumento é que as crianças não têm condições de se apropriar do conceito de número no modo proposto, já que eles próprios possuem dificuldades em compreendê-lo. Costumam afirmar, com certa convicção: *“É muito difícil, as crianças não conseguem. Isso pode dar certo na Rússia, em nossa realidade não é possível.”* No entanto, a nosso ver, essa manifestação com relação à aprendizagem dos conceitos matemáticos pelos estudantes e professores é contraditória, especialmente dos professores que atuam no Ensino Fundamental, uma vez que lamentam os resultados aquém do esperado tanto nas avaliações de aprendizagem realizadas em suas aulas quanto nas promovidas pelos órgãos governamentais, a exemplo do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), e internacionais, como o Programa Internacional da Avaliação dos Estudantes (PISA). Os professores sentem a necessidade de fazer algo “diferente” para que os estudantes se apropriem dos conceitos matemáticos, mas negam um modo que se diferencia daquele que gera o ensino foco das ressalvas, por não compreenderem a necessidade de alterar o modo geral de organizar o ensino para além do que tradicionalmente orienta seus planos de aula.

A interpretação dos acadêmicos e professores com relação à impossibilidade de os estudantes da Educação Básica se apropriarem de conceitos matemáticos conforme o sistema

³ Embora o Grupo de Estudos e Pesquisa em Didática Desenvolvidor (GEPEDI) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU), nas publicações que realizaram das traduções dos textos do russo para o português façam referência ao sistema Elkonin-Davídov-Repkin, usaremos no texto a nomenclatura “Sistema Elkonin-Davídov”, conforme denominação oficial na Rússia. Isso não significa desconsiderar as contribuições de Repkin para o desenvolvimento desse sistema.

⁴ Desenvolvemos a atividade de formação continuada com professores nos municípios catarinenses de Araranguá, Arroio do Silva, Criciúma, Forquilha, Içara, Laguna, Maracajá, Nova Veneza, Passo de Torres, São João do Sul, São Ludgero e Sombrio, e em Osório, município do litoral norte do Rio Grande do Sul.

Elkonin-Davídov é resultado dos hábitos já consolidados em relação à organização do ensino brasileiro. Podemos relacionar esse cenário com as análises que Vigotski (2001) realizou do processo de apropriação do conhecimento, isto é, como formas que conduzem a compreensões já estabelecidas e naturalizadas, as quais revelam um pensamento fossilizado.

A persistência no referido argumento pelos acadêmicos foi relevante para que, no ano de 2018, além do estudo, lhes propuséssemos o desenvolvimento do conceito de número com base no sistema mencionado, tomando por referência a pesquisa de Rosa (2012). Os acadêmicos da 5ª fase do curso de Pedagogia – tanto do primeiro quanto do segundo semestre – deveriam organizar uma proposta de ensino com base nas tarefas do sistema Elkonin-Davídov para o ensino do conceito de número a estudantes do primeiro ano do Ensino Fundamental. A proposta inicialmente causou estranheza aos acadêmicos dado o seu caráter inovador, que exige um novo modo de pensar o conteúdo, de ensinar e aprender matemática, muito diferente do vivido na trajetória de estudantes e educadores da Educação Básica. Os resultados dessa incursão, no curso, motivaram alguns acadêmicos a desenvolver as tarefas de estudo em seus estágios curriculares. Mesmo que ainda muito sutil, nossa compreensão é de que os conhecedores dos princípios orientadores do ensino nessa lógica sentem-se atraídos por sua relevância e possibilidade de serem adotados nas instituições escolares brasileiras. No entanto, para que mudanças significativas ocorram no ensino de matemática, é importante que as intervenções tenham maior amplitude. Por isso, com o propósito de que cada vez mais estudantes do Ensino Fundamental tenham acesso ao ensino de matemática na perspectiva anunciada, é primordial que acadêmicos (professores em formação) e professores que atuam no Ensino Fundamental conheçam a relevância desse sistema de ensino para o desenvolvimento do conhecimento matemático em nível teórico.

Entendemos que uma possibilidade de tal propósito se efetivar, além da discussão desse ensino de matemática com acadêmicos na formação inicial, no Ensino Superior, é nossa inserção como membro em um grupo de pesquisa cuja discussão focalize a formação continuada de professores que atuam na área da Matemática no Ensino Fundamental. Nesse sentido, a partir de 2018 temos participado mais intensamente da formação continuada em diversos municípios da região sul de Santa Catarina e do litoral norte do Rio Grande do Sul. Alguns professores percebem o diferencial da proposta, porém, ao mesmo tempo, consideram que não estão preparados e, por isso, carecem de formação para efetivá-la em sala de aula, no que estão corretos, pois necessitam se apropriar desse novo modo de conceber o ensino de matemática, tão diferente e distante de suas compreensões. Além da necessidade de aprofundar o estudo sobre o novo sistema de ensino de matemática para a sua viabilidade, os professores

também colocam à prova sua efetividade no contexto brasileiro, ao questionarem onde esse sistema de ensino já foi desenvolvido.

Tanto na formação inicial, na graduação, quanto na formação continuada que propomos, partimos do pressuposto de que a escola se constitui lugar de mediação no processo de apropriação de conhecimentos com vistas à formação integral do indivíduo. Em sua função social, de acordo com a proposição do Ensino Desenvolvimental, é papel da escola promover o desenvolvimento de valores humanos, qualificações práticas e críticas (Santa Catarina, 2014). Aqui se manifesta uma compreensão esvaziada de sentido por parte dos professores em relação aos pressupostos do documento da Proposta Curricular de Santa Catarina (PCSC), pois ao mesmo tempo que sentem a necessidade de se apropriar de um novo modo de organização do ensino de matemática sob as orientações da THC, questionam a possibilidade de efetivação, no contexto das escolas brasileiras, de uma proposição com o mesmo referencial, como o da PCSC.

Diante do exposto, anunciamos as primeiras questões que nos encaminham para a elaboração de nosso problema de pesquisa: até que ponto os professores têm razão em relação aos motivos da não efetivação do ensino de matemática na perspectiva do Ensino Desenvolvimental, no contexto brasileiro? O que leva os acadêmicos da graduação e professores a afirmarem que os estudantes do Ensino Fundamental não têm condições sociocognoscitivas de se apropriarem dos conceitos matemáticos nesse modo de organização do ensino? Embora a proposição tenha surgido no contexto da Rússia, ela realmente estaria além das possibilidades sociocognoscitivas dos estudantes brasileiros?

Uma das razões da não efetivação desse ensino no contexto brasileiro pode se justificar pela falta de formação continuada, conforme manifestação dos próprios professores, que propicie a apropriação desse novo modo de organização para sua objetivação nas instituições escolares brasileiras.

Embora essas questões estejam inter-relacionadas, não responderemos a todas nesta investigação. Nosso foco se volta para terceira questão: será que é possível desenvolver as tarefas de estudo do conceito de número do sistema Elkonin-Davídov com estudantes em condições sociocognoscitivas próprias da realidade brasileira?

Antes de adentrarmos nas questões mais específicas da tese, consideramos importante aprofundar como o Ensino Desenvolvimental no sistema Elkonin-Davídov, ancorado na Teoria da Atividade, concebe a função da escola na formação dos sujeitos. Para Davídov (1988), a escola tradicional ocidental somente transmite conhecimentos empíricos isolados e promove uma formação insuficiente para um novo homem e uma nova sociedade. Uma nova sociedade, fundamentada em princípios de igualdade, espera que a escola oriente os

estudantes para o desenvolvimento da própria autonomia no processo de apropriação do conhecimento científico. Para tanto, afirma Davídov (1988, p. 14, tradução nossa⁵), “[...] nos materiais sobre a reforma escolar, é dada atenção à necessidade de elevar o nível ideológico-teórico do processo didático-educacional, a fim de cultivar o pensamento autônomo de crianças em idade escolar.” De acordo com Libâneo e Freitas (2013, p. 315), o papel da escola é ensinar os estudantes a “[...] pensar dialeticamente mediante um ensino que impulsionasse o desenvolvimento mental.” Davídov (1988), com base em Vigotski, entende que a aprendizagem essencial ao desenvolvimento das características humanas não é dada biologicamente, mas constituída historicamente. O homem atual nasce com as mesmas características psíquicas de seus antecedentes. Toda produção humana – material, científica, tecnológica, entre outras – precisa ser apropriada pelos indivíduos. Como aponta Sforni (2004, p. 86), nada do desenvolvimento intelectual, produzido ao longo da história, é herdado “[...] biologicamente de seus antepassados.” Portanto, o indivíduo não nasce plenamente humano, seu desenvolvimento psíquico acontece no processo de apropriação da cultura produzida historicamente pela humanidade.

Em conformidade com Marx (1983), na perspectiva da Teoria Histórico-Cultural, o desenvolvimento da consciência humana está diretamente ligado às mudanças materiais e sociais vivenciadas pela sociedade. Isso porque “[...] o modo de produção da vida material condiciona o desenvolvimento da vida social, política e intelectual. Não é a consciência dos homens que determina o ser; é o seu ser social que, inversamente, determina a sua consciência.” (Marx, 1983, p. 24). Desse pressuposto, entende-se que a humanização do indivíduo se constitui mediante suas experiências sociais e da apropriação das experiências histórico-sociais, as quais se originam das contradições, transformações e movimentos na relação dialética homem/atividade/sociedade. De acordo com Vygotsky (2000, p. 115), “[...] *o aprendizado humano pressupõe uma natureza social específica e um processo através do qual as crianças penetram na vida intelectual daqueles que as cercam.*” Por conseguinte, entende-se que a apropriação dos conhecimentos culturais e históricos produzidos socialmente ocorre por meio da interação com o outro.

Davídov (1988) observa que um dos conceitos fundamentais da psicologia soviética, com fonte no materialismo histórico e dialético, é o de atividade. Para o autor,

⁵ As citações de obras em língua espanhola foram inseridas no corpo do texto com tradução nossa e o original da obra citada em nota de rodapé. “En los materiales sobre la reforma escolar se presta atención a la necesidad de elevar el nivel ideológico-teórico del proceso didáctico-educativo, de cultivar en los escolares el pensamiento autónomo” (Davídov, 1988, p. 14).

historicamente a Teoria da Atividade surge com os filósofos medievais, mas os fundamentos verdadeiramente filosóficos foram instituídos por filósofos alemães: Kant, Fichte, Schelling e o principal, Hegel. A superação da concepção hegeliana, afirma o autor, ocorre com a produção de Marx e Engels pela matriz dialética materialista da atividade, que se torna um pressuposto de Vigotski a ser introduzido na teoria psicológica, posicionamento seguido por Rubinstein e Leontiev, que acrescentaram à compreensão filosófica suas interpretações psicológica e pedagógica (Davidov, 2019b). Nesse sentido, o debate de Marx e Engels, citado por Davidov (2019b), encaminha para o entendimento do que realmente se constitui uma atividade, pois na vida cotidiana existem modos de atuação, mas nem todos podem ser chamados de atividade. Uma atividade constitui-se como tal “[...] quando está necessariamente associada a uma transformação substancial do objeto e da realidade social, circundante à pessoa.” (Davidov, 2019b, p. 250). Repkin (2019, p. 366) também comunga dos ideais marxistas de que a atividade é a base de toda vida humana. “Nessa filosofia, o ser humano não é escravo dos acontecimentos, mas criador de sua própria vida.”

Para Davidov e Slobódchikov (1991, p. 134), “[...] atividade é a transformação, pelos homens, da realidade que os cerca”⁶, cuja forma inicial é o trabalho. Nesse contexto, o trabalho é um processo de ação do homem sobre a natureza que se caracteriza por dois elementos inter-relacionados: a atividade coletiva e a fabricação e uso de instrumentos. Como define Leontiev (1978, p. 74), o trabalho é “[...] um processo mediatizado simultaneamente pelo instrumento (em sentido lato) e pela sociedade.” Nesse processo, os seres humanos não se relacionam somente com a natureza, mas com outros seres humanos de uma dada sociedade.

É mediante a atividade de trabalho que os seres humanos produzem seus meios de existência, seu mundo material e espiritual. Nela outras esferas sociais, como a arte/estética, surgem e se desenvolvem. A complexidade da cultura produzida socialmente possibilita “o surgimento da ciência, da arte, de uma linguagem a cada momento mais diversa e simbólica, da educação e de outras categorias sociais” (Moreira, 2010, p. 183).

Conforme Leontiev (2010), alguns tipos de atividade representam papel principal e são mais importantes para o desenvolvimento psíquico em um determinado estágio, enquanto outros, no mesmo período, têm implicações secundárias. Ao tratar da psique infantil, afirma que “durante o desenvolvimento da criança, sob a influência das circunstâncias concretas de sua vida, o lugar que ela objetivamente ocupa no sistema das relações humanas se altera”

⁶ “la actividade es la transformación, por los hombres, de la realidad, que los circunda”.

(Leontiev, 2010, p. 59). Tal mudança é indicadora de que existe uma atividade guia⁷, que caracteriza o estágio do desenvolvimento psíquico do indivíduo. A atividade guia é aquela “cujo desenvolvimento governa as mudanças mais importantes nos processos psíquicos e nos traços psicológicos da personalidade da criança, em um certo estágio de seu desenvolvimento” (Leontiev, 2010, p. 65). Na idade pré-escolar, a atividade guia do desenvolvimento da criança é a brincadeira de papéis sociais. No período escolar, por sua vez, o desenvolvimento cognitivo é orientado pela atividade de estudo, e, na fase adulta, a atividade guia é o trabalho.

Davídov (1988) ressalta o caráter geral da atividade guia – que se apresenta nos estudos de Vigotski, Leontiev e Elkonin – para o desenvolvimento psíquico das crianças e sua contribuição no processo didático-educativo. Em sua tese está o entendimento de que em cada período específico da vida humana existe algum tipo de atividade que compõe “as correspondentes neoformações psicológicas, cuja sucessão configura a unidade do desenvolvimento psíquico da criança.”⁸ (Davídov, 1988, p. 74). No entanto, Leontiev (2010) alerta que, embora seja possível perceber um caráter recorrente no desenvolvimento da psique da criança, o conteúdo das transições não é independente das condições históricas concretas. Assim, não é essencialmente a idade da criança que determina o conteúdo do estágio de desenvolvimento. Ao contrário, os próprios limites de idade vinculados a um estágio dependem de seu conteúdo e se modificam com a alteração das condições histórico-sociais.

O papel da educação se destaca no processo de apropriação das produções humanas (conhecimentos). Saviani (2008, p. 13) é enfático ao afirmar que o trabalho educativo consiste no “ato de produzir, direta e intencionalmente, em cada indivíduo singular, a humanidade que é produzida histórica e coletivamente pelo conjunto dos homens.” Para ele, a finalidade da escola está em assegurar aos estudantes o acesso à ciência. Davídov (1988) defende que é função da escola possibilitar aos estudantes os mais altos níveis de consciência social: ciência, estética, moral, ética e filosofia. A matemática está no contexto do mais alto nível de consciência científica.

No entanto, as análises sobre as discussões referentes à “qualidade” do ensino brasileiro nas diversas áreas do conhecimento, entre elas a Matemática, indicam que a função social da escola não está sendo cumprida convenientemente. Em decorrência, pressupõe-se que ela não cumpre adequadamente sua principal função, qual seja, ensinar o conhecimento

⁷ Diante das diversas traduções para a atividade que indica a mudança de lugar nas relações sociais (principal, dominante, orientadora, guia) optamos por utilizar em nossa pesquisa “atividade guia”, nomenclatura usada pelos pesquisadores brasileiros da Rede GEPAPE – Rede de Grupos que pesquisam a atividade Pedagógica.

⁸ “Las correspondientes neoformaciones psicológicas, cuya sucesión configura la unidad del desarrollo psíquico del niño”.

científico, estético, ético, moral e filosófico (Davídov, 1988; Davídov; Márkova, 1987). Damazio, Pereira, Cardoso e Rosa (2016) também afirmam que a educação escolar brasileira tem apresentado várias lacunas no que diz respeito ao processo de estudo dos conceitos científicos por parte dos estudantes, principalmente deficiências na aprendizagem no contexto escolar, que seriam consequência do modo de organizar o ensino de matemática com preponderância para o desenvolvimento do pensamento empírico.

A qualidade do ensino, segundo Fiorentini (1995, p. 2), é um dos temas que historicamente norteiam as investigações no campo da Educação Matemática, principalmente aquelas que envolvem a “*triade aluno-professor-saber matemático*”. Para o autor, há diferentes modos de conceber essa qualidade, que depende de concepções epistemológicas, axiológico-teleológicas e didático-metodológicas de quem se esforça para produzir transformações no ensino. Não negamos o empenho dos professores para a melhoria do ensino de matemática, mas questionamos qual é o ponto frágil, uma vez que os resultados não se alteram, pois somente uma minoria de estudantes brasileiros se apropria dos conceitos.

Para Davídov e Slobódchikov (1991), o pensamento pedagógico baseado em concepções em que a centralidade do ensino é a exposição do conhecimento pronto, pelo professor, não é eficaz. Por isso, mudar a didática, por exemplo, com o uso de novas técnicas de ensino, em nada ou muito pouco contribui e contribuirá para a melhoria da aprendizagem dos estudantes se eles não se apropriarem do conteúdo teórico dos conceitos estruturados em um sistema inter-relacionado.

Para que o professor possa compreender que há necessidade de alterar o modo geral de ensino, como anunciado anteriormente, os autores do Ensino Desenvolvimental salientam a importância de que esse novo modo de ensino seja orientado por um novo pensamento pedagógico. No entanto, esse novo pensamento pedagógico não é idealista, tem como base o entendimento do processo de desenvolvimento do pensamento dos sujeitos, que ocorre em diferentes períodos da vida.

Como mencionado, em cada período da vida existe uma atividade guia que caracteriza peculiaridades para o desenvolvimento do psiquismo. Uma delas, que recebe atenção em nossa pesquisa, apresenta-se a partir do ingresso da criança na escola. Trata-se da atividade guia de estudo que permite às crianças desenvolverem neoestruturas psicológicas, tais como: as bases da consciência e do pensamento teórico; as ações mentais como a reflexão, a análise e o planejamento (Davidov, 2019a). Também expande seus interesses cognitivos, cujo surgimento ocorre na idade pré-escolar durante o processo de desenvolvimento da brincadeira

de papéis sociais. Neste estágio, a imaginação e a função simbólica são desenvolvidas mais intensamente.

Se na atividade da brincadeira de papéis sociais a criança desenvolve as primeiras manifestações das necessidades para a apropriação dos conceitos científicos, nos primeiros anos de escolaridade é premente que ela transite por ações que criem as condições para a formação do pensamento teórico. Isso requer que a escola esteja organizada para proporcionar-lhe algo novo em relação às brincadeiras de papéis sociais que não a satisfazem mais. Segundo Davydov (2017), ao ingressar no primeiro ano, o estudante deve perceber a diferença em relação ao que vivenciou na pré-escola, isto é, o caráter novo dos conceitos científicos.

O novo e o diferente têm dupla significação para Davídov. O novo diz respeito ao processo de desenvolvimento do estudante em um ambiente escolar organizado de modo distinto daqueles que propiciam, predominantemente, as apropriações espontâneas de conceitos, que Vigotski (2001) denomina de conceitos cotidianos. O diferente diz respeito ao processo de formação para um novo modo de compreender a realidade, isto é, o desenvolvimento da consciência das possibilidades com vistas às transformações sociais. Dito de outro modo, o velho e o novo se vinculam ao que Davídov e Slobódchikov (1991) denominam de tradicional ou pedagogia estancada em contrapartida a uma pedagogia colaborativa.

Para esses autores, os métodos fundamentalmente autoritários da pedagogia estancada transformam a criança e o jovem em objetos de manipulações didático-educativas. Por consequência, apresenta-se na prática um ensino pautado no individualismo, a serviço do sistema de produção atual, que privilegia uma estratificação da sociedade em detrimento da maioria. Em contrapartida, a proposição de um novo pensamento pedagógico tem por base a pedagogia colaborativa. Sua finalidade volta-se ao ensino que desenvolva, em todas as crianças e jovens, qualidades da personalidade como: “o coletivismo e a solidariedade, o companheirismo e a civilidade, o caráter firme e a vontade, o amor ao trabalho e a firmeza, combinados com a iniciativa e a independência”⁹ (Davídov; Slobódchikov, 1991, p. 120).

Nesse contexto de adversidades em relação ao processo escolar, buscamos um novo modo de organização do ensino de matemática que se caracterize por não se limitar apenas às apropriações do conhecimento empírico, mas, ao invés disso, por promover o desenvolvimento do pensamento teórico, no sentido dado por Davídov (1988, p. 125): “O pensamento teórico é

⁹ “El colectivismo y la solidaridad, el compañerismo y la civilidad, el carácter firme y la voluntad férrea, el amor al trabajo y la firmeza, combinados con la iniciativa y la independencia.”

o processo de idealização de um dos aspectos da atividade objetual-prática, a reprodução, nela, das formas universais das coisas.”¹⁰

Então, o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes, por via do processo de apropriação do conhecimento científico, passa a ser a tarefa estabelecida para a organização do ensino de matemática defendida pelo Ensino Desenvolvidor do sistema Elkonin-Davídov. Essa proposta é resultante de uma análise da relação entre o processo de ensino, vinculado com a atividade de estudo dos alunos e, por consequência, a aprendizagem, de modo a comprovar o grau de relevância que a educação possui para o desenvolvimento humano. Libâneo e Freitas (2013) destacam a amplitude didático-pedagógica desse sistema de ensino para a escola contemporânea, por apregoar princípios da Teoria Histórico-Cultural elaborada por Vigotski que, por sua vez, tem como matriz epistemológica/filosófica o materialismo histórico e dialético.

Vale ressaltar que as diretrizes desse sistema se vinculam à preocupação de desenvolver um modo de organização do ensino de matemática que se apresente com a finalidade de proporcionar aos estudantes a apropriação do conteúdo teórico de conceitos matemáticos científicos. Para Davídov (1988), a apropriação dos conceitos teóricos requer o conhecimento da essência do objeto de conhecimento.

O pensamento teórico surge quando, desde o início do estudo de um ou outro objeto (ou de uma de suas partes importantes) mostra-se às crianças a necessidade de estruturar e assimilar justamente o procedimento geral de orientação numa determinada área do conhecimento; construir um modo generalizado de resolução de uma vasta gama de tarefas. Dessa maneira, muitas habilidades e hábitos particulares e práticos formam-se sobre uma base generalizada, teórica¹¹ (Davídov; Márkova, 1987, p. 329).

O entendimento de que a organização do ensino – com fundamentos psicológicos/pedagógicos provenientes da THC e do Ensino Desenvolvidor – desenvolve o pensamento teórico dos estudantes no lugar do empírico está em consonância com o que orienta a PCSC (Santa Catarina, 2014; Santa Catarina, 2019). No entanto, esse referencial não foi incorporado no planejamento das aulas da maioria dos professores catarinenses (Isidoro, 2019). Segundo a autora, em parte, pela escassez de material disponível e de formação teórica para

¹⁰ “El pensamiento teórico es el proceso de idealización de uno de los aspectos de la actividad objetual-práctica, la reproducción, en ella, de las formas universales de las cosas.”

¹¹ “El pensamiento teórico surge cuando desde el comienzo mismo del estudio de uno u otro objeto (o de una de sus partes importantes) se demuestra a los niños la necesidad de estructurar y asimilar justamente el procedimiento general de orientación en el área dada, el procedimiento general de solución de amplias clases de tareas; entonces muchas habilidades y hábitos particulares y práticos se forman sobre una base generalizada, teórica.”

que os professores possam elaborar tarefas de estudo nessa perspectiva. Os professores, em sua maioria, culturalmente utilizam livros didáticos brasileiros para a organização de suas aulas. Estes, na concepção de Rosa (2012) e Gonçalves (2022), desenvolvem os conceitos matemáticos com base empírica, ou seja, de modo contrário ao que preconiza a Proposta Curricular de Santa Catarina.

A formação dos professores, especialmente a continuada, tem sido amplamente debatida (Vitorio; Ortigara, 2016). Pesquisas a respeito dela indicam a necessidade de analisarmos a formação do professor com suporte na valorização da flexibilidade e da cultura profissional docente (Santos; Brito, 2016). Nesse sentido, nossa inserção – como formadora de professores das redes de ensino particular e pública – tem se constituído mediante os pressupostos da THC. Tal processo formativo é movido pelo pressuposto de que a mudança da prática dos professores depende de suas mudanças internas, como sujeitos que ensinam na relação com as condições objetivas, produzidas historicamente pela humanidade. Além da formação como indivíduo e como sujeito social, a constituição do ser professor demanda características da função que lhe cabe desenvolver, qual seja: estar em acordo com os fundamentos dos documentos oficiais de Santa Catarina de possibilitar, aos estudantes, os meios para apropriação das objetivações das esferas não cotidianas (Duarte, 2017).

No cenário brasileiro, o estudo do sistema de ensino Elkonin-Davídov vem se realizando, nas últimas décadas, nas investigações de pesquisadores de diversos Programas de Pós-Graduação e de vários grupos de pesquisa¹². Desses estudos, destacamos duas teses: uma delas, de Rosa (2012), apresenta um estudo sobre as significações teóricas para a introdução do conceito de número no primeiro ano escolar, conforme as proposições davydovianas; a outra, de autoria de Souza (2014), expõe estudo da relação que professoras dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental realizam sobre suas práticas depois de estudarem o conceito de número com base na organização do sistema de Elkonin-Davídov. Na mesma perspectiva, Damazio, Pereira, Cardoso e Rosa (2016) apresentam os resultados do envolvimento de uma professora da rede municipal de ensino de uma cidade do sul de Santa Catarina com estudantes do segundo

¹² Em relação ao ensino de matemática, estão os articulados à Rede de Grupos que Pesquisa em Atividade Pedagógica (GEPAPE em Rede): o Grupo de Estudos e Pesquisa sobre a Atividade Pedagógica (GEPAPe), o Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: uma abordagem Histórico-Cultural (GPEMAHC), o Grupo de Pesquisa Teoria do Ensino Desenvolvidor na Educação Matemática (TedMat), o Grupo de Pesquisa Didática da Resolução de Problemas em Ciências e Matemática, o Grupo de Estudos e Pesquisa sobre a Atividade Matemática (GEMAT). Ademais, podemos citar também os seguintes grupos: Grupo de Estudos e Pesquisas sobre Atividade de Ensino (GEPAE-UEM), Grupo de Pesquisa Teorias e Processos Educacionais, Grupo de Estudos e Pesquisas em Formação de Professores (GEPForProf), Grupo de Pesquisa Formação Compartilhada de Professores - Escola e Universidade (GPEFCom), Grupo de Pesquisa Implicações Pedagógicas da Teoria Histórico-Cultural.

ano do Ensino Fundamental¹³. A referida professora desenvolveu um Experimento Didático com os estudantes de sua classe motivada pela aprendizagem que obteve em curso de formação continuada, cujo foco foi o sistema Elkonin-Davídov. As tarefas particulares, selecionadas para o experimento, tratavam do conceito de número e foram extraídas do livro de orientação ao professor referente ao primeiro ano escolar do sistema educacional em discussão.

Com fundamentos na Teoria Histórico-Cultural e na Teoria da Atividade, Amaral (2018) desenvolveu um experimento com estudantes do quinto ano do Ensino Fundamental sobre o conceito matemático de área. O estudo objetivou a compreensão das significações manifestadas pelos estudantes por decorrência do envolvimento na Atividade Orientadora de Ensino, por meio da realização de uma Situação Desencadeadora de Aprendizagem (SDA) (Moura, 1997, 2001, 2010).

Santos (2016) pesquisou as dificuldades dos estudantes em relação à apropriação do conceito de divisão, também com alunos do quinto ano do Ensino Fundamental de uma escola municipal de São Paulo. O estudo aborda os sentidos e os significados desse conceito que se formam após o desenvolvimento de uma SDA à luz da Atividade Orientadora de Ensino conduzida por uma história virtual, uma situação emergente do cotidiano e um jogo (Moura, 2001). O baixo desempenho dos estudantes, no que diz respeito aos conceitos básicos de matemática, levou Rodrigues (2006) a investigar a relação entre a aprendizagem de conceitos matemáticos e o desenvolvimento psíquico dos estudantes. Para isso, a pesquisadora elaborou e analisou situações de ensino e de aprendizagem do conceito de volume em uma turma do terceiro ano do Ensino Fundamental.

Serconek (2018) desenvolveu um Experimento Didático com crianças do quarto ano do Ensino Fundamental, propondo uma tarefa de estudo com foco nas grandezas área e perímetro, sob a perspectiva do Ensino Desenvolvimental do sistema Elkonin-Davídov. Seu experimento foi realizado no contraturno das aulas, com a participação de 21 estudantes, dentre os 32 que compunham a classe. Galdino (2016) investigou a distinção entre conhecimento matemático empírico e teórico relativo ao conceito de multiplicação, na perspectiva da Teoria Histórico-Cultural. Os dados da pesquisa foram obtidos por meio do acompanhamento de uma turma do terceiro ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual do sul de Santa Catarina. A coleta desses dados ocorreu com a observação das aulas da professora titular e de entrevistas individuais com os estudantes, após realização das avaliações, também pela professora.

¹³ Importa dizer que no Brasil, assim como na Rússia, os estudantes iniciam o período escolar com seis anos de idade.

Becker e Cardoso (2019) investigaram o que caracteriza as manifestações referentes ao conceito de número que os estudantes do primeiro ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede particular de Criciúma expressam quando o ensino é organizado segundo o sistema Elkonin-Davídov.

O conceito de número no primeiro ano do Ensino Fundamental foi objeto de estudo de Moya (2015). No entanto, diferencia-se de nossa pesquisa porque o foco foi a organização do ensino de Matemática no contexto da ampliação do Ensino Fundamental de oito para nove anos. Segundo a pesquisadora, a inserção da criança de seis anos no Ensino Fundamental desencadeou, por parte dos professores, dúvidas relacionadas à organização do ensino dos conceitos de matemática. Essas questões instigaram a investigação dos princípios norteadores para a organização do processo de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos no primeiro ano escolar, o que conduziu a autora a elaborar e desenvolver um experimento formativo.

Com relação às dúvidas sobre a prática escolar na organização do ensino das crianças de seis anos no Ensino Fundamental, Marega (2010) investigou o modo de organização do ensino para esses estudantes considerando a transição da pré-escola (em que a atividade guia é o jogo protagonizado¹⁴) para a escolar (em que a atividade guia é a de estudo). O estudo se fundamenta nos principais pesquisadores da Teoria Histórico-Cultural, como Vigotski, Leontiev e Elkonin. Para análise do processo de transição, a autora realizou um experimento com alunos do primeiro ano de uma escola pública da rede municipal de ensino de Maringá.

Observa-se, pois, que esses estudos adotam a base teórica Histórico-Cultural. Porém, somente Becker e Cardoso (2019) e Moya (2015) realizam o ensino em situações escolares com estudantes do primeiro ano escolar a partir dos fundamentos do sistema Elkonin-Davídov. Mesmo assim, centram-se em objetos e categorias de análise distintas das que adotamos em nossa investigação. As demais pesquisas se diferenciam de nossa investigação nos seguintes pontos: 1) os sujeitos envolvidos; 2) o ano escolar; 3) o conceito matemático abordado; 4) a fonte das tarefas; 5) o objeto, o problema de pesquisa e as categorias de análise.

As pesquisas no contexto brasileiro se embasam teoricamente nos estudos que têm gênese na década de 1950, na Rússia, inicialmente coordenados por Elkonin, Davídov e um grupo de colaboradores que, por meio de experimentos formativos, elaboraram um modo geral de organização do ensino que também proporcionou o desenvolvimento da teorização da estrutura da atividade de estudo.

¹⁴ Marega denomina jogo protagonizado a atividade guia da idade pré-escolar. Em nossa pesquisa, usaremos como sinônimo: brincadeira de papéis sociais ou jogo de papéis sociais. Davídov (1988) a denomina “Atividade do Jogo”.

É para esse novo que se volta a presente pesquisa, com a pretensão de vivenciá-lo experimentalmente no contexto escolar brasileiro. Mas, o que há de novo nesse modo de organização de ensino?

No contexto da matemática, desde o primeiro ano do Ensino Fundamental, no sistema de ensino Elkonin-Davídov, a proposição é o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes pela apropriação dos conhecimentos científicos. O movimento inicial se dá pelo conceito de número como relação entre grandezas. Nesse modo de conceber o ensino de matemática, aos estudantes são proporcionadas as condições de se apropriarem da conexão geral do número real que advém da relação entre grandezas. No processo de medição das grandezas, os resultados dependem do objetivo da tarefa em distintos momentos do ensino. Nos primeiros anos escolares, o resultado corresponde aos números naturais, quando a unidade cabe inteiras vezes na grandeza medida. No decorrer da aprendizagem, em anos seguintes do Ensino Fundamental, os estudantes são colocados em situações em que a unidade de medida não cabe inteiras vezes na grandeza a ser medida, o que possibilita a definição de novos conjuntos numéricos, os racionais e os irracionais. Os inteiros positivos e negativos são inseridos no ensino por meio de situações que envolvem os deslocamentos na reta numérica, que explicita a grandeza vetorial.

Para tanto, a organização da atividade de estudo se estrutura por tarefa de estudo, ações de estudo e operações, de modo que as situações a serem desenvolvidas pelos escolares os coloquem em movimento de pensamento dialético de ascensão do abstrato ao concreto.

Partimos do pressuposto de que o ideal é propor esse novo para estudantes do primeiro ano escolar. Só assim teríamos a oportunidade de propor o modo de organização do Ensino Desenvolvimental a fim de que as crianças se coloquem em processo de atividade de estudo, pois elas ainda não teriam maiores influências do ensino galgado em conhecimentos empíricos (pedagogia tradicional). Isso porque, segundo Davídov (1988), uma formação conceitual de base empírica cria obstáculos para o desenvolvimento de uma ação pedagógica colaborativa com vistas à formação do pensamento teórico.

Diante dos questionamentos advindos do modo de organização do ensino de matemática predominante no contexto brasileiro, entendemos – assim como Rosa (2012), Puentes (2019), Sidneva (2020), Dusavitskii (2014) – que uma das possibilidades de sua superação é a pedagogia colaborativa, em sua organização do ensino no Sistema Elkonin-Davídov. Chama-nos atenção que a *pedagogia colaborativa* tem algumas peculiaridades que a distinguem da *pedagogia estancada* (Davídov; Slobódchikov, 1991). Nesse sentido, vale destacar suas características principais: o foco da educação e do ensino para as possibilidades

do desenvolvimento psíquico e físico dos estudantes; o desenvolvimento integral de todas as atividades conscientes (lúdica, laboral, artística, de estudo, desportiva, social organizativa); a vinculação da atividade educativa com a familiarização criativa e ativa do homem no mundo, com a atividade laboral das pessoas; e, a mais importante das características, a compreensão da educação escolar como um sistema socioestatal que dá condições para a ampla democratização. Chama-nos a atenção, ainda, a afirmação dos autores de que uma correta organização do ensino que atenda tais orientações é aquela que

se realiza sobre a base da **necessidade** dos próprios escolares e do domínio das riquezas espirituais das pessoas (a estas riquezas pertencem, em particular, a capacidade de comunicar-se, os valores morais as normas jurídicas). [...] sem tal necessidade como componente fundamental, a atividade de estudo não pode existir (Davídov; Slobódkhikov, 1991, p. 137).

É relevante destacar que pesquisas experimentais com estudantes do Ensino Fundamental na área de Matemática ultrapassaram as fronteiras da ex-URSS (União das Repúblicas Socialistas Soviéticas) e se expandiram para outros países como os Estados Unidos, a Croácia, a Alemanha, a Espanha, o Afeganistão e a Inglaterra. Nesses países, pesquisadores como Schmittau e Morris (2004), Schmittau (2005), Carraher e Schliemann (2002), Lee (2002), Carpay (2009), Polotskaia (2018), entre outros, apontam resultados alentadores de uma proposta inédita com o intuito de desenvolver o pensamento teórico dos estudantes.

No Brasil, as pesquisas em educação com fundamentos nos pressupostos teórico-metodológicos da Teoria Histórico-Cultural, da Teoria da Atividade e do Ensino Desenvolvimental são recentes. Na última década do século XX, com esse viés, teve início o debate da educação escolar a partir da criação de grupos de pesquisa que investigam a Atividade Pedagógica (Araujo; Moraes, 2017).

Adotar como temática e objeto de estudo esse modo de organização do ensino, com tais características e finalidades, permite vislumbrar uma série de aberturas que, por consequência, requerem delimitações. Assim, centramos nossa investigação na dificuldade, tanto dos professores em formação inicial quanto dos em formação continuada, de compreenderem a possibilidade de realização das tarefas de estudo sobre o conceito de número do modo de organização de ensino do sistema Elkonin-Davídov no contexto das escolas brasileiras. Para os professores, o ensino de matemática na referida perspectiva é muito “difícil”, razão pela qual não poderia ser efetivado com estudantes brasileiros. Os acadêmicos e professores atribuem a impossibilidade desse ensino ao fato de eles, mesmo com todo o percurso escolar trilhado, apresentarem dificuldades em compreendê-lo.

O exposto até aqui é base para a definição do problema de nossa pesquisa, expresso no seguinte questionamento: é possível que estudantes do primeiro ano escolar de uma escola pública, envolvidos em um Experimento Didático, apropriem-se do conceito de número com base nas tarefas de estudo elaboradas sob as premissas do sistema de organização do ensino Elkonin-Davídov?

Mas outras questões auxiliares, articuladas ao problema, merecem atenção como forma de aprofundá-lo: 1) os estudantes têm condições de acompanhar o desenvolvimento das tarefas de estudo propostas pelo sistema Elkonin-Davídov?; 2) ao desenvolverem as tarefas, os estudantes de fato se apropriam do seu conteúdo conceitual?; 3) os estudantes inseridos durante o processo de desenvolvimento do Experimento Didático acompanham e realizam as tarefas de estudo?

Para direcionarmos o estudo e aprofundarmos a questão de pesquisa, formulamos o seguinte objetivo geral: analisar a possibilidade de estudantes brasileiros, no primeiro ano escolar de uma escola pública, realizarem tarefas de estudo do sistema Elkonin-Davídov para a apropriação do conceito de número. Além do referido objetivo, atentamos para algumas especificidades ligadas às questões auxiliares que se voltaram à análise: reconhecer as condições que possibilitam, aos estudantes, acompanhar o desenvolvimento das tarefas de estudo no sistema Elkonin-Davídov; identificar se os estudantes se apropriam do conteúdo teórico das tarefas; observar se os estudantes, no decorrer do experimento, desenvolvem as tarefas de estudo de forma colaborativa.

Portanto, é com esse propósito que esta pesquisa se configura, investigar as possibilidades do desenvolvimento do sistema Elkonin-Davídov para que os estudantes se apropriem do conteúdo teórico do conceito de número e, assim, ampliem o pensamento matemático em âmbito teórico. Sem desconsiderar as condições do processo de formação didática, do conteúdo e da estrutura teórico-metodológica dos professores brasileiros, nossa hipótese é que o desenvolvimento desse modo de organização de ensino contribuirá decisivamente para superar os resultados insatisfatórios com relação à aprendizagem de matemática pelos estudantes dos Anos Iniciais das escolas públicas brasileiras. Cabe registrar, no entanto, que pesquisas que investigam os resultados de experimentos didáticos na perspectiva da atividade de estudo ainda são restritas no Brasil.

1.1 MÉTODO DE INVESTIGAÇÃO COM FUNDAMENTOS DA TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL

Esta seção apresenta o método de investigação e os procedimentos da pesquisa. Considerando que eles se inserem no âmbito educacional, pressupomos o foco em uma abordagem teórica com fundamentos filosóficos, psicológicos e pedagógicos. Nesse contexto, entendemos que toda investigação científica se direciona por um método que é base orientadora do processo de constituição de apreensão do novo conhecimento. Como escreveu Vygotski (2000, p. 47): “Em qualquer nova área, a pesquisa começa necessariamente com a busca e a elaboração do método.”¹⁵ Para o autor, um novo problema científico requer um novo método e novas técnicas para a investigação. O modo de investigação aqui concebido e orientado pela perspectiva da Teoria Histórico-Cultural se diferencia daquelas formas em que novos estudos, simplesmente, utilizam métodos já elaborados e estabelecidos pela ciência.

A posição adotada, como pesquisadores no âmbito da Educação, tem como referência o método de investigação Materialista Histórico e Dialético de Marx (2011), que se constitui como o geral do modo de investigação. Também se alia ao genético-experimental da Teoria Histórico-Cultural descrito por Vygotski (2000), cuja particularidade é a investigação do desenvolvimento das funções psíquicas superiores – no caso de nosso objeto de investigação, especificamente o pensamento teórico relacionado ao número –, bem como ao método genético-modelador, que se objetiva como expressão singular. Por se tratar de uma pesquisa com inserção no ambiente escolar, a referência é o “experimento formativo” que Davídov (1988) denomina experimento genético modelador em referência ao método genético-causal de investigação de Vygotski (2000), ressaltando que seguimos esses procedimentos conforme orientação de pesquisadores do Ensino Desenvolvimental (Davídov, 1988; Davídov; Slobódchikov, 1991; Davidov; Márkova, 2019).

Importa pontuar que, em nosso estudo, o método materialista histórico e dialético é compreendido como geral, pois seus princípios são base para as pesquisas que adotam essa perspectiva teórica. Seu fenômeno é a atividade humana, desde que conceba o ser humano em sua constituição ontológica, como um ser social, o que interfere nas investigações particulares, como a Pedagogia (Araujo; Moraes, 2017). Todavia, o método particular (pedagógico, por exemplo) precisa produzir seus próprios procedimentos ancorados nos princípios gerais do materialismo histórico e dialético, e não como uma pura decorrência deles, ou seja, uma simples

¹⁵ “En cualquier área nueva la investigación comienza forzosamente por la búsqueda y la elaboración del método”.

aplicação. “A sistematização de um método para a ciência pedagógica é uma tarefa histórica e prática, possível apenas quando tomamos por base as sínteses investigativas que tratam, diretamente, com o problema de determinar o objeto das pesquisas em Educação” (Araujo; Moraes, 2017, p. 49).

Uma das contribuições do método materialista histórico e dialético consiste na possibilidade de apreensão da totalidade das “explicações do processo de produção do conhecimento.”¹⁶ (Beatón, 2017, p. 20). Nesse aspecto, o principal atributo da investigação é compreender que a essência dessa totalidade se constitui na historicidade do fenômeno estudado. Isso significa que o aprofundamento de uma investigação vai além do estudo em questão, pois se inter-relaciona com outros estudos de forma complexa e histórica. Nesse ponto de vista, “as ciências são o produto histórico e coletivo de seres humanos que trabalham para descobrir as explicações necessárias para um determinado objeto.”¹⁷ (Beatón, 2017, p. 21).

Nesse sentido, o novo conhecimento – em seu processo de produção avançado, a partir da crítica dos resultados elaborados pelo método – possibilitou, historicamente, ir além dele, sob outro modo de olhar científico. Para exemplificar, tomamos o estudo experimental do desenvolvimento dos conceitos, conduzidos por Vigotski (2001). O autor critica o que denomina de métodos experimentais tradicionais, por não adotarem uma metodologia que pudesse “penetrar fundo no processo de formação dos conceitos e estudar sua natureza psicológica” (Vigotski, 2001, p. 151). Sua crítica é justificada ao expressar a compreensão de que o estudo, ao considerar os princípios tradicionais, analisa tão somente o produto em detrimento do processo que o gerou. Dito de outro modo, substitui o complexo processo sintético por um elementar, com análise de apenas parte dele. Com relação aos métodos tradicionais do estudo do conceito, Vigotski (2001, p. 153) afirma: “caracterizam-se igualmente pelo divórcio da palavra com a matéria objetiva; operam ou com palavras sem matéria objetiva, ou com matéria objetiva sem palavras.”

Contudo, os estudos dos teóricos tradicionais impulsionaram a criação de um novo método, denominado método *sintético-genético*, que permitiu aos pesquisadores investigar não o conceito pronto, mas todo o processo de sua formação, ao considerar a dinâmica, o desenvolvimento, o fluxo, o começo e o fim do processo (Vigotski, 2001). Vale salientar que o novo método foi desenvolvido por vários pesquisadores. No entanto, de acordo com Vigotski

¹⁶ “explicaciones del proceso de producción de conocimientos”.

¹⁷ “las ciencias son el producto histórico y colectivo de seres humanos que trabajan por descubrir las explicaciones necesarias de un determinado objeto”.

(2001), apesar de superarem a concepção mecanicista da formação de conceitos, não mostraram em seus experimentos “a efetiva natureza genética, funcional e estrutural desse processo e se perderam na explicação puramente teleológica das funções superiores.” (Vygotski, 2001, p. 163).

Como consequência de suas críticas, Vygotski (2000) expõe, de forma detalhada, os princípios filosóficos que fundamentam a elaboração do método geral *genético-causal* ou de *modelagem genética*, cujo objeto principal é o desenvolvimento das funções psíquicas superiores. Aqui está a principal razão de adotarmos esse método, pois a implementação da nossa pesquisa tem como centralidade o desenvolvimento de conceitos matemáticos, em nível teórico, relacionados ao número por estudantes do primeiro ano escolar.

Em relação a esse método de investigação, Cedro e Nascimento (2017, p. 31-32) explicitam que os princípios filosóficos, “[...] a concepção de história, de ciência e de realidade [...] se estabelecem em [...] premissa e produto, ferramenta e resultado [...]”. Vygotski (2000) evidencia a necessidade desse novo método psicológico de investigação – *genético-causal* ou de *modelagem genética* – para explicar a natureza histórico-social do psiquismo humano. Para ele, os métodos que não considerarem os problemas do desenvolvimento cultural do comportamento humano e das funções psíquicas superiores encaminham suas investigações para um “beco sem saída” (Vygotski, 2001, p. 372). Cedro e Nascimento (2017, p. 32) chamam a atenção para o fato de que concordar que o psiquismo humano é histórico e social não significa negar sua relação biológica ou natural. E complementam: “essa sua natureza primária está subordinada à secundária: social e histórica.” Portanto, conceber o desenvolvimento das funções psíquicas superiores em seu processo histórico implica se opor à “abordagem naturalista da psicologia humana que pressupõe a passividade do comportamento humano como sua característica fundamental”¹⁸ (Vygotski, 2000, p. 62). Para o autor, o termo “passividade” tem o mesmo significado atribuído ao caráter passivo de adaptação dos animais ou aquilo que é encontrado nas funções psíquicas rudimentares. Contrariamente, as funções psíquicas superiores e rudimentares são expressões limítrofes no processo de apropriações históricas do sistema comportamental humano. Nas palavras de Vygotski (2000, p. 67),

[...] as funções rudimentares e superiores são os polos extremos de um mesmo sistema de comportamento, seu ponto inferior e superior, que marcam os limites dentro dos quais estão localizados todos os graus e formas das funções

¹⁸ “enfoque naturalista de la psicología humana, que tras él se esconde, presuponen la pasividad del comportamiento humano como su rasgo fundamental”.

superiores. Ambos os pontos, tomados em conjunto, determinam a seção do eixo histórico de todo o sistema de comportamento do indivíduo.¹⁹

O autor esclarece que os princípios pertinentes às funções psíquicas superiores não funcionam do mesmo modo que para as rudimentares, tampouco seguem o mesmo caminho. Em vez disso, estão inter-relacionados em seu desenvolvimento histórico, uma vez que as funções psíquicas rudimentares são a chave para a melhor compreensão das superiores (Vygotski, 2000), que se elevam a partir daquelas, no processo histórico da formação da psique humana. Para Cedro e Nascimento (2017, p. 34), o estudo das funções psíquicas rudimentares constitui o elemento essencial do método de investigação vigotskiano “porque permite explicar a condição inicial ou essencial para o desenvolvimento das funções psíquicas superiores.”

Além de considerar a natureza histórica de um fenômeno, Cedro e Nascimento (2017) apontam outro princípio para a elaboração desse método de investigação, qual seja: a sua análise histórica. Vygotski (2000, p. 67-68) explica que uma análise nessa perspectiva não significa simplesmente remeter-se ao passado, como apregoam os métodos tradicionais de investigação.

Estudar algo historicamente significa estudá-lo em movimento. Este é o requisito fundamental do método dialético. Quando uma investigação abarca o processo de desenvolvimento de um fenômeno em todas as suas fases e mudanças, desde o seu aparecimento até o seu desaparecimento, isso implica mostrar a sua natureza, conhecer a sua essência, pois só em movimento o corpo demonstra que existe. Assim, a investigação histórica do comportamento não é algo que complementa ou auxilia o estudo teórico, mas constitui seu fundamento.²⁰

A análise histórica de um fenômeno consiste em focar no seu processo de transformação, ou melhor, buscar a essência “naquilo que ele é, no que foi e no que pode vir a ser” (Cedro; Nascimento, 2017, p. 33). Para Vigotski (2001), o pensamento dialético não contrapõe os métodos lógico e histórico de conhecimento. Fundamentado em Engels (apud Vigotski, 2001, p. 200), o autor afirma que

¹⁹ “las funciones rudimentarias y las superiores son los polos extremos de un mismo sistema de conducta, su punto inferior y superior, que marcan los límites dentro de los cuales se ubican todos los grados y formas de las funciones superiores. Ambos puntos, tomados en conjunto, determinan la sección del eje histórico de todo el sistema de conducta del individuo”.

²⁰ “Estudiar algo historicamente significa estudiarlo en movimiento. Esta es la exigencia fundamental del método dialético. Cuando en una investigación se abarca el proceso de desarrollo de algún fenómeno en todas sus fases y cambios, desde que surge hasta que desaparece, ello implica poner de manifiesto su naturaleza, conocer su esencia, ya que sólo en movimiento demuestra el cuerpo que existe. Así pues, la investigación histórica de la conducta no es algo que complementa o ayuda el estudio teórico, sino que constituye su fundamento”.

[...] o método lógico de investigação é o mesmo método histórico, só que livre de sua forma histórica e dos acasos históricos que perturbam a harmonia da exposição. O processo histórico de pensamento começa onde começa a história, e o seu ulterior desenvolvimento não é senão um reflexo, em forma abstrata e teoricamente coerente, do processo histórico, um reflexo realizado porém corrigido segundo as leis que a própria realidade histórica nos ensina, pois o método histórico de investigação permite estudar qualquer momento do desenvolvimento em sua fase mais madura, em sua forma clássica.

Marx (2011), ao propor os fundamentos histórico e dialético, diferencia o método de pesquisa científica de investigação do método de exposição; no primeiro, ao mesmo tempo, mantém-se a inter-relação dialética pelo objeto em estudo. O método de pesquisa se caracteriza por uma análise aprofundada da realidade estudada, a qual permite ao investigador se apropriar das relações internas do objeto de estudo, sua essência. O método de exposição faz o caminho inverso ao da pesquisa, “pois a reconstituição, a síntese do fenômeno, é apresentada ao indivíduo como se tivesse sido construída *a priori*.” (Cedro; Nascimento, 2017, p. 27).

Em conformidade com o método de pesquisa científica, Davidov (2019c, p. 215-216) observa que na pesquisa se “deve conhecer o material estudado de maneira detalhada e profunda, analisar as diversas formas do seu desenvolvimento e encontrar as conexões internas.” A pesquisa nessa perspectiva tem início com a análise das variantes sensoriais concretas e das particularidades do objeto em estudo para, na sequência, encontrar a base interna universal. Desse modo, os resultados da pesquisa decorrem dessa base universal conhecida pelo pesquisador para chegar à síntese, que ocorre pela apropriação mental das particularidades com a sustentação de sua relação interna, o concreto.

De outra parte, o método de exposição se diferencia, pois a apropriação é de um conhecimento já produzido pela comunidade científica. Na escola, por exemplo, o estudante não produz conhecimento novo – ainda que no processo isso possa ocorrer –, apropria-se dele. Como esclarece Sforzi (2017, p. 87), “O conteúdo que será por ele apropriado já está sistematizado, já se encontra em forma abstrata.” Davidov (2019b) concebe que a atividade de estudo dos estudantes dos Anos Iniciais é elaborada conforme o método de exposição do conhecimento científico, pela ascensão do abstrato ao concreto.

É com base nesses pressupostos que se evidencia a questão principal da Teoria Histórico-Cultural com relação ao desenvolvimento das funções psicológicas superiores dos estudantes na educação escolar: a tese vigotskiana de que o ensino promove o desenvolvimento psíquico dos indivíduos. No entanto, não é qualquer ensino ou qualquer exposição que desenvolve as funções psíquicas superiores. Nesse contexto, Davidov (1988) contribui afirmando que, para isso, o processo didático-educativo escolar tem que ocorrer sobre a base

da assimilação, pelos estudantes, do conteúdo teórico dos conceitos. Na concepção do autor, cada disciplina escolar, no plano da apropriação, representa a projeção de uma ou outra forma superior da consciência social (da ciência, da arte, da moral, do direito). É relevante mencionar que essa projeção tem suas normas determinadas, especialmente, pelas finalidades educacionais: “para fins de instrução, para as particularidades do próprio processo de assimilação, para o caráter e possibilidades da atividade psíquica dos escolares.”²¹ (Davídov, 1988, p. 192). Entretanto, essas finalidades são efetuadas na prática escolar por meio de uma organização articulada em todo o processo educativo, cuja base é o currículo. O eixo que orienta o processo consiste na definição sistemática e hierárquica dos conhecimentos e habilidades que devem ser assimilados pelos estudantes. Para Daví́dov (1988), é o programa que define o conteúdo da disciplina, os métodos de ensino, a origem do material didático, os períodos do ensino, entre outros momentos específicos.

Contudo, o pensamento dos estudantes no desenvolvimento da atividade de estudo, segundo Daví́dov (1988, p. 173), tem que se aproximar do pensamento dos cientistas, que também expõem os resultados de suas pesquisas por meio das “abstrações, generalizações substanciais e os conceitos teóricos que funcionam no processo de ascensão do abstrato ao concreto.”²²

O conteúdo dos conceitos dos objetos estudados é o fator que determina o tipo de pensamento a ser formado durante a assimilação dos conhecimentos. Do conteúdo teórico derivam os procedimentos e o material didático para organizar o ensino com vistas à formação do pensamento teórico, que se forma nos estudantes durante a efetivação da atividade de estudo (Davídov, 1988). A Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018, p. 28), ancorada em outra perspectiva teórica, denomina objetos de conhecimento os “conteúdos, conceitos e processos” organizados em unidades temáticas. Assim, no ensino brasileiro o “conteúdo” é a lista de conceitos disciplinares estudados nas escolas.

Para que o leitor possa se situar em relação ao entendimento de Daví́dov e seus colaboradores sobre o desenvolvimento de experimentos formativos de acordo com a Teoria da Atividade de Estudo, apresentamos algumas questões gerais. Consideramos pertinente esta explanação, uma vez que nossa investigação ocorreu por meio de um Experimento Didático com os mesmos fundamentos. O Experimento Didático, em nossa tese é relevante porque nos

²¹ “Por las finalidades de la instrucción, por las particularidades del proceso mismo de asimilación, por el carácter y las posibilidades de la actividad psíquica de los escolares”.

²² “Abstracciones y generalizaciones sustanciales y los conceptos teóricos que funcionan en el proceso de ascensión de lo abstracto a lo concreto”.

permitiu analisar o desenvolvimento das tarefas de estudo do sistema Elkonin-Davídov relativas ao conceito de número no primeiro ano escolar. O pressuposto é que o conceito de número sob tal abordagem se diferencia do adotado no ensino brasileiro. Neste último, o foco é somente para a contagem discreta, enquanto no sistema Elkonin-Davídov a referência é para a relação entre grandezas. Davídov não desconsidera o número como expressão de quantidade discreta, porém avalia como insuficiente para a compreensão das relações essenciais que o constituem, isto é, em nível teórico.

A Teoria da Atividade de Estudo orienta o procedimento do experimento formativo que, por sua vez, está amparado no método geral genético-causal estudado por Vigotski e seus colaboradores. Na Rússia, o experimento formativo, em sua constituição, passa por diferentes momentos. Nos anos de 1920 a 1950 foi elaborado o método com base nos fundamentos pedagógicos sobre as funções psíquicas, as quais, na concepção de Vigotski, não são inatas, formam-se nas relações sociais constituindo-se em modos gerais de ação. Nesse sentido, Davídov (1988, p. 195) afirma que o desenvolvimento psíquico do homem se realiza “na forma de apropriação dos referidos modelos, apropriação que ocorre no processo de educação e ensino.”²³ A partir dos anos 1960, intensificou-se o estudo em relação à necessidade de melhorar o ensino dos estudantes em idade escolar dos Anos Iniciais. Nos anos de 1970, investigou-se o problema com relação ao ensino, tanto das crianças dos Anos Iniciais quanto das crianças da escola secundária completa e incompleta²⁴, e também em relação às com desenvolvimento mental deficiente. Ao mesmo tempo, nos anos 1960-1970, o problema do Ensino Desenvolvimental foi estudado em crianças pré-escolares (Davídov, 1988).

Puentes (2019) apresenta etapas associadas às mudanças teórico-metodológicas da estrutura da atividade de estudo durante esse longo período de investigação na Rússia. O autor divide o período nas seguintes etapas: etapa de inflexão psicológica (1959-1965); etapa de inflexão filosófica (1966-1980); etapa de inflexão metodológica (1981-1990); etapa de inflexão crítica e emocional (1991-2002); e etapa de inflexão reformadora (2003-2018). Para Puentes (2019), a evolução do conceito de Atividade de Estudo foi identificada a partir das mudanças experimentadas pelo seu conteúdo, sua estrutura e seu processo de formação didática.

Davidov e Márkova (2019, p. 201) afirmam que o experimento formativo, cujas investigações se basearam no desenvolvimento da atividade de estudo, apresenta vantagens, inicialmente, porque não ocorre isoladamente, com temas de algumas disciplinas, “mas com o

²³ “en forma de apropiación de dichos modelos, apropiación que transcurre en el proceso de educación y enseñanza”.

²⁴ Correspondente aos Anos Finais do Ensino Fundamental no Brasil.

conteúdo integral de todas elas, de modo que permitam definir melhor o papel dos diferentes aspectos do processo de aprendizagem com efeito sobre o desenvolvimento.” Outra característica que se apresenta como vantagem está no estudo do processo de aprendizagem prolongado e com as mesmas crianças. De acordo com os autores, o experimento nessas condições qualifica a investigação, porque “permite superar o estudo das características psicológicas particulares de cada aluno e analisar as características integrais de seu desenvolvimento psíquico, das tendências de seu desenvolvimento, das mudanças de uma neoformação a outra.” (Davidov; Márkova, 2019, p. 202). Nesse processo de investigação desenvolvido nos experimentos formativos, ao considerar os aspectos de ascensão do abstrato ao concreto, Davidov (1988, p. 229) aponta alguns resultados gerais da atividade de estudo com crianças em idade escolar na relação entre o ensino e a aprendizagem:

Em primeiro lugar, fundamentar teoricamente a tese sobre o papel orientador do ensino no desenvolvimento mental das crianças; em segundo lugar, mostrar que nem todo ensino tem um significado autenticamente desenvolvidor; em terceiro lugar, estabelecer que fora da formação orientada na atividade de estudo dos escolares, não pode haver um ensino que realmente promova o desenvolvimento; em quarto lugar, determinar algumas condições psicopedagógicas concretas (específicas) de sua realização.²⁵

Esses resultados, oriundos de análises teóricas, confirmam as hipóteses elencadas pelos investigadores do papel essencial da Atividade de Estudo como teoria da aprendizagem na formação do pensamento teórico dos estudantes. Para isso, de acordo com Davidov e Márkova (2019, p. 202), o procedimento investigativo consiste em “garantir o enfoque da atividade com relação ao processo de aprendizagem”. Repkin (2014) contribui ao especificar que a criança está em atividade somente se ela se constituir como sujeito, ou seja, se ela atua de forma consciente e responsável. Nessa perspectiva, a criança não estuda “[...] porque o professor mandou, mas sim porque é necessário para ela, [...] o conceito de estudo ou de aprendizagem e o conceito de atividade de estudo não são coincidentes” (Repkin, 2014, p. 90). Outra questão consiste no foco essencial da análise que se centra na unidade dos componentes da atividade de estudo, “tarefas de estudo, ações de estudo, ações de controle e avaliação” (Repkin, 2014, p. 202). Em terceiro lugar, o resultado da investigação pressupõe incluir o olhar especial da atividade de estudo para o desenvolvimento intelectual – o pensamento teórico – e

²⁵ “En primer lugar, fundamentar experimentalmente la tesis sobre el papel rector de la enseñanza en el desarrollo mental de los niños; en segundo lugar, mostrar que no toda enseñanza tiene una significación auténticamente desarrollante; en tercer lugar, establecer que fuera de la formación orientada en los escolares de la actividad de estudio no puede haber una enseñanza que verdaderamente impulse el desarrollo; en cuarto lugar, determinar algunas condiciones psicopedagógicas concretas de su realización”.

do aspecto moral – a motivação. Por último, incluir a necessidade de estabelecer relação entre o aspecto da atividade e o aspecto pessoal no processo de desenvolvimento da criança. Todavia, ponderam Davidov e Márkova (2019, p. 203), nas primeiras etapas da pesquisa ficou estabelecido que “a atividade no geral, e Atividade de Estudo, em particular, não é um fim em si mesma, pois são pré-requisitos para o desenvolvimento intelectual e moral da criança, de sua esfera intelectual e motivacional.”

Assim, a pesquisa de Davidov e Márkova (2019, p. 202) fundamentou-se em categorias de análise como o conteúdo dos termos usados na psicologia pedagógica, “[...] ‘assimilação’, ‘desenvolvimento’, ‘aprendizagem’ [...]”, e no conteúdo de novos conceitos, como “[...] ‘pensamento teórico’, ‘reflexão’, ‘tarefa de estudo’.” A análise teórica e experimental da categoria pensamento teórico, foco essencial da atividade de estudo, resultou na compreensão de que tal pensamento surge quando a criança vê a necessidade de “estabelecer um modo generalizado de orientação numa determinada área do conhecimento; construir um modo generalizado de resolução de uma vasta gama de problemas” (Davidov; Márkova, 2019, p. 203). As pesquisas comprovaram que, nas salas de aulas experimentais nas quais foram realizadas as atividades de estudo, a quantidade de crianças capazes de pensar teoricamente aumentou de forma significativa, enquanto naquelas em que o ensino se caracterizava pela observação e comparação das propriedades externas dos objetos, o pensamento que predominava era o empírico.

De acordo com Araujo e Moraes (2017), para as pesquisas em Educação as sínteses metodológicas produzidas pela Teoria Histórico-Cultural são elementos gerais do método investigativo, mas não se constituem “a própria chave metodológica para a sistematização do método da pesquisa em Educação.” (Araujo; Moraes, 2017, p. 49). Isso porque o objeto da Psicologia e o da Educação se diferenciam, ao mesmo tempo em que possuem um elo de interdependência. Desse modo, não se nega a contribuição do método genético experimental de Vigotski para a pesquisa educacional, e sim se buscam contribuições da Teoria Histórico-Cultural para o objeto das pesquisas em educação escolar. Nessa perspectiva de investigação, busca-se “a relação de interdependência entre o conhecimento psicológico e a prática pedagógica” (Araujo; Moraes, 2017, p. 51).

Nesse sentido, o objeto das pesquisas em Educação refere-se ao fenômeno geral de estudo no âmbito da educação escolar, ou seja, a “Atividade Pedagógica” (Araujo; Moraes, 2017, p. 50). Em consonância com o referido objeto, o motivo da pesquisa educacional está direcionado para “a compreensão do modo particular a partir do qual a Atividade Pedagógica contribui para a formação da personalidade humana” (Araujo; Moraes, 2017, p. 51). O

pressuposto é que a personalidade não é biológica; logo ela se forma, no indivíduo, como um reflexo do desenvolvimento social, na apropriação da cultura humana. Na Atividade Pedagógica, o trabalho educativo sistematizado possibilita a apropriação, pelo indivíduo, de um tipo de conhecimento que prioritariamente deve ser de caráter científico. Tal apropriação se configura na Atividade Pedagógica com vistas à formação da personalidade e ao desenvolvimento do pensamento teórico.

Na avaliação de Serconek (2018, p. 109), os experimentos, conforme o método genético experimental, centram-se na gênese e no desenvolvimento das funções mentais superiores “com a preocupação de explicar o processo de elaboração dessas funções e não apenas descrever os resultados e a influência da cultura na natureza do desenvolvimento dos processos cognitivos.”

É nesse contexto que se insere o objeto de investigação deste estudo, qual seja, a organização do ensino de matemática com apoio nos fundamentos do Ensino Desenvolvidor formulados por Davídov, Elkonin, Slobódchikov, Márkova e demais colaboradores, e a possibilidade de os estudantes do primeiro ano escolar do Ensino Fundamental realizarem as tarefas de estudo do sistema Elkonin-Davídov de ensino e se apropriarem do conteúdo teórico. A nossa investigação se configura em um Experimento Didático organizado a partir da estrutura do experimento formativo desenvolvido nas escolas da Rússia (Davídov, 1988).

A ideia essencial que orienta o experimento formativo é que o processo de ensino-aprendizagem, planejado conscientemente em situações específicas, qualifica a aprendizagem e o desenvolvimento integral dos estudantes, fazendo-os entrar em ação investigativa (Aquino, 2017) que lhes possibilita acompanhar e realizar as tarefas de estudo referentes ao conceito de número do sistema Elkonin-Davídov. Na sequência, apresentamos os procedimentos metodológicos, mais especificamente a descrição do nosso Experimento Didático com a delimitação dos sujeitos participantes, a seleção e organização das tarefas, e a coleta dos dados.

1.2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

A descrição do Experimento Didático, enfoque desta seção, tem o objetivo de apresentar os critérios para a escolha dos sujeitos, o planejamento das tarefas de estudo e o modo como os dados foram apreendidos para a análise.

Na análise não consideramos todas as tarefas particulares de estudo desenvolvidas. Extraímos das gravações (vídeos) do experimento os episódios de ensino constituídos pelas cenas que, conforme nossa compreensão, melhor explicitam se é possível que estudantes

brasileiros se apropriem do conteúdo das tarefas de estudo alusivos ao conceito de número, para clareza da exposição (Moura, 2004).

Assim, julgamos relevante que a escolha da escola para desenvolver o Experimento Didático fosse aquela em que o professor titular tivesse conhecimento do referido modo de organização do ensino. Vislumbramos essa seleção com a aprovação de um projeto de extensão submetido em processo seletivo pelo edital 358/2020, promovido pela Diretoria de Extensão, Cultura e Ações Comunitárias (PROACAD) da Universidade do Extremo Sul Catarinense (UNESC). O objetivo era a formação de professores do primeiro e segundo anos do Ensino Fundamental, na área de Matemática, com base no sistema de ensino Elkonin-Davíдов.

Assim, realizamos contato com os gestores da Secretaria de Educação do município de Içara. O propósito desse encontro centrou-se na exposição das pretensões do desenvolvimento do referido projeto de extensão com professores da rede municipal de ensino de Içara-SC.

O projeto de extensão teve a finalidade de contribuir para a formação de professores que lecionam a estudantes dos primeiros e segundos anos escolares, por meio do estudo e desenvolvimento da proposição do ensino de matemática do sistema Elkonin-Davíдов. O grupo que organiza e desenvolve a formação com os professores da rede pública de ensino do município de Içara é composto por três docentes, das quais uma é a pesquisadora desta investigação e duas são acadêmicas dos cursos de Pedagogia e de Matemática da UNESC.

No primeiro encontro, ocorrido em abril de 2021, foi lançado o convite aos professores para participarem de um Experimento Didático. A escolha da escola e dos estudantes foi decorrente do interesse manifestado por uma professora participante do curso de extensão. A escola, da periferia urbana, é da rede municipal de Içara, cidade localizada no sul de Santa Catarina. No período da realização do experimento, ela possuía 252 alunos em 11 turmas do primeiro ao quinto ano, e 285 em 11 turmas do sexto ao nono ano, totalizando 537 estudantes matriculados nos períodos matutino e vespertino. Além da professora, a direção da escola também manifestou interesse pela pesquisa e autorizou sua realização com a assinatura de uma carta de aceite.

Na sequência, efetuamos o cadastro na Plataforma Brasil e a submissão da documentação necessária para análise pelo Comitê de Ética em Pesquisa da Unesc. Com a aprovação do Comitê de Ética, solicitamos à direção da escola um espaço na reunião de pais/responsáveis dos estudantes para expor nossa pretensão de realizar a pesquisa com seus filhos e filhas por meio de um Experimento Didático. Todos os presentes manifestaram interesse na proposta. Solicitamos a leitura e a assinatura do Termo de Consentimento Livre e

Esclarecido (TCLE). Alguns pais/responsáveis não compareceram à reunião. A esses a professora encaminhou o documento TCLE, pelos estudantes, para que fosse assinado e devolvido posteriormente. Os estudantes, após consentimento dos pais/responsáveis, assinaram o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE).

O Experimento Didático foi realizado em uma classe do primeiro ano do Ensino Fundamental, no turno matutino, no período de junho a dezembro de 2021. A classe inicialmente era composta por vinte e um estudantes. No final do segundo e início do terceiro mês da realização do experimento, ingressaram três estudantes. Outra questão a registrar é que doze desses estudantes acompanharam o experimento presencialmente desde o início, os outros oito participaram a distância, em estudo doméstico, mediante o envio das tarefas impressas. Dois estudantes inseriram-se durante o percurso por transferência de outra escola, e uma ingressou na quinta semana do experimento, com a especificidade de que nunca havia frequentado a escola, nem mesmo na Educação Infantil. A maioria não era infrequente. Os pais ou responsáveis eram trabalhadores rurais, funcionários do comércio local ou autônomos. Alguns deslocavam-se para a escola utilizando transporte escolar gratuito disponibilizado pela prefeitura do município. Suas condições socioeconômicas, nem otimizadas, nem demasiadamente empobrecidas, eram semelhantes à maioria dos estudantes das escolas públicas da região sul de Santa Catarina. Vale lembrar que a escolha da classe não ocorreu por suas características específicas, mas pelo aceite da professora titular que participava de um projeto de formação continuada.

Nossa pretensão era começar o Experimento Didático no início do ano letivo, mas dadas as restrições da pandemia Covid-19, tivemos alguns impedimentos que atrasaram os encaminhamentos para a autorização da pesquisa pelo Comitê de Ética. As aulas aconteceram semanalmente, com a duração de 3h/aula (às quartas-feiras, 18 encontros, no período de junho a setembro). De outubro a dezembro, os encontros (17) ocorreram às quartas e sextas-feiras, com 2h/aula em cada dia, num total de 35 encontros e 88h/aula de 45 minutos cada. A mudança de 1 para 2 encontros semanais se fez necessária ao observamos que as crianças demonstravam cansaço e desmotivação na resolução das tarefas. Com a mudança, percebemos maior envolvimento e disposição dos estudantes. Os dados do experimento se constituíram pelo registro de todas as aulas por meio de fotos e gravação de vídeos por um bolsista, compondo um rico acervo de investigação. As transcrições dos vídeos foram realizadas também por um bolsista. A classe era composta por vinte e um estudantes, mas no período de junho a julho, devido às normas de distanciamento decorrentes da pandemia Covid-19, treze deles frequentavam as aulas presenciais e oito recebiam o material impresso retirado na escola pelos

pais/e ou responsáveis. A partir de agosto, as aulas passaram a ser presenciais para todos os estudantes. Aos alunos que não frequentavam as aulas presenciais, além do material impresso, foram disponibilizadas videoaulas produzidas pela pesquisadora. As videoaulas tinham a finalidade de orientar os pais ou responsáveis na resolução das tarefas impressas do sistema Elkonin-Davídov por esses estudantes. No entanto, não foi possível analisar as apropriações desses estudantes do mesmo modo que as dos que participaram das aulas presenciais.

A nossa participação no Experimento Didático como pesquisadora ocorreu em todo o processo de ensino: no planejamento, na organização das tarefas, na preparação do material (*kits* com recortes de papel, recipientes) e no desenvolvimento com os estudantes²⁶. As tarefas foram apresentadas e discutidas no *datashow* por meio de *slides* ou impressas. Em alguns momentos, no desenvolvimento das tarefas de estudo, foi necessário criarmos outras tarefas particulares. A professora da turma esteve presente na maioria das aulas, mas não participou de forma efetiva no desenvolvimento do Experimento Didático. Nas apresentações das falas dos sujeitos, estudantes do primeiro ano do Ensino Fundamental envolvidos na pesquisa, utilizamos codinomes para preservar suas identificações

As tarefas particulares de estudo (145), desenvolvidas com os estudantes, foram retiradas ou adaptadas dos livros didáticos do sistema de ensino russo, (Gorbov; Mikulina, 2001), (Gorbov; Mikulina, 2011) e do livro de orientação ao professor (Gorbov; Mikulina; Savieliev, 2008). Os livros desse sistema são organizados em dez capítulos. Cada um é constituído por tarefas particulares referentes ao teor conceitual em elaboração. No Experimento Didático de nosso estudo, desenvolvemos as tarefas correspondentes aos seis primeiros capítulos, os quais abordam os seguintes conceitos matemáticos: cor, forma, tamanho e posição; noções geométricas de linha reta, linha curva, ponto e segmento; grandezas comprimento, área, volume e massa; introdução ao conceito de número e reta numérica.

Na orientação para o professor, os autores deixam claro que os conceitos matemáticos são estudados de acordo com os princípios do Ensino Desenvolvidamental. O objetivo é que o processo se constitua por um trabalho amplo de aprendizagens dos estudantes

²⁶ Vale ressaltar que os conceitos matemáticos contemplados no sistema Elkonin-Davídov para o primeiro ano escolar são divergentes dos elencados pela escola onde o experimento foi realizado. Por exemplo, o conceito de número no Ensino Desenvolvidamental contempla, por meio da relação entre as grandezas, o pensamento do número real (no primeiro ano pelo menos o natural e o racional), enquanto na escola brasileira somente o natural, pela contagem de objetos soltos. No currículo tradicional, as ideias geométrica, algébrica e aritmética são fragmentadas. Em contrapartida, no sistema de Elkonin-Davídov essas ideias são inter-relacionadas. Nossa avaliação é que o Ensino Desenvolvidamental abrange uma quantidade maior de conceitos do que os que são propostos pela escola da realização do experimento.

que consistirá na formulação e resolução de um sistema de tarefas inter-relacionadas em todo o percurso formativo na Educação Básica (Gorbov; Mikulina; Savieliev, 2008).

As tarefas desenvolvidas no Experimento Didático seguiram a orientação do sistema Elkonin-Davídov, cuja finalidade é a assimilação do conceito de número real ao longo de todo o Ensino Fundamental (natural, racional, inteiro, irracional) com base na relação geral da matemática, as grandezas. Assim, no primeiro ano escolar do Ensino Fundamental, o conceito de número inicialmente é estudado por meio do desenvolvimento da ação investigativa. No primeiro capítulo, pela análise das características qualitativas de figuras e objetos pela cor, forma, tamanho e posição. Essas tarefas particulares são conduzidas pelo professor para que os estudantes identifiquem a figura pensada por ele ou pelos colegas. O elemento essencial está na necessidade de uma nova comparação de uma tarefa para a outra. As primeiras contemplam as características cor e forma. Por exemplo, o professor apresenta diversas figuras ou recortes de formas diferentes com a mesma cor. Os estudantes, por meio de uma única pergunta, identificam aquela que o professor pensou. Qual é a cor? É uma pergunta inconveniente, pois todas têm a mesma cor, a melhor opção é perguntar pela forma. Outras tarefas com o mesmo teor investigativo são propostas, em cada uma é criada uma nova necessidade, sem deixar de lado as características anteriores. Ou seja, são apresentadas figuras ou objetos com formas, cores e tamanhos diferentes, além da posição. Pelo tamanho, a síntese a ser realizada é que só é possível determinar o tamanho de uma figura (grande ou pequena) na relação com outra.

Da impossibilidade de expressar numericamente o resultado da comparação das figuras ou objetos pelas qualidades que não admitem “graus diferentes de intensidade” (Caraça, 2003 p.108), maior ou menor, surge a necessidade da introdução de grandezas (comprimento, área, volume, capacidade, massa, entre outras) com atributos de qualidades que permitem a medição, a manifestação da quantidade. Conforme Caraça (2003, p. 109), “toma-se quantidade como ‘aquilo que é objecto de medida’ ou, pelo menos, aquilo que, por natureza, admite ser medido, ainda que se não possa representá-lo efectivamente por um número”. Na comparação de duas figuras pela característica forma só é possível afirmar que são diferentes, não há como expressar essa diferença e dizer que uma é “mais” ou “menos” que a outra em relação à forma. Podemos dizer o mesmo para a cor e a posição. A comparação pelo tamanho, apesar de permitir a relação grande (maior) ou pequeno (menor), não é expressa em um resultado numérico. “Consideramos a quantidade como *atributo* da qualidade e não como um *objecto*” (Caraça, 2003, p. 109).

Por isso, no segundo capítulo do livro de referência para orientação do professor e do livro didático para os estudantes, o foco está no estudo das grandezas. Para tanto, são propostas aos estudantes situações de análises que se referem às noções geométricas de linha reta, linha curva, ponto e segmento. Dessas noções geométricas decorrem outros tipos de linhas, as quebradas abertas e fechadas, que, por sua vez, remetem à discussão dos modos de comparação das grandezas. Por exemplo, para comparar a grandeza comprimento, a atenção dos estudantes é voltada para a comparação de recortes de papel. A síntese a ser elaborada é que os recortes devem ser aproximados. A grandeza área é comparada pela sobreposição de suas superfícies. O volume e a capacidade são pela inserção, por exemplo, quando possível, de uma caixa dentro de outra. No caso de dois recipientes possuírem a mesma base, o que impossibilitaria a introdução de um dentro do outro, são propostas situações em que é colocado líquido em um deles e depois esse líquido é transferido ao outro. É importante ressaltar que o sistema de ensino Elkonin-Davídov não desconsidera as grandezas discretas. Além das tarefas que contemplam as grandezas contínuas, também é proposta a comparação entre as quantidades (grandezas discretas).

O modo correto de comparar as grandezas leva à introdução das primeiras relações de igualdade e desigualdade entre grandezas de mesma espécie (Rosa, 2012). A representação propriamente dita dessa relação, cuja finalidade é a generalização do modelo universal do conceito de número, é antecedida por uma relação de inter-relação pelos aspectos: objetual, gráfico e literal. O aspecto objetual, da comparação de igualdade e desigualdade, é dado por meio da apresentação de tiras de papel. As crianças analisam figuras e objetos por todas as propriedades e grandezas já estudadas e expõem suas sínteses mostrando tiras de dimensões iguais para expressarem que a comparação resulta na igualdade da propriedade ou grandeza analisada, e tiras diferentes se a análise remete à desigualdade. O aspecto gráfico também é contemplado por tarefas que objetivam a representação da igualdade e desigualdade, mas agora como uma forma de representação escrita no papel. O professor dialoga, questionando: não é mais conveniente desenhar segmentos ao invés de tiras? Assim, as tarefas particulares se constituem na substituição das tiras de papel pelos segmentos, de forma gradativa. O movimento de igualdade e desigualdade continua no processo investigativo, o desafio consiste em propiciar o movimento de acrescentar e retirar líquido de dois recipientes desiguais para igualá-los. Ao mesmo tempo que o movimento é realizado nos recipientes acrescentando líquido ao recipiente com menor volume para se igualar ao que tem mais, ocorre a modificação do tamanho do segmento menor para se igualar ao maior. Do mesmo modo, retirar líquido do recipiente para igualar ao que tem menos e proceder de modo análogo à retirada de uma parte

do segmento maior para se igualar ao menor. Aqui se inicia o processo que visa colocar os estudantes em um movimento de pensamento para a compreensão da diferença entre os valores da grandeza que foram acrescidos ou retirados, ou seja, a diferença entre as grandezas; no caso do exemplo acima, de volumes. Essa diferença pode ser quantificada? Podemos representar numericamente o valor da diferença? Esse é o propósito da organização desse sistema de ensino, ou seja, conceituar teoricamente o número na relação entre as grandezas.

A alteração das grandezas, no movimento objetal e gráfico, remete à representação do aspecto literal. A diferença é concebida de forma genérica pelos símbolos: = (igual), $\neq$ (diferente), < (menor) e > (maior). As comparações, por exemplo, de dois recortes de mesmo comprimento da altura são feitas pelo registro $A = B$. A desigualdade, no caso de os recortes possuírem comprimentos das larguras diferentes, é identificada por $C \neq D$. Por serem diferentes, remetem à análise dos tamanhos, um em comparação com o outro, maior ou menor: $C > D$ ou $C < D$.

O Experimento Didático segue conforme o sistema Elkonin-Davídov para outro momento crucial, que é o de identificar a necessidade da unidade de medida e da expressão do modelo por duas fórmulas matemáticas articuladas pelo princípio multiplicativo: $\frac{A}{c} = n$ ou $A = cn$ (ROSA, 2012). A unidade de medida é o elemento mediador quando a comparação direta com as grandezas não possibilita chegar a um resultado concreto, ou seja, somente a identificação de que uma grandeza é maior ou menor que outra não é suficiente.

O processo de apropriação do número é ininterrupto, nessa etapa ainda é sem o símbolo (algarismos numéricos 1, 2, 3, ...). Surge primeiro na forma de um esquema de seta, cujas extremidades são indicadas por letras, uma representando a unidade de medida, e outra a grandeza que será medida. O processo de medição de grandezas de mesma espécie (comprimento ou área ou volume, entre outras) é executado ao verificar quantas vezes a unidade de medida de uma determinada grandeza cabe na mesma grandeza que está sendo medida. O resultado é expresso por riscos na seta e por segmentos que representam a medição, ainda por letras (Damazio; Cardoso; Santos, 2014).

Os segmentos subsidiam a construção da reta numérica em continuidade da representação do processo de medição, porém com o desenho de uma linha reta em que é indicado seu início por meio de um ponto (ou traço na vertical) e o sentido. Por exemplo, para medir o volume de líquido de um recipiente é usada uma medida de volume unitária livre (um copo). O envolvimento nas tarefas permite aos estudantes, de acordo com Damazio, Cardoso e Santos (2014, p. 191), a compreensão “de que todo número é composto por certa quantidade de

unidades, representadas na reta numérica por certa quantidade de passos”. Salientamos que as análises das tarefas particulares desenvolvidas no Experimento Didático serão descritas em um capítulo específico. Entretanto, antes da análise, consideramos relevante apresentar os princípios do Ensino Desenvolvimental, base teórica que fundamenta nossa pesquisa.

2 PRINCÍPIOS TEÓRICOS DA ORGANIZAÇÃO DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL

O objetivo deste capítulo centra-se na exposição das condições do modo de organização do ensino escolar que, segundo Davidov e Slobódchikov (1991), caracteriza-se por um novo pensamento pedagógico com princípios que visam a apropriação de conteúdos teóricos pelos estudantes. Para tanto, apresentaremos os subsídios teóricos que diferenciam o ensino tradicional, predominante nas escolas brasileiras, do Ensino Desenvolvidor. Tomamos como referências centrais para o estudo as produções de Davidov (1988), Davidov e Slobódchikov (1991) e Davydov (2017).

Vassili Vassilievitch Davidov é um dos principais representantes dos estudos sobre o Ensino Desenvolvidor. É consenso que os fundamentos psicológicos da Teoria Histórico-Cultural de Vigotski são a principal referência na organização desse sistema de ensino. Davidov (1988) afirma que um dos problemas fundamentais da psicologia é encontrar o fio condutor que une o desenvolvimento intelectual dos estudantes, o papel da formação escolar e a organização do ensino.

2.1 PRINCÍPIOS DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL

Para Davidov (1988), o interesse dos psicólogos no estudo para encontrar o elo que unifica o desenvolvimento das funções psicológicas superiores dos alunos, a formação propiciada pelas instituições escolares e a organização do ensino, no contexto russo, relacionava-se, em seu sentido prático sociopedagógico, com a exigência da revolução técnico-científica na Rússia, ou seja, a formação de um indivíduo com alto nível de conhecimento cultural geral e profissional, o que pressupõe o desenvolvimento, em particular, das capacidades intelectuais. Com essa expectativa, os pedagogos teóricos da Rússia buscaram estabelecer uma educação escolar com princípios que superassem e substituíssem a escola tradicional, que não mais satisfazia as demandas daquela sociedade.

De acordo com Davidov (1988), o sistema de ensino escolar se estrutura com base na apropriação, pelos estudantes, do conteúdo dos assuntos estudados. Porém, os estudos sobre a educação escolar no contexto da educação na ex-URSS, sob o olhar da Teoria Histórico-Cultural, indicam que o modo de organização do ensino predominante à época – o tradicional – tem base na lógica formal. Ilyenkov (2007, p. 22) destaca que, em vista da superação desse modelo, o papel da escola deveria dar condições para o desenvolvimento da capacidade de

“pensar de forma independente”. Nesse sentido, o autor sustenta que a lógica formal, diferente da dialética, produz o ensino centrado no aspecto verbal que camufla “contradições” em vez de resolvê-las.

A lógica formal se fundamenta em princípios do conhecimento empírico, os quais orientam o que Davídov (1988) denomina de ensino tradicional ou pedagogia estancada. De acordo com Davídov e Slobódchikov (1991), analisar criticamente os princípios didáticos da escola tradicional – *da sucessão; da acessibilidade; do caráter consciente; e do caráter visual, concreto* – é o meio eficaz para a organização de novos princípios para a pedagogia colaborativa, que se assenta nos seguintes princípios: *caráter novo do conhecimento; educação que desenvolve; atividade e caráter objetal*.

O *princípio da sucessão* se embasa na ideia de que a estruturação das disciplinas escolares nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, por exemplo, mantém o vínculo com os conhecimentos cotidianos que os estudantes receberam antes de entrar na escola. Vigotski (2004, p. 524) denomina os conceitos surgidos no cotidiano da vida das crianças de espontâneos. Para ele, “o fato de que a criança adquiria esse conceito no sistema de conhecimentos científicos na escola nada introduzia de novo no destino do desenvolvimento da criança”. Para Davídov (1988), o conhecimento que tem sua origem na vida cotidiana desenvolve o pensamento empírico. Com isso, argumenta, “o cultivo, na escola, do pensamento empírico é uma das causas objetivas de que o ensino escolar influencia fracamente no desenvolvimento psíquico das crianças, no desenvolvimento de suas capacidades intelectuais.”²⁷ (Davídov, 1988, p. 6).

Por consequência, com o desenvolvimento do pensamento empírico não há mudança significativa no aprofundamento teórico dos conceitos de um nível de ensino para o outro. As alterações ocorrem, especificamente, na quantidade (volume) de conhecimentos transmitidos aos estudantes. Há carência da especialidade qualitativa dos conhecimentos, que se caracteriza pelas mudanças internas peculiares “do conteúdo e da forma” do ensino (Davídov; Slobódchikov 1991, p. 127).

Nesse sentido, Davydov (2017) afirma que a sucessão dos conhecimentos tem que ser conservada em qualquer ensino, porém, ao entrar na escola regular, os estudantes precisam perceber o *caráter novo* e a diferença das apropriações adquiridas na pré-escola. O foco do ensino é para os conhecimentos científicos em detrimento dos cotidianos. Desse modo, desde os primeiros anos escolares (níveis iniciais), de acordo com esse princípio, gera-se o processo

²⁷ “El cultivo, en la escuela, del pensamiento empírico es una de las causas objetivas de que la enseñanza escolar influya débilmente en el desarrollo psíquico de los niños, en el desarrollo de sus capacidades intelectuales”.

de formação nos estudantes da atividade de estudo, que ocorre pela apropriação de conhecimentos científicos.

A atividade de estudo se constitui num processo, porque antes de entrar na escola o estudante realiza atividades de sua preferência, como a brincadeira de papéis sociais, por exemplo. Assim, as obrigações da vida escolar podem ser interpretadas como aquelas que atrapalham a realização das atividades preferidas. De acordo com Elkonin (2019a, p. 160), “não se pode imaginar que logo depois de começar a vida escolar, a Atividade de Estudo ocupará o lugar principal na vida da criança.” Prestes, Tunes e Nascimento (2013, p. 49) adotam as palavras de Vigotski ao se referirem ao desenvolvimento psicológico das crianças pequenas para explicitar que esse processo existe somente “quando há atividade por parte do indivíduo”, essencial ou mais importante de acordo com cada faixa etária, denominada por Vigotski de atividade-guia. Com o mesmo pressuposto, Davídov (1988) denomina de atividade orientadora aquela que caracteriza um período qualitativamente específico da vida do homem. Portanto, na transformação de uma atividade para outra é que surgem as neoformações psicológicas que, por sua vez, configuram a unidade do desenvolvimento psíquico das crianças.

A atividade guia da brincadeira de papéis sociais da criança pré-escolar antecede a atividade de estudo, a escolar. Prestes, Tunes e Nascimento (2013, p. 50), ao se referirem à atividade, sustentam que “é um processo que se transforma, que origina novas necessidades e motivos, gera outras atividades, estruturalmente novas, e propicia a emergência de novas formações psíquicas.”

Outro princípio a ser superado, quando o objetivo é organizar as disciplinas escolares e criar um novo pensamento pedagógico, é o da *acessibilidade*. O ensino fundado na perspectiva da psicologia evolutiva parte do princípio de que existe uma idade certa, caracterizada pelos níveis inferiores (Anos Iniciais) e superiores (Anos Finais e Ensino Médio), em que o conhecimento é de certo modo acessível. Para Davídov (1988), em conformidade com Vigotski, o posicionamento de Jean Piaget em relação à psicologia teórica e à prática pedagógica tem base no princípio da acessibilidade ao defender que desenvolvimento e ensino são processos independentes. Nesse caso, para Vigotski (*apud* Davídov, 1988, p. 49), “o desenvolvimento da criança se apresenta como um processo subjugado às leis naturais e que transcorre em forma de maturação; o ensino se compreende como utilização puramente externa das possibilidades que surgem no processo de desenvolvimento”²⁸. Conforme Davídov e

²⁸“el desarrollo del niño se presenta como un proceso sometido a leyes naturales y que transcurre en forma de maduración; la enseñanza se comprende como utilización puramente externa de las posibilidades que surgen en el proceso de desarrollo”.

Slobódchikov (1991, p. 127), outro aspecto a ser analisado está no entendimento de que “o ensino somente utiliza as possibilidades psíquicas já formadas e existentes na criança.”²⁹ São propostos aos estudantes somente os conhecimentos que eles podem compreender. Dito de outro modo, os conhecimentos se manifestam como aqueles já assimilados. Em contraposição a esse pensamento, “*o ensino deve ser orientado não para o ontem, mas para o amanhã do desenvolvimento infantil.*”³⁰ (Vigotski, 2001, p. 242).

O princípio *da acessibilidade* objetivou, na prática do ensino, a separação e a oposição entre o desenvolvimento e o ensino (Davídov, 1988). Esse princípio se contrapõe à ideia vigotskiana presente no novo pensamento pedagógico de que a educação promove o desenvolvimento. Portanto, a organização do ensino escolar que visa criar nos estudantes possibilidades e iniciativas para o desenvolvimento psíquico tem urgência na transformação desse princípio para o da *educação que desenvolve*. Davydov (2017, p. 219) afirma que fundamentalmente “tratar-se-á de construir, de forma ativa e compensatória, qualquer elo da psique ausente ou insuficientemente presente nas crianças, mas que seja indispensável para alcançar um alto nível no trabalho com os alunos.”

O Ensino Desenvolvimental, com base no *princípio que desenvolve*, fundamenta-se na tese de que o desenvolvimento psíquico da criança, desde os Anos Iniciais, é mediado pela educação e pelo ensino. Um dos conceitos da Teoria Histórico-Cultural introduzidos por Vigotski mais usados e debatidos no meio educacional é o de “zona de desenvolvimento imediato”³¹ (ZDP³²) (Vigotski, 2001, p. 327). Para Davídov (1988), é a ZDP que revela a relação interna entre o ensino e o desenvolvimento. Ela pressupõe a formação de particularidades psíquicas ainda inexistentes na criança. As tarefas e ações que a criança realiza, inicialmente sob orientação e em colaboração, formam a zona de desenvolvimento imediato. Tais tarefas e ações serão realizadas depois de forma independente. O *princípio que desenvolve* se diferencia teoricamente do princípio *da acessibilidade*, porque o primeiro amplia as possibilidades para o desenvolvimento psíquico e físico, quando permite ao estudante a apropriação autônoma, enquanto o segundo não possibilita esse desenvolvimento ao ofuscar sua própria compreensão por trás de um ensino dependente.

²⁹“La enseñanza sólo utiliza las posibilidades psíquicas del niño ya formadas y existentes”.

³⁰“la enseñanza debe orientarse no al ayer, sino al mañana del desarrollo infantil”.

³¹ “zona de desarrollo próximo”.

³² Usaremos a sigla ZDP por ela já estar consolidada, na educação brasileira, em referência à denominação Zona de Desenvolvimento Proximal, ainda que essa expressão tenha sido traduzida mais recentemente como “Zona de Desenvolvimento Imediato” (Vigotski, 2001, p. 350).

Em continuidade ao debate dos princípios de orientação da pedagogia estancada e da pedagogia colaborativa, Davídov e Slobódchikov (1991) discutem o *caráter consciente*. Este, segundo a descrição que os autores realizam dos fundamentos do ensino tradicional, compreende que todo conhecimento é proporcionado aos estudantes por abstrações verbais claras, e cada abstração deve estar relacionada com uma imagem sensorial e precisa. As definições são dadas *a priori*, na maioria das vezes com exemplos práticos, o que “fecha o círculo dos conhecimentos que a pessoa adquire na relação entre os significados das palavras e seus correlatos sensoriais” (Davydov, 2017, p. 216). Com a finalidade de superação do *caráter consciente*, os autores apresentam o *princípio da atividade*. Esse princípio considera que os conhecimentos científicos, organizados em situações de ensino pela educação escolar, ao invés de serem dados prontos, têm suas condições de origem reveladas pelos próprios estudantes, em movimento investigativo. De acordo com Davídov e Slobódchikov (1991, p. 131), “isto é possível unicamente quando as crianças efetuam aquelas transformações específicas dos objetos, graças às quais em sua própria prática escolar se modelam e recriam as propriedades internas do objeto que se convertem em conteúdo do conceito.”³³ Para os autores, o *princípio da atividade* na educação possibilita ir além do “sensualismo unilateral, do nominalismo e, também, do associacionismo”. Assim, o problema mais comum do ensino tradicional, da obrigatoriedade de atrelar os conhecimentos com a aplicação prática direta, tende a desaparecer. A resolução de tarefas práticas pelos indivíduos é garantida, na perspectiva do *princípio da atividade*, pela apropriação autêntica de conceitos teóricos que sustentam modos gerais de ação.

O princípio do *caráter visual, concreto*, outro da pedagogia estancada, poderia ser considerado banal se não fosse tão cruel para o desenvolvimento mental dos estudantes como é na realidade. Davídov e Slobódchikov (1991) enumeram os seguintes aspectos para justificarem tal afirmação: 1) a base do conceito está na comparação sensorial das coisas; 2) a comparação separa as características semelhantes e comuns; 3) a fixação do que é comum é dada pela palavra, as características externas constituem seu verdadeiro significado; 4) o estabelecimento das dependências de gênero e espécie entre os conceitos constitui a tarefa principal do pensamento, cuja fonte é a sensibilidade. A questão agravante desse princípio está no fato de que a ênfase nas propriedades externas predominantes da base sensorial dos conceitos os reduz aos aspectos meramente empíricos que, por sua vez, substanciam o pensamento racional discursivo-empírico (Davydov, 2017).

³³ “Esto es posible únicamente cuando los niños efectúan aquellas transformaciones específicas de los objetos, gracias a los cuales en su propia práctica escolar se modelan y recrean las propiedades internas del objeto que se convierten en contenido del concepto”.

O princípio do *caráter objetal* opõe-se ao do *caráter visual, concreto*, uma vez que pressupõe o ensino por meio de ações com objetos para revelar o conteúdo teórico (substancial) do conceito e representá-lo por meio de modelos conhecidos, que podem ser materiais, gráficos e verbais. Sendo assim, os princípios de caráter visual e caráter objetal se diferenciam em sua essência. Enquanto o visual dita a passagem do particular ao geral, o objetal “fixa a possibilidade e a conveniência de que os alunos revelem o conteúdo geral de certo conceito, como base para identificação ulterior de suas manifestações particulares” (Davydov, 2017, p. 220).

Para Davydov (2017), os princípios elencados do ensino tradicional, seu conteúdo e seu método são eficazes no desenvolvimento do pensamento empírico, mas não responderiam mais às exigências técnico-científicas da sociedade no período em discussão. Os pedagogos teóricos da época da Revolução Russa empenhavam-se em definir uma educação escolar pública que substituísse os princípios da tradição da escola – caracterizada por objetivos sociais individualistas – por possíveis princípios para a formação harmoniosa em todas as dimensões: o coletivismo, a solidariedade, o companheirismo, a civilidade, o caráter firme, a vontade, o amor ao trabalho e a firmeza, a iniciativa e a independência, que incluem o desenvolvimento da personalidade coletiva (Davydov; Slobódchikov, 1991). O pressuposto, de acordo com a Teoria Histórico-Cultural, é que a superação dos princípios do ensino tradicional reside em conceber a educação escolar com a compreensão inicial de que é “pela atividade que o homem se desenvolve” (Longarezi; Franco, 2013, p. 94).

Nesse sentido, nossa pesquisa se apoia nos fundamentos da Teoria da Atividade, principalmente nos estudos iniciais de Vigotski e na continuidade desses estudos por Leontiev. Desse modo, no próximo item trataremos da Teoria da Atividade no contexto da Teoria Histórico-Cultural e do Ensino Desenvolvidor.

2.2 ATIVIDADE GUIA E ATIVIDADE DE ESTUDO

Para compreender o desenvolvimento do nosso Experimento Didático com estudantes do primeiro ano escolar, julgamos importante esclarecer as contribuições da Teoria Histórico-Cultural sobre a atividade guia relacionada às etapas do desenvolvimento psíquico humano. Também destacamos a relevância na compreensão do processo que constitui a atividade guia de estudo do período escolar dos sujeitos envolvidos em nosso experimento.

A principal contribuição para a Teoria Histórico-Cultural, deixada por Aleksei Nikolaevitch Leontiev, foi o desenvolvimento metodológico da Teoria da Atividade

(Longarezi; Franco, 2013, p. 82). As autoras salientam ainda que o aporte principal “está na relação de interdependência que estabelece entre a atividade humana e o desenvolvimento do homem.” Leontiev (1978) afirma que, como espécie, o homem biologicamente nasce *homo sapiens*. Mas é no processo de apropriação da cultura produzida pela humanidade que o homem espécie se torna humano, o que é denominado de processo de humanização.

A psicologia cartesiana-lockiana clássica tinha como objeto de estudo somente os processos internos, “com movimento das representações, suas associações na consciência, suas generalizações, e o movimento de seus substitutos, as palavras” (Leontiev, 2021, p. 115). No entanto, o estudo da filogênese e da ontogênese do pensamento possibilitaram novas compreensões nas investigações psicológicas. O debate na psicologia centrou-se em conceitos “como o do intelecto prático ou o pensamento manual” sob o olhar empírico. (Leontiev, 2021, p.115). Em decorrência dos resultados desses estudos, a maioria dos pesquisadores concorda que “as ações mentais internas precedem geneticamente as externas”. Porém, sobre o estudo do comportamento humano, a suposição era de uma “transição direta, mecânica e compreensível de processos externos em ocultos, internos” (Leontiev, 2021, p. 115-116).

Para Leontiev (2021), as operações internas do pensamento se concretizam sob o olhar da psicologia pela introdução do conceito de interiorização.

A interiorização, como se sabe, é uma transição, graças à qual processos – externos em sua forma – com objetos materiais exteriores se transformam em processos que ocorrem no plano mental, no plano da consciência; além disso, eles são submetidos a transformações específicas, generalizam-se, verbalizam-se, abreviam-se e, o principal, tornam-se capazes de continuar se desenvolvendo, ultrapassando as fronteiras das possibilidades da atividade externa (Leontiev, 2021, p. 116).

O conceito de interiorização, na psicologia soviética, é vinculado às ideias de Lev Vigotski e seus continuadores. Conforme Leontiev (2021, p. 117-118), a questão principal que Vigotski aponta e que se difere de outros autores, seus contemporâneos, foi considerar a “origem da atividade psíquica interna a partir da externa.” Essas ideias surgem da análise de uma atividade humana específica, originalmente social, a do trabalho, cujo desenvolvimento se efetiva somente “nas condições de cooperação e comunicação entre as pessoas.” De modo análogo, de acordo com Leontiev (2021, p. 118), esse vínculo estabelece a inter-relação identificada por Vigotski de dois aspectos a considerar: “da estrutura de instrumento (‘instrumental’) da atividade humana e sua inserção no sistema de inter-relações com outras pessoas.” Assim, por meio da atividade mediada pelos instrumentos, o sujeito “*assimila a*

experiência da humanidade.” Nesse processo, desenvolvem-se as funções psicológicas superiores, cujo elo são os meios e os modos social e historicamente elaborados, transmitidos pelos indivíduos por meio da cooperação, na relação entre eles. Mas comunicar-se no meio social só é possível “na forma exterior, na forma de ação ou de discurso exterior” (Leontiev, 2021, p. 118). Ainda em relação a Vigotski, o autor acrescenta:

Os processos superiores especificamente humanos podem se originar apenas na interação entre pessoas, ou seja, como processos *interpsicológicos*, e só então eles começam a ser executados pelo indivíduo de forma independente; além disso, alguns deles posteriormente perdem sua forma exterior inicial, convertendo-se em processos *intrapicológicos* (Leontiev, 2021, p. 118).

Da convicção de que a atividade interna provém da prática social, como resultado do desenvolvimento da sociedade humana em seu processo filogenético, surge o entendimento do conceito da consciência humana. Na perspectiva teórica da THC, a consciência representa “o reflexo da realidade pelo sujeito, de sua atividade, de si mesmo” (Leontiev, 2021, p. 119). Ou seja, diferente da psicologia cartesiana-lockiana clássica, a consciência não nasce com o sujeito e não tem sua origem na natureza: “a consciência é engendrada pela sociedade, ela é produzida.” (Leontiev, 2021, p. 119). Com o mesmo pensamento de Marx, como visto anteriormente, o autor reafirma a tese de que “não é o significado ou a consciência que antecede a vida, mas a vida que antecede a consciência.”

As investigações clássicas sobre a formação dos processos mentais e conceitos captura do processo geral da atividade um elemento: “a apropriação pelo indivíduo dos modos do pensamento elaborados pela humanidade” (Leontiev, 2021, p. 120), limitando-se ao aspecto cognitivo. Mas esse é um movimento dialético, ou seja, ao mesmo tempo que o indivíduo se forma como humano, também constitui a humanidade (Longarezi; Franco, 2013). É com o processo do desenvolvimento do pensamento teórico, como instrumento do pensamento, que “se revela o caráter comum fundamental da atividade externa e interna como mediadoras das inter-relações entre a pessoa e o mundo, nas quais sua vida real se realiza” (Leontiev, 2021, p. 120).

De acordo com Leontiev (2010, p. 59), “sob a influência das circunstâncias concretas de sua vida” o lugar que ocupamos no sistema das relações humanas se altera. Esse processo se inicia com o nascimento e se concretiza por períodos do desenvolvimento psíquico humano (Davídov, 1988). Em toda a história da psicologia evolutiva foram muitas as tentativas, em diferentes perspectivas teóricas, de periodizar o desenvolvimento psíquico humano. No entanto, é o estudo fundamentado na teoria psicológica da atividade que tem demonstrado

avanços com relação ao desenvolvimento da psique humana, originalmente com enfoque no problema da periodização infantil (Elkonin, 1987; Davídov, 1988).

O desenvolvimento da atividade está internamente ligado à formação da consciência humana e possui qualidades que podem caracterizar cada etapa (idade) e suas relações mútuas. Para Davídov (1988, p. 68), “os critérios de desenvolvimento da atividade podem ser usados na periodização de toda a vida do homem”.³⁴ Davídov (1988), com base no esquema geral elaborado por Vigotski, Leontiev e Elkonin, apresenta a seguinte periodização, em que se constitui o desenvolvimento pelas atividades guias em cada estágio da vida, desde o nascimento até o jovem adulto: a comunicação emocional; a atividade objetual-manipulatória; a atividade de jogo; a atividade de estudo; a atividade socialmente útil e a atividade de estudo e profissional.

O primeiro estágio do desenvolvimento se caracteriza pela comunicação emocional direta com os adultos no primeiro ano de vida, por exemplo, pelo choro. O segundo ocorre nas crianças de um aos três anos, sob a atividade objetual-manipulatória. Nessa etapa, reproduzem os procedimentos das ações objetais com as coisas em colaboração com os adultos. Apropriam-se da percepção das generalizações do mundo dos objetos, ou seja, do modo que os instrumentos e ferramentas são socialmente usados. Nesse estágio surgem as primeiras palavras. É nessa etapa, também, que nasce a consciência, o “eu” infantil. No estágio seguinte, as crianças de três a seis anos se caracterizam pelo desenvolvimento da imaginação e da função simbólica dos objetos. O empenho das crianças se volta para o significado social das coisas, só a manipulação não é mais suficiente. Para Lazaretti (2016), a atividade guia desse período se caracteriza pelo interesse da criança em representar, por meio da brincadeira de papéis sociais, o que o adulto faz.

Para Davídov (1988), o novo lugar acontece na dependência de uma atividade adequada que requer elaboração de novos modos de sua realização. A atividade de estudo é considerada a atividade guia que inicia nas crianças em idade escolar³⁵ de seis-sete anos até os dez-onze anos, sob a dependência da orientação das tarefas de estudo propostas pela atividade de ensino. Davídov (1988, p. 74) afirma que é nessa atividade que surgem, “nos escolares de menor idade, a consciência e o pensamento teórico, desenvolvem-se as capacidades correspondentes (reflexão, análise, planejamento mental) e também as necessidades e os

³⁴ “Los criterios de desarrollo de la actividad pueden utilizarse en la periodización de toda la vida del hombre”

³⁵ Davídov chama de período escolar ao que no Brasil corresponde aos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

motivos do estudo.”³⁶ Nesse contexto, Asbahr (2016) observa que a atividade de estudo não pode ser confundida com ações cotidianas realizadas pelas crianças na escola, como leitura de textos, exercícios para memorização de conceitos, avaliações, entre outras. Essas compõem a atividade de estudo somente se seus fins forem coerentes aos motivos dessa atividade, com a intenção de formar nos estudantes o pensamento teórico e, por consequência, o desenvolvimento humano.

A atividade socialmente útil própria dos adolescentes de dez a quinze anos ocorre em dependência do lugar que ocupa nas relações sociais. É ela que caracteriza o início da adolescência, etapa que inclui ao estudo outras formas de atividade como o trabalho, a organização-social, a esportiva e a artística. Nas palavras de Davídov (1988, p. 86): “O estudo continuará a ser um assunto importante para os adolescentes, mas será apenas um dos tipos de atividade socialmente útil que tem um significado decisivo para o seu desenvolvimento psíquico.”³⁷

Nesse estágio surge de maneira efetiva a comunicação íntima pessoal, que se refere à representação, com outros adolescentes, das relações da vida adulta.

No processo de realização dos tipos de atividade socialmente útil, nos adolescentes surge a vontade de participar em qualquer trabalho socialmente necessário, a tendência a organizar a comunicação em diferentes grupos levando em conta as normas de inter-relações aceitas por eles, a reflexão sobre o próprio comportamento, a capacidade de avaliar as possibilidades do seu “eu”, quer dizer, a autoconsciência³⁸ (Davídov, 1988, p. 75).

O adolescente descobre uma nova finalidade da atividade de estudo, seu interesse como estudante ultrapassa os limites do programa didático da escola, alcança um nível mais elevado, que consiste no seu “autodesenvolvimento e autoeducação” (Elkonin, 2019a, p. 146). Davídov (1988) afirma que para os estudantes dos graus superiores e das escolas técnico-profissionais a atividade guia é a de estudo e profissional, período que contempla a faixa etária dos quinze aos dezoito anos. É nessa atividade que começam a se desenvolver interesses para o planejamento da vida futura, do mundo profissional estável e das qualidades ideológicas, morais e cívicas.

³⁶ “En los escolares de menor edad, la conciencia y el pensamiento teóricos, se desarrollan las capacidades correspondientes (reflexión, análisis, planificación mental) y también las necesidades y motivos de estudio”.

³⁷ “el estudio seguirá siendo un asunto tan importante para los adolescentes, pero será sólo uno de los tipos de actividad socialmente útil, la que tiene una significación decisiva para su desarrollo psíquico.”

³⁸ “En el proceso de realización de estos tipos de actividad socialmente útil, en los adolescentes surge la aspiración a participar en cualquier trabajo socialmente necesario, la tendencia a organizar la comunicación en diferentes colectivos teniendo en cuenta las normas de interrelaciones en ellos aceptadas, la reflexión sobre el propio comportamiento, la capacidad de evaluar las posibilidades de su “yo”, es decir, la autoconciencia”.

A ação investigativa própria da atividade guia dos jovens contribui para o “desenvolvimento de seus interesses cognitivos, consciência e pensamento teórico, que se tornam a base para aumentar sua experiência profissional”³⁹ (Davídov, 1988, p. 86). Nesse sentido, o maior desafio da educação escolar é preparar o jovem para atuar no mundo profissional, não para adaptá-lo para o campo mercadológico, cuja finalidade é a lógica do capital. Nesta última, o interesse dos estudantes por uma disciplina ou por um determinado conhecimento tem significado somente se for útil para a profissão que, individualmente, estão almejando (Anjos; Duarte, 2016).

De acordo com a Teoria Histórico-Cultural e a Teoria da Atividade, o objetivo principal no plano psicológico é criar nos escolares, desde os Anos Iniciais, as necessidades e capacidades para uma formação integral, cuja finalidade se volte para a coletividade, e que contemple a sociedade em geral. Essa sociedade, em construção, tem como pressuposto uma educação que possibilite “criar nos alunos a necessidade de apropriação das produções humanas mais elaboradas, como a ciência, a arte e a filosofia” (Anjos; Duarte, 2016, p. 202).

Para isso, Davídov (1988) aponta três elementos essenciais que sustentam as finalidades de uma sociedade socialista, produzida pela educação, por meio do ensino das futuras gerações:

Em primeiro lugar, a necessidade e capacidade para o trabalho devem ser desenvolvidas no jovem, o que lhe permitirá obter uma qualificação inicial em alguma das profissões de massa e depois organizar criativamente o seu próprio trabalho e, se necessário, aperfeiçoá-lo. Em segundo lugar, no jovem devem estar formadas as qualidades ideológicas, morais e cívicas da personalidade, na concepção materialista dialética do mundo, uma boa orientação da consciência social como a científica, artística, moral e jurídica, a capacidade de agir de forma prática em correspondência com os princípios de visão de mundo e com as exigências inerentes a estas formas de consciência. Em terceiro lugar, o jovem deve saber se comunicar em diferentes coletivos, observando as normas de inter-relação neles estabelecidas⁴⁰ (Davídov, 1988, p. 86-87).

³⁹ “Desarrollo ulterior de sus intereses cognoscitivos, de la consciencia y el pensamiento teóricos, que se convierten en la base para elevar su maestría profesional”.

⁴⁰ “Em primer lugar, en el joven deben estar desarrolladas la necesidad y la capacidad de trabajar, lo que le permitirá obtener una calificación inicial en alguna de las profesiones masivas y luego organizar creadoramente su propio trabajo y, en la medida necesaria, perfeccionarlo. En segundo lugar, en el joven deben estar formadas las cualidades ideológicas, morales y cívicas de la personalidad, la concepción materialista dialéctica del mundo, una buena orientación en formas tales de la consciencia social como la científica, artística, moral y jurídica, la capacidad para actuar prácticamente en correspondencia con los principios de la cosmovisión y con las exigencias inherentes a estas formas de la consciencia. En tercer lugar, el joven debe saber comunicarse en diferentes colectivos, observando las normas de interrelación en ellos establecidos”.

Os princípios da periodização – do nascimento até o jovem-adulto –, anteriormente anunciados, evidenciam que o desenvolvimento psíquico está atrelado aos momentos definidos por diferentes atividades guias. No contexto de nossa pesquisa, que envolveu estudantes do primeiro ano do Ensino Fundamental, consideramos relevante para nosso objeto aprofundar o processo de constituição da atividade de estudo, guia do desenvolvimento das crianças com início nessa etapa que se manifesta na própria exposição de nosso Experimento Didático. Na sequência, explanaremos o conteúdo e a estrutura da atividade de estudo do conceito de número, conforme a organização do Ensino Desenvolvidor do sistema Elkonin-Davídov.

2.2.1 Atividade de estudo do conceito de número

O processo de constituição da atividade de estudo tem início com o ingresso da criança na escola no primeiro ano escolar do Ensino Fundamental. No Brasil, a publicação do Programa Nacional de Educação (PNE – Lei n. 10.172), em 2001, propõe o Ensino Fundamental de nove anos. Essa lei altera o ingresso dos estudantes no Ensino Fundamental, que antes era aos sete, para a partir dos seis anos de idade. Em 2006, essa alteração se consolida pela Lei n.11. 274, respaldada pela Ementa Constitucional n. 53/2006, ao estabelecer que as crianças permaneceriam até no máximo os cinco anos de idade na Educação Infantil (Martins; Facci, 2016).

Desse modo, o Ensino Fundamental no Brasil inicia quando os estudantes completam seis anos de idade, assim como na Rússia (Davídov, 1988). Porém, o que caracteriza a mudança na criança de uma atividade para a outra, segundo Leontiev (2010), é a alteração do lugar nas relações sociais que a ela ocupa, e não a sua idade. Para Davídov (1988), esse novo lugar acontece, no Ensino Fundamental, com o início do desenvolvimento da atividade de estudo, adequada à atividade humana historicamente encarnada, o que requer a elaboração de novos modos de sua realização, para formar nas crianças as bases iniciais do pensamento teórico. Elkonin (2019b) destaca a relevância da atividade de estudo, sob a perspectiva do Ensino Desenvolvidor, porque é por meio dela que “se realizam as relações básicas da criança com a sociedade; [...] na escola, é realizada a formação tanto das qualidades fundamentais da personalidade da criança de idade escolar, como dos distintos processos psíquicos” (Elkonin, 2019b, p. 141).

Com o mesmo fim, Repkin (2014, p. 87) vincula “a compreensão teórica da Atividade de Estudo e as possibilidades de teoria e prática da Educação Desenvolvente.”⁴¹ Para isso, é relevante compreender que uma atividade não se diferencia de outra pelas manifestações externas, ações e operações executadas, mas em relação ao seu objetivo. A leitura de um livro, por exemplo, pode estar relacionada a diferentes atividades e nenhuma com a atividade de estudo. Um estudante, ao ler um livro de histórias de super-heróis, pode estar envolvido na atividade de brincadeira de papéis sociais. A mesma leitura para um professor, com a finalidade de preparar uma aula, consiste em uma ação ou operação da sua atividade profissional, ou seja, a organização do ensino. Em ambos os casos a manifestação externa imediata é a mesma, ler o livro. As atividades são diferentes, pois apesar de cada um executar a mesma ação ou operação, o objetivo não é o mesmo, ou seja, cada atividade tem um motivo específico.

Para Repkin (2014, p. 87), a diferença principal entre a atividade de estudo e qualquer outra atividade consiste, como observou Elkonin, em que “seu objetivo e resultado não constituem uma mudança no objeto com o qual a pessoa opera, mas uma mudança no sujeito da atividade.” Para melhor compreensão do que afirma Repkin, relacionaremos a atividade de estudo com a atividade de trabalho. Na atividade de trabalho, o sujeito altera o objeto. O arquiteto, por exemplo, para construir uma casa, transforma a madeira, a pedra, ou seja, transforma um objeto em outro. Porém, conforme afirma Marx (1998, p. 211-212), antes de transformar um objeto em outro, tem a imagem em sua mente. O trabalho do arquiteto se diferencia das operações de uma abelha porque “ele figura na mente sua construção antes de transformá-la em realidade”.

O objeto da atividade de estudo é o conteúdo teórico dos conceitos. O estudante não transforma o conceito, ele se apropria do conhecimento já elaborado. Tal apropriação, em nível teórico, não muda o objeto da atividade de estudo (conceito), e sim o pensamento do sujeito da atividade, sua consciência.

É nesse contexto que se insere o Ensino Desenvolvente, cuja relação se encontra articulada ao tipo de ensino. Se a organização do ensino vislumbra tornar a criança sujeito de sua atividade, então ela é desenvolvimental, mas “se ela é um objeto no processo de ser ensinada, então não temos uma Educação Desenvolvente” (Repkin, 2014, p. 88).

Para Davídov (1988), estruturar o Ensino Desenvolvente por meio da atividade de estudo requer o apoio da tese de que a base do ensino é seu conteúdo; dele derivam os métodos, ou seja, os procedimentos para a organização do ensino. Como já anunciado nesta

⁴¹ Usaremos a nomenclatura Ensino Desenvolvente para nos referir ao ensino que promove o desenvolvimento ao invés de Educação Desenvolvente, nomenclatura de Repkin (2014).

pesquisa, com fundamentos em Vigotski, é o ensino que realiza a função orientadora da atividade que promove o desenvolvimento mental, o qual ocorre por meio do conteúdo do conhecimento assimilado. Convém salientar que é o conteúdo teórico dos conhecimentos apropriados pelos estudantes, desde o primeiro ano escolar, que caracteriza o início da atividade de estudo como atividade guia. Não é qualquer conhecimento que desencadeia a formação da atividade de estudo; o conhecimento científico é premissa para o desenvolvimento do pensamento teórico.

Davídov (1988) afirma que a inter-relação entre a atividade de estudo e os conhecimentos teóricos fundamenta-se em dois argumentos: 1) nos resultados da análise da história da instrução escolar moderna; e 2) na especificidade do modo de exposição do conteúdo para que a consciência social seja assimilada pelo estudante.

Davídov e Slobódchikov (1991, p. 118) consideram o ensino escolar determinante para o desenvolvimento da sociedade e da personalidade dos indivíduos. Para os autores, “a sociedade vive e se desenvolve tal como aprende. E aprende tal como quer viver.”⁴² O ensino com os princípios da pedagogia estagnada (tradicional) sustenta que é a instituição escolar que ensina e educa os jovens. Nesse pressuposto, o ensino se caracteriza pela transmissão direta de conhecimentos com métodos autoritários, a finalidade do ensino liga-se à utilidade na vida prática, e o conhecimento é apropriado em sua forma empírica. A educação está a serviço e manutenção das exigências de uma vida social já determinada e imposta.

Para o pensamento pedagógico colaborativo (Ensino Desenvolvimental), a escola é um espaço cujas leis da vida social não têm fronteiras, e nela são possíveis muitas transformações. Nessa perspectiva, o ensino não concebe a transmissão do conhecimento pronto ou ideias já formadas do professor que as repassa para o estudante. Pelo contrário, o conhecimento científico é organizado pelo professor para que, em colaboração, o estudante revele as condições de origem do conceito (célula) que se move do geral ao particular. As grandezas no ensino do conceito de número permitem, no processo de medição, encontrar quantas vezes a unidade de medida está contida na grandeza medida, por meio da relação de múltiplo. No primeiro ano escolar, as tarefas de estudo conduzem para o resultado do número natural, que se amplia nos anos subsequentes para os demais conjuntos numéricos (racionais, inteiros e irracionais). A relação entre as grandezas permite que os estudantes, desde o primeiro ano escolar, assimilem o conceito de número real, conjunto numérico que abrange as demais singularidades numéricas, quando na comparação das grandezas o resultado pode ser um

⁴² “La sociedad vive y se desarrolla tal como aprende. Y aprende tal como quiere vivir.

número de vezes inteiras ou não. Esse movimento se caracteriza pela ascensão do abstrato ao concreto no desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes.

É a assimilação do conhecimento científico que promove o desenvolvimento do pensamento em nível teórico. Para Davídov (1988, p. 172-173), em conformidade com Mamardashvili, na apropriação do conhecimento científico:

[...] o homem que assimila esse conhecimento não lida mais com a realidade imediatamente circundante, uma vez que quando o “objeto do conhecimento está mediatizado pela ciência como formação social, pela história e pela experiência... nesse objeto se separaram determinados aspectos, dados ao indivíduo que ingressa na ciência, na forma de conteúdo generalizado, abstrato, de seu pensamento”.⁴³

Os conhecimentos e ações mentais do homem estão em unidade, por isso é coerente relacionar o termo conhecimento ao resultado do pensamento – reflexo da realidade. Com esse entendimento, “o conceito constitui simultaneamente o reflexo do ser e o procedimento da operação mental”⁴⁴ (Davídov, 1988, p. 174).

Portanto, é importante ressaltar a crítica contundente que os estudiosos do Ensino Desenvolvimental fazem em relação ao modo de organização do ensino com fundamentos pragmáticos, com foco na prática cotidiana e seus resultados – o ensino com base empírica desencadeia ações empíricas. Na escola, o pensamento empírico é associado à transmissão de conhecimentos nos quais são formados modos particulares e isolados na solução de tarefas práticas. No conceito, é identificado o que é comum e o que pode ser observado sensorialmente. Observemos, por exemplo, o modo como o conceito de número é estudado nos primeiros anos do Ensino Fundamental no ensino brasileiro. Nele a contagem discreta de objetos soltos (tampinhas de garrafa) são relações empíricas por não possibilitarem a apropriação do modelo universal do conceito de número, que somente se constitui na relação entre grandezas. De acordo com Davydov (2017), os estudantes, ao serem inseridos no Ensino Fundamental, devem perceber claramente a diferença entre o conhecimento que foi adquirido no seu dia a dia e aquele que a escola lhe propiciará por meio do ensino. Vigotski (2001, p. 346) afirma que a fragilidade dos conceitos com conteúdo empírico (espontâneos) se encontra na tomada de consciência, pelo indivíduo, “do objeto em proporções bem maiores do que do próprio conceito.” A apropriação

⁴³ “el hombre que asimila estos conocimientos ya no trata con la realidad inmediatamente circundante, por cuando el “objeto del conocimiento está mediatizado por la ciencia como formación social, por su historia y por la experiencia...en ese objeto se han separado determinados aspectos, dados al individuo que ingresa en la ciencia, en forma de contenido generalizado, abstrato, de su pensamiento”. Davídov cita a seguinte obra: M. Mamardashvili. *Forma y contenido del pensamiento*. Moscú, 1968, p.21.

⁴⁴ “el concepto constituye simultáneamente el reflejo del ser y el procedimiento de la operación mental”.

do conceito de número relacionada à contagem de objetos é limitada à observação do próprio objeto, e não às significações essenciais desse conceito em nível teórico.

Para Davidov (2019d), a superação do ensino com base empírica requer mudança no modo de conceber sua organização e seu desenvolvimento. O autor entende que somente na escola são criadas as condições para a intencionalidade da atividade de estudo. Nessa perspectiva, “*os conceitos científicos, as leis da ciência e os modos generalizados de resolver problemas práticos baseados nessas leis e conceitos*” (Davidov, 2019d, p. 182) se diferenciam por seu conteúdo. A assimilação dos conceitos científicos pelos estudantes é o objetivo basilar da atividade de estudo, seu produto corresponde à autotransformação do estudante, que inicia com a necessidade do estudo.

Com relação à formação da atividade de estudo, Davidov e Márkova (1987, p. 320) afirmam que “há que revelar e criar as condições para que a atividade adquira um sentido pessoal, converta-se na fonte de autodesenvolvimento do indivíduo, do desenvolvimento multilateral de sua personalidade, em condição de sua inclusão na prática social”⁴⁵. Os pesquisadores da atividade de estudo, sob a perspectiva do Ensino Desenvolvidor, explicitaram sua estrutura formada pelos seguintes componentes: as tarefas de estudo, as ações de estudo, a ação do controle e a ação da avaliação (Davidov, 2019d).

As tarefas de estudo possuem algumas especificidades. Primeiro “*os escolares assimilam os modos generalizados de ação para diferenciar as propriedades dos conceitos com o objetivo de resolver algum tipo de tarefa concreta e prática*” (Davidov, 2019d, p. 182). Em seguida, “*a reprodução dos modelos desses modos de ação aparece como objetivo básico do estudo como trabalho*” (Ibidem, p. 182). Nas situações de estudo para resolver tarefas concretas e práticas, primeiramente o professor coloca os estudantes diante de circunstâncias que são essenciais para assimilarem o modo geral na resolução de qualquer tarefa particular de mesmo gênero. No decorrer do processo, ainda sob a direção do professor, os estudantes dão forma a esse modo de ação ao se apropriarem do processo histórico de generalização e desenvolvimento dos conhecimentos.

Assim, o desenvolvimento da atividade de estudo pelos estudantes do primeiro ano escolar efetiva-se ao criar a necessidade da solução autônoma das tarefas de estudo. Essa autonomia é construída quando o professor não apresenta *a priori* as conclusões finais do conceito para os estudantes, pois o propósito é que as tarefas de estudo ou situações

⁴⁵ “hay que revelar y crear las condiciones para que la actividad adquiriera un sentido personal, se convierta en la fuente del autodesarrollo del individuo, del desarrollo multilateral de su personalidad, en la condición de su inclusión en la práctica social”.

problemáticas⁴⁶ os levem a investigar o modo de solução, ou seja, o professor direciona o caminho sem dar as respostas antecipadamente, mas por meio da investigação, que se constitui pela elaboração de “boas” perguntas pelos estudantes (Davídov, 1988). A assimilação dos conhecimentos no processo de solução autônoma das tarefas permite que os estudantes descubram as condições de origem desses conhecimentos. Davídov (1988) avalia que a resolução de tarefas é um dos meios para dominar um sistema de conhecimentos relacionado a qualquer disciplina escolar a fim de auxiliar no desenvolvimento do pensamento criativo autônomo.

Com base no entendimento de que qualquer atividade humana está relacionada a uma necessidade e as ações aos motivos, a formação, nos estudantes, da necessidade da atividade de estudo estimula a gênese da finalidade de apropriação dos conhecimentos teóricos. Estes se concretizam por motivos que exigem a realização de ações de estudo para resolver as situações-problemas (Davídov, 1988).

A atividade de estudo é realizada na relação entre tarefas de estudo, ações e tarefas particulares. Davídov (1988) propõe seis ações básicas de estudo:

- transformação dos dados da tarefa para descobrir a relação universal do objeto estudado;
- modelação da relação diferenciada nas formas objetual, gráfica e literal;
- transformação do modelo da relação para o estudo de suas propriedades em “forma pura”;
- construção de um sistema de tarefas particulares a serem resolvidas por um procedimento geral;
- controle do cumprimento das ações anteriores;
- avaliação da assimilação do modo de ação geral como resultado da solução da tarefa de estudo dada⁴⁷ (Davídov, 1988, p. 181).

Cada ação de estudo é composta por operações correspondentes que são realizadas conforme as condições da tarefa de estudo. Davídov (1988, p. 178) ressalta que “a tarefa é a unidade do objetivo da ação e das condições para alcançá-lo.”⁴⁸ O início da primeira ação de

⁴⁶ Estamos considerando situações problemáticas como sinônimo de tarefa de estudo, conforme explica Davídov (1988, p. 181), “la enseñanza de carácter problemático los conocimientos no se transmiten a los alumnos en forma ya lista, sino que son adquiridos por ellos en el proceso de la actividad cognoscitiva autónoma em presencia de la situación problemática”.

⁴⁷ Transformación de los datos de la tarea con el fin de poner al descubierto la relación universal del objeto estudiado; modelación de la relación diferenciada en forma objetual, gráfica o por medio de letras; transformación del modelo de la relación para estudiar sus propiedades en “forma pura”; construcción del sistema de tareas particulares a resolver por un procedimiento general; control sobre el cumplimiento de las acciones anteriores; evaluación de la asimilación del procedimiento general como resultado de la solución de la tarea de estudio dada.

⁴⁸ “[...] la tarea es la unidad del objetivo de la acción y de las condiciones para alcanzarlo.”

estudo, *transformação dos dados da tarefa para encontrar a relação universal do objeto estudado*, é marcado pela transformação intencional das condições na formulação da tarefa para buscar uma relação definida e integral do elemento conceitual em estudo. A característica dessa relação é constituída por dois olhares que se engendram: “o aspecto real das condições que estão sendo transformadas [...] e a base genética e fonte de todas as características particulares do objeto integral, isto é, sua relação universal” (Davidov, 2019c, p. 224). Tal ação consiste em criar situações de ensino que gerem a necessidade da apropriação dos conceitos teóricos pela transformação dos dados objetivos da tarefa de estudo.

O Ensino Desenvolvimental do sistema Elkonin-Davídov propõe como principal tarefa para a matemática, no primeiro ano escolar, o conceito de número real como resultado da relação entre grandezas. A primeira ação de estudo que introduz esse conceito é dada pela análise das características de objetos e figuras compreendidas pelas relações universais, pela comparação entre grandezas e expressão dos resultados de igualdade e desigualdade. O resultado da comparação é representado inicialmente na forma objetiva (tiras de papel), seguida pela gráfica (segmentos) e por letras e fórmulas, tais como $a = b$; $a \neq b$; $a > b$; $a < b$. A análise permite realizar transformações do tipo: “ $a + c > b$; $a = b - c$; $a + c = b + c$, etc.” (Davidov, 1988, p. 185).

A finalidade é elaborar o significado do conceito de número em nível teórico, assim, as representações de igualdades e desigualdades (maior, menor) são restritas. Os estudantes formulam hipóteses e, com ajuda do professor, concluem que se faz necessário uma comparação mediada (terceira grandeza). As tarefas de estudo requerem encontrar o modo generalizado, a base genética do conceito de número. Isso ocorre com a proposição de tarefas em que os estudantes realizem uma transformação objetiva das grandezas: quantas vezes uma unidade de medida cabe na grandeza a ser medida.

Na relação entre as grandezas de mesma espécie, no processo de medição, surge o caráter de multiplicidade e o modelo universal. Com a unidade de medida (c) são criadas condições para encontrar um determinado valor das grandezas A e B . “Encontrar quantas vezes a grandeza c ‘cabe’ nas quantidades A e B possibilita que a criança determine sua relação de múltiplo, que pode ser registrada com ajuda da formulação: $\frac{A}{c}$ e $\frac{B}{c}$ (a linha que separa as letras significa múltiplo)”⁴⁹ (Davídov, 1988, p. 186).

⁴⁹ “La búsqueda de cuántas veces la magnitud c “cabe” en las magnitudes A y B permite al niño determinar su relación múltiplo, la que puede ser registrada con ayuda de la fórmula $\frac{A}{c}$ y $\frac{B}{c}$ (la línea que separa las letras significa múltiplo)”.

Na segunda ação de estudo, *modelação da relação universal nas formas objetiva, gráfica e literal*, os modelos de estudo constituem a ligação internamente indispensável para a apropriação dos conhecimentos teóricos e os procedimentos dos modos generalizados de ação. Porém, observa Davidov (1988), somente a representação que contém a relação universal de um objeto integral e que garante sua análise pode ser chamada de modelo de estudo. É o conteúdo do modelo que constitui as características internas do objeto, as quais não podem ser observadas diretamente. Assim, podemos dizer que “o modelo de estudo, que atua como um produto da análise mental, pode, então, ser um meio especial da atividade mental do homem” (Davidov, 2019c, p. 225).

No contexto do conceito de número real, a segunda ação é pertinente ao modelo de estudo que se efetiva pela comparação de duas grandezas realizada por meio da coesão entre as formas objetiva, gráfica e literal. É nesse processo que ocorre a relação de multiplicidade e divisibilidade. Assim, o resultado da medição de uma grandeza particular é traduzido, conforme Davidov (2019c, p. 228), por “quantas vezes a medida dada está contida na grandeza através de sua relação de múltiplo.” Esse valor na forma verbal corresponde aos números “um, dois, três...vezes” (Ibidem, p. 228).

O modelo se efetiva por fórmulas da relação de múltiplo na representação da divisibilidade com mesma unidade de medida, como as que seguem: $\frac{A}{c} = 3$; $\frac{B}{c} = 4$; $3 < 4$; $A < B$. A análise dos resultados três (3) e quatro (4), oriundos da medição das grandezas A e B por uma mesma unidade de medida (c) permite ao estudante, por meio da investigação, concluir que $A < B$, pois a mesma medida coube um número menor de vezes em A do que em B. Assim, o modelo universal é usado para qualquer situação particular, independente da grandeza ou quantidade comparada por meio de fórmulas do tipo: “ $\frac{A}{c} = K$; $\frac{B}{c} = M$; $K < M$; $A < B$ ” (Davidov, 2019c, p. 228), ou seja, o modelo tanto do processo quanto do resultado da diferenciação da relação de múltiplo tem a seguinte forma $\frac{A}{c} = N$.

A terceira ação de estudo, *transformação do modelo da relação para o estudo de suas propriedades em forma pura*, contribui para que os estudantes transformem e reelaborem o modelo de estudo. As tarefas dessa ação de estudo oportunizam compreender as propriedades gerais em detrimento da interferência das circunstâncias externas.

Com relação ao número, nessa ação de estudo o modelo é transformado para que o estudante compreenda a diversidade de suas manifestações particulares, essência da próxima ação. Assim, na segunda ação, o foco das tarefas estava na comparação de grandezas de tamanhos diferentes com a mesma unidade de medida. Nesta ação, na tarefa de estudo é

proposto que o estudante meça a mesma grandeza com a modificação da unidade de medida, o que, conseqüentemente, leva à mudança do número concreto que representa sua relação. “Por exemplo, $\frac{A}{c} = k$ e $b < c$, então $\frac{A}{b} > k$, etc.”⁵⁰ (Davídov, 1988, p. 187). A medição da mesma grandeza A com a unidade de medida c resulta em um número. Ao medir A com a unidade b , menor que c , o resultado será um número maior que k . Isto ocorre porque uma unidade de medida menor cabe mais vezes na grandeza a ser medida.

De acordo com Davídov (1988), os estudantes se apropriam do conceito de número em nível teórico quando assimilam as propriedades gerais dos números antes de conhecerem as diversas manifestações particulares. Nesse sentido, ao conhecerem as ações de estudo anteriores (transformação da tarefa, o modelo universal e as possíveis transformações desse modelo), os estudantes conseguem resolver tarefas de estudo que contemplam diferentes situações particulares, próxima ação de estudo.

Portanto, a quarta ação de estudo, *construção de um sistema de tarefas particulares a serem resolvidas por um procedimento geral*, concretiza as tarefas de estudos iniciais e possibilita a resolução de uma variedade de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento único (geral). As ações de estudo estudadas orientam para que os estudantes descubram as condições do surgimento dos conceitos que estão sendo apropriados. Davidov (2019c, p. 226) esclarece: “É como se os próprios alunos construíssem o conceito, embora sob a constante orientação do professor (ao mesmo tempo, diminui o caráter dessa orientação e cresce paulatinamente o grau de autonomia do escolar).”

Essa ação se dirige para a concretização do modelo universal, na relação de multiplicidade e na resolução de tarefas particulares do conceito de número, que se caracteriza pela comparação entre grandezas. Dito de outro modo, permite que os estudantes relacionem o princípio geral do modo de encontrar a propriedade numérica de diferentes grandezas: contínuas (comprimento, área, volume, capacidade, entre outras) e discretas (contagem) pelas condições particulares de medição e cálculo. Eles demonstram que se apropriaram do referido conceito quando transitam livremente de uma unidade de medida a outra, ao definirem a característica numérica da grandeza e expressar distintos conjuntos numéricos (Rosa, 2012). Assim, de acordo com Davídov (1988), esse nível de compreensão permite aos estudantes aplicar o mesmo procedimento e seu conceito em variadas situações da vida que necessitem da definição das características numéricas das grandezas.

⁵⁰ “Por ejemplo $\frac{A}{c} = k$ y $b < c$, entonces $\frac{A}{b} > k$, etc”.

Na tarefa de estudo, as ações *controle do cumprimento das ações anteriores* e *avaliação da assimilação do modo de ação geral como resultado da solução da tarefa de estudo dada* têm um lugar indispensável e intimamente ligado para a apropriação do conteúdo teórico pelos estudantes. É por meio do desenvolvimento dessas ações (controle e avaliação) que o professor consegue analisar o conhecimento assimilado pelo estudante com coerência nas demais ações de estudo.

O controle, como afirmam Rosa e Damazio (2017, p. 176), tem o papel de “assegurar que o procedimento universal da ação tenha todas as operações indispensáveis para que o estudante resolva, exitosamente, a diversidade de tarefas concretas particulares.” Assim, o controle propicia que as operações demandadas das ações e a forma correta de sua execução sejam promovidas plenamente (Davidov, 2019c).

No primeiro ano escolar, o professor realiza o controle da apropriação do conteúdo essencial da tarefa ao cometer erros intencionais no processo de sua resolução, cujo modo de solução já havia sido estudado. Por exemplo, o professor pode propor a medição da grandeza área com a unidade comprimento. Repkin (2019) explica que estudantes, em anos seguintes, aprendem de maneira eficiente o controle da execução das atividades dos colegas. A explicação de uma tarefa, no quadro, sob o olhar do professor e dos demais colegas, é um exemplo de formação do autocontrole que se reflete na formação autônoma da atividade de estudo.

Elkonin (2019a) destaca que o mais comum na prática pedagógica tradicional é o controle somente do resultado final. Na matemática, a verificação da operação da adição pelo uso da subtração ou da multiplicação pela divisão é um procedimento mecânico que não analisa o processo, ou seja, cada passo realizado durante a execução da tarefa não é foco de apreciação. O controle, na perspectiva da atividade de estudo, “consiste no acompanhamento da coerência da execução das ações” (Elkonin, 2019a, p. 166). Para Matveeva, Repkin e Skotarenko (2019), se a função do controle e da avaliação expressam somente o resultado final (nota) e não o processo de apropriação do conhecimento teórico, deveria ser, se não totalmente abandonada, diminuída gradativamente. No entanto, destituir do controle e da avaliação o aspecto quantitativo e tampouco adotar outras formas diferenciadas não são garantia de se chegar ao resultado esperado. As ações de controle e avaliação são justificáveis, “no processo de aprendizagem, se são formados, nos alunos, interesses cognitivos estáveis, a habilidade de definir o conteúdo da tarefa de estudo e as formas produtivas inteligentes de atividade” (Matveeva; Repkin; Skotarenko, 2019, p. 340).

A ação da avaliação, na perspectiva da atividade de estudo, propicia a análise da apropriação ou não do modo generalizado (procedimento universal) da solução da tarefa de

estudo e do resultado das ações de estudo, se é coerente ou não com o objetivo final. Ou ainda, uma análise qualitativa substancial do resultado da apropriação possibilita ao estudante identificar se a tarefa de estudo foi ou não resolvida (Davidov, 2019c).

Portanto, o controle e a avaliação, sob a perspectiva do Ensino Desenvolvimental, implicam colocar o estudante em processo de investigação e análise do conteúdo das ações, de seus fundamentos e sua correspondência com o resultado das tarefas. Na atividade de estudo, o procedimento de apropriação do conhecimento, quando os estudantes controlam e avaliam suas ações, é consolidado pela reflexão, a qual “serve como condição substancial para a correção de sua construção e mudança” (Davidov, 2019c, p. 226).

A avaliação da apropriação do conceito de número, no primeiro ano escolar, está relacionada à compreensão e vinculação ao número real, na relação entre grandezas. É com essa concepção que, conforme o sistema Elkonin-Davídov, os estudantes assimilam os conceitos matemáticos com base em uma generalização teórica.

A exposição referente aos componentes da atividade de estudo constitui fundamento para a análise do Experimento Didático de nossa pesquisa, que segue no próximo capítulo.

3 DESENVOLVIMENTO E ANÁLISE DO EXPERIMENTO DIDÁTICO

Neste capítulo apresentamos o Experimento Didático realizado com estudantes do primeiro ano do Ensino Fundamental de uma escola municipal de Içara-SC, e a tarefa de estudo que explicita o conteúdo teórico do conceito de número. A centralidade da análise é a possibilidade de estudantes brasileiros do primeiro ano escolar de uma escola pública realizarem tarefas de estudo do sistema Elkonin-Davídov, apropriando-se do conteúdo teórico do conceito de número.

Selecionamos para nosso Experimento Didático as tarefas de estudo do livro de orientação ao professor (Gorbov; Mikulina; Savieliev, 2008) e do livro didático para os estudantes (Gorbov; Mikulina, 2001). Diante das manifestações dos estudantes, consideramos necessário reelaborar algumas tarefas particulares de estudo, que serão identificadas ao longo da análise. Como mencionado nos procedimentos metodológicos, para a tarefa de estudo do conceito de número foram desenvolvidas, no experimento, 145 tarefas particulares de estudo no período de junho a dezembro do ano de 2021. Em nossa análise, apresentamos aquelas que julgamos relevantes para responder ao problema que nos propomos a investigar: é possível que estudantes do primeiro ano escolar de uma escola pública envolvidos em um Experimento Didático se apropriem do conceito de número com base nas tarefas de estudo elaboradas sob as premissas do sistema de organização do ensino Elkonin-Davídov?

Para Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008) o objetivo do sistema Elkonin-Davídov não é apenas propiciar, aos estudantes, que os conceitos matemáticos sejam assimilados para sua utilização no contexto do seu dia a dia (prática), mas prepará-los para agirem de forma independente na busca de novos caminhos e criar seus próprios meios para alcançar seus objetivos da aprendizagem. As tarefas de estudo que se referem ao conceito de número como um todo são organizadas para que, desde o primeiro ano escolar, os estudantes se apropriem no processo de medição das grandezas do modelo universal do conceito de número. Desse modo, os números naturais, uma singularidade dos reais, são estudados desde o primeiro ano escolar por meio da mesma relação.

No livro de orientação ao professor, de Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008), há a previsão de uma quantidade de tarefas particulares de estudo a serem discutidas em cada tema (capítulos). Porém, de acordo com os autores, o professor tem liberdade para definir a quantidade de material necessária e o tempo para a assimilação dos conceitos pelos estudantes. Em nosso experimento, em conformidade com o referido sistema, optamos por oportunizar um

diálogo permanente, com o envolvimento dos estudantes, o que exigiu mais tempo para o desenvolvimento de cada tema.

Como já mencionado anteriormente, o livro de orientação ao professor do sistema Elkonin-Davídov é organizado em dez capítulos; no entanto, em nosso experimento desenvolvemos os seis primeiros, que abordam mais especificamente as tarefas gerais e particulares de estudo que objetivam a elaboração do conceito de número, foco de nossa pesquisa. Conforme segue: 1. Características dos objetos e figuras (cor, forma, tamanho e posição); 2. As grandezas (comprimento, área, volume e capacidade e massa); 3. As operações com grandezas; 4. Introdução do número; 5. A reta numérica; 6. Comparação de numerais. Os capítulos seguintes tratam dos conceitos de adição, subtração e resolução de problemas.

No experimento foram desenvolvidas uma série de tarefas particulares de estudo em cada capítulo, porém em nossa exposição não analisamos todas. Focalizamos aquelas que, em nossa avaliação, melhor explicitam o movimento de pensamento dos estudantes no processo de assimilação do conteúdo teórico dos conceitos relacionados ao número no primeiro ano escolar. A exposição concentra-se na possibilidade de apropriação, pelos estudantes do primeiro ano escolar, do conteúdo teórico do conceito de número conforme proposto pelo sistema Elkonin-Davídov. Ela segue a sequência das tarefas particulares de estudo abordadas no Experimento Didático, que é a mesma do sistema Elkonin-Davídov.

A apresentação foi organizada em três unidades de análise relativas aos temas: a) comparação de figuras e objetos por suas características: cor, forma, tamanho e posição; b) modos de medição das grandezas e operações com as grandezas; c) introdução do conceito de número e reta numérica. Na primeira, as tarefas de estudo têm, em sua essência, o objetivo de propiciar que os estudantes se apropriem da ação investigativa. Na sequência, o conjunto de tarefas têm a finalidade de discutir a necessidade de introduzir os modos de comparar as grandezas contínuas (comprimento, área, volume e massa) e encaminhar os estudantes para a análise das diferenças (maior ou menor) em relação às grandezas e a possibilidade de quantificá-las. Na última, as tarefas trazem, em sua essência, a abstração do número em nível teórico, que se concretiza no modelo universal na representação geométrica, algébrica e aritmética na reta numérica.

É importante chamar a atenção do leitor ao fato de que o movimento de pensamento dos estudantes na assimilação dos conhecimentos não ocorreu na classe de forma homogênea. Para alguns o movimento de pensamento era mais rápido, para outros mais lento. Nossa preocupação, em consonância com os princípios do Ensino Desenvolvidamental, foi a apropriação do conteúdo por todos. Assim, buscávamos inseri-los no debate para que comungassem das

reflexões/apropriações dos colegas e todos pudessem avançar no processo, mesmo que em tempos diferentes. Dessa forma, ainda que nem todos demonstrassem assimilação do conteúdo de uma tarefa, passávamos para a subsequente, pois isso não era obstáculo para seguir com o processo. Nesse ensino existe articulação entre as tarefas, num movimento cíclico em que cada uma apresenta uma nova necessidade inter-relacionada à anterior, formando um sistema conceitual coeso. Adiante, no processo da exposição, esforçamo-nos para tratar dessa questão mais detalhadamente.

3.1 COMPARAÇÃO DE FIGURAS E OBJETOS POR SUAS CARACTERÍSTICAS: COR, FORMA, TAMANHO E POSIÇÃO

Os autores da proposta de ensino efetivada no livro didático apresentam, na introdução do primeiro capítulo, tarefas que evidenciam as grandezas, mesmo que somente ocorra a análise das características dos objetos e figuras com o intuito principal de desenvolver a ação investigativa dos estudantes. A ação investigativa constitui-se, nesse sistema de ensino, uma premissa para o desenvolvimento do conteúdo teórico dos conceitos em estudo. Assim, as características das figuras, como a cor, a forma, o tamanho e a posição constituem-se meio para que os estudantes investiguem, por exemplo, a figura pensada pelo professor ao considerar suas características “em um todo, como: identificação da figura ou elemento correto, semelhanças e diferenças, etc.” (Damazio; Cardoso; Santos, 2014, p. 183).

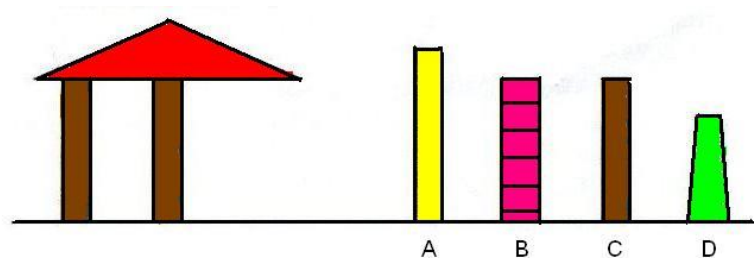
É relevante destacar que, para desenvolver a ação investigativa, as tarefas de estudo são organizadas de modo que os estudantes façam perguntas ao professor ou aos colegas. Todavia não se trata de questões aleatórias, são aquelas que permitem analisar de forma intencional se as figuras geométricas se diferenciam ou se assemelham por uma ou mais propriedades. Além disso, as tarefas particulares de estudo mantêm um vínculo conceitual, ou seja, a cada tarefa é criada uma situação-problema com uma nova necessidade, sem desconsiderar as características já apropriadas.

No experimento, com relação às características cor, forma, tamanho e posição de figuras ou objetos, foram desenvolvidas 28 tarefas particulares de estudo (Apêndice A) do livro de orientação ao professor e do livro didático para os estudantes. No entanto, para análise, foram selecionadas aquelas que mostram o movimento e as necessidades que inter-relacionam as características: cor, forma, tamanho e posição. Na primeira seção, fazemos uma exposição minuciosa das tarefas para que o leitor compreenda o movimento que caracteriza o modo de

organização do ensino no sistema Elkonin-Davídov. Na segunda e terceira seções, dada a quantidade de tarefas, somos mais sintéticas na exposição.

A primeira tarefa particular de estudo desenvolvida com os estudantes a ser analisada é a introdutória. Apresentamos aos alunos, em *slide* no *PowerPoint*, o modelo de uma casa com ausência de uma coluna e algumas opções que se diferenciavam pelas características cor, forma e tamanho (Figura 1), em que os alunos tinham que indicar qual completava o desenho da casa.

Figura 1- Casa com a ausência de uma coluna



Fonte: Elaborada pela autora com base em Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008).

Nossa condução da aula, como pesquisadora, constituiu-se pela participação coletiva, por isso propiciou a interação com cada um dos estudantes, tanto individual como coletiva. Ao mesmo tempo que alguns estudantes se dirigiam ao quadro para expressar suas compreensões, os demais concordavam ou discordavam, justificando suas posições.

A escolha da coluna C como a adequada foi unânime entre os estudantes, que pronunciavam “*é a marrom*”.⁵¹ A investigação dos estudantes para escolher a coluna mais adequada foi pela característica cor. Uma estudante ampliou a investigação quando disse “*e tem quase o mesmo comprimento que as outras*”, sendo imediatamente apoiada pelas demais crianças. A expressão “quase” indicaria um primeiro olhar? Ao questioná-las sobre qual comprimento, algumas responderam largura e outras altura. De acordo com Rosa (2012, p. 90-91), “um objeto tem vários comprimentos (na horizontal, na vertical e em outras dimensões) e, geralmente, têm nomenclaturas específicas: largura, grossura, altura, profundidade, etc.” Para expressar qual era o comprimento da coluna marrom (figura plana), Tina gesticulou colocando as mãos na posição inferior e superior, indicando a altura. O foco de nosso debate continuou para diferenciar as dimensões específicas da grandeza comprimento das figuras planas, representações das colunas e definição de suas nomenclaturas. Consideramos importante

⁵¹ Procuramos manter as falas dos alunos o mais próximo possível de suas expressões reais, fazendo pequenas correções com o cuidado de não alterar o sentido de suas manifestações.

estabelecer essa nomenclatura, uma vez que nos livros didáticos brasileiros há um equívoco conceitual. Em algumas figuras planas, o comprimento é uma denominação usada para indicar a dimensão (geralmente da horizontal), e não a grandeza. O estudante Cido foi ao quadro e, com o dedo indicador, percorreu a imagem marrom na horizontal e na vertical, tentando expressar a largura e a altura.

Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008) destacam a importância de discutir as demais representações das colunas, com o objetivo de que os estudantes busquem os elementos essenciais das características cor e forma. Em um primeiro momento, as investigações dos estudantes permitiam estabelecer diferenças com relação à cor e à altura das colunas. Ao serem questionados sobre a escolha da coluna, expressaram suas elaborações nas seguintes falas:

Pesquisadora: *Por que vocês escolheram a coluna (C) e não escolheram as outras?*

JB: *Esta (B) tem o mesmo tamanho desta (C), mas não é a mesma cor.*

Sô: *A coluna A não serve porque é muito grande.*

Pesquisadora: *Ela é grande em que sentido?*

Sô: *Na altura.*

Pedro: *Essa (A) é muito grande, a casa vai desmoronar, a (C) é médio, a (D) é baixinha.*

As expressões grande, médio e baixinha para se referir ao comprimento da altura das representações das colunas, mencionadas por Pedro e Sô, indicam que compreendem o modo de comparar a característica tamanho da altura, embora seja pela observação visual. No entanto, remetem a um movimento essencial para a apropriação de conceitos matemáticos vinculados à relação geral da matemática, a grandeza, foco das tarefas de estudo a partir do segundo capítulo.

O debate para identificação da característica forma exigiu-nos maior interferência. Após vários questionamentos, foi possível identificar que os estudantes conseguiam, sem ajuda, identificar as características cor e comprimento da altura das colunas e assim justificar a escolha da coluna C e desconsiderar as demais. Mas, ainda necessitavam se apropriar de outro elemento, a forma, para podermos dar continuidade ao experimento e propor as tarefas seguintes. Sob nossa orientação, concluíram que existia outra característica que diferenciava as colunas, além da cor e altura: o *desenho* (coluna D). Para que as crianças se apropriassem da nomenclatura correta, propusemos substituir a palavra *desenho* por forma. O que evidencia a importância de o professor orientar o desenvolvimento da tarefa particular para que o aluno se aproprie da linguagem científica.

A segunda tarefa particular de estudo consistia em identificar se os estudantes tinham assimilado as diferenças e semelhanças ao comparar objetos pelas características

estudadas – cor e forma. A proposição do livro russo de orientação ao professor era que as crianças procurassem na sala objetos que se assemelhassem pela cor ou pela forma. Com o objetivo de verificarmos as investigações dos estudantes em relação às características discutidas até então, alteramos a condução dessa tarefa em vista de que os estudantes centraram suas análises principalmente no tamanho, na altura das colunas. Orientamos, então, que individualmente escolhessem dois de seus pertences e os comparassem pelas características estudadas (Figura 2). Usaram pares de objetos como: caderno e estojo; dois lápis; dois pincéis atômicos; lápis e borracha; dois cadernos, entre outros. Definidos os objetos, cada um deles expôs sua percepção. As questões orientadoras foram: *“Quais objetos você comparou? E quais as características?”*

A maioria dos estudantes, ao compararem os objetos que haviam escolhido, expressou o que se diferenciava pelas características: cor, forma e tamanho da altura.

Anita: *O lápis e a caneta. São diferentes pela forma, pela altura e pela cor.*

Tina: *A borracha e o lápis. São diferentes pela forma, pela altura e pela cor.*

Figura 2 - Comparação dos objetos pela cor, forma e tamanho da altura



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

Anita detalhou sua comparação aproximando a caneta e o lápis, apoiando-os verticalmente sobre a carteira. O uso da carteira como suporte permitiu a identificação das alturas dos dois objetos, que se diferenciavam porque uma delas (do lápis) ultrapassava a outra (da caneta). A estudante, ao mesmo tempo que manipulava os objetos, indicava com as mãos (gestos) o começo e o fim dos tamanhos das alturas. Com relação à forma, afirmou serem diferentes. Sua justificativa foi explicitada ao dizer *“este tem lados* (referindo-se ao lápis) *e este não tem”* (mostrando a caneta). Na expressão de que a caneta não tinha lado, estava implícita a forma cilíndrica, enquanto o lápis tinha lado. Sua referência era a forma hexagonal. Tina fez o mesmo procedimento para comparar pelo tamanho, porém colocou os objetos deitados sobre a mesa, na horizontal.

Todos os estudantes, para comparar pela altura, usaram o procedimento de encostar os comprimentos (largura e altura) dos objetos. Esse modo de expressar a comparação traz indícios do elemento essencial do modo de comparação da grandeza comprimento. No entanto, tarefas relacionadas às grandezas (comprimento, área, volume, capacidade, entre outras) são aprofundadas mais adiante, por se constituírem na gênese do conceito de número.

É importante ressaltar que as propriedades qualitativas (cor e forma) das figuras e objetos permitem a comparação e resultados não numéricos, expressos ou pela igualdade ou pela desigualdade. Por exemplo, duas figuras são iguais ou diferentes pela cor, assim como podem ser iguais ou diferentes pela forma. Ou seja, não é possível atribuir um valor numérico para a igualdade, tampouco para a diferença. Porém, desenvolver a ação investigativa por meio da análise das características das figuras geométricas permite encaminhar os estudantes para o mundo da matemática (Rosa, 2012). Todos conseguiram analisar os objetos e definir a igualdade ou a desigualdade pela cor, pelo tamanho da altura e pela forma. Para Elkonin (2019a, p. 165), “não é conveniente passar para as ações seguintes sem que a anterior não esteja completamente correta”. Nisso se revela a importância de a ação de controle percorrer concomitantemente as demais ações, pois “consiste no acompanhamento da coerência entre a execução e a sequência de cada ação particular” (Ibidem, p. 165).

Na sequência, ainda no contexto da apropriação das características cor e forma, propusemos a seguinte tarefa particular de estudo diante da imagem de um conjunto de xícaras com a falta de uma e algumas possibilidades para compor o conjunto (Figura 3). Questionamento: “Qual é a xícara que completará o conjunto?”

Figura 3 - Conjunto de xícaras



Fonte: Gorbov e Mikulina (2001, p. 3).

Uma estudante dirigiu-se ao quadro para escolher a xícara que completaria o conjunto. De imediato, ela apontou para a xícara com a mesma cor e a mesma forma das demais xícaras do conjunto. Quando questionada sobre o motivo de não ter escolhido as outras duas, apontou para a outra xícara rosa, de forma diferente, e disse que era muito alta. Também

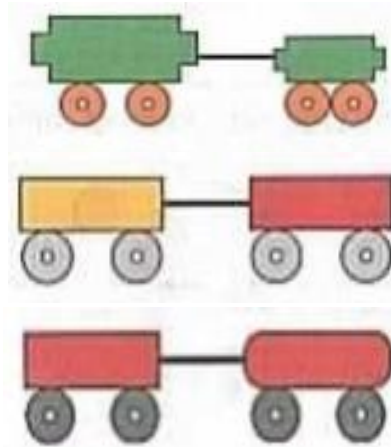
desconsiderou a outra de mesma forma com a justificativa de que não tinha a mesma cor. A classe concordou com a resposta da colega. No movimento investigativo, os estudantes descartam primeiramente a xícara que se diferencia pela forma, mas igual pela cor. Essa primeira seleção ocorreu pela forma, restando duas xícaras iguais por essa característica, mas diferentes pela cor. Portanto, a característica definidora da escolha foi aquela que tinha a mesma cor do conjunto, a rosa.

No entanto, ao questionarmos a classe se havia duas xícaras com a mesma forma dentre aquelas que comporiam o conjunto, a maioria respondeu que “*não*”. A resposta negativa nos fez refletir e repensar a discussão anterior de que o *desenho* da figura está relacionado à forma. Apesar da escolha correta da xícara rosa, na justificativa, quando perguntados por que não escolheram a outra (que não é rosa), o foco da resposta voltou-se para o desenho que a xícara tinha em sua superfície (estrelas de cor preta), e não para a forma da xícara. Isso nos fez perceber a importância da condução de nosso diálogo com os alunos e, além disso, da observação criteriosa das manifestações dos estudantes. Como pesquisadora, nesse momento, refletimos sobre o aspecto mais importante da atividade de estudo, “concentrar a atenção do aluno na aplicação correta do modo generalizado e não apenas na obtenção do resultado”, com base na análise das propriedades essenciais do objeto de estudo, reconhecendo que, aqui, a forma também é uma propriedade essencial (Elkonin, 2019a, p. 165).

Nesse contexto, o modo de organização do Ensino Desenvolvidor tem como pressuposto a ação investigativa do objeto de estudo de forma coletiva e colaborativa, guiada pela linguagem científica do professor, bem como manter o elo que inter-relaciona cada tarefa de estudo. Esse movimento cria novas necessidades para superar e avançar na apropriação dos conceitos de cor, forma e tamanho. Portanto, o debate desencadeador da tarefa particular subsequente permaneceu nas mesmas características, pois, no processo de investigação, não basta observar as características que são iguais, também são investigadas as que são diferentes. Essa necessidade foi criada quando, além de encontrar a resposta correta nas tarefas anteriores, foi necessário justificar as que não satisfaziam o que era proposto, ou seja, analisar as propriedades essenciais.

Para isso, disponibilizamos em uma folha impressa as imagens de três pares de vagões (Figura 4). Os estudantes deveriam investigar, em cada situação, se as características estudadas eram iguais ou diferentes.

Figura 4 - Pares de vagões



Fonte: Gorbov e Mikulina (2001, p. 3).

A fala dos estudantes, ao analisarem o primeiro par de vagões, permitiu-nos considerar que na resolução desta tarefa a característica forma passou a ser citada no lugar da palavra *desenho*. Isso se manifestou ao pronunciarem coletivamente “*são iguais pela forma, pela cor, e diferentes pelo tamanho*”.

Quanto ao segundo par de vagões, também a maioria das respostas citou a igualdade na forma e no tamanho e a diferença na cor. No entanto, dois estudantes (Samuca e Anita) afirmaram que os vagões tinham tamanhos diferentes. Diante de tal fala, questionamos:

Pesquisadora: *Será que são diferentes? Como podemos verificar se os tamanhos são diferentes ou iguais? Tem como comprovar?*

Anita: *Podemos pegar uma régua. Eu esqueci a minha régua em casa.*

Pesquisadora: *Anita, não temos régua. Será que podemos medir sem régua?*

Samuca: *Vamos pegar um papel e colocar aqui* (apontando para um dos lados do vagão de cor vermelha).

A fala da Anita indicava um modo de medir os comprimentos da largura e da altura por meio de um instrumento conhecido. Na organização do ensino de matemática, conforme o sistema Elkonin-Davídov, o processo de medição da grandeza comprimento com a régua ocorre somente após a apropriação do modo generalizado de comparar e medir grandezas com a finalidade de assimilar o conceito de número. Nesse sentido, nosso objetivo era criar condições para que os estudantes investigassem outra possibilidade para verificar a diferença dos tamanhos dos vagões apontada por Samuca. No momento que o estudante colocou em movimento o pensamento para resolver o desafio e sugeriu, para a solução, usar um recorte de papel, teve início o processo investigativo. Assim, a ação foi operacionalizada por Samuca

quando recortou um pedaço de papel do tamanho da altura do vagão amarelo e comparou com a altura do vagão vermelho (Figura 5). Novamente questionamos:

Pesquisadora: *É igual ou diferente?*

Samuca: *É igual.*

Pesquisadora: *Vamos verificar também o comprimento da largura dos vagões? Como podemos fazer?*

Samuca: *Colocar aqui e aqui* (aponta para a largura dos dois vagões).

Figura 5 - Verificação das medidas dos lados dos vagões



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

É importante destacar que em tarefas anteriores, em que foram investigados objetos tridimensionais e bidimensionais, definimos, com os estudantes, que a altura seria relacionada à posição vertical e a largura à horizontal.

Esse processo permitiu que o estudante analisasse, na forma objeta, o que havia identificado sensorialmente na observação visual dos vagões. De acordo com Davydov (2017, p. 220), o princípio do caráter objeta permite “revelar o conteúdo do futuro conceito, e, por outro, representar esse conteúdo primário em forma de modelos conhecidos.” Mesmo em um estágio inicial, o recorte constituiu-se como o modelo para a investigação de Samuca, sobre sua observação direta e externamente visível referente ao tamanho dos vagões. Após a manipulação do recorte na verificação dos tamanhos dos comprimentos da largura e da altura dos retângulos, representações dos vagões, tornamos a perguntar-lhe.

Pesquisadora: *Será que os vagões são iguais ou diferentes?*

A expressão manifestada no olhar do estudante revelava que ainda estava insatisfeito e indeciso sobre a ação a ser executada. Com nossa ajuda, ele sobrepôs o recorte às superfícies dos dois vagões (Figura 6) e respondeu: *É! São iguais, mas parecia que eram diferentes.*

Figura 6 - Sobreposição do recorte nas superfícies dos vagões



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

A discussão individual dessa tarefa foi ampliada para o coletivo. Solicitamos que Samuca fosse até o quadro onde a imagem estava projetada (*PowerPoint*) e explicasse aos colegas o que tínhamos discutido. O estudante pegou o recorte de papel e disse: “*Eu peguei isso e...*” e sobrepôs o recorte na imagem projetada, primeiro no comprimento da largura. Ele precisou marcar no recorte o comprimento da largura do vagão amarelo e comparar a mesma medida por meio da sobreposição do mesmo recorte no vermelho. O mesmo procedimento foi realizado para a medição do comprimento da altura dos dois vagões.

Durante a execução da tarefa particular de estudo, o estudante precisou de nossa ajuda para sobrepôr o recorte na imagem, de modo que coincidissem o início e o fim do recorte com o início e o fim da imagem projetada. Ele reconheceu o procedimento, sabia qual era a ação, a ajuda foi para a operacionalização da ação, apenas faltava-lhe habilidade para manusear o recorte. O movimento na apropriação dos conceitos não é linear, constitui-se de idas e vindas. Por isso a importância de o professor prestar atenção no movimento de pensamento dos estudantes, daqueles que revelam mais autonomia e dos que precisam de ajuda. A autonomia é construída na observação e intervenção do professor nesses momentos em que não conseguem realizar as ações sozinhos.

A exposição pelo estudante de suas apropriações, no quadro, possibilitou o controle de suas ações de estudo por nossa parte, por parte dos colegas, e a formação do autocontrole. Para Elkonin (2019a, p.167), “a formação do hábito de controle acontece durante o processo de controle das ações dos outros e, depois, a criança começa a controlar as suas próprias.” A constituição da atividade de estudo, nos estudantes, consiste na transição gradativa das ações do professor para que o aluno possa fazer as ações de maneira autônoma.

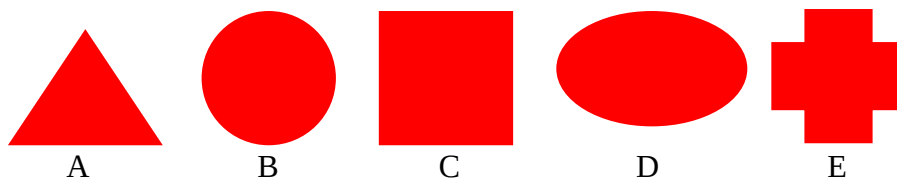
Para finalizar o primeiro encontro, com o objetivo de os estudantes continuarem a refletir sobre as discussões realizadas na aula, solicitamos que relatassem para a família o que haviam apreendido naquele dia.

No segundo encontro, antes de darmos sequência às tarefas de estudo do sistema Elkonin-Davídov, retomamos os conceitos discutidos na primeira aula. Retomar o que foi estudado na aula anterior passou a ser um procedimento rotineiro em todos os encontros. Solicitamos que comentassem sobre o que haviam aprendido no encontro anterior. Inicialmente ficaram pensativos, receosos, mas quando uma colega começou a relatar, os demais também se encorajaram a contribuir. Tina expôs o que lembrava sobre a tarefa dos pares de vagões: “*No primeiro tinha mesma forma, mesma cor, não tinha o mesmo tamanho, as rodas eram iguais, mas diferentes porque uma era separada e outra junto*”. Para expressar a divergência na composição das rodas dos vagões, a estudante fez gestos afastando e aproximando as mãos.

Em relação ao segundo par de vagões, Sô lembrou as características das figuras observadas e complementou: “... *possuem cores diferentes, tamanhos iguais e geométrico igual*”. Questionamos: “*O geométrico é o mesmo que qual característica?*” Alguns responderam “*a forma*”. Outro aluno comentou o procedimento que o colega realizou para confirmar os tamanhos dos vagões: “*Lembra que o Samuca pegou a régua (referindo-se ao recorte de papel) e mediu?*”

Na sequência do Experimento Didático, propusemos o jogo “adivinhe a figura”. Apresentamos algumas figuras geométricas (Figura 7), por meio de *slides* no *PowerPoint*.

Figura 7 - Figuras geométricas com a mesma cor



Fonte:

Elaborada pela autora com base em Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008).

As crianças deveriam “adivinhar” qual era a figura pensada por nós. Para isso, deveriam fazer questionamentos que lhes auxiliassem na adivinhação. No contexto do desenvolvimento da ação investigativa, “adivinhar” não consiste em chutar aleatoriamente a resposta correta. No entanto, como previsto, os estudantes apontavam para as imagens ou faziam afirmações do tipo: o triângulo, o círculo, o quadrado, a redonda (referindo-se à elipse), a cruz. Inicialmente, a cada afirmação respondíamos que não era a figura pensada. Porém, com a finalidade de fazê-los refletir sobre o comando dado na tarefa, intervínhamos explicando que estavam fazendo afirmações, e não perguntas. O propósito era fazer uma pergunta que os

auxiliasse na resolução da tarefa. Procuramos centrar a atenção dos estudantes nas características estudadas.

Pesquisadora: *Quais as características das figuras que estamos estudando?*

Estudantes: *Forma, cor.*

Sô: *Geométrico.*

Ao trazermos para o debate as características, os estudantes expressavam ter se apropriado desses elementos para a análise das figuras, mas não do procedimento de seu manuseio. Não estavam habituados a fazer questionamentos. Para a ação investigativa, as características das figuras são somente o meio, o mais relevante é a elaboração de perguntas coerentes em relação a elas. Por isso, o foco era desenvolver o hábito de fazer questionamentos, as “perguntas boas” que indicam a solução das tarefas com o menor número possível de questões. Se o foco da tarefa é a análise da cor e da forma e a diferença é somente para a forma, a “pergunta boa” tem que ser em relação à forma, e não à cor.

O ensino mais comum de que temos conhecimento da escola brasileira é aquele em que os estudantes reproduzem exatamente aquilo que foi transmitido. Para Davidov e Márkova (2019, p. 191), no Ensino Desenvolvimental “o objetivo da escola não era apenas transmitir informação para os alunos, mas também ensiná-los a obter o conhecimento por conta própria, por meio da autoeducação.” Desse modo, o ensino que desenvolve é aquele que possibilita a ação investigativa pelo estudante, ou seja, que possibilita refletir, contestar, criar, ir além do dado imediatamente, processo instigado pelas tarefas propostas pelo professor.

Com base na fala de Sô sobre a característica que denominou de *geométrico*, buscamos resgatar as discussões da aula anterior sobre o *desenho*, nomenclatura dada por outra aluna para a forma. Nossa maior dificuldade foi fazê-los compreender que, para “adivinhar” a figura pensada, precisariam fazer uma pergunta. Ao insistirmos no questionamento e nas características estudadas, um estudante mencionou “a cor”, ainda afirmativamente. Persistimos na ideia da formulação da pergunta, e outro estudante indagou: “Qual é a cor?” “Vermelha”, respondemos.

Essa questão foi relevante para que pudessem perceber o equívoco da pergunta na investigação da situação apresentada: todas as figuras possuem a mesma cor.

Pesquisadora: *Ao responder que a figura é vermelha, estou respondendo em qual eu pensei?*

JB: *Não.*

Pesquisadora: *Por que não?*

JB: *Porque todas são vermelhas.*

A irrelevância da pergunta direcionada à característica cor, em função do fim da tarefa, abriu possibilidade para a “pergunta boa”, aquela que diferencia as figuras. Sô reformulou a resposta dada anteriormente e indagou: “*Qual é o geométrico?*” As reflexões relativas ao significado da palavra geométrico remeteram a uma nova pergunta, por outra estudante: “*Qual é a forma?*”

Na tarefa particular seguinte, foram apresentadas as imagens de algumas figuras (cinco) com a mesma forma (quadrados), mesmo tamanho da altura e da largura, porém com cores diferentes. Propusemos continuar o jogo “adivinhe a figura”, sugerindo que inicialmente pensaríamos em uma delas. As primeiras manifestações ainda se concentravam em afirmações, cada estudante dizia uma cor, aleatoriamente.

Estudante: *É vermelha.*

Pesquisadora: *Não.*

Estudante: *É azul.*

Pesquisadora: *Não.*

Na tentativa de levá-los a refletir sobre as condições essenciais para a resolução da tarefa, questionamos: “*Podemos fazer cinco perguntas sobre a cor?*” Ao mesmo tempo, chamávamos a atenção para a tarefa anterior, com figuras de mesma cor e formas diferenciadas.

Pesquisadora: *Na tarefa em que as figuras eram da mesma cor, tinha sentido perguntar qual era a cor?*

JB: *Não.*

Pesquisadora: *E agora?*

Samuca: *Agora tem sentido.*

Pesquisadora: *Por que tem sentido?*

Samuca: *Porque as cores não são iguais.*

Pesquisadora: *Tem algo que é igual?*

Sô: *O quadrado.*

Tina: *A forma.*

Pesquisadora: *Qual é a pergunta boa?*

Biel: *Qual é a cor?*

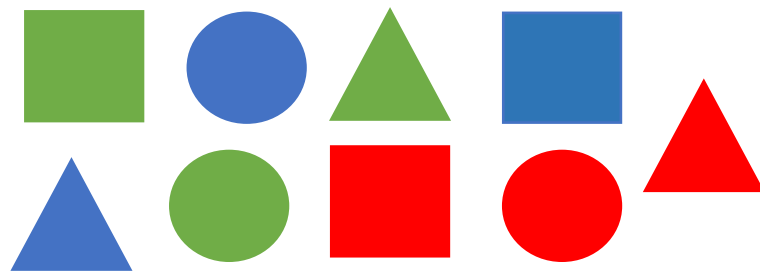
Nesse caso, a pergunta relacionada à característica forma foi considerada incoerente ou sem sentido, por serem figuras de formas iguais. Cada vez mais é evidente a relevância da investigação analítica e do trabalho coletivo para a resolução das tarefas e para a apropriação do conceito por meio do sistema conceitual engendrado pelo Ensino Desenvolvimental.

A investigação relacionada às tarefas anteriores significa ao mesmo tempo retomar conceitos já apropriados, além de evidenciar sua inter-relação. A cada nova tarefa há um vínculo com a que a antecede e o prenúncio de uma nova necessidade. Nesse modo de organização do ensino, não se fazem necessários momentos específicos de revisão dos conceitos, a revisão

ocorre em todo o processo, principalmente na passagem de uma tarefa a outra. No ensino tradicional, a compreensão dos conhecimentos, de acordo com os seus fundamentos, apresenta-se “em forma de abstrações verbais claras e sucessivamente desdobradas [...] cada abstração verbal deve ser correlacionada, pela criança, com uma imagem sensorial completamente definida e precisa” (Davydov, 2017, p. 216). Conforme o autor, essa compreensão é que caracteriza o pensamento empírico-classificador. Para Davydov (2017), o verdadeiro papel da educação para o desenvolvimento se efetiva pela reestruturação do sistema de ensino, que, dadas as condições históricas, visa transformar o desenvolvimento psíquico dos estudantes, independentemente do nível de ensino.

Para a continuidade do jogo “adivinha a figura”, apresentamos, também no *PowerPoint*, um conjunto de figuras de cores e formas diferentes (Figura 8). Questionamos: “Em qual figura estou pensando?”

Figura 8 - Figuras geométricas com cores e formas diferentes



Fonte: Elaborada pela autora com base em Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008).

Imediatamente após a exposição das imagens e da questão norteadora da tarefa particular, Biel interrogou: “Qual é a cor”? “É azul”, respondemos. O estudante, admirado, exclamou: “Mas, tem três azuis!” Samuca rapidamente perguntou: “Qual é o formato?” “Circular”, dissemos.

As discussões durante a investigação em tarefas similares às características cor e forma, em que as figuras apresentavam diferença somente em relação a uma característica, possibilitaram que os estudantes inferissem a necessidade de duas perguntas, na situação em que as figuras se diferenciavam pelas duas características.

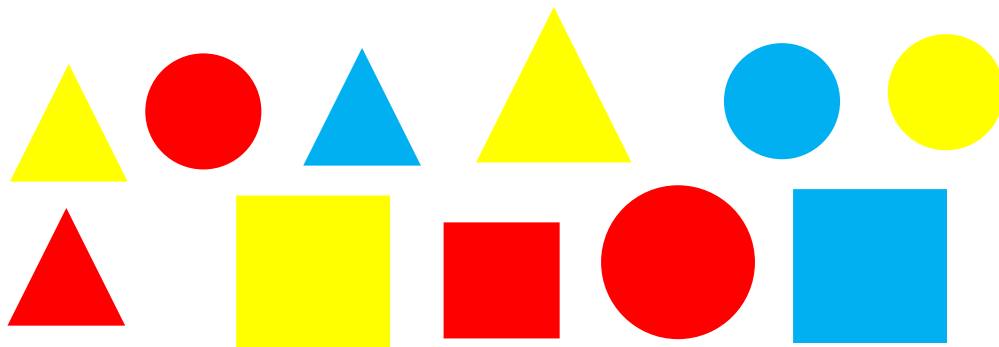
Nosso cuidado, na execução das tarefas, foi com o desenvolvimento da ação investigativa dos estudantes de forma coletiva. Assim, propusemos, conforme orientação do sistema Elkonin-Davídov, tarefas similares às características cor e forma, porém quem analisava as figuras eram os próprios estudantes (Gorbov; Mikulina; Savieliev, 2008). De

acordo com Obújova (1987, p. 195), “Somente sob condições de cooperação a criança começa a entender o ponto de vista das outras pessoas e a diferenciá-las do seu.”⁵²

Foi durante a discussão coletiva que os estudantes perceberam que seus colegas analisavam e investigavam as figuras sob outro ponto de vista e sugeriam outras soluções, diferentes das suas. A participação no jogo “adivinha a figura” foi tão significativa para eles, que voluntariamente se dispunham a pensar em uma figura para que um colega investigasse, por meio das “perguntas boas”, a figura pensada.

A continuidade do jogo se deu com a apresentação das figuras geométricas (Figura 9). Uma nova característica permitiria a análise para diferenciar as figuras: o tamanho. Nesta etapa, o tamanho se limita à comparação de duas figuras da mesma forma na relação grande-pequeno (Gorbov; Mikulina; Savieliev, 2008). Novamente foram questionados: “*Em qual figura estou pensando?*”

Figura 9 - Figuras geométricas com cores, formas e tamanhos diferentes



Fonte: Elaborada pela autora com base em Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008).

Os estudantes observaram por alguns instantes as figuras, e logo Samuca se manifestou: “*Qual é o tamanho, qual é a cor e qual é o formato?*” Samuca se apropriou do movimento que relacionava as características à quantidade de perguntas. Assim, se na tarefa anterior eram suficientes duas perguntas, agora, com três características, era necessário formular três perguntas. Por isso, não se ateve em perguntar uma de cada vez. Mesmo assim, continuamos o debate, pois precisávamos nos certificar se os demais estudantes haviam se apropriado do pensamento formulado por Samuca.

Assim, perguntamos novamente: “*Em qual figura estou pensando?*” Samuca questionou: “*Qual é a altura?*” Nesse momento, o estudante passou a fazer perguntas

⁵² “Sólo en las condiciones de cooperación el pequeño comienza a comprender el punto de vista de otras personas y a diferenciarlos del propio.”

individualmente, sua primeira questão foi direcionada para a altura. Os demais observavam atentos.

Pesquisadora: *As alturas dos dois triângulos amarelos são iguais?*

Estudantes: *Não!*

Pesquisadora: *As alturas dos círculos vermelhos são iguais?*

Estudantes: *Não!*

Pesquisadora: *A altura do quadrado vermelho e do quadrado amarelo são iguais?*

Estudantes: *Não.*

Pesquisadora: *Como posso dizer qual a figura pensada?*

Samuca retomou a fala e reformulou a pergunta: *“Eu posso falar qual é a cor?”* Intencionalmente escolhemos a cor amarela, da mesma forma que poderíamos ter optado pela vermelha. Escolher a cor azul seria inconveniente, porque a finalidade principal da tarefa era a inclusão, na investigação, da característica tamanho. Para a cor azul, seria suficiente perguntar pela forma e pela cor. A escolha da cor amarela remetia à pergunta sobre o formato, pelos estudantes. Não escolhemos aleatoriamente qualquer forma amarela, escolhemos propositalmente o triângulo. Essa opção foi retrucada pelos estudantes: *“Mas tem dois triângulos!”* Samuca ponderou: *“Então, por isso eu disse: qual é a altura?”* O estudante, ao se referir à altura, estava também indicando o tamanho da figura. Como já ressaltamos, os estudantes manifestavam suas compreensões na resolução das tarefas em diferentes tempos. Enquanto alguns avançavam no pensamento como Samuca, que associou as alturas das figuras a seus tamanhos, outros precisavam ser desafiados a pensar mais para a solução das tarefas. Para tanto, procurávamos inseri-los no debate e colocá-los em movimento de pensamento, com novos questionamentos e análise das respostas dos colegas. Perguntávamos: a tarefa pode ser resolvida de outra forma? Entendíamos que desse modo possibilitávamos o envolvimento e a apreensão dos conceitos pela maioria.

Assim como nas tarefas anteriores, a solução está vinculada à investigação pela análise das características estudadas. A observação não se limita ao olhar aparente e imediato manifestado pelo órgão do sentido, a visão. Para Galperin; Zaporózhets; Elkonin (1987, p. 304), o desenvolvimento sensorial da criança se dá pela “[...] assimilação da experiência sensorial social, da cultura sensorial.”⁵³ Portanto, investigar a figura pensada com base nas características das figuras com a participação ativa dos estudantes propicia o desenvolvimento da experiência sensorial, ou seja, não é uma percepção passiva de quem analisa ou uma mera adaptação do órgão do sentido visual (Galperin; Zaporózhets; Elkonin, 1987).

⁵³ “[...] asimilación de la experiencia sensorial social, de la cultura sensorial.”

Percebemos que alguns estudantes, ao elaborarem a pergunta para investigar a figura pensada, costumavam manter a ordem: pela cor, pela forma e, por último, pelo tamanho. Nossa pretensão era que os estudantes percebessem que a pergunta inicial poderia ser para qualquer característica, ou seja, não havia uma ordem definida. Para isso, propusemos que um estudante pensasse na figura e nós elaboráramos a pergunta. JB se disponibilizou a pensar a figura, e em seguida questionamos: “Qual é a forma?” JB definiu: “É o triângulo”. Seguimos com outro questionamento relativo à cor, ao qual JB respondeu “azul”. A escolha da cor azul possibilitou nossa intervenção para que JB e os demais colegas refletissem:

Pesquisadora: *Quantas perguntas foram necessárias para descobrir a figura pensada?*
Estudantes: *Duas.*

O fato de as figuras de cor azul se diferenciarem somente pela forma para a identificação da figura tornou necessárias somente duas perguntas. Outro estudante propôs pensar em uma figura, e formularmos uma pergunta relacionada ao tamanho, que foi respondida por Miguel: “Grande”. Dentre as imagens expostas, descartamos (pesquisadora e estudantes) as pequenas, os triângulos (amarelo, azul e vermelho), o quadrado (vermelho) e os círculos (amarelo, azul e vermelho). Para a investigação, restaram as figuras grandes: o triângulo amarelo, os quadrados amarelo e azul e o círculo vermelho. A análise prosseguiu:

Pesquisadora: *Qual é a cor?*
Miguel: *Amarelo.*
Pesquisadora: *Qual é o formato?*
Miguel: *Quadrado.*
Pesquisadora: *Quantas perguntas foram necessárias?*
Estudantes: *Três.*

Nessa tarefa particular, centramos o debate na relação entre as características que diferenciam as figuras e a quantidade de perguntas para descobrir a que foi pensada. Ou seja, se as figuras se diferem por uma característica, somente uma pergunta resolve a situação. Se a diferença envolve duas, serão dois questionamentos, e assim para três ou mais. Além disso, não existe uma ordem pré-estabelecida para a característica que primeiro será investigada. Essa percepção nos dá indícios de que a investigação das figuras, ainda que em seu aspecto externo (modelos, formas, cores, tamanhos), não se resume a uma simples memorização de procedimentos mecânicos, e sim indica o início do “estágio de elaboração das próprias ações perceptivas”⁵⁴ (Galperin; Zaporózhets; Elkonin, 1987, p. 305).

⁵⁴ “[...] etapa de elaboración de las acciones perceptivas mismas.”

No terceiro encontro entregamos um *kit* (envelope com recortes de papel de cores, tamanhos e formas diferentes). O objetivo da tarefa, de acordo com o sistema Elkonin-Davídov, é continuar o jogo “adivinha a figura” e analisar a ação investigativa de cada estudante.

Pesquisadora: *Neste envelope vocês encontrarão um kit de recortes.*

Sô: *Eles têm as mesmas texturas.*

Pesquisadora: *Mesma textura?*

Assim que abriram os envelopes, iniciaram a análise dos recortes pela igualdade ou desigualdade das características. Sô mostrou dois recortes circulares e afirmou possuírem cores diferentes, porém com o mesmo formato. No primeiro momento, a estudante usou a denominação *textura*, porém, ao ser questionada sobre a palavra, reformulou sua fala: “*A mesma forma, tipo o azul e o laranja têm a mesma forma*”. Novamente salientamos a atenção que o professor precisa ter nas manifestações dos estudantes. Nem sempre usam as nomenclaturas esperadas, principalmente os do primeiro ano escolar, que, por estarem em processo de alfabetização, possuem um vocabulário limitado. Cabe ao professor interpretar e compreender os significados das palavras que expressam o pensamento deles no processo de investigação.

A maioria das tarefas anteriores foram apresentadas em *PowerPoint* ou impressas. Entretanto também usamos *kits*, entregamos envelopes com recortes de papel a cada um dos alunos. A manipulação dos recortes possibilitou, além da análise das características qualitativas não mensuráveis, uma discussão importante na Matemática, para diferenciar conceitualmente figuras geométricas planas e sólidos geométricos. Para chamar a atenção dos estudantes sobre as diferenças entre as figuras geométricas apresentadas no *PowerPoint* e nas tarefas impressas, escolhemos aleatoriamente um recorte de forma quadrangular⁵⁵: “*Chamaremos de recortes os que conseguimos pegar! Este é um recorte de forma quadrangular*”. Na sequência, de posse de um recorte de forma circular, questionamos:

Pesquisadora: *Esse aqui é um recorte de que forma?*

Estudante: *Retângulo.*

Estudante: *Não, é redondo.*

Pesquisadora: *E como podemos chamar?*

Estudantes: *Círculo.*

Pesquisadora: *Circular. Como é um recorte ele não é um círculo, ele é um recorte de forma circular.*

É comum, desde a Educação Infantil, nas proposições brasileiras, apresentar para os estudantes blocos (cubos, cilindros, prismas) para o estudo de figuras geométricas planas

⁵⁵ Embora não sejam mais figuras planas (duas dimensões), na investigação das características cor, forma, tamanho e posição dos recortes (três dimensões), não consideramos a espessura.

(Rosa, 2012). Isso justifica as respostas dadas pelos estudantes quando questionados sobre o nome do recorte circular: “*redondo*”.

As figuras planas que usamos para a investigação das características cor, forma e tamanho, apresentadas no *PowerPoint* e impressas, possuem duas dimensões: altura e largura, e são denominadas triângulo, retângulo, círculo, quadrado, entre outras designações. Já os recortes do *kit* (sólidos geométricos) têm três dimensões: altura, largura, espessura. Denominar os recortes pelos nomes das figuras planas, como fazem alguns livros didáticos brasileiros, é um equívoco conceitual na matemática. Por isso chamamos de recorte com forma circular no lugar de círculo, triangular no lugar de triângulo, quadrangular no lugar de quadrado etc.

Voluntariamente, os estudantes passaram a formar agrupamentos dos recortes nas superfícies das carteiras. Cada um escolheu o critério e expôs os recortes com base nas características tamanho, forma ou cor (Figura 10). Aproveitamos essa ação das crianças para realizar a discussão sobre os critérios dessa organização.

Figura 10 - Recortes agrupados pela forma e pelo tamanho



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

JB: *Eu organizei tudo na ordem, um em cima do outro.*

Pesquisadora: *Você separou por qual característica? Quais características nós estudamos?*

Sô: *Forma, cor e tamanho.*

Pesquisadora: *JB, por que você separou as figuras desse jeito? Por alguma característica? Você separou pela cor?*

JB: *Para não deixar bagunçado.*

Pesquisadora: *Sô, vem ajudar. Por qual característica o JB separou? Ele separou pela cor?*

Sô: *Não. Ele separou pela forma.*

Pesquisadora: *Ele separou só pela forma?*

A expressão de JB “*para não deixar bagunçado*” não é aleatória. Sua organização tem por base o estudo sobre as características realizado nas tarefas anteriores. Para propiciar a ação investigativa sobre sua manifestação, decidimos questioná-lo: “*Por que você não colocou esse com esse?*”, apontando para os dois grupos de recortes de forma triangular. JB justificou: “*Porque esse é mais pequeno*”. Ao ser questionado sobre a característica que poderia associar ao significado de “*pequeno*”, JB permaneceu em silêncio. Solicitamos que outro estudante ajudasse a analisar os agrupamentos realizados pelo colega. Samuca observou e concluiu: “*Pela forma e pelo tamanho*”.

As estudantes Lia (à esquerda) e Manu (à direita) organizaram os recortes pela forma (Figura 11). Solicitamos que explicassem o procedimento realizado.

Figura 11 - Recortes agrupados pela forma



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

Pesquisadora: *Lia, explica o que você fez. Você escolheu pela cor?*

Lia: *Não.*

Pesquisadora: *Eles são semelhantes de algum modo?*

Lia: *Têm o mesmo desenho.*

A aluna usou a expressão “*desenho*”, dada por uma das colegas no primeiro encontro, para indicar a forma do recorte. Quando indagamos para a classe “*O desenho é o mesmo que qual característica?*”, coletivamente disseram “*forma*”. Continuamos a indagar a aluna: “*Mesma forma, mas tem outra característica, Lia? Você já disse que os recortes são diferentes pela cor, iguais pela forma. Tem mais alguma coisa para analisar? Você pensou na cor para organizar os recortes?*” Ela respondeu: “*Não*”.

Lia observou atentamente os recortes e, ao ser questionada sobre quais as formas, apontou para um dos agrupamentos: “*quadrada*”. Então fizemos referência ao outro: “*E este?*” A estudante respondeu “*redonda*”. Reformulamos a fala: “*Os recortes possuem forma circular*”. Mesmo que a aluna não tenha usado a linguagem “apropriada” para expressar sua compreensão, consideramos que a organização dos recortes não é ocasional, segue um modelo com base nas características em estudo.

Do mesmo modo fica evidente, ao observarmos a organização da estudante Manu, que os critérios foram as formas (circulares, quadrangulares e triangulares) e os tamanhos (grande e pequeno). Em sua exposição, negou que tenha agrupado pela cor, porque em cada grupo há diversas cores (amarelo, rosa, vermelho, laranja e azul). Prosseguimos com as questões investigativas:

Pesquisadora: *Os recortes são parecidos por outra razão?*

Manu: *São pela forma.*

Pesquisadora: *Você disse que são diferentes pela cor e iguais pela forma. Há outra característica que é igual ou diferente?*

Manu: *Eles são diferentes pelo tamanho.*

A fim de nos certificarmos se a aluna havia se apropriado das diferenças e/ou semelhanças dos recortes, sugerimos que nos indicasse aqueles que tinham a mesma forma. Com o dedo indicador, apontou para os de forma triangular grandes, dizendo “*este, este, este*”. Em seguida, gesticulou incluindo os dois pequenos e acrescentou “*este*”. Por fim, ao ser questionada se existia outra característica que os diferenciava, afirmou “*sim, o tamanho*”.

Outros estudantes (Figura 12) organizaram os recortes pela característica cor.

Figura 12 - Recortes agrupados pela cor



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

A análise dos procedimentos realizados para a organização dos recortes possibilitou-nos proceder ao controle das apropriações, pelos estudantes, das características cor, forma e tamanho dos recortes, o que serviu para prosseguir no desenvolvimento das tarefas com a inclusão de uma nova característica, a posição. Como dissemos anteriormente, nas tarefas de estudo, no primeiro ano escolar, inicialmente o foco da ação investigativa é a análise das características qualitativas de figuras e objetos geométricos. O processo de assimilação dos conceitos pelos estudantes, conforme a organização do Ensino Desenvolvimental, é verificado nas ações de controle e de avaliação. De acordo com Davídov (1988, p. 216), tais ações não devem ser vistas separadamente, elas se inter-relacionam e se complementam. A principal função da ação de controle é garantir que os estudantes realizem todas as operações necessárias para resolver corretamente uma variedade de tarefas particulares, e “[...] a avaliação determina, em particular, o grau de formação do procedimento geral de resolução da tarefa anterior.”⁵⁶

Nossa compreensão na realização das tarefas, até então, era que os estudantes estavam preparados para resolver uma nova tarefa, que apresentava outra característica de análise: a posição. O objetivo, agora, era levar as crianças a “adivinharem” a figura pensada,

⁵⁶ “La acción de evaluación, dirigida a poner en evidencia si el niño está preparado para pasar a resolver una nueva tarea de estudio, la que exige un nuevo procedimiento de solución (la evaluación determina, en particular, el grado de formación de procedimiento general de solución de la tarea anterior).”

mas de forma que necessitassem realizar questões relativas à posição da figura: “acima – abaixo”, “à esquerda – à direita”, “fica entre” (Gorbov; Mikulina; Savieliev, 2008).

Para tanto, apresentamos um *slide* no *PowerPoint* com sete superfícies quadrangulares, de mesma forma e de mesmo tamanho, dispostas na vertical (Figura 13). Quatro delas, de cor azul, foram colocadas entre três de cores diferentes (verde, vermelho e amarelo). Formulamos a questão norteadora para a continuidade do jogo: “*Em qual figura estou pensando?*”

Figura 13 - Quadrados de diferentes cores



Fonte: Elaborada pela autora com base em Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008).

Ao formularmos a pergunta, JB questionou: “*Qual é o formato?*” O estudante se apropriou da condição essencial para a investigação, qual seja, a formulação de uma pergunta direcionada a uma característica das figuras. Não é qualquer pergunta, esta tem que representar a observação consciente da(s) característica(s) que diferencia(m) as figuras. Portanto, na referida tarefa, a pergunta direcionada para a forma e para o tamanho não são “boas”, porque todas são iguais por essas duas características. A quantidade de perguntas não é limitada, mas não é permitido que apontem e perguntem: é esta?

Para refletir sobre a pergunta, indagamos: “*JB, por que a sua pergunta foi para o formato?*” Ele visualizou as figuras no *slide* e concluiu: “*É!! Não dá para saber*”. A questão então foi direcionada para os colegas.

Pesquisadora: *A pergunta do JB tem sentido, gente?*

Estudantes: *Não.*

Pesquisadora: *Por que não?*

Estudantes: *Porque são iguais.*

Na sequência, o mesmo estudante reformulou a pergunta: “*Qual é a cor?*” E pensamos, propositalmente, em uma superfície azul. JB se dirigiu ao quadro e disse: “*Tem: um, dois, três, quatro azul*”.

Pesquisadora: *Pois é, mas eu pensei em uma só.*

Samuca: *Ou o de cima, ou o de baixo, ou esse ou esse.*

Ao se referir às duas superfícies azuis que se encontravam entre a superior (de cima) e a inferior (de baixo), aproximou-se do quadro e apontou para as outras duas. Nossa interferência foi para a condição da tarefa: não é permitido apontar. Samuca usou as expressões “*de cima*” e “*de baixo*”, que remetem à posição da figura pensada, porém, no contexto da investigação foi necessário formular as perguntas: “*É a de cima? É a de baixo?*” Continuamos o debate: “*Não pensei nem na de cima e nem na de baixo*”. Lia perguntou: “*É a debaixo do verde?*” Respondemos que sim. Mas, com a intenção de buscar outras possibilidades, propusemos: “*Eu já disse qual a figura em que pensei, poderíamos fazer outra pergunta que represente a mesma figura?*” Outra aluna disse: “*Em cima da vermelha?*” Com base nas expressões usadas pelos estudantes, “em cima” e “embaixo”, passamos a refletir que “embaixo da verde” existiam três azuis. Essa reflexão ajudou-nos a pensar outras formas de localizar outros quadrados azuis por meio das expressões: fica entre os quadrados verde e vermelho? Está acima do verde? Está abaixo do amarelo? Fica entre o amarelo e o vermelho? Além dessas expressões, os estudantes questionaram: “*É o primeiro?*” “*É o último?*”

Dois pontos nos chamaram a atenção na resolução das tarefas: os estudantes passaram a formular questões – ainda que possamos discutir a validade delas – no lugar das afirmações predominantes no início do experimento, e demonstraram interesse pela investigação. A cada nova tarefa, solicitavam a condução do jogo:

Samuca: *Professora, posso pensar agora?*

Pesquisadora: *Pode.*

Samuca: *Já pensei.*

Pesquisadora: *Quem pergunta?*

Lia: *Qual é a cor?*

Samuca: *Azul.*

Pesquisadora: *Por que não escolheste a verde?*

Samuca: *Porque a verde só tem uma.*

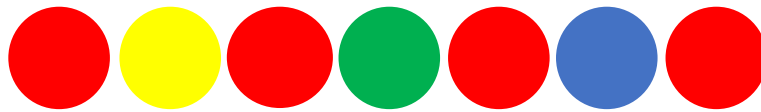
Pesquisadora: *Não precisa perguntar pela forma e pelo tamanho?*

Anita: *Não! Porque todas são do mesmo tamanho e todas são da mesma forma.*

O diálogo possibilitou a participação de vários estudantes com as perguntas: “*É debaixo do amarelo?*” “*Está entre o vermelho e o verde?*” E perguntamos, em contribuição: “*Está entre o vermelho e o amarelo?*” A esses questionamentos, Samuca respondeu negativamente, a não ser para a figura pensada por ele. Biel perguntou: “*É acima do verde?*” E, finalmente, Samuca disse que “*sim*”.

A tarefa particular subsequente (Figura 14) era semelhante à anterior. Foram apresentadas, por meio de *slide*, figuras geométricas (circulares) na horizontal. As figuras foram dispostas alternadamente: quatro de cor vermelha, uma amarela, uma verde e uma azul. A intenção foi colocar os estudantes no processo de análise para introduzir outros conceitos que remetem à posição das figuras, tais como: à direita de, à esquerda de, mais à direita, mais à esquerda, entre outras possibilidades (Gorbov; Mikulina; Savieliev, 2008).

Figura 14 - Círculos de cores diferentes



Fonte: Elaborada pela autora com base em Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008).

Os estudantes observaram as figuras e logo perceberam que a cor vermelha deveria ser a pensada. Não perguntaram sobre as características forma e tamanho. A investigação era direcionada para as cores. Com base na tarefa anterior, descartaram aquelas que não se repetiam. Uma estudante se manifestou: “*A professora pensou na vermelha?*” Afirmamos que sim e acrescentamos: “*Em qual delas?*” Os estudantes questionaram: “*É a última?*” “*É a primeira?*” “*Está entre a verde e azul?*”, entre outras interrogações.

Como mencionado anteriormente, a cada tarefa costumávamos retomar a discussão sobre as características já estudadas. Tínhamos convicção de que a percepção da inter-relação das características das figuras ou objetos era essencial no desenvolvimento da ação de análise. Por isso, questionamos:

Pesquisadora: *Quais as características das figuras que estamos estudando?*

JB: O formato, a cor.

Pesquisadora: *O que mais?*

Tina: *Desenho, tamanho.*

JB: *Forma.*

Neste ponto, insistimos: “*Vocês citaram o formato, a cor, a forma, o desenho, o tamanho, mas ainda falta uma característica*”. Sô gesticulou com as mãos, aproximando os dedos indicadores e os polegares (Figura 15), na tentativa de representar uma forma triangular e explicou: “*É onde a coisa está. Se o triângulo está na frente do quadrado, ali é o lugar dele*”.

Figura 15 - Representação gestual para representação do triângulo



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

Sô, com as expressões “*onde a coisa está*” e “*ali é o lugar dele*”, esforçou-se para se referir à posição, embora não tivesse usado esse termo. Continuamos questionando: “*Será que podemos usar outra palavra para dizer qual é o lugar do triângulo, exemplo da Sô?*” Para isso, refletimos sobre o lugar ocupado por cada estudante na sala de aula e relacionamos com sua posição: “*O lugar de cada um de vocês é a posição em relação aos colegas. Por exemplo, a Manu está entre a Ket e a Lia*”. Buscamos acrescentar, conforme Davydov (2017, p. 218), o “caráter novo” desse conhecimento, ao propor tarefas que exijam ações não espontâneas, com enfoque investigativo, como “levantar hipóteses, delimitar perguntas, estabelecer relações” (Rosa, 2012, p. 78).

Iniciamos o quarto encontro com a discussão de duas tarefas impressas, entregues na aula anterior para serem realizadas em casa. A centralidade de sua realização era a posição, ainda que as figuras fossem as mesmas discutidas para as demais características. Na primeira, os estudantes deveriam apontar de algum modo (circulando, riscando, indicando com flechas), os círculos que estavam: à esquerda da figura quadrangular laranja, à direita da estrela e entre a figura quadrangular laranja e a estrela (Figura 16). Na segunda, apresentamos imagens semelhantes, porém na posição vertical. Neste caso, o foco da investigação era a identificação dos triângulos que se encontravam: acima da figura quadrangular laranja, abaixo da estrela e entre a figura quadrangular laranja e a estrela. Para análise, focamos na primeira tarefa.

Figura 16 - Posição das figuras geométricas



Fonte: Elaborada pela autora com base em Gorbov e Mikulina (2001).

Pretendíamos que os estudantes investigassem suas próprias operações. Assim, enquanto um deles se dirigia ao quadro onde as imagens estavam expostas, os demais participavam das discussões e analisavam o que haviam realizado em seus cadernos. Um dos componentes da estrutura da atividade de estudo para apropriação do conhecimento teórico pelo estudante consiste em possibilitar que ele compreenda a tarefa de estudo com a finalidade de

[...] dominar as relações generalizadas na esfera do conhecimento a estudar, e estimulá-lo a dominar novas formas de atuação. A aceitação da tarefa de estudo, pelo aluno, “para si mesmo” e sua formulação autônoma está intimamente relacionada com a motivação para aprender, com a transformação da criança em sujeito da atividade (Davidov; Márkova, 2019, p. 199-200).

Em nosso experimento, buscamos colocar os estudantes em ação investigativa por meio de questionamentos elaborados: por nós, na condição de pesquisadora, para os estudantes; entre eles; por eles direcionados a nós. Esse movimento motivava a participação e propiciava diferentes soluções pensadas coletivamente, mas que asseguravam a apropriação individual (Davídov, 1988).

Para a solução da tarefa sobre a posição dos círculos em relação à forma quadrangular laranja e à estrela, no início foi necessária a nossa intervenção na definição dos sentidos (esquerda e direita). Na primeira situação, foi solicitado que indicassem os círculos que estavam à esquerda da forma quadrangular laranja. JB usou um extensor de seu braço (cabo de vassoura) para mostrar os seis que estavam projetados no quadro (Figura 17).

Figura 17 - Círculos posicionados à esquerda do quadrado



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

Ao serem questionados: “*Todos concordam com a solução do JB?*”, coletivamente responderam de modo afirmativo. Na sequência, dirigimo-nos aos demais estudantes para

Nas duas tarefas imediatamente anteriores, a análise centrava-se na identificação de uma forma geométrica, círculos na posição horizontal e triângulos na posição vertical. A tarefa particular seguinte (Figura 19), apesar de ser opcional de acordo com as orientações do sistema Elkonin-Davídov (Gorbov; Mikulina; Savieliev, 2008), foi desenvolvida pela sua relevância para a investigação no conjunto das características (cor, forma, tamanho e posição) como um todo, bem como pela linguagem apropriada para a análise. Propusemos que os estudantes, individualmente, se dirigissem ao quadro para indicar a posição das figuras, com atenção para a investigação das características estudadas.

Figura 19 - Figuras geométricas diferentes pela cor, forma, tamanho e posição



Fonte: Elaborada pela autora com base em Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008).

Apresentamos a seguinte questão: *“Quais são as figuras que ficam à direita do grande círculo azul?”* Sô foi até o quadro e apontou, com o dedo indicador, o círculo vermelho grande, o quadrado amarelo pequeno e o triângulo vermelho pequeno. Buscamos acrescentar, à identificação por gestos, a nomenclatura de cada figura, com outro questionamento para a classe: *“Podemos dar nome às figuras que a Sô apontou?”* JB respondeu: *“Triângulo vermelho, círculo vermelho”* Tina acrescentou: *“Quadrado amarelo pequeno”*. Consideramos suficientes as respostas relativas à forma e à cor, ao se referirem ao triângulo e ao círculo vermelho, porque não havia outros de mesma forma/cor e de tamanhos diferentes. Porém, a resposta de Tina sobre o tamanho do quadrado amarelo permitiu-nos indagar: *“Por que o quadrado amarelo é pequeno?”* O diálogo possibilitou algumas suposições: a hipótese aventada na pergunta *“é por causa do formato?”* foi rejeitada pelos colegas. Sô gesticulou com a intenção de comparar os tamanhos das figuras fazendo uma contagem (um, dois, três,) na altura do círculo vermelho e na altura do quadrado amarelo pequeno (um, dois, três, quatro). Ela olhou com ar de indecisão a sua análise, pois a maior contagem foi para a altura menor e vice-versa. Em seguida, a aluna Ket observou: *“Porque tem outro quadrado amarelo que é maior”*. A resposta de Ket foi acatada pelos demais.

Formulamos mais uma pergunta: *“Quais são as figuras que ficam entre o triângulo amarelo grande e o círculo azul grande?”* Samuca dirigiu-se ao quadro, observou as figuras, ficou pensativo e apontou para o triângulo vermelho, que se encontrava à direita do grande círculo azul. O estudante estava em processo de elaboração do pensamento, pois a contribuição

dos colegas “*quando fica no meio*” ajudou-o a reformular sua resposta. Diante do *slide*, apontou para o círculo azul pequeno e para quadrado amarelo grande. Ao ser questionado “*Por que o círculo azul é pequeno?*”, afirmou “*porque não tem a mesma altura*”. Enquanto a maioria dos estudantes procurou resolver a tarefa com o olhar investigativo para as características cor, forma e tamanho das figuras como um todo, Samuca, em sua investigação, justificou a diferença do tamanho dos círculos azuis chamando de pequeno aquele que, comparado com o outro, tinha altura menor. Usou a mesma estratégia para nomear o quadrado amarelo grande. Este foi assim denominado porque sua altura era maior que a altura do outro quadrado amarelo. Para confirmar sua análise, passou o dedo indicador da esquerda para a direita, na horizontal, partindo do quadrado amarelo maior até o outro, e disse: “*A altura desse é maior que desse*”. Seus argumentos se apoiaram nas discussões para a solução de tarefas anteriores que envolviam a comparação de comprimentos da altura e da largura de figuras e objetos.

A inter-relação conceitual se mantém, conforme a proposição do Ensino Desenvolvimental, em uma nova tarefa particular ainda relacionada à solução de situações com figuras geométricas que possibilitassem, aos estudantes, a investigação das características cor, forma, tamanho e posição. As figuras eram as mesmas (Figura 19), porém dispostas na vertical. Os estudantes se dirigiam ao quadro e analisavam as imagens projetadas no *slide* direcionados por questões norteadoras, tais como: “*Quais são as figuras que ficam acima do grande círculo azul? Quais são as figuras que ficam entre o grande triângulo amarelo e o grande círculo azul? Quais são as figuras que ficam abaixo do círculo azul pequeno?*” Nessa tarefa, incluímos uma condição para nos certificarmos de que a linguagem, na identificação das figuras, tinha sido apropriada: não era permitido somente apontar a figura, cada uma deveria ser identificada pela nomenclatura apropriada. Assim, questionamos:

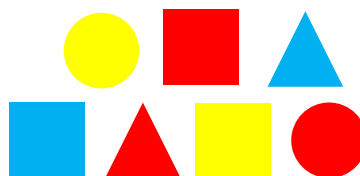
Pesquisadora: *Quais são as figuras que ficam acima do grande círculo azul?*

Estudantes: *Quadrado amarelo grande, círculo pequeno azul, triângulo grande amarelo e quadrado pequeno vermelho.*

As respostas nos indicaram que os alunos tinham se apropriado dos conteúdos e atingido os objetivos das tarefas e poderíamos continuar o jogo “adivinhe a figura”. Por isso, a investigação foi ampliada com a inclusão de um componente novo, a negação (Gorbov; Mikulina; Savieliev, 2008). Assim como nas primeiras tarefas, os alunos teriam que descobrir a figura pensada, com o menor número de perguntas possível.

Para a tarefa particular de introdução desse componente, foram projetadas no quadro figuras não enfileiradas, diferentes pela forma e pela cor (Figura 20).

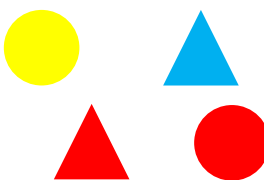
Figura 20 - Figuras geométricas de cores e formas diferentes



Fonte: Elaborada pela autora com base em Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008).

Iniciamos com a questão norteadora: “*Em qual figura estou pensando?*” E acrescentamos, “*ela não é quadrada*”, ao mesmo tempo que retiramos da projeção as três figuras quadradas (azul, vermelha e amarela). Ainda ficaram expostos os círculos amarelo e vermelho e os triângulos azul e vermelho (Figura 21).

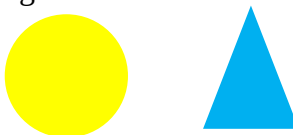
Figura 21 - Figuras geométricas de cores e formas diferentes



Fonte: Elaborada pela autora com base em Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008).

Imediatamente uma estudante questionou: “*Que cor é?*” A resposta foi dada de forma negativa: “*Ela não é vermelha*”. Foram retirados o triângulo e o círculo vermelhos (Figura 22).

Figura 22 - Figuras geométricas de cores e formas diferentes



Fonte: Elaborada pela autora com base em Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008).

A estudante Sô perguntou: “*Qual é a forma?*” A resposta foi: “*Não é triangular*”. Vários estudantes afirmaram “*é amarela*”. A manifestação permitiu-nos dialogar sobre as diferentes possibilidades, a pergunta final tanto poderia ser pela cor como pela forma. Para Obújova (1987), no processo de formação do pensamento teórico, durante a formação das operações, a reversibilidade e a associatividade são propriedades essenciais. A reversibilidade é associada às operações diretas e inversas, por exemplo, a resposta para o jogo “adivinha a figura” pode ser dada tanto na forma negativa como na afirmativa (Rosa, 2012). A associatividade “significa que no processo de aprendizagem a criança deve ser estimulada a

alcançar a solução por meio de diferentes procedimentos”⁵⁷ (Obújova, 1987, p. 196). A pergunta para descobrir a figura pensada com base nas diferentes características não era única. Por exemplo, na tarefa em questão (Figura 20), se a pergunta inicial fosse pela cor das figuras, no lugar da forma poderíamos ter optado por dizer que não era vermelha, o que remeteria a outra pergunta. Se a pergunta sobre a cor fosse formulada novamente e negássemos a escolha da cor amarela ou da azul, implicaria um novo questionamento em relação à forma.

A condução das tarefas com a finalidade de colocar os estudantes em ação investigativa e a necessidade de desenvolver o conhecimento teórico somente se efetiva quando os conhecimentos não são dados prontos. De acordo com Davydov (2017, p. 219): “Isso é possível unicamente quando as crianças efetuam aquelas transformações específicas dos objetos, graças às quais, em sua própria prática escolar, modelam-se e recriam-se as propriedades internas do objeto, que se convertem em conteúdo do conceito.”

Para a realização da tarefa particular seguinte, entregamos um *kit* com recortes de papel que se diferenciavam pela cor, forma e tamanho. Assim como em situações anteriores em que entregamos *kits*, o primeiro procedimento dos estudantes foi espalhar os recortes sobre as carteiras e organizá-los sob critérios próprios, relacionado as características das figuras e objetos estudados em nossas aulas. Solicitamos que os estudantes pegassem nas mãos e mostrassem “*um recorte vermelho que não é triangular*”. A afirmação é para a característica cor – o recorte é vermelho – a negação para a forma – não é triangular.

Eram três as possibilidades de resposta, pois na cor vermelha havia, no *kit*, além do recorte triangular, um de forma quadrangular e dois circulares de tamanhos diferentes. Diante das opções, os estudantes fizeram suas escolhas. Alguns apresentaram um recorte e outros dois, tais como: o circular grande; o circular pequeno; o quadrangular; o circular grande e o quadrangular; o circular pequeno e o quadrangular. Nenhum estudante optou por mostrar os três.

Ainda com foco afirmativo para a cor e negativo para a forma, solicitamos: “*Mostrem os recortes amarelos que não são de forma circular*” (Figura 23). O *kit* continha quatro recortes amarelos, dos quais dois eram de forma triangular de tamanhos diferentes, um quadrangular e um circular. Novamente as opções eram variadas. Um aluno mostrou somente um recorte (triangular); outros apresentaram dois (triangular grande e quadrangular, triangulares pequeno e grande). Manu dirigiu-se até a filmadora e expressou sua análise

⁵⁷ “[...] significa que en el proceso de aprendizaje hay que estimular al niño a lograr la solución por medio de diferentes procedimientos.”

verbalmente, “*são três*”, e mostrou os recortes (material objetal) para comprovar sua investigação (Figura 23).

Figura 23 - Recortes amarelos não circulares



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

Os demais colegas confirmaram a iniciativa e passaram a considerar os três recortes como aqueles que contemplavam a solicitação. A proposição da nova tarefa particular também teve o objetivo de colocar os estudantes em ação investigativa, mas a característica investigada afirmativamente era a forma, enquanto a cor era orientada pela negação. Anunciamos, então, nossa condição: “*Mostrem o recorte de forma quadrangular que não é amarelo*”. No kit havia três recortes quadrangulares (amarelo, vermelho e azul). A exclusão da cor amarela abriu a possibilidade para a escolha do recorte vermelho, azul ou ambos. Outras tarefas similares foram realizadas, no entanto, os próprios estudantes faziam as especificações, em nosso lugar, para a identificação dos recortes.

Conforme já mencionado, o experimento tomou como princípio oportunizar a participação coletiva e individual a todos os estudantes, seja mediante questionamentos direcionados para nós e para os colegas, seja por meio de manifestações objetais (escolha dos recortes), gestos, falas, entre outros recursos. A solução de uma mesma tarefa com diferentes manifestações não significa que somente uma está correta. Por exemplo, o aluno que optou pelo recorte vermelho respondeu corretamente, do mesmo modo aquele que escolheu o azul, e também estava correto quem mostrou os dois (vermelho e azul). As variadas possibilidades de respostas corretas para a solução de uma mesma tarefa, de acordo com Rosa (2012, p. 85), contribuem “para o surgimento de qualidades pessoais, como a capacidade de cooperar em ações desenvolvidas coletivamente sem, no entanto, nenhuma apologia ao aluno que chegue primeiro à conclusão esperada.”

De posse do mesmo kit, retomamos o jogo, agora com a sugestão “adivinha o recorte”. Propusemos a questão investigativa e acrescentamos a ela a forma do recorte que não tinha sido pensado: “*Em qual recorte estou pensando? Ele não tem a forma quadrada*”. Em pouco tempo, vários estudantes, simultaneamente, questionaram: “*Qual é a cor?*” Diante da

pergunta “boa”, respondemos “*é amarela*”. Somente a indicação da cor era insuficiente para “adivinharem” o recorte pensado, pois restavam dois de forma triangular e um circular. Os estudantes perceberam a necessidade de continuar a investigação e elaboraram outra pergunta: “*Qual é a forma?*” A resposta foi dada negativamente: “*Não é circular*”. Miguel disse “*triângulo*”, outros pegaram os recortes e afirmaram “*tem dois*”. Ainda questionavam: “*É o grande?*” “*É o pequeno?*” As perguntas remetiam à indicação do tamanho do recorte pensado, o pequeno.

Continuamos a propor várias análises relacionadas às características dos recortes centradas na negação. A cada comando retiravam os recortes dispostos em suas carteiras. Propusemos, por exemplo a questão: “*Em qual recorte estou pensando? Ele não é amarelo e não é circular*”. Com a exclusão dos que possuíam as duas características sobraram dois recortes quadrangulares de cores (vermelho e azul) e tamanhos diferentes (grande e pequeno), e dois de forma triangular de mesmo tamanho e cores diferentes (vermelho e azul). Inicialmente, formularam uma pergunta relacionada à cor: “*Qual é a cor?*” Acrescentamos, “*ele não é azul*”. Restaram dois recortes de mesma cor e tamanho (vermelhos e pequenos) que se diferenciavam pela forma (quadrangular e triangular). Os questionamentos em relação à cor e ao tamanho não tinham sentido, pois ambos eram idênticos. Diante disso, optamos pelo recorte quadrangular, assim que questionaram: “*Qual é a forma?*”

Na sequência, a tarefa particular reforça as noções de tamanho já estudadas. No *PowerPoint (slide)*, apresentamos figuras geométricas diferentes pela cor, pela forma e pelo tamanho, organizadas na horizontal (Figura 24).

Figura 24 - Quadrados de cores iguais e diferentes tamanhos



Fonte: Elaborada pela autora com base em Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008).

O objetivo era que os estudantes descrevessem as figuras de acordo com a posição, nomeando-as pelas características. Assim, iniciamos com a seguinte pergunta:

Pesquisadora: *Quais são as figuras que ficam à direita do triângulo azul?*

Tina: *Quadrado vermelho grande, círculo verde grande, triângulo amarelo.*

A descrição do círculo verde, dada pela aluna, fez-nos questionar: “*Por que o círculo verde é grande? Podemos dizer que o círculo verde é grande? Tem algum círculo maior*

ou menor que o verde?” JB deslocou o dedo indicador na altura do círculo verde até encontrar o amarelo (na horizontal) e concluiu que pode ter a mesma altura. Insistimos no questionamento: “Por que não consigo dizer que o círculo verde é grande?” Ket complementou o gesto de JB dizendo “porque são iguais”. Do mesmo modo, Tina justificou que não dá para dizer se o triângulo amarelo é grande ou pequeno, porque tem só um.

Pesquisadora: *Quais são as figuras que ficam à esquerda do triângulo azul?*

Sarita: *Círculo amarelo e o quadrado vermelho pequeno.*

Pesquisadora: *Qual é a figura que fica entre o triângulo azul e o círculo verde?*

Ket: *Quadrado vermelho grande.*

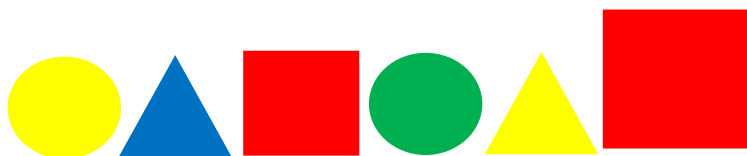
Pesquisadora: *Ket, por que o quadrado vermelho é grande?*

Ket: *Porque tem o quadrado vermelho pequeno.*

As discussões anteriores remetem à definição de Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008, p. 10) para o tamanho de uma figura ou de um objeto: “diferenciar os objetos pelo seu tamanho significa determinar qual deles é maior, e qual é menor, ou seja, estabelecer entre eles a relação de ‘maior-menor’”.

Em seguida, realizamos outra projeção em que excluímos o quadrado vermelho pequeno (à esquerda) e, concomitantemente, incluímos, à direita das figuras, um quadrado maior do que aquele localizado entre o triângulo azul e o círculo verde (Figura 25).

Figura 25 - Quadrados de cores iguais e diferentes tamanhos



Fonte: Elaborada pela autora com base em Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008).

Após o movimento das figuras quadradas vermelhas, refizemos a pergunta anterior: “Qual é a figura que fica entre o triângulo azul e o círculo verde?”

Lia: *É o quadrado vermelho pequeno.*

Pesquisadora: *Por que pequeno, se acabaram de dizer que entre o triângulo azul e o círculo verde havia um quadrado grande?*

Estudantes: *Porque agora tem um quadrado vermelho maior.*

Na discussão chegamos ao consenso de que as duas possibilidades estavam certas, pois o referido quadrado era grande em relação à primeira situação e pequeno para a segunda. Para Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008), o tamanho tem caráter relativo, ou seja, não temos como determinar, isoladamente, se uma figura é grande ou se é pequena. Para Rosa (2012, p.

82), “A síntese a elaborar é que a possibilidade de determinar o tamanho de uma figura ocorre somente na relação com outra.” Sendo assim, a característica tamanho não é estática, o que é pequeno em um momento poderá ser grande em outro, depende da referência tomada para a comparação.

Propusemos, na sequência, outra tarefa particular para continuarmos a investigação referente ao tamanho das figuras. Projetamos no quadro uma figura (círculo amarelo) e prosseguimos com as perguntas.

Pesquisadora: *Qual é a cor da figura?*

Estudantes: *Amarela.*

Pesquisadora: *Qual é a forma?*

Estudantes: *Círculo.*

Pesquisadora: *Qual é o tamanho?*

Estudantes: *Pequena.*

Pesquisadora: *Todos têm certeza de que é pequena?*

Estudantes: *Não, é grande.*

Pesquisadora: *Todos têm certeza de que é grande?*

Júlia: *Não, é médio.*

Pesquisadora: *Todos têm certeza de que é médio?*

Estudantes: *Sim, não, sim, não...*

Na ação investigativa, o diálogo indicou-nos que os estudantes não tiveram dificuldades em identificar a cor e a forma da figura, características já assimiladas. No entanto, com relação ao tamanho as manifestações foram de indecisão, uma vez que não houve consenso nas respostas. Quando eram questionados “*todos têm certeza...*”, mudavam a resposta. As expressões (pequeno, grande e médio), apesar de indicarem tamanhos, revelavam a impossibilidade de afirmarem o tamanho da figura, por ela estar sozinha (isolada). No contexto do Ensino Desenvolvimental, dizer que uma figura tem tamanho médio não condiz com a noção de tamanho defendida por Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008). Como dito anteriormente, para esses autores, a ideia de tamanho resulta da comparação de dois objetos ou figuras da mesma forma na relação grande-pequeno.

A fim de continuarmos a investigação, questionamos: “*Podemos garantir que o círculo amarelo é grande?*” Samuca dirigiu-se até o quadro e desenhou um retângulo. Perguntamos: “*O desenho que o Samuca fez é grande ou é pequeno?*” As respostas continuaram desconexas; enquanto uns diziam que era grande, outros afirmavam ser pequeno. Fizemos um retângulo maior, apontamos para o desenho do estudante, e voltamos a questionar.

Pesquisadora: *O desenho que o Samuca fez é grande ou é pequeno?*

Tina: *É pequeno.*

Pesquisadora: *Podemos afirmar que é pequeno?*

Tina: *Sim, porque tem outro grande do lado.*

Após esse debate, voltamos a observar o círculo amarelo projetado no quadro. Apontamos para a figura e perguntamos novamente: “*Tem como saber qual é o tamanho do círculo amarelo?*” Os estudantes disseram que não. Acrescentamos, à direita do círculo amarelo, um círculo maior, de cor verde, e questionamos:

Pesquisadora: *E agora, qual é o tamanho do círculo amarelo?*

Estudantes: *Pequeno.*

Na sequência, propusemos tarefas que os fizessem refletir sobre suas respostas. Como afirma Davídov (1988, p. 231), “A reflexão fundamental está relacionada com a busca e análise dos fundamentos essenciais das próprias ações.”⁵⁸ Acrescentamos outro círculo azul, à esquerda do amarelo, e perguntamos: “*Qual é o tamanho do círculo azul, se comparado ao amarelo?* Foram unânimes em afirmar que era pequeno. Outras questões foram formuladas: “*Por que o círculo amarelo é grande, se comparado ao azul? Por que o círculo amarelo é pequeno, se comparado ao verde?*” Essas e outras questões, no processo de investigação dos estudantes na resolução das tarefas que relacionam as características das figuras geométricas, segundo Mame (2014, p. 67), “possibilitam às crianças o desenvolvimento da capacidade de análise dos objetos e argumentação das suas respostas.”

Tais argumentações constituem-se na essência do desenvolvimento da ação investigativa na apropriação do significado de tamanho, pois não há como dizer se algo é pequeno ou grande se analisado isoladamente. Além disso, o tamanho não é definitivo e imutável, grande e pequeno se constituem na relação de comparação entre duas figuras ou dois objetos.

De acordo com Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008), para a formação da ação investigativa, é crucial a elaboração, pelos estudantes, de perguntas direcionadas ao professor e aos próprios colegas. Como indicado anteriormente, verificamos que nas primeiras tarefas os estudantes se apropriaram das características que diferenciavam as figuras geométricas e objetos geométricos (recortes), mas normalmente faziam afirmações no lugar de formular as perguntas “boas”. No entanto, durante o processo de resolução das diferentes tarefas, passaram cada vez mais a elaborar perguntas relacionadas às estratégias de investigação, bem como a propor as questões que estabeleciam a tarefa.

As tarefas que apresentamos têm a finalidade de colocar os estudantes em movimento de pensamento para que aprendam a fazer “boas perguntas”, direcionadas às

⁵⁸ “La reflexión sustancial está relacionada con la búsqueda y el examen de los fundamentos esenciales de las acciones propias.”

características de figuras e de objetos por meio da ação investigativa. Cor, forma, tamanho e posição se constituem como meio para esta análise, porém o objetivo no sistema Elkonin-Davídov é a elaboração do conceito de número e sua expressão geral. Por isso, na próxima seção serão estudadas as tarefas que permitirão avançar para a análise da igualdade e desigualdade de grandezas quantitativas por meio dos modos de comparação das grandezas: comprimento, área, volume, massa, entre outras.

3.2 MODOS DE MEDIÇÃO DAS GRANDEZAS E OPERAÇÕES COM GRANDEZAS

O objetivo principal do nosso Experimento Didático é analisar a possibilidade da apropriação de conceitos matemáticos relacionados ao número pelos estudantes brasileiros do primeiro ano escolar, conforme os pressupostos do Ensino Desenvolvidor do sistema Elkonin-Davídov.

A centralidade do primeiro tópico deste capítulo foi o desenvolvimento da ação investigativa pela análise das características cor, forma, tamanho e posição de figuras e objetos. Dissemos anteriormente que a análise das figuras e objetos pelas propriedades citadas possibilitam constatar o resultado da comparação **igualdade ou diferença** somente pela qualidade (cor e forma) das figuras ou objetos, mas não há como mensurá-las, ou, como afirma Caraça (2003, p. 108), são “qualidades a respeito das quais não se podem fazer juízos de mais que, maior, menos que, menor”. Essas características são insuficientes para alcançarmos o objetivo principal do estudo, o conteúdo do conceito de número. Já mencionamos, também, que nesse sistema de ensino o número resulta da relação entre grandezas.

Por isso, pelo fato de não ser possível mensurar as características de figuras e objetos pelas propriedades investigadas até aqui, neste tópico introduzimos os modos de comparar as grandezas, como: o comprimento, a área, o volume e a massa. É importante que os estudantes saibam comparar essas grandezas e as vinculem às relações de igualdade e desigualdade. O avanço em relação às comparações qualitativas está na representação tanto do que é igual quanto da desigualdade, expressas por relações escalares⁵⁹: igual, maior e menor. Ao aproximar os comprimentos das alturas de dois recortes de papel (amarelo e azul), constata-se que são diferentes não somente na relação imediata de maior e menor, o que vai despertar a necessidade de quantificar como um atributo da qualidade numérica. Se a aproximação remete

⁵⁹ Referimo-nos às grandezas escalares segundo a compreensão expressa por Chiquetto, Valentim e Pagliari (1996, p. 78): “As grandezas que ficam definidas por apenas um número e uma unidade são denominadas grandezas escalares”. Por Exemplo: comprimento, volume, área, massa, entre outras.

à igualdade, isso implica que os comprimentos têm o mesmo tamanho. Nesta etapa, ainda não há intenção de que os estudantes apresentem os resultados das comparações com números. É suficiente que usem expressões verbais como: o recorte amarelo tem comprimento da altura maior que o comprimento da altura do azul.

Foram desenvolvidas 47 tarefas particulares de estudo (29-75) do Apêndice B referentes ao modo de comparar as grandezas comprimento, área, volume e massa, no período de 22 aulas de 45 minutos cada.

3.2.1 Pontos, segmentos de reta, linhas retas e curvas

No sistema Elkonin-Davídov, as grandezas (comprimento, área, volume, massa) são introduzidas na conexão com os primeiros elementos da geometria, por isso, a discussão tem início com a elaboração dos significados de ponto, segmentos de reta, linhas retas e curvas.

As primeiras nove tarefas particulares de estudo em referência introduzem os diferentes tipos de linhas (reta e curva) e a conexão entre o elemento geométrico ponto na constituição dos dois tipos de linhas e do segmento na linha reta. Das nove tarefas, a centralidade das seis primeiras foi diferenciar linha reta e curva.

Primeiro, entregamos a cada um dos estudantes uma folha de papel A4, solicitamos que fizessem nela uma dobra, e com os dedos indicador e polegar marcassem um vinco. Fizemos o mesmo procedimento, mas para evitar que reproduzissem nosso movimento, esperamos a realização de todos individualmente. Percebemos que alguns se inspiravam na execução do outro, mas não nos importamos com isso, aliás consideramos essa troca importante para a apropriação do conhecimento em estudo pela maioria dos estudantes.

Ao serem questionados sobre o que resultou na dobra da folha, muitos disseram “*um risco*”. Cada estudante foi até a frente da sala e mostrou a dobra feita para os colegas. Na sequência, solicitamos que fizessem um “risco”⁶⁰ à mão livre, na mesma folha, acima ou abaixo da dobra. Todos realizaram a tarefa prontamente, o que possibilitou a continuidade dos questionamentos: “*Os dois “riscos” (a dobra da folha e o realizado à mão livre) são iguais?*” Em um primeiro momento, alguns estudantes afirmam serem iguais. Insistimos no questionamento: “*São iguais mesmo? Não há nenhuma diferença?*”

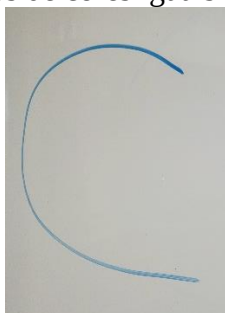
Biel, comentou: “*São diferentes porque este (aponta para o que fez à mão livre) tem uns morrinhos*”. A estudante Sô apontou primeiro para a linha que fez livremente e depois

⁶⁰ Preferimos, neste momento, manter a linguagem utilizada pelos estudantes. No decorrer das discussões, introduzimos as nomenclaturas: linhas retas e linhas curvas.

para a marca da dobra: “*Este tem umas ondinhas, o outro não*”. Outro estudante diferenciou os dois riscos: “*Este tem morro e este não*”. Outra expressão usada por alguns estudantes para diferenciar as duas linhas foi “*torta*”, referindo-se à desenhada à mão livre. Tina e Anita concluíram: “*Uma é reta e a outra não*”. As diferentes expressões formuladas pelos estudantes para diferenciar os dois tipos de linhas são termos cotidianos que revelam uma compreensão inicial e suficiente nesse momento, uma vez que a intenção não era defini-las conceitualmente. O foco centrava-se na necessidade de um instrumento para desenhar uma linha sem curva, como uma régua, um pedaço de madeira ou até a dobra da folha de papel. De acordo com Mame (2014, p, 75), na Matemática a linha curva “[...] é assumida como a linha em geral. Nesse contexto conceitual, a linha reta é uma particularidade, entendida como linha com curvatura zero”. O diálogo que permeou o desenvolvimento das duas primeiras tarefas e possibilitou a discussão sobre o que diferenciava os dois tipos de linhas ocorreu no tempo de duas horas-aula.

Na sequência, no mesmo encontro, propusemos o desenvolvimento da tarefa que apresenta um novo elemento geométrico na constituição de linhas retas e curvas, os pontos. Diferencia-se das duas primeiras, pois o olhar é para o que é semelhante, e não para a diferença entre elas. Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008) propõem que a referida tarefa seja realizada no caderno pelos estudantes e no quadro pelo professor. Os estudantes desenhavam uma linha curva e depois uma linha reta de tal modo que a reta e a curva se toquem em um ou mais lugares, a depender da linha curva que foi desenhada. No entanto, para o envolvimento coletivo e a representação de várias linhas retas tocando a mesma curva, preferimos redirecionar a condução da tarefa. Desenhamos uma linha curva no quadro (Figura 26), apontamos para a representação e perguntamos: “*Qual linha foi desenhada?*” “*O c*”, disse JB, relacionando a linha desenhada à letra do alfabeto. Aproveitamos a fala e perguntamos: “*A letra c é uma linha?*” Os estudantes responderam “*sim!*” Continuamos a indagar: “*A letra c é formada por qual linha?*” “*É uma linha curvada*”, disse Biel, ao que Sô complementou: “*É curva*”. Os demais estudantes concordaram.

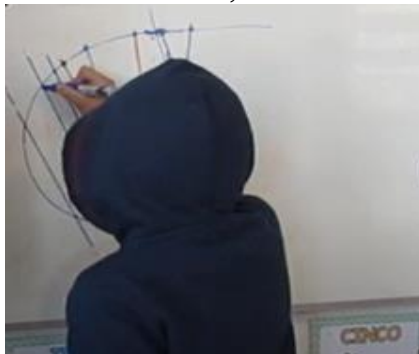
Figura 26 - Quadrados de cores iguais e diferentes tamanhos



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

Na continuidade da tarefa, convidamos cada estudante a ir até o quadro. Lia foi a primeira a se apresentar espontaneamente. Informamos a ela que deveria fazer uma linha reta que tocasse a linha curva. Ao ser questionada se poderia fazer a linha à mão livre, ela respondeu que sim e logo foi contrariada pelos colegas, que justificaram: *“Não pode, porque não vai ficar reta”*. Como na mesa do professor havia um pedaço de madeira, Sô sugeriu o uso desse instrumento. Apontou para o objeto e disse: *“Usa a madeira”*. Lia pegou o pedaço de madeira, sobrepôs na linha curva desenhada no quadro, e, com o auxílio de um pincel atômico, percorreu a lateral da madeira. A linha reta encontrou a linha curva em dois lugares. Solicitamos que marcasse, também com o pincel atômico, o lugar em que as linhas curva e reta se interceptavam. Percebemos que a maioria dos estudantes se mostrava insegura ao indicar o lugar de encontro das duas linhas. Apontavam com o pincel próximo ao ponto de intersecção, mas na linha curva fora do encontro. Com as nossas intervenções, começaram a perceber que o encontro das duas linhas correspondia a um mesmo lugar e que havia um ponto em comum que unia as duas linhas (Figura 27).

Figura 27 - Linha curva, linhas retas e pontos



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

O desenvolvimento dessa tarefa foi direcionado para que os alunos compreendessem que ambas as linhas se constituíam de muitos pontos. Por isso, após todos os estudantes efetuarem o procedimento prático objetal (Figura 27), questionamos:

Pesquisadora: *É possível incluirmos outras linhas retas entre os espaços que sobraram na linha curva?*

Estudantes: *Sim.*

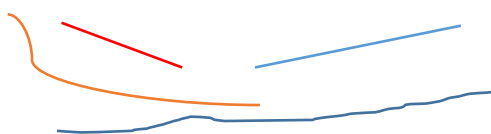
Pesquisadora: *Quantas?*

Estudantes: *Muitas.*

O debate se direcionou para que os estudantes compreendessem que a intersecção de muitas linhas retas com a linha curva determinava muitos pontos, e esses infinitos pontos, lado a lado, formavam as linhas. Conforme Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008), o conhecimento das novas representações geométricas e sua posição na inter-relação entre uma e outra, por meio de ações práticas auxiliares, remetem à reflexão de questões como: o que é diferente na linha reta e na curva? O que é igual? O ponto está ou não está nas linhas? A linha passa ou não passa pelo ponto? A linha une os pontos? Os pontos são os fins da linha? As linhas se cruzam? O que acontece ao se cruzarem?

No encontro seguinte, antes de prosseguirmos com a resolução das tarefas específicas com foco na linha reta, retomamos as discussões sobre os tipos de linhas estudadas no encontro anterior com a proposição de mais duas tarefas. Para a análise da primeira, apresentamos no *PowerPoint* um *slide* com imagens de linhas retas e curvas com o intuito de incentivar os estudantes a identificar os tipos de linhas (Figura 28).

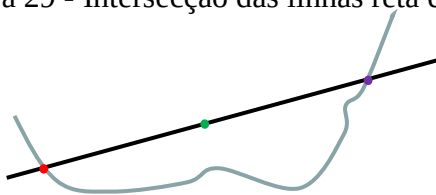
Figura 28 - Linhas retas e curvas



Fonte: Elaborada pela autora com base em Gorbov e Mikulina (2001, p. 8).

As manifestações dos estudantes nos convenceram de que a diferenciação dos tipos de linhas foi compreendida, pois todos apontaram de forma correta as linhas retas e as curvas. Para a tarefa particular seguinte, propusemos outra situação que envolvia os dois tipos de linhas conjuntamente, com o objetivo de retomar uma discussão anterior, em que os estudantes manifestaram dúvidas ao identificarem os pontos comuns. A tarefa (Figura 29) foi conduzida por meio dos questionamentos: “Qual linha passa pelo ponto vermelho e pelo ponto verde? Qual delas não passa pelo ponto verde? E pelo ponto vermelho? E pelo ponto roxo?”

Figura 29 - Intersecção das linhas reta e curva



Fonte: Elaborada pela autora com base em Gorbov e Mikulina (2001, p. 8).

O processo de apropriação dos conceitos, conforme o Ensino Desenvolvidor, é contínuo e cíclico, como já afirmamos, de idas e vindas. Esse movimento permite avançar no conhecimento com a articulação do já apropriado e do vir a ser. O papel do professor é, por meio do ensino, promover essa articulação para ajudar o estudante a ir além do que ele consegue realizar sozinho.

Ao iniciarmos a resolução da tarefa (Figura 29) no quadro, percebemos que havia duas estudantes que não tinham participado da aula anterior. Aproveitamos para propor aos colegas que nos ajudassem a mostrar a elas o que havíamos estudado. Para isso, questionamos: “*O que estudamos na aula passada?*” Samuca observava a figura exposta no quadro e apontava para as representações dos pontos identificadas pelas cores vermelha, verde e roxa (Figura 30). Em seu gesto, estava implícita a sua compreensão referente ao estudo dos pontos. Tina acrescentou, “*Estudamos linhas reta e curva*”.

Figura 30 - Indicação das representações dos pontos



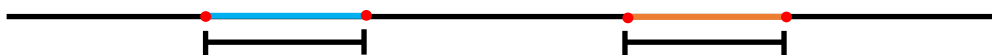
Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

Continuamos a perguntar: “*Quais linhas estão representadas na figura?*” (Figura 30). Manu foi ao quadro e, com o dedo indicador, contornou as duas linhas, denominando-as de reta e curva. Os demais estudantes concordam com a colega. Prosseguimos com o debate para que os estudantes identificassem os pontos que pertenciam às duas retas

concomitantemente ou somente a uma delas. Os pontos vermelho e verde pertenciam à linha reta. O ponto verde não pertencia à linha curva, somente à reta; ambas as linhas passavam pelos pontos vermelho e roxo.

Conforme dissemos anteriormente, o estudo da linha curva, no capítulo que introduz as grandezas, tem o objetivo de diferenciá-la da linha reta. De acordo com Rosa (2012, p. 90), “A linha reta, que mais tarde será o contexto geométrico para o conceito de número, só existe na diversidade em que seus elementos (segmento de reta e ponto) se encontram concatenados entre si”. Por esse motivo, na sequência do Experimento Didático, propusemos duas tarefas antes de iniciarmos as discussões sobre as grandezas (comprimento, área, volume e capacidade). A primeira consistia em desenhar uma linha reta no caderno, marcar nela dois pontos um pouco distantes um do outro e pintar com lápis de cor a parte entre os dois pontos marcados (Figura 31).

Figura 31 - Linha reta e segmento



Fonte: Elaborada pela autora com base em Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008).

Inicialmente solicitamos que fizessem a linha reta em seus cadernos, e os estudantes logo pegaram a régua. Ficamos satisfeitas, pois ficou evidente que haviam compreendido a necessidade do uso de um instrumento para desenhar a linha reta. Alguns precisaram ser instruídos para pressionarem com força a régua contra a folha do caderno com uma das mãos enquanto com a outra faziam um risco (a linha reta) com o lápis em um dos lados da régua (Figura 32). O direcionamento foi necessário porque se não tomassem esse cuidado e a régua saísse do local, a linha ficaria curva.

Figura 32 - Representação de uma linha reta



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

Os estudantes que primeiro perceberam essa necessidade auxiliavam os outros, como fez Sô ao explicar para Lia: *“Tem que fazer força, segurar assim”*, pressionando os dedos contra a régua (Figura 33).

Figura 33 - Procedimento de segurar a régua para fazer a linha reta



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

A linha reta desenhada foi oportuna para solicitarmos: *“Agora, quero que marquem dois pontinhos na reta”*. Para instigá-los a pensar no que já tínhamos estudado, a formação das linhas por pontos, questionamos: *“Quantos pontos são necessários para fazer uma linha?”* A resposta dos estudantes foi *“dez, um”*. Interrompemos a discussão e perguntamos a JB: *“O que acontece quando colocamos muitos pontos um do lado do outro?”* A pergunta foi propositalmente direcionada a ele, pois o estudante já havia concluído que a junção de muitos pontos formaria a linha reta na expressão *“um risco”*. Ele respondeu: *“Um risco”*. Insistimos na pergunta, referindo-nos ao desenho da reta refletido no quadro: *“Quantos pontos há nessa reta?”*

JB: *Dois?*

Pesquisadora: *Será?*

JB: *Mil.*

Pesquisadora (voltando-se para os demais estudantes): *Será que tem quantos pontos nessa reta? O JB disse mil! Será que é mil? Tem mais? Ou menos?*

Vários estudantes, na tentativa de verificar quantos pontos formavam a linha, foram até o quadro e com o pincel atômico faziam pontos enquanto os contavam (Figura 34). marcavam os pontos com o pincel no quadro, abaixo da linha, pronunciavam *“um, dois, três, ...”*. Os resultados eram diversos, *“trinta e cinco”*, *“trinta e nove”*, *“me perdi”*.

Figura 34 - Representação dos pontos na linha reta pelos estudantes



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

A expressão *“me perdi”*, pronunciada por Sô, levou-nos a perguntar: *“Por que você se perdeu? JB comentou: “De tanto pontinho que a gente tem que contar”*. Tínhamos a intenção de fazê-los refletir sobre a impossibilidade de quantificar e expressar o resultado numericamente, uma vez que a quantidade de pontos em uma linha é infinita. As marcas deixadas pelo pincel atômico durante a contagem eram distantes umas das outras (Figura 34), por isso indagamos: *“Mas, não dá para colocar mais pontos entre estes dois?”* A resposta foi coletiva: *“Sim!”* Nesse momento da investigação, os estudantes manifestaram a impossibilidade de representar a quantidade de pontos pela contagem das marcas e desistiram de fazê-las. Voltamos a questionar *“Quantos pontos têm a linha reta? Nós conseguimos contar?”* *“Não!”*, respondeu Tina. *“Mas sabemos que tem o quê?”* Pretendíamos, com o questionamento, levá-los a pensar que os pontos, muitos deles, formam a linha reta. Sô expressou essa ideia ao pronunciar *“dez mil!”* Outros estudantes gesticularam com as mãos para expressar que são muitos (Figura 35).

Figura 35 - Manifestação dos estudantes



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

Lia dizia, enquanto fazia gestos com as mãos: *“Mais, monte, muitos, muitos, milhão”*. Outros estudantes também gesticulavam e se movimentavam euforicamente para indicarem a possibilidade de uma grande quantidade de pontos na constituição da linha reta. As falas dos estudantes remetem à ideia de infinito. A linha reta formada por muitos pontos, tantos que fica impossível contar e representar na prática objetal, é o começo da abstração do conceito de infinito para a generalização na representação do número mais adiante na reta numérica, inicialmente do número inteiro (natural).

Caraça (2003, p. 10) atribui à sucessão dos números inteiros o primeiro contato com a noção de infinito. Para ele, o homem atual pensará:

[...] eu passo dum número para o seguinte juntando-lhe uma unidade; por meio desta operação mental elementar – *juntar uma unidade* – eu passo do 1 para o 2, do 2 para o 3 e vou tão longe quanto quiser; se me derem um número n , por maior que seja, eu posso sempre efectuar sobre ele a mesma operação mental e obter um número maior – $n + 1$ – logo, para mim, não há um número inteiro maior que todos os outros.

Para o autor, pouco importa que nessa operação mental se tenha uma quantidade tão grande que não seja possível representar na prática coleções de objetos para sua contagem. O pensamento não vê barreiras em aceitar que sempre é possível somar mais um e ir muito longe, ao infinito. É com esse pressuposto que o conceito de número se efetiva no sistema Elkonin-Davídov: os infinitos pontos da linha reta representam na reta numérica o lugar dos números reais, ou seja, a concatenação das diversas singularidades numéricas (natural, racional, inteiro e irracional). Como já mencionado, esses números resultam da relação comparativa de duas grandezas de mesma espécie, por exemplo, dois comprimentos, um tomado como unidade de medida. Por isso a relevância dada por este sistema de ensino às tarefas relacionadas à construção da linha reta se constituir por pontos e segmentos.

O segmento de reta foi estudado na continuidade da tarefa. Para tanto, voltamos à questão inicial: “*Marquem na linha reta dois pontos um pouco distantes um do outro e pintem com lápis de cor a parte entre os dois pontos marcados*”. Biel foi até o quadro e marcou dois pontos na representação da reta desenhada. Passamos nas carteiras para nos certificarmos de que todos haviam marcado os dois pontos sobre a linha reta. Alguns precisaram de ajuda, pois colocavam os pontos acima, e não sobre a linha.

Quel – uma estudante advinda de uma cidade do interior do Rio Grande do Sul, matriculada na escola no final do mês de junho, já no quinto encontro do experimento – na primeira aula se mostrou tímida, não respondia aos nossos questionamentos. Percebemos desde aquele momento que não reconhecia as cores, tinha dificuldade em manusear o lápis, não escrevia seu próprio nome e não interagiu com os colegas. Precisávamos conduzi-la, pegando em sua mão ou fazendo demonstrações para que realizasse pequenos procedimentos com o uso do lápis, como desenhar as letras de seu nome e pintar o espaço entre os dois pontos da linha reta (Figura 36).

Figura 36 - Orientação para pintar espaço entre dois pontos na linha reta

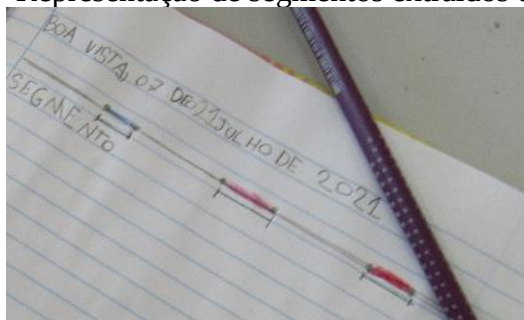


Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

A professora da classe informou-nos que a estudante não havia frequentado uma instituição escolar até então. Nossa dedicação, juntamente com a professora titular da classe, foi procurar propiciar a integração da estudante por meio de ações que a motivassem a avançar no processo de apropriação dos conceitos que estávamos estudando, seja elogiando suas pequenas conquistas, chamando-a para socializar suas produções aos colegas, ou incentivando o trabalho coletivo. A cada aula percebíamos diminuição da timidez e empenho na realização das tarefas, como mostra a figura anterior, em que se esforça para indicar o espaço da linha reta compreendido entre dois pontos, mesmo com ajuda.

Na condução da tarefa particular para a identificação do segmento, uma parte da linha reta, questionamos os estudantes: “Vocês pintaram toda a linha reta ou só um pedaço?” Eles responderam “só um pedaço”. Contextualizamos que esse “pedaço” corresponde a uma parte da linha reta denominada segmento de reta. O debate com os estudantes centrou-se em duas propriedades que fundamentam o conceito de segmento: é parte da linha reta e os dois pontos são os limites do segmento, ou seja, o começo e o fim. Para melhor compreensão propusemos que, além de pintar o espaço entre os dois pontos, extraíssem o segmento e o redesenhassem um pouco abaixo da linha reta. Outra forma de limitar o começo e o fim do segmento foi marcá-lo com traços na vertical (Figura 37).

Figura 37 - Representação de segmentos extraídos da linha reta



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

Continuamos o debate: “*O que é um segmento?*” Lia disse: “*Um espaço pequenininho*”. Entendemos que a expressão “*espaço pequenininho*” significa que a estudante compreendia a linha reta como o todo e o segmento como uma parte dela.

Pesquisadora: *Que espaço? Onde fica este espaço?*

Estudantes: *Dentro da linha.*

Pesquisadora: *De qual linha?*

Estudante: *Da linha reta.*

Pesquisadora: *Podemos desenhar o segmento à mão livre?*

Tina: *Não!*

Pesquisadora: *O segmento é reto ou é curvo?*

Alguns estudantes responderam “*reto*”, outros “*curvo*”. As diferentes respostas instigaram-nos a retomar as discussões já realizadas por meio de novos questionamentos: “*De onde retiramos o segmento? Não foi de uma linha reta?* Os estudantes concordaram. Continuamos a reflexão: “*Então, se retiramos de uma linha reta, o segmento tem que ser o quê?*” Uma estudante respondeu de forma exclamativa: “*Reto!*” Samuca pediu para ir ao quadro a fim de marcar outros segmentos na reta, agora com o cuidado de usar um instrumento (pedaço de madeira) para evitar que a representação ficasse curva (Figura 38).

Figura 38 - Segmentos de reta extraídos da linha reta



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

O intuito da discussão da tarefa apresentada e da que segue, de acordo com o sistema Elkonin-Davídov, é que os estudantes se apropriem da constituição da linha reta na inter-relação com pontos e segmentos. Assim, na referida tarefa, o ponto de partida foram dois pontos um pouco distantes um do outro, a determinação do segmento por meio da união desses pontos e o prolongamento deste, em ambos os sentidos, enquanto na anterior partiu-se da formação da linha reta, da identificação de dois pontos nela e da extração dos segmentos. Existe um movimento que une o todo (linha reta) e as partes (pontos e segmentos) e a parte (pontos e segmentos) ao todo (linha reta). Para Rosa (2012, p. 90), a inter-relação entre “linhas, segmentos e pontos consiste em representar o concreto como algo em formação, no movimento

que permite revelar as conexões internas, isto é, os nexos entre as singularidades (pontos), particularidades (segmentos) e a universalidade (linha)”.

Desse modo, solicitamos que marcassem dois pontos em seus cadernos, abaixo da linha reta, com o destaque dos segmentos já relatados (Figura 38). Pretendíamos, com isso, que os estudantes observassem a inter-relação entre as tarefas. Convidamos Quel para ir até o quadro com a finalidade de auxiliar-nos na tarefa de unir os dois pontos.

Solicitamos que unissem os dois pontos para formar um segmento e questionamos se poderíamos unir os dois pontos à mão livre. Todos disseram que não. Com nossa ajuda, Quel uniu os dois pontos no quadro utilizando o pedaço de madeira, enquanto os demais, no caderno, usaram a régua. Depois de unidos os dois pontos, apontamos para o desenho no quadro e perguntamos:

Pesquisadora: *O que é isso aqui?*

Estudante: *Uma linha reta.* (Não foi possível identificar a estudante.)

Pesquisadora: *Uma linha reta ou um pedaço da linha reta?*

Estudantes: *Um pedaço.*

Pesquisadora: *Como chamamos um pedaço da linha reta?*

Samuca: *Segmento.* (Os demais concordaram.)

Pesquisadora: *Por que é um segmento e não uma linha?*

Foi necessário retomar a discussão sobre a diferença entre segmento e linha reta, uma vez que não obtivemos resposta ao questionamento. Com os estudantes concluímos, novamente, que o segmento tinha começo e fim indicados por um ponto inicial e um final, ou seja, o segmento é retirado da linha reta.

Na continuidade, formulamos a seguinte questão: “*O que podemos fazer para transformar o segmento em uma linha reta? Quem tem uma ideia?*” Sô sugeriu: “*Apaga os dois pontinhos*”, referindo-se aos pontos que limitavam o segmento. Entendemos que a resposta da estudante foi coerente, pois sua associação foi com os pontos que indicavam o começo e o fim do segmento, ou seja, se os pontos fossem retirados não seria mais um segmento, e sim uma linha reta, conforme debate anterior. Todavia, para contemplar o objetivo da tarefa, ou seja, a possibilidade de ampliar o segmento indefinidamente em ambos os sentidos, orientamos: “*É necessário que a linha reta seja maior que o segmento*”. Sô teve outra ideia e gesticulou indicando que a linha ficaria maior se aumentasse a partir do ponto final do segmento para a direita. Questionamos: “*E do início do segmento para a esquerda, podemos aumentar a linha?*” Os estudantes concordaram, acatamos a sugestão anterior e realizamos, juntamente com o estudante Biel, providos de uma régua e um pincel atômico, o procedimento no quadro. Perguntamos ainda: “*Dá para aumentar mais? Dos dois lados? Quanto podemos aumentar? E*

se terminar o quadro? Será que podemos imaginar essa linha indo mais longe ainda?” A síntese dos estudantes foi que sim, podemos imaginar que a linha representada no quadro pode se estender infinitamente, e concluíram: *“Podemos imaginar muitos quadros um do lado do outro”*.

Os diálogos, segundo Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008), são relevantes para a compreensão, por parte dos estudantes, de que a linha reta pode continuar ilimitadamente. Também, conforme a pretensão desse sistema de ensino, a relação do conceito de número na reta numérica, como já mencionamos em outros momentos, é coesa com a associação que a estudante Tina fez quando afirmou *“infinito como os números”*.

Possibilitar que estudantes do primeiro ano escolar compreendam conceitualmente que uma linha reta é infinita e, por extensão, seus pontos e segmentos também são, não é tradicionalmente o mais comum na organização do ensino de Matemática, no Brasil. No entanto, conforme o sistema Elkonin-Davídov, é imprescindível para a apropriação, pelos estudantes, do conteúdo teórico de número. Consideramos que o entendimento até aqui é suficiente para darmos prosseguimento à exposição do experimento, com a sequência de tarefas particulares de estudo que se centram nos modos de comparar as grandezas comprimento, área, volume e massa.

3.2.2 Grandeza comprimento

No sistema Elkonin-Davídov, a primeira grandeza estudada é o comprimento. As tarefas de estudo propiciam aos estudantes descobrirem essa grandeza e sua especificação de tamanho ao encostar objetos (recortes) um ao lado do outro e estabelecer comparações (Gorbov; Mikulina; Savieliev, 2008).

As tarefas particulares de estudo (8) centradas no objetivo de reconhecer o modo de comparar os tamanhos (igual, maior, menor) relativos à grandeza comprimento tiveram início quando propusemos, conforme orientação do sistema Elkonin-Davídov, que os estudantes comparassem dois recortes de cores diferentes. Cada estudante, assim como nós, possuía um *kit* contendo dois recortes de papel de cores diferentes. Seguramos os recortes, um em cada mão, e propusemos uma análise retomando as características qualitativas estudadas nas primeiras aulas (cor, forma, tamanho).

Pesquisadora: *O que aprendemos nas primeiras aulas?*
 Biel: *Grande e pequeno.*

Pesquisadora: *O que significa grande e pequeno?*

Tina: *Tamanho.*

Pesquisadora: *O que mais?*

Estudantes: *Cor, forma, geométrico, posição.*

Consideramos importante a retomada das características qualitativas estudadas nas primeiras aulas para adentrarmos às diferenças do modo de comparar a grandeza comprimento. A necessidade que se estabelecia nas novas tarefas era perceber as diferenças principalmente dos tamanhos dos recortes, porém em um nível mais elevado do que o das discussões de “*grande e pequeno*” das figuras e recortes analisados anteriormente. A cor, para o objetivo que tínhamos nesse momento do processo era indiferente, por isso os pares de recortes que os estudantes manuseavam possuíam cores variadas (vermelho, verde, preto, rosa). A forma retangular dos recortes nos permitia iniciar as discussões da grandeza escalar, ou seja, a identificação de comprimentos que se manifestam em várias direções: na horizontal, na vertical e distintas dimensões, que costumam ser denominados – largura, grossura, espessura, altura, profundidade (Gorbov; Mikulina; Savieliev, 2008).

Rosa (2012, p. 91) fundamenta-se em Talizina para salientar a importância de os estudantes se apropriarem desde o primeiro ano escolar do modo de comparar as grandezas. “É necessário que as crianças aprendam a determinar as bases da comparação, para que se orientem por propriedades gerais”.

As tarefas particulares de estudo que envolvem a comparação de grandezas escalares (comprimento com comprimento, área com área, entre outras) no processo de desenvolvimento do conceito de número são imbuídas, mais adiante, da necessidade de uma unidade de medida. Para isso, primeiramente o objetivo é que os estudantes se apropriem dos diferentes modos de medir as diversas grandezas escalares.

Por isso, voltamos à análise dos recortes com foco na comparação dos diversos comprimentos (altura, largura e espessura). Primeiramente, para mantermos a unidade na análise entre os estudantes, combinamos que a posição dos recortes indicaria os comprimentos, ou seja, o lado correspondente à posição vertical seria o comprimento da altura, o lado correspondente à posição horizontal seria o comprimento da largura, e a referência à “grossura” do papel corresponderia ao da espessura. Aceitamos inicialmente a especificação dada pelos estudantes: “*de pé*” para a altura e “*deitado*” para a largura, mas, no processo, as substituições das palavras foram paulatinamente apropriadas.

Continuamos a tarefa com o intuito de que a atenção dos estudantes se centrasse na comparação dos tamanhos dos comprimentos dos recortes. Com um recorte em cada mão, mas

distantes um do outro, perguntamos: “*Os recortes têm o mesmo tamanho?*” Vários estudantes se manifestaram simultaneamente: “*Não*”. Continuamos a questionar: “*Qual tamanho?*” Nossa intenção era que especificassem a dimensão analisada (altura, largura ou espessura). Inicialmente as respostas se referiam às figuras pela cor para identificá-las e manifestar sua relação: “*O verde é grande e o vermelho pequeno*”. Foi possível inferir que se referiam ao tamanho dos recortes, porém precisávamos que avançassem no modo de expressar a qual tamanho se referiam. Por isso insistimos: “*Qual tamanho do recorte vermelho é grande?*” Observamos que os estudantes encostavam os recortes lado a lado (altura de um com a altura do outro) para certificarem-se de qual era maior ou qual era menor. Quando Sô disse “*coloquei um do lado do outro*”, solicitamos que nos mostrasse o que havia feito. Ela aproximou os recortes de tal modo que coincidissem o começo de cada um (Figura 39).

Figura 39 - Aproximação dos recortes pelos comprimentos da altura



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

Pesquisadora: *O que você comparou, mediu?*

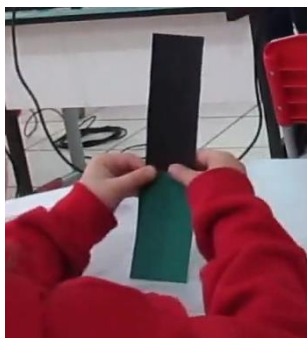
Sô: *A altura.*

Pesquisadora: *Qual tem maior altura?*

Estudantes: *O vermelho.*

Passamos de carteira em carteira para nos certificarmos de que todos haviam se apropriado da necessidade essencial de comparar os comprimentos. Ou seja, como aproximar os recortes para que seja possível analisar e identificar os tamanhos (maior ou menor) corretos. A maioria fez como Tina indicou: “*Tem que juntar o começo de um com o começo do outro*”. Pedro e Ket compararam as larguras aproximando os recortes, conforme pode ser observado na figura a seguir (Figura 40).

Figura 40 - Aproximação dos recortes pelos comprimentos da largura

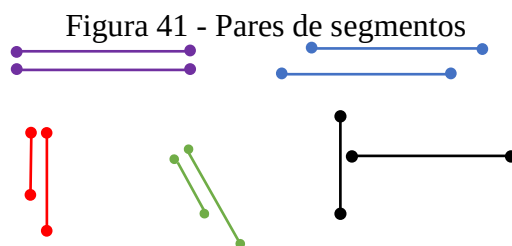


Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

A síntese foi direcionada para as diferentes possibilidades de comparação e o modo de expressá-las pela linguagem oral: o **comprimento** da altura do recorte vermelho (ou preto) é maior que o **comprimento** da altura do recorte verde; o **comprimento** da largura do recorte vermelho (ou preto) é menor que o **comprimento** da largura do recorte verde; o **comprimento** da espessura do recorte vermelho (ou preto) é igual ao **comprimento** da espessura do recorte verde. O destaque na grandeza **comprimento** nas três dimensões é primordial, pois no ensino brasileiro é comum que uma das dimensões (normalmente a horizontal) seja denominada comprimento com referência à dimensão. Ou seja, há um equívoco conceitual, pois, conforme já mencionamos, as dimensões de um objeto tridimensional são representações da grandeza comprimento.

Segundo o sistema Elkonin-Davídov, algumas tarefas particulares de estudo têm o objetivo de fazer o controle da apropriação, pelos estudantes, de seu conteúdo. Essas tarefas constituem a ação de controle por permitirem, tanto para o estudante quanto para o professor, ao mudarem “a composição operacional das ações, colocar a descoberto sua relação com uma ou outras peculiaridades dos dados da tarefa por resolver e do resultado obtido” (Davidov, 2019c, p. 226).

Na sequência do experimento, propusemos tarefas particulares de estudo impressas, como a que segue, para o controle da assimilação dos estudantes do modo correto de comparar comprimentos. Apresentamos pares de segmentos (Figura 41) que os estudantes deveriam analisar por comparação e responder ao questionamento: “*Todos os modos de comparação estão corretos?*”



Fonte: Elaborada pela autora com base em Gorbov e Mikulina (2001).

A análise permite que os estudantes se apropriem do modo geral de comparar os comprimentos dos segmentos para identificação da igualdade e desigualdade de seus tamanhos. A primeira manifestação, quando questionados sobre o primeiro par (cor roxa), indicou-nos que o primeiro olhar foi justamente para a cor, “*são iguais pela cor*”, ou seja, o olhar dos estudantes estava para aquilo que lhes era conhecido. Procuramos chamar a atenção para o objetivo da tarefa: “*Tem jeito certo e errado de comparar os segmentos?*” Alguns respondem “sim”. Nosso olhar de pesquisadora impeliu-nos a retomar as discussões da análise de cada par de segmentos. Assim, apontamos para o de cor roxa e perguntamos: “*Este modo de comparar está correto?*” Pedro afirmou que sim. Continuamos a indagar: “*Por que está certo?* Os estudantes justificaram: “*Porque são iguais*”. E persistimos: “*Por que são iguais?* As respostas se relacionaram às características qualitativas cor e forma quando disseram “*iguais pela cor e pela forma*”.

Pesquisadora: São iguais pela forma. Qual forma?

Tina: Reta.

Pesquisadora: É uma reta? Quando tem começo e fim é reta?

Incentivamos que buscassem em suas memórias as discussões realizadas nas aulas anteriores sobre a construção de linhas retas e segmentos de reta. A organização do ensino do sistema Elkonin-Davídov se diferencia por possibilitar a inter-relação das tarefas de estudo e a criação de novas necessidades. Por isso, a análise dos pares de segmentos em que os estudantes os relacionam com os conceitos já estudados (cor e forma) nos permite avaliar que eles se apropriaram dos conceitos anteriores e buscavam relacioná-los com o novo.

No debate, quando questionados sobre o que caracteriza a reta, as explicações eram de que “*ela nunca acaba*”, “*é infinita*”. Voltamos a nos referir ao primeiro par de segmentos (cor roxa) apontando para o quadro, onde o *slide* refletia os diferentes pares de segmentos, e perguntamos: “*Os pontos no começo e no fim indicam que é infinito?*” Vários estudantes afirmam que os pontos inicial e final indicavam ter fim, ou seja, não representavam uma reta. Assim, foi necessário intervir para que lembrassem do nome dado à representação de uma parte

da reta, o segmento. Refletimos, como pesquisadora, a respeito de qual era realmente a questão que se apresentava: os estudantes não haviam se apropriado do conceito (significado) ou da palavra (signo) que o representa? Nossa compreensão, diante das manifestações, era de que não lembravam do nome, e começamos a dar pistas. Dissemos que inicia com a letra “S” e escrevemos no quadro. Sô comentou: *“É igual à do meu nome”*. Concordamos e acrescentamos a ela a letra “E”. Imediatamente vários estudantes pronunciaram *“Segmentos”*.

A estudante Ket questionou: *“Professora, não era para ser ‘G’ e ‘I’?”* A maioria dos estudantes estava em processo de alfabetização, por isso sempre buscávamos refletir sobre a escrita das palavras relacionadas aos conceitos matemáticos em estudo. A professora da classe contribuiu, dizendo *“se colocássemos o ‘I’ ficaria ‘GI’”*.

Prosseguimos com a reflexão para identificar, dentre os pares de segmentos (Figura 41), se o modo de comparação estava correto. A estudante Sô indicou, circulando um dos pares (Figura 42), a opção incorreta para a análise.

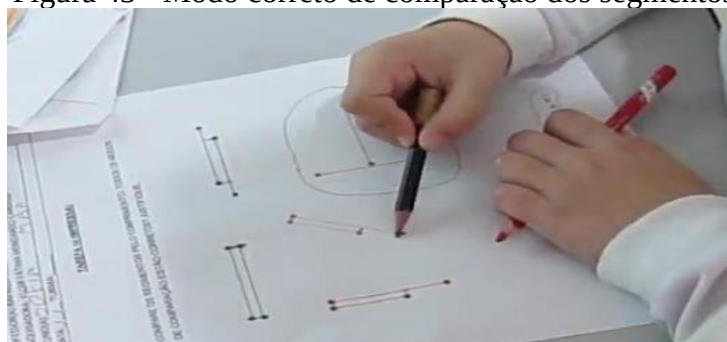
Figura 42 - Modo incorreto de comparação dos segmentos



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

Ao indagarmos se havia outro par de segmentos que não estava posicionado corretamente, Sô afirmou que sim. Questionamos: *“Qual?”* Surpreendemo-nos quando a estudante indicou os dois segmentos inclinados. Pedimos que justificasse sua escolha. Ela confirmou que os segmentos inclinados (Figura 41 - segmentos de cor verde) representava que ambos tinham o mesmo começo: *“Eles começam juntos”*. Porém, na sequência, percorreu com o lápis (Figura 43) a extensão que indicava a diferença do tamanho dos segmentos e considerou: *“Aqui parou”*, referindo-se ao segmento menor; *“aqui continuou”*, indicando o prolongamento do outro segmento.

Figura 43 - Modo correto de comparação dos segmentos



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

Nesse momento, percebemos que a estudante considerava o modo de comparação correto aquele em que os segmentos coincidiam tanto no início (começo) como no final dos segmentos, ou seja, para os segmentos de tamanhos iguais, conforme o primeiro par de segmentos analisados. Retomamos as discussões com os estudantes, apontamos para o par de segmentos de cor vermelha e questionamos: *“Esse modo de comparar está errado?”* Tina afirmou que sim. *“Por que está errado?”* A própria aluna concluiu: *“O tamanho”*. Portanto, ficava evidente que mais estudantes estavam tendo as mesmas compreensões que Sô. Esta é a relevância da tarefa particular de controle para o professor, ou seja, reconhecer o que precisa ser retomado para alcançar a finalidade da tarefa. O fundamental, na tarefa em questão, é reconhecer o modo de comparar comprimentos para identificar não só a igualdade, mas também a desigualdade entre os tamanhos dos segmentos.

Buscamos, novamente, referência nos modos de aproximar os recortes. Tomamos dois recortes com comprimentos da altura diferentes e os aproximamos de diversos modos, no modo correto e também no incorreto, respectivamente. Os começos dos recortes coincidiam e não coincidiam. Após um longo debate, questionamos novamente:

Pesquisadora: *É errado os recortes coincidirem no começo e não coincidirem no final?*

Estudantes: *Não!*

Pesquisadora: *O que significa quando os recortes têm o mesmo começo, mas não têm o mesmo fim?*

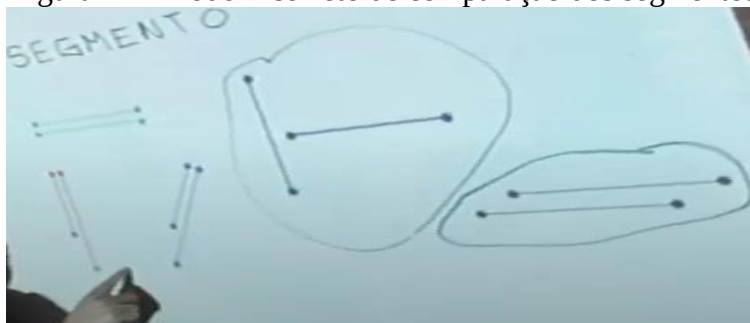
Tina: *Os tamanhos são diferentes.*

Chamamos a atenção dos estudantes para o modo correto de comparar os pares de segmentos (roxo, vermelho e verde). *“O modo como o par de segmento (vermelho) está disposto é certo ou errado? E o verde? E o roxo?”* As respostas ainda se diferenciavam, alguns respondiam que estava certo (maioria), mas havia aqueles que diziam estar errado. Propusemos que os estudantes que concordavam com o modo de comparar os três pares de segmentos justificassem sua resposta. Foram até o quadro e afirmaram: *“São corretos porque eles*

começam no mesmo lugar”, ao mesmo tempo que passavam o dedo indicador sobre a imagem para confirmar o que expressavam verbalmente.

Para completar a análise, discutimos os modos de comparação que não estavam corretos. Dois estudantes foram até o quadro e circularam os pares azul e preto, com a justificativa de que não estavam dispostos de forma que os começos coincidissem, por isso não era possível comparar os segmentos (Figura 44).

Figura 44 - Modo incorreto de comparação dos segmentos



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

Como síntese, sugerimos que os estudantes, individualmente, fossem até o quadro e expressassem oralmente suas apropriações referentes ao modo correto e incorreto de comparar os pares de segmentos. Com relação ao modo correto, apontaram os pares (roxo, vermelho e verde) com o dedo indicador e pronunciaram *“esse, esse e esse tem começo com começo”*. Procuramos continuar a investigação com o questionamento: *“O que acontece com cada par de segmentos?”* Alguns apontaram novamente para o par de segmentos, mas desta vez percorreram o espaço correspondente ao tamanho de cada segmento do par, dizendo *“esse começa no mesmo lugar e não termina no mesmo”*. Contestamos a explicação: *“O que isso significa?”* Responderam, em tom de admiração: *“Um é menor que o outro!”* Retrucamos mais uma vez, apontando para o par de cor roxa: *“E esse?”* *“Se tem o mesmo começo e o mesmo fim, eles têm o mesmo tamanho”*, afirmaram. Com relação ao modo incorreto, argumentaram que *“não tem como saber, porque não tem começo com começo!”*

A tarefa particular de controle possibilitou novas intervenções para que finalidade dela fosse assimilada pelos estudantes. Davíдов (1988, p. 216) esclarece que a função principal da ação de controle é *“garantir que o procedimento tenha todas as operações indispensáveis para que o aluno resolva com sucesso a diversidade de tarefas concretas particulares”*⁶¹. Desse modo, entendemos que a apropriação que os estudantes possuíam possibilitava prosseguirmos

⁶¹ “asegurar que este procedimiento tenga todas las operaciones indispensables para que el alumno resuelva exitosamente la diversidad de tareas concretas particulares”.

no experimento com o desenvolvimento de outras tarefas particulares de estudo (44, 45 e 46) relativas à grandeza comprimento para aprofundar a associação do movimento das relações dessa grandeza com o segmento (Rosa, 2012).

Na sequência do experimento, foram retomadas as tarefas particulares que se referem à introdução das grandezas: linhas, pontos e segmentos. Voltar aos elementos já estudados, de acordo com o sistema Elkonin-Davídov, não significa reproduzir o já apropriado, e sim avançar no conhecimento com base no apreendido. O foco então direcionou-se para o estudo de linhas quebradas abertas e fechadas. A linha quebrada aberta é formada de segmentos e não é reta. Para a construção da linha quebrada aberta, colocamos no quadro – e os estudantes em seus cadernos – quatro pontos não colineares que unidos formam uma linha quebrada aberta com três segmentos. O estudante JB associou a linha quebrada aberta com a linha reta. Foi até o quadro, com gestos seguidos de expressão verbal, e socializou sua síntese para os demais colegas. Apontou para a esquerda e para a direita do desenho da linha quebrada aberta e complementou: *“Dá para deixar reta, puxa para esse lado e para esse”* (Figura 45).

Figura 45 - Linha reta e linha quebrada aberta

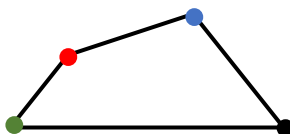


Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

De acordo com Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008), é possível associar a linha com vários segmentos à linha reta, porém quebrada em alguns lugares, ou seja, com início e fim determinados. A explicação de JB permitiu-nos prosseguir com a tarefa subsequente, que envolvia a construção da linha quebrada fechada.

A linha quebrada fechada era decorrente da tarefa anterior. Do mesmo modo propusemos que fizessem em seus cadernos quatro pontos, porém orientando para que a união dos pontos fosse feita de maneira que a nova linha quebrada não tivesse começo nem fim. Dito de outro modo, a união sucessiva dos pontos forma segmentos, no entanto, o primeiro ponto é ligado ao último (Figura 46). “[...] qualquer um dos pontos marcados é, simultaneamente, começo e fim” (Rosa, 2012, p. 95).

Figura 46 - Linha quebrada fechada



Fonte: Elaborada pela autora com base em Rosa (2012).

Segundo Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008), os segmentos que formam a linha quebrada fechada servem de limite da figura. Ela separa a superfície interna da externa das figuras geométricas poligonais, cujas denominações diferem conforme o número de segmentos que formam a linha quebrada fechada: com três, triângulo; com quatro, quadriláteros; com cinco, pentágonos; com seis, hexágonos, entre outros.

A apropriação da ideia de limite de uma região de linhas quebradas fechadas auxilia o estudo da grandeza área, cuja análise apresentaremos na sequência. Salientamos, como já explicitado, que devido ao elevado número de tarefas desenvolvidas no experimento, optamos por selecionar para análise as consideradas elementares para nosso objeto de estudo, qual seja: a possibilidade de apropriação, pelos estudantes, de um sistema de ensino de matemática para o desenvolvimento do pensamento teórico. Assim, desenvolvemos outras tarefas particulares que envolviam linhas fechadas quebradas ou curvas para que os estudantes se apropriassem do novo elemento, região interna (superfície), que subsidiará o modo de comparar a grandeza área. Os estudantes já relacionavam a grandeza comprimento às linhas retas e segmentos e sabiam comparar essa grandeza. Esse conhecimento se unificava e avançava com tarefas particulares em que os estudantes: identificavam pontos que se encontram na região interna e externa de figuras formadas por linhas quebradas ou curvas fechadas (tarefas 51 e 52); construíam e pintavam a parte interna dessas figuras (tarefas 53 e 54); identificavam os tipos de linhas que limitam uma superfície (tarefa 55); e, por meio da sobreposição de recortes de papel de forma quadrangular, triangular, circular, entre outros, no caderno, contornavam cada recorte com lápis e identificavam o tipo de linha formada (tarefa 56). Porém, em conformidade com Rosa (2012), nosso propósito não consistia em sistematizar o conceito das figuras geométricas (quadrado, triângulo, círculo, circunferência) com os estudantes do primeiro ano escolar. A finalidade principal era que os estudantes identificassem os tipos de linhas determinadas pelo contorno e analisassem o limite que essas linhas determinavam para perceberem o espaço interno (área), grandeza que será analisada no próximo item.

3.2.3 Grandeza área

É importante ressaltar que o estudo das grandezas com a inclusão de um novo modo de comparação constituiu-se em momento desafiador do experimento. Tal afirmação tem relação com a participação presencial de estudantes que não estavam nessa modalidade até então. A partir deste encontro (nono), o primeiro após o recesso de julho, as aulas passaram a ser presenciais para todos os estudantes. Essa condição colocou-nos diante de um desafio: como dar continuidade ao experimento e inserir esses estudantes no processo?

A própria organização de ensino do sistema Elkonin-Davídov nos possibilita a retomada devido ao sistema conceitual que inter-relaciona as tarefas de estudo. De acordo com Rosa (2012, p. 102), “[...] existe um movimento no processo de apropriação do conhecimento que, a cada tarefa, se torna mais complexo pela inserção de novos conceitos ou propriedades, que encaminha o desenvolvimento do pensamento”.

Assim, retomamos com os estudantes que participavam do experimento há mais tempo a discussão referente à introdução dos elementos geométricos (tipos de linhas, ponto, segmento, entre outros). Essa ação possibilitou avaliar a apropriação dos estudantes que participavam do experimento desde os primeiros encontros e permitiu que os demais se inteirassem do estudo realizado até aqui.

Desenhamos no quadro, com o auxílio de uma régua, uma linha e lançamos o questionamento: *“O que é isso?”* Os estudantes disseram: *“Linha reta, porque não tem um ponto no começo e outro no fim”*; *“É sem limite”*; *“É infinita”*. Suas falas indicavam o conhecimento já apropriado sobre linha reta. Continuamos a investigação com outra pergunta: *“Por que é reta?”* Biel disse: *“Porque ‘usasse’ a régua”*. Na sequência, desenhamos à mão livre uma linha abaixo da linha reta e perguntamos:

Pesquisadora: *Que linha é essa?*

Estudantes: *Curva.*

Pesquisadora: *Por que é curva? Me esforcei para fazer bem retinha?*

Estudantes: *Porque não usou a régua! Porque tem ondinhas! Tem morrinhos!*

Não perdíamos de vista nosso objetivo principal, naquele momento, ou seja, certificar-nos de que os estudantes recém-chegados estavam se apropriando das ideias principais em debate, por isso direcionávamos as questões para eles também. As discussões continuaram com relação aos elementos essenciais para a construção de outros tipos de linhas estudadas, as quebradas abertas e as quebradas fechadas. Ficou evidente, nas palavras dos

estudantes, que haviam se apropriado dos elementos que formam as linhas quebrada aberta e fechada. Apontavam para os pontos que indicavam o começo e fim de cada segmento, explicitavam que o mesmo ponto em alguns momentos era fim de um segmento e começo de outro.

O estudante JB observava a linha quebrada fechada desenhada no quadro. Aproveitamos para questioná-lo: “JB, quantos segmentos tem a linha quebrada fechada?” Ao direcionarmos a questão para JB, tínhamos a pretensão de analisar se o estudante havia superado o equívoco cometido na tarefa anterior (linha quebrada aberta). Ao ser questionado sobre o número de segmentos na linha quebrada aberta (união de quatro pontos não colineares), JB contou os pontos e respondeu que a linha quebrada aberta era formada por quatro segmentos (O correto são três.).

Para a análise da linha quebrada fechada, JB aproximou-se mais do quadro, apontou para um dos pontos, deslocou o dedo indicador na extensão do segmento, pensou e expressou oralmente: “Esse ligado neste, esse ligado nesse, esse ligado nesse, esse ligado nesse. São quatro!” O movimento traduzido pela expressão “esse ligado nesse” indicava a contagem de um segmento (ponto inicial ligado ao segundo). A repetição “esse ligado nesse” referia-se ao segundo segmento, porém com a indicação de que o ponto final do primeiro é o inicial do segundo e assim continuou até concluir que eram quatro segmentos. JB manifestava, ao expressar oralmente “esse ligado nesse”, sua compreensão de que a união dos dois pontos extremos forma um segmento. O estudante avançou no pensamento e superou o equívoco cometido anteriormente.

Após o debate que acabamos de relatar, continuamos o experimento com a proposição da tarefa particular de estudo que introduz o conceito de área. Tínhamos nas mãos, e entregamos para cada estudante, um *kit* (envelope) com dois recortes de cores diferentes e mesmo formato, porém bastante irregular (Figura 47). A irregularidade dificultava a identificação dos tamanhos do comprimento da altura e da largura (Gorbov; Mikulina; Savieliev, 2008).

Figura 47 - Recortes com o mesmo formato



Fonte: Rosa (2012, p. 100).

Procuramos não intervir diretamente, com a pretensão de que analisassem os recortes com base nas características e grandezas estudadas até o momento. Sugerimos somente *“comparem os dois recortes”*. Visto que vários estudantes se pronunciaram ao mesmo tempo, solicitamos que cada um relatasse o que observara. Samuca manuseou os recortes e descreveu: *“São diferentes pela cor e não têm a mesma altura”*. Questionamos: *“Por que não têm a mesma altura?”* Samuca e Sô sobrepuseram os recortes, uniram a parte inferior de cada um e argumentaram que o final não coincidia, por isso a altura era diferente (Figura 48).

Figura 48 - Comparação de recortes



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

Os demais estudantes também manipulavam os recortes em busca de elementos que caracterizassem a igualdade ou a desigualdade na comparação. Eles perceberam de imediato as diferenças com relação à característica qualitativa cor e a grandeza comprimento da altura. Não mencionaram o comprimento da largura e a forma. Para chamar a atenção dos estudantes a esse fato, indagamos: *“Não tem mais nada diferente? Os recortes não têm nada igual?”* A questão suscitou que vários estudantes dissessem: *“Pela forma! Eles são iguais pela forma!”*

Samuca juntou os dois recortes de modo que o amarelo ficasse completamente sobreposto ao verde e disse: *“Ele fica mais certo”*. Questionamos: *“O que você quer dizer com mais certo?”* *“Assim o verde aparece”* (Figura 49). Com a expressão *“mais certo”* o estudante quis dizer que a superfície do recorte amarelo cabia completamente sobre a superfície do verde.

Figura 49 - Sobreposição do recorte amarelo no verde



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

Na sequência, ele girou os recortes de modo que o verde ficasse voltado para cima e arrematou: “*Assim ele não aparece*”. Sua referência era o recorte amarelo. Nesse momento, o estudante descobriu (anunciou) a finalidade da tarefa, ou seja, o modo correto de comparar as áreas dos dois recortes. A descoberta de Samuca permitiu a reflexão com os demais estudantes.

Pesquisadora: *O que o Samuca descobriu?*

Estudante: *Que o tamanho do amarelo é pequeno.*

Pesquisadora: *Qual tamanho?*

Estudante: *A altura.*

Pesquisadora: *O que o Samuca fez para descobrir que a altura do amarelo é menor?*

Estudantes: *Colocou um em cima do outro.*

Pesquisadora: *É só a altura que é menor?*

A questão foi direcionada para que refletissem sobre o fato de o recorte amarelo caber completamente sobre o verde. Passamos a mão sobre a superfície inteira de um e do outro recorte para que pudessem perceber que a referência não era um comprimento isolado (largura ou altura). Por fim, chamamos a atenção para a nomenclatura da nova grandeza: “*Na Matemática esse espaço é denominado de área*”.

Após essa discussão, os demais estudantes se deslocaram de suas carteiras com os recortes nas mãos e se dirigiam até nós para mostrarem como realizaram a sobreposição. Quando alguns diziam que não era possível colocar um completamente sobre o outro, auxiliávamos para que entendessem a posição correta, relacionando as formas. As intervenções eram direcionadas para que percebessem que não só a altura era menor, mas também a largura, e essa era a razão pela qual toda a área do recorte menor (amarelo) cabia totalmente na área do maior (verde). Iniciou-se, então, um processo de análise das propriedades do conceito área.

No décimo encontro retomamos as discussões sobre as grandezas comprimento e área. Entregamos outro *kit* contendo quatro recortes: dois de forma retangular e dois de forma triangular. Com relação aos comprimentos, cada par tinha alturas iguais e larguras diferentes. Inicialmente, solicitamos que retirassem do envelope os de forma retangular. Pretendíamos observar se os estudantes diferenciavam os recortes pela forma. Principalmente aqueles que iniciaram as aulas presenciais no encontro anterior. Nossa preocupação era com a apropriação pela maioria dos estudantes (quicá todos), por isso o olhar mais atento aos que chegaram depois e que não acompanharam presencialmente as discussões iniciais das tarefas de estudo do conceito de número, mesmo cientes que esses estudantes haviam recebido as tarefas particulares de estudo para realizarem em casa. A organização e desenvolvimento das tarefas de estudo desse sistema de ensino – que se caracteriza por ser um sistema conceitual e pela participação efetiva dos estudantes na realização das tarefas – favorece a aprendizagem coletiva. Os

estudantes que acompanharam o experimento presencialmente desde o início, que poderiam estar em um nível de compreensão mais adiantado, contribuíram para que os demais se inserissem e acompanhassem a execução das tarefas com assimilação do conteúdo. Assim, para nossa investigação a inserção dos estudantes no percurso não foi um problema irreversível, mas um ponto de reflexão e de análise, o que, em outras perspectivas teóricas, poderia ser uma justificativa para o insucesso dos estudantes.

A finalidade da tarefa particular centrava-se na comparação dos recortes para a igualdade ou desigualdade (maior ou menor) das grandezas comprimento (largura e altura) e área. Estávamos certas de que, pelas características qualitativas, não havia mais dúvidas. Nesse momento do experimento, era importante que o foco estivesse voltado para o modo correto de comparar as grandezas escalares, para que em tarefas futuras seja possível encontrar o valor da diferença, ou seja, quanto uma grandeza é maior ou menor que a outra. Por isso, solicitamos que comparassem a altura, a largura e a área dos dois recortes (Figura 50).

Figura 50 - Modo correto de comparar comprimentos e área



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

Para as comparações, combinamos que o comprimento maior de cada recorte seria considerado a altura, e o menor, a largura. Sendo assim, na Figura 50, a foto da esquerda representa, pela comparação, que as alturas são iguais. Na foto central, o modo de comparar evidencia que as larguras são diferentes (Aqui o estudante girou em 90° os recortes para comparar as larguras.). A estudante apontou para o recorte amarelo e disse: “*O amarelo tem largura maior que o marrom*”. À direita, sobrepôs os recortes e comparou, simultaneamente, pela área e pelos comprimentos da altura e da largura. Tal inter-relação é manifestada na fala de uma estudante que sobrepôs os dois recortes.

Pesquisadora: *São iguais ou diferentes?*

Estudantes: *Diferentes.*

Pesquisadora: *Diferentes como?*

Sô: *Largura e cor. Eles são diferentes né, um é mais gordo e um é mais fino.* (As expressões “*mais gordo e mais fino*”, nas palavras da estudante, referem-se às larguras dos recortes.)

Sô: *Assim eles são iguais!* (A exclamação da estudante é complementada ao mostrar os recortes sobrepostos do mesmo modo da figura (50) à direita.)

Pesquisadora: *São iguais no quê?*

Sô: *Na altura.*

Outros estudantes saíram de suas carteiras e se aproximaram para mostrar a sobreposição dos recortes com referência à superfície (área). Questionamos os estudantes: *“Qual é maior pela área (superfície)?”* Sempre que nos referíamos à área, passávamos a mão na superfície dos recortes para que distinguíssem o modo correto de comparar a grandeza área da grandeza comprimento, com a aproximação das laterais dos recortes. Alguns estudantes responderam *“o amarelo”*. Incentivamos a análise com outra pergunta: *“Por que o amarelo é maior?”* Tina foi objetiva: *“Porque está sobrando!”* Com os recortes sobrepostos (Figura 51), ela justificou sua fala passando o dedo indicador nas superfícies aparentes do recorte amarelo.

Figura 51 - Identificação do recorte com maior superfície



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

É importante ressaltar a participação efetiva dos estudantes durante o experimento, sempre dispostos e ansiosos para expressar suas resoluções. Era tamanha a euforia, que por vezes precisávamos organizar o diálogo, pois todos falavam ao mesmo tempo. No entanto, como já mencionado, posto que o experimento foi desenvolvido durante a pandemia do Covid-19, o retorno de todos os estudantes presencialmente exigia-nos mais cuidado com relação ao distanciamento social. Gostaríamos de deixá-los livres para transitar na sala de aula, porém, para proteger a saúde dos estudantes e da sociedade em geral, foi necessário cumprir as exigências das autoridades competentes, como a permanência dos estudantes com máscara e em suas carteiras. Tentávamos superar tais restrições, que de certa forma, a nosso ver, prejudicavam o desenvolvimento do experimento, pois exigiam que fossem individualmente até a frente do quadro para nos apresentar suas apropriações e, sob nossa orientação, socializassem aos demais.

Na continuidade da tarefa de estudo com a finalidade de os estudantes se apropriarem da relação entre as grandezas comprimento e área, mas com foco no que diferencia o modo de compará-las, solicitamos que pegassem os recortes de formas triangulares do *kit*. A questão que se apresentava no momento destacava as propriedades dos recortes que podiam ser comparadas, ou seja, o comprimento da altura de um com o comprimento da altura do outro; o comprimento da largura de um com o comprimento da largura do outro; e a área de um com a área do outro.

Assim que propusemos a tarefa, vários estudantes, de imediato, sobrepueram os recortes (Figura 52).

Figura 52 - Sobreposição dos recortes triangulares



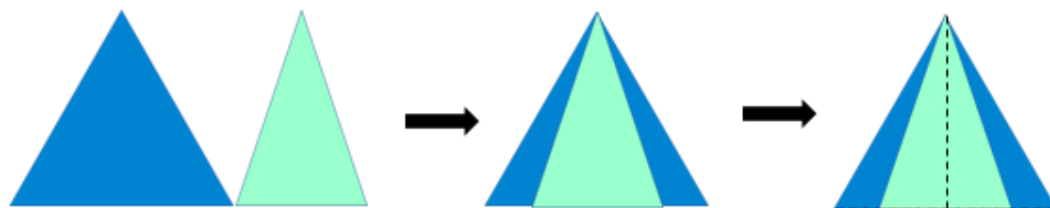
Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

No entanto, precisávamos nos certificar de que os estudantes identificavam as dimensões da grandeza comprimento (largura e altura) no recorte de forma triangular e o que significava sobrepor toda a superfície do recorte verde na superfície azul. A identificação da altura e da largura dos recortes de formas retangulares, analisados anteriormente, coincidiam com os seus lados. Será que os estudantes tinham compreendido como identificar a altura dos recortes com forma triangular?

Para investigarmos a compreensão dos estudantes, realizamos o mesmo procedimento que haviam feito. Sobrepuemos os recortes de forma que suas alturas coincidissem e questionamos: “*Onde estão as alturas dos recortes? Elas têm o mesmo tamanho?*” Os estudantes conversavam paralelamente, não estavam atentos e concentrados, pareceu-nos que para eles bastava sobrepor os recortes. Nossa estratégia para focá-los na realização da tarefa foi recorrer à análise dos triângulos isósceles⁶² (figuras planas) por meio de *slides no PowerPoint* (Figura 53).

⁶² O triângulo isóscele é uma figura geométrica de três lados, sendo que dois deles possuem a mesma medida e, por isso, são considerados congruentes.

Figura 53 - Triângulos iguais pelo comprimento da altura e diferentes pelo comprimento da largura e pela área



Fonte: Elaborada pela autora com base em Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008).

Buscamos, no movimento das figuras no *PowerPoint*, ressaltar os mesmos elementos discutidos com os recortes (comprimentos da altura/largura e área). Considerávamos importante que os estudantes entendessem as grandezas envolvidas e conseguissem estabelecer as relações de maior, menor e igual. Combinamos que na figura (53) o segmento (tracejado) na posição vertical, à direita, indicaria, as alturas dos triângulos, e os segmentos na horizontal, as larguras. A centralidade da tarefa estava na percepção de que a igualdade dos comprimentos das alturas e a desigualdade das larguras implicaria a possibilidade de sobrepor completamente uma figura na outra e a síntese de que a figura sobreposta tinha área menor. As tarefas que introduzem o conceito de área no primeiro ano escolar, conforme Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008), conduzem os estudantes a argumentar que para comparar áreas é necessário colocar uma figura ou um objeto em cima do outro.

Na sequência do experimento, no décimo primeiro encontro, propusemos outras tarefas particulares de estudo que envolviam a análise investigativa das características e grandezas estudadas. Porém, o ponto central permanecia sendo os modos de comparar áreas e comprimentos. A tarefa particular que segue foi elaborada dada a constatação de que alguns estudantes não tinham se apropriado do modo de comparar as grandezas comprimento e área, especialmente das figuras de forma triangular.

Entregamos um *kit* com dois pares de recortes, um de forma retangular, na cor verde, e outro triangular, na cor laranja (Figura 54). Cor e forma são as características que os estudantes analisaram para a escolha dos pares a serem comparados: pelo comprimento da altura, pelo comprimento da largura e pela área.

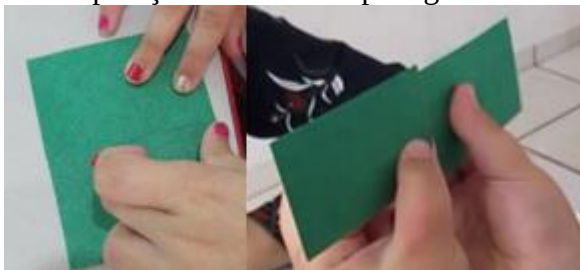
Figura 54 - Representação de pares de recortes (mesma cor e forma) com comprimentos da altura e largura iguais



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

As dimensões dos recortes (largura e altura) se diferenciavam, se comparadas com as da tarefa anterior. Nesta, cada par possuía a mesma largura e a mesma altura. Propusemos que pegassem os dois recortes de forma retangular e questionamos: “*Como podemos comparar estes dois recortes?*” Enquanto manuseava os recortes, sobrepondo um no outro, Sô argumentou: “*Eles têm a mesma cor e também têm o mesmo comprimento da altura e largura*”. A estudante, mesmo executando o procedimento para análise da área (sobreposição), não fez referência a essa grandeza. Os outros estudantes realizavam o mesmo movimento, encostavam os comprimentos da largura e da altura dos recortes para se certificarem dos seus tamanhos, enquanto diziam: “*Os comprimentos das alturas e das larguras são iguais*” (Figura 55).

Figura 55 - Comparação dos recortes pela grandeza comprimento



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

A maioria dos estudantes indicava objetivamente (manuseio dos recortes) e verbalmente (com palavras) o sistema conceitual discutido nas aulas com relação às características qualitativas – cor e forma –, bem como às grandezas comprimento, largura e altura, ao afirmarem que os recortes eram iguais: pelo formato, pela cor, pelo comprimento da altura, pelo comprimento da largura. Não estávamos convencidas de que haviam se apropriado do modo correto de comparar as áreas, mesmo com a sobreposição dos recortes. Perguntávamos: será que se apropriaram do modo correto de analisar a área e não conseguiam expressar verbalmente? Ou será que colocar um recorte sobre o outro não representava para os estudantes a área total da superfície?

Optamos por dar prosseguimento às discussões com a análise dos outros recortes do *kit*, os de forma triangular. Solicitamos que identificassem nos recortes o comprimento da altura e o comprimento da largura. A estudante Lala indicou a altura de um dos recortes passando o dedo indicador em um dos lados dele (Figura 56).

Figura 56 - Altura do recorte triangular indicada pela estudante



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

O procedimento da estudante chamou-nos a atenção, pois provavelmente fez relação com o modo de identificar a altura do recorte de forma retangular. Neste, a medida do lado é a altura, mas no de forma triangular (associado ao triângulo equilátero) isso não ocorre. Não tínhamos a pretensão de definir conceitualmente a altura dos recortes de forma triangular em uma classe do primeiro ano, bastava que as identificassem, como discutido na tarefa anterior. Alguns o faziam tranquilamente (Figura 57); outros, como a estudante Lala, estavam no processo.

Figura 57 - Identificação da altura de recortes ou figuras com forma triangular



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

Nosso anseio com a tarefa consistia em que os estudantes chegassem à seguinte síntese: recortes ou figuras geométricas de mesma forma, com medidas dos comprimentos (altura e largura) congruentes, ao serem sobrepostos teriam inevitavelmente a mesma área, bem como aqueles de mesma altura, com larguras diferentes (ou vice-versa) possuiriam áreas diferentes. O pressuposto era que a apropriação dos modos de comparação das duas grandezas

(comprimento e área) possibilitasse que, em tarefas futuras, a diferença fosse quantificada, tanto ao sobrepor (áreas) quanto ao encostar os objetos ou figuras. Os recortes em que todas as grandezas comparadas são idênticas remetem à identificação de que, por exemplo, a área de um recorte cabe inteiramente na área do outro, o que é essencial para o entendimento da unidade de medida no processo de medição.

Na discussão das grandezas comprimento e área com os recortes, a espessura não foi considerada, por isso, era indiferente para a comparação analisar os recortes (tridimensionais) ou as figuras (bidimensionais). No estudo da grandeza volume, no próximo item, focaremos a conexão das grandezas comprimento e área com a espessura/profundidade de sólidos geométricos.

3.2.4 Grandeza volume

Na sequência da ideia de tamanho com referência ao volume, um novo modo de comparação foi realizado no décimo primeiro, décimo segundo e parte do décimo terceiro encontro do nosso experimento. A representação da comparação da igualdade ou desigualdade na expressão verbal foi substituída por tiras de papel, “[...] o primeiro passo para atingir o conceito abstrato de grandeza” (Rosa, 2012, p. 104).

Inicialmente, a análise centrou-se na diferença entre as características e grandezas estudadas, porém a finalidade era dar um novo salto qualitativo, ou seja, além das características e grandezas conhecidas, a análise permitiria a discussão das propriedades que diferenciam as figuras planas dos corpos (sólidos). Os estudantes receberam um *kit* com três tiras de papel da mesma cor e mesmo comprimento da largura, sendo duas iguais também pelo comprimento da altura e uma menor por esta dimensão. Com as tiras nas mãos, sugerimos um “jogo”. Inicialmente, os estudantes analisariam somente as figuras planas expostas no quadro, *slide* no *PowerPoint* (Figura 58).

Figura 58 - Figuras planas de cores e formas diferentes



Fonte: Elaborada pela autora com base em Rosa (2012).

Havíamos estabelecido que os resultados das análises deveriam ser mostrados com as tiras sem qualquer expressão verbal, em silêncio. Esse foi um desafio para alguns estudantes, porque até então incentivamos a oralidade. Para instigá-los a pensar sobre o que deveriam analisar, apontamos para as imagens refletidas no quadro (Figura 58) e questionamos: *“O que podemos observar nas imagens?”* Os estudantes pontuaram *“cor, forma, tamanho, altura, largura, comprimento, área”*. A partir disso, propusemos que cada um analisasse as figuras e mostrasse duas tiras de tamanhos iguais ou duas de tamanhos diferentes, respectivamente, para expressarem a igualdade ou a desigualdade na comparação. Em um primeiro momento, vários estudantes analisavam as próprias tiras em suas mãos: *“Elas são iguais pela cor, pelo comprimento da altura, pelo comprimento da largura”*. As respostas estavam corretas, porém não cumpriam o objetivo da tarefa. As tiras de papel se constituíam no modo objetual de elaborar as sínteses conclusivas das comparações com base nas características e grandezas das figuras. Foi necessário um intenso debate para que os estudantes compreendessem a relação entre a análise das imagens e os recortes. Para isso propusemos, conforme indicação dos próprios alunos, a investigação sobre os modos de comparação das grandezas. Movimentávamos as figuras com o auxílio do *PowerPoint*, aproximando-as pelos comprimentos (altura e largura) e pela sobreposição para comparar a área. A síntese foi unânime: *“As figuras são iguais, pelos comprimentos da altura, da largura e pela área”*.

A retomada da tarefa foi importante para que os estudantes compreendessem o seu propósito. A maioria mostrou as tiras iguais, porém dois deles (Biel e Cido) levantaram duas tiras de alturas diferentes. Propusemos que estes justificassem suas escolhas, e ambos atribuíram o resultado à análise da cor das figuras: *“Porque um quadrado é vermelho e o outro amarelo, a cor é diferente”*. A escolha das tiras iguais pela maioria ocorreu devido ao maior número de possibilidades de igualdade, ou seja, forma, comprimento da altura, comprimento da largura e área. Isso se evidenciou na justificativa de cada um, pois assim como solicitamos aos dois estudantes que justificassem o porquê das tiras diferentes, fizemos o mesmo para os que apresentaram as tiras iguais.

Destacamos a relevância da referida tarefa por proporcionar a retomada do sistema conceitual mediante a inter-relação que envolve as características e grandezas de figuras planas e a possibilidade de ampliar o leque de apropriações pelos estudantes. Também ressaltamos o fato de serem várias as possibilidades de resolução e isso pode se tornar um incentivo, pois não se restringe a uma resposta de um estudante como a correta, considerando as demais como incorretas. Comungamos com a ideia de maior igualdade e oportunidade de aprendizagem para toda a classe, ou seja, o destaque é para todos os estudantes, e não para uma minoria (Rosa,

2012). No caso da tarefa aqui apresentada, todos os alunos encontraram uma forma de comparação entre as grandezas e estabeleceram uma relação de igualdade ou desigualdade.

A continuidade do jogo com o uso das tiras avançou nas discussões na direção de que os estudantes diferenciasssem figuras planas de não planas. Projetamos no quadro a imagem de um quadrado; com uma caixa nas mãos, solicitamos que comparassem a imagem projetada no quadro com a caixa que estávamos manuseando. Direcionamos o debate para que identificassem as dimensões da caixa (comprimento da altura, da largura e da profundidade) e comparassem com as da imagem no quadro (largura e altura). Para que percebessem efetivamente essa relação, encostamos na superfície do quadro a caixa que estávamos manipulando e a contornamos com um pincel atômico. Na sequência a afastamos da superfície do quadro e indagamos: “*A imagem que ficou desenhada no quadro e a caixa são iguais?*” Nossa interlocução propiciou a análise da caixa e do desenho. Na caixa identificamos três dimensões (largura, altura e profundidade), no desenho somente duas (altura e largura). Nesse debate, elaboramos com os estudantes a seguinte síntese: as figuras com duas dimensões são denominadas planas, e as com três prismas ou corpos. Conforme Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008), todos os objetos que manipulamos, ou seja, da vida real, existem na forma de corpos. Nossa intenção no momento não era a generalização do conceito de corpo, queríamos somente atrelá-lo à ideia de volume.

Em conformidade com a orientação de Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008), para a realização da tarefa particular de introdução do volume manipulamos duas caixas com forma de paralelepípedo, sendo que uma delas cabia completamente dentro da outra. Voltamos a reiterar as comparações dos tamanhos dos comprimentos encostando as alturas, as larguras e as profundidades, e a comparação da área pela sobreposição das faces. Concluímos que a comparação das dimensões se diferenciava, dependendo do modo como as realizássemos. Propositamente, manipulamos duas caixas de maneira que uma delas tinha altura, largura e profundidade menor, se comparada com as mesmas dimensões da outra. Do mesmo modo, a área das faces também apresentava resultado diferente. Na comparação das dimensões, não nos restringimos somente às caixas, usamos também recortes de papel para que identificassem a profundidade, além da altura e largura. Reiterávamos a discussão anterior referente à diferença entre figura plana e corpos. Cabe observar que o recorte de papel possui pouca espessura, mas ela existe. É comum que professores usem como exemplo de figuras planas a capa do caderno ou uma folha de papel. Desse modo, é negado ou negligenciado aos estudantes o conhecimento científico de objetos (corpos) tridimensionais e, conseqüentemente, da espessura/profundidade

que possuem. A identificação da largura e da altura foi tranquila para a maioria, no entanto a profundidade exigiu de nossa parte várias interferências, conforme relatamos anteriormente.

Dando prosseguimento à tarefa, propusemos outro modo de verificar o tamanho das caixas por inteiro. Inserimos uma dentro da outra e questionamos: *“Se esta caixa cabe todinha dentro da outra e ainda sobra espaço, qual é maior?”* Os estudantes não tiveram dificuldade em dizer que a maior era a que continha a outra. Concluímos, com eles, que esse novo modo de verificar o tamanho de objetos tridimensionais é denominado volume.

Outras tarefas particulares de estudo foram desenvolvidas com o objetivo de que os estudantes comparassem os volumes de recipientes com formas e dimensões diversas. Por exemplo, dois recipientes cilíndricos com a mesma base (largura e profundidade com mesma medida) e alturas diferentes, ou dois recipientes diferentes pela forma (cilíndrico e bloco retangular) com dimensões diferenciadas. Não era possível inserir um recipiente dentro do outro para verificar qual possuía maior ou menor volume. E agora? Como resolver essa nova situação?

Salientamos que as respostas às questões não foram dadas. Os próprios estudantes, com base no conhecimento assimilado, perceberam a necessidade de um novo modo de comparação, e sugeriram encher de algum material (líquido, areia, grãos de cereal) um dos recipientes e depois transferir o conteúdo para o outro. Neste caso, utilizamos arroz. Disso concluímos, em diálogo com os estudantes, duas possibilidades de comprovação dos volumes dos recipientes com mesma base e alturas diferentes: se, no processo de transferência, o material que enche um deles couber totalmente no outro com sobra de espaço, o primeiro terá menor volume; no processo reverso, o recipiente com maior volume está cheio. Ao transferir seu conteúdo ao de menor volume, este encherá e ainda restará material no interior daquele.

Em todo o processo realizamos perguntas guias, mas procuramos partir das sugestões dos estudantes, não interferir diretamente. Colocávamos à prova suas suposições, se poderiam ser aceitas ou refutadas. A experimentação com o uso de líquidos ou outro material foi realizada com muita euforia por todos os estudantes. Foi necessário organizá-los para que todos pudessem participar das ações das tarefas do experimento.

Para a tarefa particular subsequente, cada estudante tinha nas mãos uma caixa de papel (creme dental, sabonete, entre outras). Durante as discussões que envolviam as comparações para definir o volume de caixas em que uma cabia completamente no interior da outra, um estudante colocou a sua caixa naquela que manuseávamos. As duas caixas se diferenciavam pelas três dimensões, uma delas tinha largura e profundidade maior e altura menor. A outra, largura e profundidade menor e altura maior (Figura 59).

Figura 59 - Comparação do volume de caixas



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

O ato do estudante incentivou-nos a levantar algumas questões que desencadeassem reflexões por parte dos demais colegas: *“Será que as duas caixas têm o mesmo volume? Será que são diferentes? É possível descobrir a verdade?”* Surgiu um impasse: havia uma parte da caixa com maior altura que não se encontrava no interior da que tinha altura menor. Por outro lado, nesta existia espaço sobrando, sem ser preenchido. Visto que o tempo da aula tinha encerrado, propusemos que em casa pensassem em um modo de solucionar o desafio.

Iniciamos a aula seguinte retomando a situação referente ao volume das caixas (Figura 59), recolocando a questão desencadeadora: *“Será que as duas caixas têm o mesmo volume? Será que são diferentes?”* As respostas não eram unânimes, alguns afirmavam que sim, outros que não. A maioria associava o maior volume para a caixa com maior altura. Nossa pretensão era que pudessem pensar em um modo de garantir a veracidade de suas suposições. Instigávamos para que refletissem se somente a observação visual seria suficiente para comprovar qual das caixas possuía maior volume ou se possuíam o mesmo volume. Conforme Davydov (2017), a observação limitada ao sensorial reduz à compreensão empírica dos conceitos. Por isso, colocávamos em dúvida suas certezas: *“Mas afinal há como descobrir quem está certo? É possível que todos vocês estejam corretos, nesta situação?”*

Percebemos a existência de um movimento entre os estudantes na tentativa de encontrar a solução para além da observação direta. O estudante JB pegou a caixa com menor altura e sugeriu: *“Enche esta caixa com arroz”*. Anteriormente havíamos usado esse cereal para a comprovação do volume dos dois recipientes cilíndricos com a mesma base. Isso significa que o estudante relacionou o procedimento da tarefa anterior à possibilidade de solução desta. JB, com o auxílio de um copo, transferiu o arroz que estava em um recipiente em cima da carteira para a caixa até enchê-la completamente. Mas logo perceberam que essa ação não era suficiente para responder à questão. Outro estudante sugeriu encher a outra caixa com arroz, justificando que cabia mais arroz porque era mais alta. Perguntamos: *“De onde vamos pegar o*

arroz?” Os estudantes que estavam próximos apontaram para o recipiente sobre a carteira com arroz para ser manipulado. A defesa de que era a caixa mais alta que tinha mais volume se intensificava. A justificativa, ao serem questionados sobre a razão de o volume da caixa ser maior, centrava-se na altura, ou seja, altura maior, volume maior.

As duas caixas estavam cheias de arroz, seria possível dizer qual tinha maior volume ou se eram iguais? A discussão foi direcionada para que, em conjunto, investigassem se a alternativa dos dois colegas resolveria nossa grande dúvida. Afinal, qual das caixas tinha maior volume? A observação sensorial pautada na ideia de que o tamanho da altura é definidor da comprovação sobre o maior volume está correta? Insistíamos nessa hipótese: *“Vocês afirmam que cabe mais arroz na caixa mais alta, porém a caixa mais baixa tem espaço sobrando! Continuo sem saber, não consigo ter certeza só olhando! Vocês têm certeza?”*

Lari levantou-se de sua carteira, decidida: *“Já sei!”*, disse ela convicta, *“tira o arroz desta”*, indicando para esvaziá-lo da caixa de menor altura, *“e coloca este”*, mostrando a outra caixa. Lari indicou, por meio de gestos, a transferência do conteúdo da caixa de maior altura para a de menor, que estaria vazia. Questionamos novamente a classe: *“O que vocês acham da ideia da Lari?”* Propusemos que Lari experimentasse objetivamente, por meio da manipulação das caixas, conforme sua sugestão. O resultado do procedimento foi analisado com espanto, pois todo o conteúdo da caixa de maior altura coube na outra e sobrou espaço. Assim, retomamos a questão inicial: *“E agora, o que podemos concluir? Os volumes são iguais ou diferentes?”* O experimento comprovou o equívoco tomado pela observação direta, o maior volume não foi confirmado pelo que aparentemente se apresentava. A manipulação dos objetos (caixas) revelou o conteúdo do conceito de volume e sua relação com os modelos conhecidos (grandezas comprimento e área). O volume de um bloco retangular não se limita a uma única dimensão (altura) do objeto, sua obtenção envolve as três dimensões (altura, largura e profundidade). O resultado do experimento incentivou outros estudantes a compararem os volumes de suas caixas. Com base na suposição de Lari, comparavam caixas que não era possível ser inseridas uma na outra, que cabiam completamente uma na outra, entre outras possibilidades. Para Davydov (2017, p. 220), o caráter objetal *“fixa a possibilidade e a conveniência de que os alunos revelem o conteúdo geral de certo conceito, como base para a identificação ulterior de suas manifestações particulares.”*, quando a ação objetal corresponde ao conteúdo do conceito.

No sistema Elkonin-Davídov, como já mencionado, as relações entre grandezas discretas e contínuas formam nos estudantes do primeiro ano do Ensino Fundamental a apropriação de que existem números além dos naturais, ou seja, a consciência de que entre dois

números naturais existem números. Consideramos ser suficiente, neste momento, a conexão com os números racionais, inteiros, pois a relação com os números irracionais é desenvolvida no processo de ensino dos anos subsequentes. Vale salientar que em nosso experimento desenvolvemos tarefas particulares de estudo com a grandeza massa, as quais não serão detalhadas neste momento do estudo, e 7 tarefas (76-84) que introduzem a representação gráfica, cuja significação será contemplada no próximo item.

Na sequência apresentaremos um novo salto no caminho do desenvolvimento do conceito de número, as operações entre as grandezas. Ainda que de forma genérica, o movimento entre elas que até aqui tinha centralidade na representação objetal da igualdade e desigualdade passa a ser representado na forma gráfica e literal.

3.2.5 Alteração das grandezas

O propósito deste item é discutir as tarefas particulares que propõem aos estudantes um novo modo de conceber a igualdade e a desigualdade das grandezas, com base nas representações objetal, gráfica e literal. As transformações das desigualdades em igualdades das grandezas (comprimento com comprimento, área com área, volume com volume, quantidade discreta com quantidade discreta, entre outras) permitem o movimento de acrescentar ou retirar, que envolve ideias centrais do sistema conceitual para a adição, a subtração e a equação em tarefas futuras (Rosa, 2012).

Não podemos perder de vista que o conceito de número, no sistema Elkonin-Davídov, é organizado em um sistema conceitual articulado. Há um movimento por meio da relação entre as grandezas e suas representações que inter-relaciona as ideias: objetal, gráfica, literal e numérica.

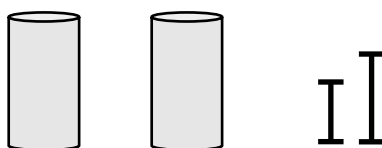
Na continuidade do experimento, foram propostas, em quatro encontros, 21 tarefas particulares de estudo (85 a 105) referentes ao terceiro capítulo do sistema Elkonin-Davídov. O conteúdo teórico das tarefas envolveu o seguinte sistema conceitual: alteração (acrescentar ou retirar) para identificar a diferença nas grandezas comparadas; introdução da representação literal (algébrica); substituição da representação objetal e gráfica pela literal; registro do resultado das comparações das grandezas (igualdade e desigualdade) por símbolos matemáticos ($=$, $\neq$, $>$ e $<$).

A primeira tarefa consistia em retomar o significado da representação objetal e gráfica. Na mesa do professor havia dois recipientes idênticos e no quadro dois segmentos de tamanhos diferentes. Os segmentos indicavam a quantidade de líquido que deveria ser colocado

em cada um dos recipientes: o primeiro com menos líquido e o outro com mais. O diálogo com os estudantes possibilitou-nos concluir que haviam se apropriado da relação entre as representações objetual (recipientes) e gráfica (segmentos). A quantidade de líquido não poderia ser igual. Questionamos: “*Quanto de líquido tem que ser colocado?*” Os estudantes apontaram para os recipientes e sugeriram: “*Esse pouco e esse bastante*”, “*Um menos, outro mais*”, “*Aqui pela metade e aqui cheio*”. Enquanto Cido realizava o movimento dos líquidos nos recipientes, os demais observavam e nós intervínhamos: “*Tem que ser a metade e cheio? Quanto de líquido devemos colocar em cada recipiente?*” O debate permitiu a compreensão de que não importa o quanto de água é colocado, o importante é que o volume de líquido no primeiro recipiente seja menor que no segundo (Gorbov; Mikulina; Savieliev, 2008). Mais uma vez ressaltamos a relevância desse sistema de ensino para o processo de desenvolvimento da autonomia dos estudantes, mediada pela linguagem científica do professor que instrumentaliza o pensamento. Não há prevalência de uma resposta em detrimento de outra, desde que as respostas sejam colocadas em processo de reflexão sobre os seus resultados e sejam argumentadas.

Na sequência, para que pudéssemos nos certificar da compreensão da finalidade do procedimento anterior (com os recipientes) por todos os estudantes, entregamos uma tarefa impressa que simulava o mesmo processo (Figura 60).

Figura 60 - Segmentos que indicam a quantidade de líquido em cada recipiente



Fonte: Elaborada pela pesquisadora (2023).

Solicitamos que pintassem em cada representação dos recipientes a quantidade de líquido que deveria ser colocado, conforme indicação dos segmentos. A opção da tarefa impressa pareceu-nos relevante para possibilitar o movimento conceitual com todos e evitar possíveis transtornos no manuseio dos líquidos. Por essa razão, em um primeiro momento, o movimento com os recipientes foi realizado por um estudante, acompanhado pelos demais, e a tarefa impressa por todos. A maioria realizou a tarefa corretamente, porém alguns ainda precisavam de nossa ajuda para representar no desenho a quantidade de líquido em relação ao tamanho do segmento.

Propusemos dar continuidade à tarefa com outro desafio: igualar a quantidade de líquido nos dois recipientes. Tomamos nas mãos os dois recipientes com quantidades diferentes

de líquido e problematizamos: *“Temos que deixar a mesma quantidade de líquido nos dois recipientes, como podemos fazer isto?”*⁶³ E acrescentamos uma condição: *“Não pode derramar de um para o outro”*.⁶⁴ Alguns estudantes disseram: *“Botando mais líquido”*. Sô levantou-se da carteira, apontou primeiro para o recipiente com menos líquido, depois para o outro e explicou: *“Botando mais líquido aqui para ficar igual aqui”*. Yan pegou outro recipiente (garrafa) com líquido e despejou com cuidado no que tinha menos líquido. Os colegas observavam atentamente para que a quantidade de líquido não excedesse e avisaram o momento de parar. Os recipientes estavam próximos, porém se fossem encostados poderíamos estar mais certos da igualdade.

Dois estudantes, na investigação, usaram uma régua para medir a altura do líquido em cada recipiente. Esse procedimento era bastante comum para JB, que desde o início do experimento costumava usar a régua para comparar tamanhos. No sistema Elkonin-Davídov, a régua é um instrumento utilizado para medir comprimentos, mas seu uso é indicado somente após a introdução da reta numérica, quando os estudantes já se apropriaram, além dos diferentes modos de medir as grandezas, também da necessidade da unidade de medida para expressar o resultado dessa medição. Consideramos que o uso da régua sem a devida compreensão do significado da unidade de medida (centímetro) é um obstáculo no processo de medição de comprimentos. O uso inadequado da régua no ensino brasileiro, segundo Rosa (2012), tem a ver com a concepção de número (limitada à contagem de objetos discretos) desde o primeiro ano escolar. A autora cita a pesquisa de Damazio e Amorim (2005), em que indicam a existência de três possibilidades para medir com a régua em decorrência do ensino brasileiro: iniciar do número 1 (primeira unidade), do zero ou do início da régua. Das três possibilidades, a única correta é sobrepor a régua de modo que coincida o início do que se está medindo com o zero da régua. JB, em uma tarefa anterior que envolvia a comparação das larguras de dois recortes, como de costume, usou a régua (Figura 61).

⁶³ Para a realização da tarefa, Gorbov, Mikulina e Savelyeva (2008) orientam o professor a explicar aos estudantes que é preciso igualar a porção do primeiro recipiente, cuja quantidade de líquido é menor, com o mesmo tanto de líquido do segundo recipiente. Preferimos deixar livre para que os próprios estudantes escolhessem o movimento. Poderiam tanto acrescentar líquido ao primeiro como retirar do segundo.

⁶⁴ As discussões poderiam ter sido feitas sem esta informação, porém haveria outra possibilidade de igualar os volumes colocando parte do líquido (metade) do excesso do recipiente com mais volume no outro. No entanto, o pressuposto da tarefa é que o movimento de aumentar e diminuir os líquidos corresponda à mesma diferença.

Figura 61 - Medição da largura do recorte com a régua



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

A sobreposição da régua no recorte, conforme a figura, foi em seu início. Ao questioná-lo: *“De onde você começa a contar na régua?”*, ele apontou e respondeu: *“Do um”*. Retrucamos: *“Será que deve ser do um?”* A manifestação de JB ressoa a pesquisa de Damazio e Amorim (2005) com relação aos equívocos no uso da régua para medir comprimentos pelos estudantes brasileiros, decorrentes da ênfase na ideia de quantidades discretas. Nossa compreensão é de que no processo do desenvolvimento do experimento teríamos oportunidade de colocar JB e os colegas em situações que os fizessem refletir e superar as apropriações equivocadas sobre o uso da régua.

Consideramos importante abrir esse parêntese para expor a questão das apropriações do uso da régua, mesmo que na tarefa particular para igualar os volumes o procedimento de comparar a altura dos líquidos dos recipientes com a régua não represente equívoco. Mas outra questão precisa ser considerada: em tarefas particulares subsequentes, em que a necessidade é quantificar o quanto de líquido foi acrescentado, a grandeza é volume, e não se mede volume diretamente com a régua.

Feita essa consideração, voltemos à tarefa impressa que propõe a igualdade de líquido nos dois recipientes. O objetivo foi fazê-los refletir sobre o movimento de acrescentar líquido em um dos recipientes para igualar com o outro, ou seja, aumentar o volume daquele que continha menos. Propusemos que analisassem o procedimento objetual nos recipientes e a representação na folha impressa do movimento nos segmentos: *“Será que os segmentos devem continuar diferentes?”* Cada um primeiro pintou os desenhos representativos dos recipientes na folha impressa e depois os segmentos. Após um intenso debate, a maioria concluiu que era preciso alterar os segmentos, igualá-los prolongando (aumentando) o segmento menor para que ficasse do mesmo tamanho do maior, do mesmo modo que supomos o acréscimo do líquido. Tínhamos como pressuposto, conforme o sistema Elkonin-Davídov, que esta era uma ideia inicial que subsidiaria a operação de adição, pois a quantidade de líquido acrescentada no recipiente e, concomitantemente, o aumento do tamanho do segmento expressavam a diferença

entre os volumes dos recipientes. No entanto, surgiu outra questão: *“Será que a única forma de encontrar a diferença dos volumes é acrescentando líquido? Há outra forma?”*

Novamente, iniciamos o debate com a análise dos recipientes com quantidades distintas de líquido e o desenho de dois segmentos de tamanhos diferentes no quadro. *“Precisamos igualar os líquidos dos dois recipientes, não pode ser do mesmo modo que fizemos antes, tem como?”* Dani pegou o recipiente com mais líquido e começou a esvaziá-lo, colocando o conteúdo na garrafa que estava na mesa (Figura 62).

Figura 62 - Igualando os volumes



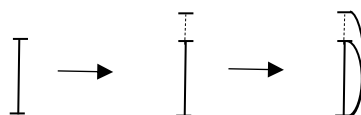
Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

Ao mesmo tempo, chamávamos a atenção dos colegas para que acompanhassem o pensamento dela. O procedimento foi realizado pela aluna aos poucos, para que não fosse excedido o tanto de líquido a ser retirado. Por isso, a estudante parava o movimento e encostava os dois recipientes para conferir se já havia tirado o suficiente. Continuamos a debater: *“A quantidade de líquido estava diferente, agora está igual. O que foi feito?”* Dani explicou *“Eu tirei daqui, para ficar igual”*, apontando para o recipiente com mais líquido. Nesse caso, o procedimento remete à subtração. Assim, verifica-se que a quantidade de líquido acrescentada na primeira situação e a retirada na segunda corresponde ao mesmo tanto. O que foi acrescentado e o que foi retirado, no processo inverso, corresponde à diferença. O mesmo procedimento foi realizado com os segmentos. Nesse caso, o maior teve que ser diminuído. No quadro, representamos a retirada riscando uma parte com o pincel atômico ou apagando, e, na folha impressa, riscando com o lápis a parte que excedia do segmento maior para torná-lo igual ao menor. Era suficiente, por enquanto, que os estudantes entendessem que a diferença da grandeza volume nos dois recipientes era uma quantidade genérica. A quantificação por meio do número ocorrerá no desenvolvimento de tarefas mais adiante. Mas, antes, essa diferença será representada na forma literal (letras).

Na sequência desenvolvemos outras tarefas particulares, com a mesma finalidade das realizadas com a grandeza volume, porém com outras grandezas. Sugerimos também uma tarefa com o movimento inverso ao das analisadas, ou seja, partimos, por exemplo, da representação gráfica: o segmento foi riscado (diminuído) e o objetivo era a realização da ação objetual com a diminuição do comprimento da largura de um recorte de papel. De acordo com Davidov (2019c, p. 224), a modelagem objetual, gráfica ou literal – segunda ação de estudo – constitui “um vínculo internamente necessário no processo de assimilação de conhecimentos teóricos e modos generalizados de ação”.

No processo de formulação do esquema geral de adição e subtração, foram propostas tarefas particulares que introduziam os arcos. Esses são essenciais, nas relações entre as grandezas, para a substituição da representação gráfica (segmento) pela literal, a letra (Rosa, 2012). O esquema geral é constituído pela conexão de dois segmentos que significam o acréscimo ou a retirada da grandeza conforme a situação apresentada. Por exemplo, um segmento representa a área de um retângulo, aumenta-se o tamanho desse segmento. O procedimento implica aumentar a área do retângulo. O tamanho inicial é indicado por um arco e a nova área por outro arco, que incluirá o acréscimo (Figura 63).

Figura 63 - Esquema de arcos

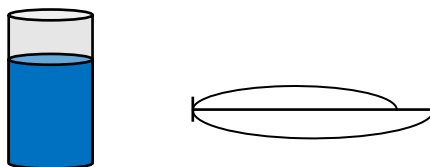


Fonte: Elaborada pela autora (2023).

É nessa conexão que o sistema de ensino Elkonin-Davídov introduz a tarefa de estudo cujo objetivo é a inserção das letras (representação literal ou algébrica) no processo de elaboração do conceito de número em nível teórico.

Conforme orientação de Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008), tínhamos um único recipiente com líquido sobre a mesa. A tarefa particular teve início após o intervalo do lanche. Aproveitamos para simular que um estudante de outra classe havia alterado a quantidade de líquido do recipiente enquanto estavam no pátio da escola. Propomos que observassem o recipiente na mesa e o esquema no quadro (Figura 64).

Figura 64 - Experimento objetral e gráfico do volume do recipiente



Fonte: Elabora da pela autora com base em Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008).

A tarefa requer dos estudantes o pensamento teórico baseado nos conteúdos apropriados até então, pois a resposta não se apresenta de forma direta na visualização das representações objetral e gráfica, respectivamente, do recipiente e do esquema com os arcos. Como afirma Rosa (2012), as tarefas cada vez mais abstratas “promovem a explicitação dos nexos internos das mais diversas relações entre grandezas que possibilitarão a redução a uma fonte comum para introdução do conceito de número”.

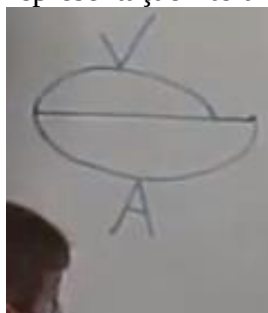
Enquanto observavam o recipiente que tínhamos nas mãos, instigávamos a reflexão com questionamentos do tipo: *“Só olhando é possível saber se tinha mais líquido e foi retirado? Ou será que tinha menos e foi acrescentado?”* Alguns espontaneamente disseram que sim, era possível saber, outros ficaram pensativos e não se manifestaram, a estudante Nena disse não ser possível. No entanto, quando solicitamos que justificassem suas escolhas, os que se manifestaram ficaram indecisos e não argumentaram. Provavelmente as respostas, ainda em nível inicial, eram aleatórias, para responder entre uma das alternativas possíveis *“sim”* ou *“não”*. Propusemos a análise do esquema: *“O esquema está mostrando que temos duas possibilidades”*. Reelaboramos no quadro o esquema projetado pelo Datashow: *“O arco maior indica que tinha mais líquido, o menor que tinha menos; a diferença pode tanto ter sido acrescentada como retirada! Será que é possível saber o que foi feito somente observando o recipiente e o esquema?”*

O diálogo foi relevante para admitirmos que não tínhamos como saber o procedimento somente observando o recipiente e o esquema. Na verdade, tanto a expressão verbal decorrente da análise do recipiente – pode ser que tinha mais líquido e foi retirado ou menos e foi acrescentado – como a representação no esquema, colocam-nos em um impasse em que as duas opções podem ser verdadeiras. Porém, não tínhamos duas opções, somente uma era admitida. A impossibilidade de solucionar a situação proposta com o conhecimento já apropriado coloca o professor em seu papel essencial para que o estudante possa avançar em seu desenvolvimento. Conforme preconiza o Ensino Desenvolvimental, as tarefas de estudo se articulam por meio de novas necessidades que propiciarão a apropriação de outros conhecimentos em um sistema conceitual. Isso requer do professor, que conduz o processo de

ensino, “ajudar” o estudante quando ele não consegue avançar sozinho, ou seja, sistematizar ações considerando a zona de desenvolvimento proximal do estudante com a inserção de novos conceitos.

A conclusão da insuficiência do que tínhamos (recipiente com líquido e esquema) para sabermos o movimento realizado inicialmente foi relevante para instigá-los a pensar na solução. Insistíamos na fala: *“Com o que temos não é possível saber, mas será que existe um jeito?”* A questão deixava-os eufóricos, pois não encontravam uma hipótese coerente para resolver o enigma. Entreviemos dizendo que em matemática quantidades desconhecidas são representadas por letras, assim poderíamos acrescentá-las ao esquema para representar as hipóteses com relação ao volume inicial. A escolha das letras foi decidida coletivamente, optando-se por iniciais dos nomes de dois colegas: “A” para a quantidade maior e “V” para a menor (Figura 65).

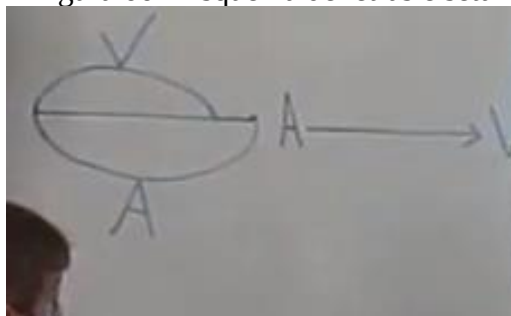
Figura 65 - Representação literal dos volumes



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

O estudante Pedro observava a representação do esquema no quadro e aproveitamos para questioná-lo: *“Será que agora, com as letras, dá para dizer se tinha mais ou se tinha menos líquido no recipiente?”* Ele apontou primeiro para o arco indicado pela letra “V” e disse *“esse tem menos”*, na sequência para o arco “A”, e complementou: *“esse tem mais”*. A leitura de Pedro com relação aos tamanhos dos arcos no esquema com as letras estava correta. Porém, ainda não era possível saber o movimento efetuado pelo estudante da outra classe. Nesse momento, conforme Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008), consideramos conveniente apresentar uma informação que os ajudaria a refletir sobre qual o movimento realizado. Desenhamos, ao lado da representação literal com os arcos, um novo esquema formado pelas letras (A e V) e uma seta que simbolizava os procedimentos inicial e final do movimento realizado pelo estudante no recipiente com líquido (Figura 66).

Figura 66 - Esquema de letras e seta

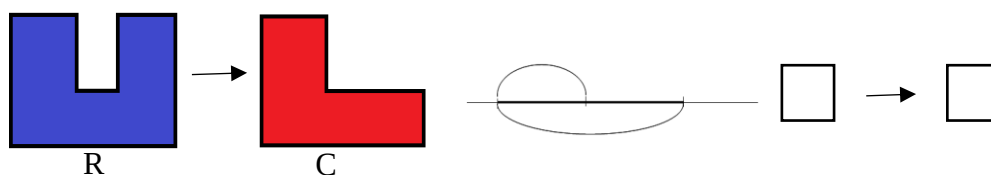


Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

No esquema de arcos, o “A” representava o volume maior, e o “V” o menor, assim, em consonância com o significado da seta, os estudantes concluíram que foi retirado líquido, já que “A”, volume inicial, tinha mais líquido. Lala se aproximou do quadro, apontou para o esquema de seta e concluiu: *“O A é o começo e V o fim”*. Para nos certificarmos de que os estudantes haviam compreendido a representação literal da comparação da grandeza volume, questionamos mais uma vez: *“Mas afinal, tinha mais líquido e foi retirado? Ou tinha menos e foi acrescentado?”* A maioria concluiu que inicialmente havia mais líquido no recipiente e, então, o procedimento foi de diminuição do volume. A estudante Sô, ao contrário, avaliou que tinha menos e foi acrescentado. Sua resposta instigou-nos a simular outra hipótese: *“Vamos imaginar que as letras fossem alteradas no esquema de seta, o volume inicial V e o final A, é a mesma coisa?”* O debate permitiu que Sô, com nossa ajuda e a dos colegas, percebesse o significado da alteração da posição das letras no esquema de setas em relação ao esquema de arcos, ou seja, na nova situação o movimento é inverso, ao volume inicial de menor volume foi acrescentado líquido. De acordo com orientação de Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008), propusemos outras variantes de esquemas de setas para evidenciar que há liberdade na escolha da letra. Os estudantes sugeriram que fossem utilizadas as iniciais de seus nomes. Para Rosa (2012, p. 126), o movimento da grandeza volume, na situação apresentada, “não está dado imediatamente, mas mediado por um sistema de símbolos, que conduz à conexão entre o externo e o interno. O movimento interno entre as grandezas aparece como objeto do pensamento teórico”.

Na sequência, propusemos outra tarefa particular com a finalidade de verificarmos se os estudantes haviam se apropriado do movimento entre as grandezas que envolve segmentos, arcos e letras. Entregamos uma tarefa impressa com alteração da grandeza área de uma figura (Figura 67).

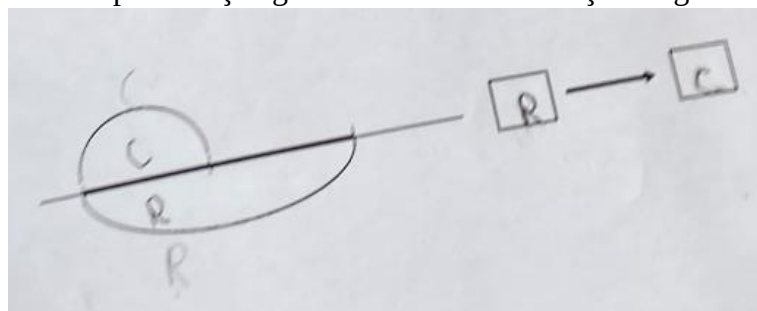
Figura 67 - Alteração da grandeza área



Fonte: Elaborada pela autora com base em Gorbov e Mikulina (2001, p. 25).

Os estudantes deveriam indicar a modificação dos tamanhos da grandeza área no esquema de arcos e de setas com a inserção das letras conforme a alteração da área “R” em “C”. O maior desafio foi direcionar as discussões para que os estudantes não atribuísssem aos arcos e às letras as representações do tamanho da grandeza, e sim ao segmento. O começo e o fim do arco correspondem ao tamanho do segmento, que por sua vez representa o movimento da grandeza em estudo, confirmado também no esquema de seta, na tarefa que envolve a grandeza área (Figura 68).

Figura 68 - Representação gráfica e literal da alteração da grandeza área



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

Na figura anterior (Figura 68), apresentamos a resolução de um estudante como exemplo da apropriação da maioria da classe. É possível visualizar, no esquema de arcos, a letra “C” representativa da área menor e a Letra “R” da maior em dois lugares. Em um primeiro momento, o estudante identificou os arcos com as letras; posteriormente às nossas discussões, acrescentou as letras também nos segmentos.

A tarefa de estudo coloca em movimento o pensamento abstrato consolidado na representação da grandeza área pelo segmento maior (arco maior e letra R) e pelo segmento menor (arco menor e letra C). Há, nos três modos de comparação das áreas (visual, esquema de arcos e esquema de setas), uma relação que caracteriza o movimento articulado nas representações objetual, gráfica e literal. A seta que inter-relaciona as imagens das áreas “R” e “C” indica o movimento de alteração da área, como era no início e como ficou depois do movimento. Essa alteração é apropriada em nível teórico quando o estudante articula

mentalmente o mesmo processo na representação dos esquemas de arcos e setas. A estudante Sô apontou para as imagens e disse: *“Tinha mais e foi retirado”*. Sua manifestação nos evidencia superação em relação à primeira interpretação, quando abordamos a grandeza volume, em que cometeu um equívoco ao analisar a alteração do volume do recipiente.

Prosseguindo com o experimento, propusemos outras duas tarefas particulares (93 e 94), diferentes da anterior. Na tarefa 93, a investigação foi iniciada pelo esquema de arcos. Sua análise permite definir se é para aumentar ou diminuir a quantidade de figuras discretas (círculos e triângulos). Eram duas situações: em uma, a quantidade de círculos, conforme o esquema, deveria ser retirada; em outra, os triângulos seriam acrescentados. De acordo com as orientações de Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008), o importante é que os estudantes entendam o significado do esquema, se é para retirar ou acrescentar figuras, não importa o quanto. O debate levou-os a concluir que existia um limite na retirada das quantidades discretas de círculos, pelo menos até restar um, porém, a quantidade de triângulos acrescentados poderia ser ilimitada: mais um, mais dois, mais três...

A tarefa 94 permitiu que os estudantes percebessem o movimento que acontece na transformação da área de um recorte. Denominamos o recorte inicial pela letra “A” e propusemos cortar um canto dele. A análise do novo recorte em relação à área inicial admitia a discussão de sua modificação, de modo que sua identificação não poderia ser a mesma. Assim, chamamos o novo objeto de “B”. Na sequência, propusemos agregar novamente em “B”, em qualquer lado, a parte retirada de “A”. A conclusão foi de que, independentemente do lugar em que o pedaço do recorte fosse inserido em “B”, implicaria a permanência da área inicial “A”. A inserção do recorte altera a forma, mas mantém a área.

Como visto, o conceito de número no sistema Elkonin-Davídov tem base na relação entre grandezas escalares (comprimento, área, volume, massa, contagem, entre outras). As relações das grandezas escalares desenvolvidas pelas tarefas até aqui possibilitaram o entendimento, pelos estudantes, das relações universais de comparação das diferenças das quantidades representadas na forma objetal, gráfica e literal. No entendimento de Davidov (2019c, p. 227), o estudante consegue, nesse sistema de ensino, mesmo antes de assimilar o conceito de número em sua expressão aritmética, representá-lo com auxílio de fórmulas com letras como: “ $a = b$; $a > b$, $a < b$, e realizar muitas de suas transformações, por exemplo: $a + c > b$; $a = b - c$, $a + c = b + c$ etc., dependendo das propriedades correspondentes das relações indicadas”.

Assim, a continuidade do experimento com vistas a chegar à representação aritmética (numérica) das comparações das grandezas segue, segundo o Ensino

Desenvolvimental, a representação da comparação das grandezas pela igualdade, símbolo matemático $=$ e pela desigualdade $\neq$. A desigualdade remete, conforme representação objetual, gráfica e literal nas tarefas anteriores, à diferença para maior (acrescentada) ou para menor (retirada), substituída pelos símbolos $<$ e $>$. Vale ressaltar que a relação de igualdade e desigualdade das grandezas constitui-se em um movimento essencial para a introdução do elemento que subsidiará a medição das grandezas e culminará na expressão do número em sua dimensão aritmética. No prosseguimento do experimento, as tarefas conduzem à introdução desses símbolos.

Inicialmente apresentamos para os estudantes alguns objetos (bastões de massa de modelar) de mesma forma (cilíndrica) e de cores diferentes e indagamos que comparações poderíamos fazer. Os estudantes consideraram que eram diferentes pela cor e iguais pela forma. Propusemos a comparação pela altura, pela largura, pela profundidade e verificamos que eram iguais. Sugerimos a análise da grandeza massa com o questionamento: *“Será que têm a mesma massa? Tem como saber se a massa é igual ou diferente?”* É importante ressaltar que durante as discussões das tarefas anteriores que abordaram massa, enfatizamos a diferença entre a expressão “massa” como grandeza a ser medida e o nome dado ao material que compõe a massa de modelar. A igualdade das dimensões da grandeza comprimento realizada com objetos de mesmo material poderia ser a justificativa para a equidade da grandeza massa, porém alguns estudantes optaram pelo uso da balança de dois pratos. A medição com a balança comprovou a igualdade com relação à grandeza em análise, a massa.

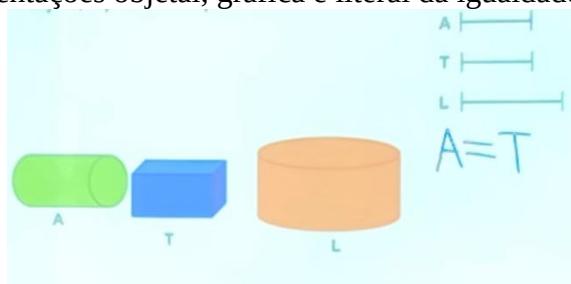
Dada a possibilidade de manipulação e transformação da forma dos bastões da massa de modelar, solicitamos que um estudante mudasse a forma cilíndrica de um dos objetos. A intenção foi colocá-los em investigação para perceberem que, na referida situação, mudar a forma do objeto não implicaria a alteração da grandeza em estudo. Por isso, com os dois objetos nas mãos, o que manteve a mesma forma e aquele que sofreu alteração, perguntamos: *“O que aconteceu com a grandeza massa ao modificar a forma?”* Alguns estudantes afirmaram que não houve alteração. Propusemos uma nova medição dos dois objetos com a balança, o que comprovou a manutenção da igualdade da grandeza massa.

A balança de dois pratos possibilitou a comparação das massas dos dois objetos sem a necessidade do resultado numérico da igualdade. Não pretendíamos, com a tarefa particular, encontrar a massa em sua expressão numérica, que nos daria uma balança mais tecnológica (eletrônica).

A síntese com os estudantes se deu pela representação da igualdade da grandeza massa dos objetos com o desenho de dois segmentos (representação gráfica) de mesmo

tamanho, identificados pelas letras A e T (representação literal). A estudante Lia desenhou no quadro dois segmentos de mesmo tamanho, com auxílio de um pedaço de madeira. É importante ressaltar que, segundo a orientação de Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008), para evitar dúvidas em relação ao combinado anteriormente, quando grandezas iguais eram representadas pelas mesmas letras, definimo-las antes de comparar na balança. Além disso, a finalidade agora era a substituição da linguagem verbal da relação de igualdade com os segmentos pelo símbolo matemático. A expressão “a massa de ‘A’ é igual à massa de ‘T’” passou a ser escrita matematicamente $A = T$. Associamos o símbolo de igualdade à representação de linhas retas (ou segmentos) de mesmo tamanho, colocados paralelamente, um acima do outro. Além da manipulação dos objetos nos pratos da balança, também relacionamos as mesmas situações com imagens projetadas pelo *PowerPoint* (Figura 69).

Figura 69 - Representações objetal, gráfica e literal da igualdade da grandeza massa



Fonte: Elaborada pela autora com base em Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008).

Na continuidade da tarefa, propusemos outra situação com o manuseio das massas de modelar. Pegamos um terceiro bastão e solicitamos que um estudante acrescentasse a ele mais massa de modelar. A opção do estudante foi juntar mais um bastão e misturar de forma aleatória, sem preocupação com a forma. A forma poderia ser alterada ou mantida, uma vez que as discussões eram direcionadas para a percepção da alteração da grandeza massa. Por isso, com os dois objetos nas mãos, questionamos: “*As duas massas de modelar têm a mesma massa?*” Alternamos o movimento na balança, colocando nos pratos os objetos com formas diferentes e mesma massa para que verificassem o equilíbrio dos pratos. Em seguida, retiramos o objeto de um dos pratos e acrescentamos no lugar aquele com mais massa (Figura 70).

Figura 70 - Comparação da grandeza massa na balança de dois pratos



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

O movimento na balança evidenciou o desequilíbrio dos pratos. Questionamos: “*A massa é igual ou diferente?*” Os estudantes responderam que era diferente. A discussão levou-os a refletirem sobre o significado da diferença. De que diferença estamos falando? A mais ou a menos? Na tarefa em análise, o foco era o acréscimo da massa de modelar, por isso a pergunta: “*Qual tem mais massa?*” A estudante Manu aproximou-se e apontou para o prato que se movimentou para baixo. Pedro também distinguiu os dois pratos, ao afirmar: “*Esse aqui tem pouca massa, esse tem muita, professora!*” O estudante, com as expressões “pouca” e “muita”, traduziu o movimento vertical dos pratos para cima e para baixo, representação da quantidade para maior e para menor da grandeza massa.

Instigamos os estudantes a refletirem sobre a representação simbólica da diferença da grandeza massa nos objetos representados pelas imagens no quadro em conformidade com o desequilíbrio na balança. Perguntamos: “*Será que existe um símbolo matemático que representa a diferença da grandeza massa “T” e “L”?*” Após o debate informamos que sim, para dizer que a massa de T é diferente – não é igual – à massa L, em matemática escrevemos: $T \neq L$. O traço transversal que intercepta o símbolo de igual nega a igualdade, ou seja, o símbolo $\neq$ significa que as grandezas comparadas são diferentes, não iguais. $A = T$ (a massa A é igual à massa T); $A \neq L$ e $T \neq L$ (a massa A não é igual à massa L, e a massa T não é igual à massa L). Os resultados abstratos representados com as letras e os símbolos matemáticos se originaram da realidade (manipulação e movimento dos objetos, massas de modelar, na balança). Para Rosa (2012, p.129) essa ação não é uma abstração empírica, pois “pode ser generalizada para estabelecer relações entre quaisquer objetos e, ainda, entre quaisquer grandezas (comprimentos,

áreas, volumes, etc.), independentemente da propriedade numérica singular, pois T, A e L representam valores universais”.

Continuamos a refletir sobre a alteração das massas representadas na balança para colocá-los em investigação sobre o significado do símbolo $\neq$ na comparação com as massas A, T e L em relação à desigualdade, desequilíbrio da balança. Os estudantes afirmaram *“uma massa é maior e a outra é menor”*. Escrevemos no quadro as letras “A” e “L” com espaço entre elas para colocarmos outro símbolo no lugar de $\neq$, representativo da situação em análise. O debate foi dirigido para que percebessem o significado da diferença, ou seja, na comparação, uma massa é maior e a outra é menor. Questionamos: *“Vocês sabem que existe um símbolo na matemática para dizer quem é maior e quem é menor?”* Não obtivemos resposta, então prosseguimos com outra questão: *“A grandeza massa L é maior ou menor que a grandeza massa A?”* A esse questionamento prontamente responderam que a grandeza “L” era maior que a “A”. Em seguida, dissemos que poderíamos traduzir para a matemática o que haviam falado por: $L > A$ e também $L > T$. Relacionamos a escrita do símbolo $>$ (maior que) ao sinal de igual. Na escrita do símbolo de igual, usamos duas linhas retas paralelas ($=$) e para o símbolo de “maior que” propusemos unir as extremidades opostas de cada um dos segmentos em um único ponto, mantendo a abertura $>$. Nossa intenção foi relacionar a escrita dos símbolos matemáticos aos conhecimentos geométricos já elaborados (linhas retas, segmentos e pontos). A isso, associamos que, em toda sentença matemática que relaciona a comparação de qualquer grandeza contínua (comprimento, área, volume, massa) ou grandeza discreta (contagem), a abertura do símbolo volta-se para a grandeza maior.

Na sequência, retomamos a fala dos próprios estudantes quando afirmaram verbalmente que um objeto tinha maior massa e o outro menor, questionando-os: *“Acabamos de conhecer o símbolo matemático que significa maior que, será que existe um símbolo para indicar a massa menor?”* Alguns, com pouca ênfase, disseram que sim. Diante da visível dúvida, retomamos as conclusões dos estudantes acerca da observação do movimento dos objetos na balança, já mencionadas: *“A fala ‘este é maior e este é menor’ foi traduzida por $L > A$, conforme discutimos antes. Mas a expressão ‘este é menor e este é maior’ escrevemos do mesmo modo? As duas expressões são similares? São iguais? São diferentes?”* Os questionamentos deixaram os estudantes inquietos, e alguns aparentavam falta de concentração. Foi um momento que nos demandou esforço para inseri-los no debate.

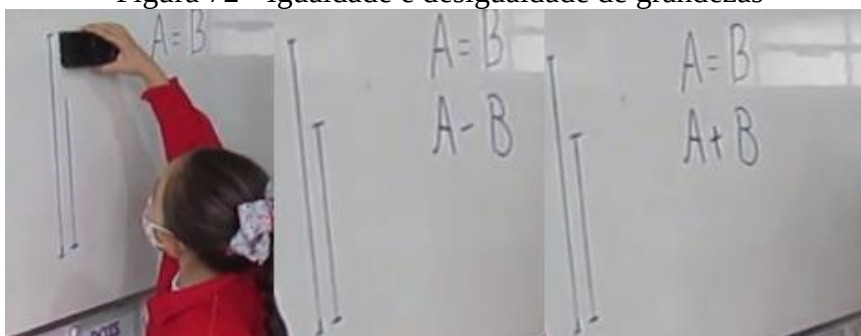
Partimos da fala dos estudantes *“este é menor e este é maior”* para perguntarmos: *“Quais letras escolhemos para representar a grandeza massa menor e maior?”* Essa questão

com questionamentos sobre os conceitos em estudo: “O que estudamos na aula passada?” Um estudante se aproximou e disse: “Nós estamos estudando pequeno e maior”. Consideramos a resposta coerente e continuamos o experimento com a finalidade de fazê-los recordar as discussões da aula anterior com outra grandeza, o volume.

Expusemos na mesa do professor dois recipientes identificados pelas letras “A” e “B” e questionamos: “A quantidade de líquido é igual ou diferente?” A observação visual permitiu a identificação de que os recipientes tinham quantidades diferentes de líquido. Com a intenção de manter o diálogo, continuamos a questioná-los: “Tem como deixar os volumes iguais?” Os estudantes propuseram acrescentar líquido no recipiente “B”. Após o procedimento realizado por uma estudante, dissemos: “Como identificar com um símbolo que o volume ‘A’ é igual ao volume ‘B’?” Alguns estudantes sugeriram desenhar dois segmentos iguais. Dani inseriu o símbolo de igual $=$ entre as letras “A” e “B”, $A = B$. Até aqui as manifestações dos estudantes indicavam que haviam se apropriado: da representação e modificação da grandeza; da identificação das grandezas inicial e final marcando-as com letras diferentes; e do registro com letras e o símbolo de igualdade.

Na sequência, sugerimos retomar a situação inicial: “O que devemos fazer para voltar à situação em que a quantidade de líquidos era diferente?”. Os estudantes propuseram: “Retirar líquido do ‘B’”. No quadro, em decorrência da análise dos recipientes com mesmo volume, havia dois segmentos de tamanhos iguais e a escrita $A = B$. Lai retirou líquido do recipiente “B”, voltou-se para o quadro, apontou para um dos segmentos e disse: “Agora tem que tirar aqui!”. A estudante percebeu que a alteração do volume “B” implicou mudar também o tamanho do segmento que o representava, então pegou o apagador e retirou parte dele, à esquerda (Figura 72).

Figura 72 - Igualdade e desigualdade de grandezas



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

Quando questionamos: “*Está certo o que a Lai fez?*”, todos aprovaram. E também concordaram que $A = B$ não traduzia mais o movimento que tornou os segmentos desiguais. Porém, ao questionarmos sobre o símbolo matemático que representa a desigualdade, uma estudante escreveu $A - B$, e outra $A + B$ (Figura 71). As estudantes identificaram a desigualdade, no entanto indicaram a diferença por meio dos símbolos “menos” e “mais” no lugar de “menor” e “maior”.

Até este momento do experimento não havíamos discutido os símbolos que relacionam as operações de adição e subtração, porém foi amplamente debatido o movimento de transformação de grandezas desiguais em igualdades e vice-versa, cujo procedimento envolve o movimento de retirar (subtração) e acrescentar (adição). Por isso, avaliamos que suas manifestações com relação à diferença estavam associadas a essas transformações relativas às tarefas de estudo do sistema Elkonin-Davídov discutidas no processo de desenvolvimento do Experimento Didático. Para Davídov (1988), a reflexão, a análise e o planejamento de natureza substancial na solução de problemas matemáticos são ações mentais que embasam o procedimento teórico de resolução de tarefas de estudo. Por outro lado, segundo o autor, a solução de uma tarefa particular nova sem relação com a anterior pode evidenciar que o estudante domina o procedimento empírico.

Nossa intervenção para que os estudantes se apropriassem da representação algébrica e dos símbolos matemáticos em análise foi dizer que adultos e estudantes de anos posteriores usam um símbolo matemático que substitui a escrita da palavra “diferente”, da língua portuguesa, pela linguagem matemática: assim, para dizer que a grandeza volume “A” é **diferente** da grandeza volume “B”, usam $A \neq B$ (não é igual, é diferente). Na sequência, a centralidade das discussões foi a análise do símbolo matemático que explicita a diferença. Não basta dizer que é diferente, é preciso analisar em qual contexto. Na situação em análise, o recipiente denominado de “A” tem maior volume e, por consequência da referida comparação, “B” possui menor volume. Isso significa que para $A \neq B$, a diferença pode ser escrita matematicamente por $A > B$ ou $B < A$. As relações de igualdade e desigualdade entre grandezas se elevam com a escrita das fórmulas literais ($A = B$, $A \neq B$, $A > B$, $B < A$).

Na sequência, propusemos tarefas particulares (99 a 105) cuja finalidade era comparar grandezas escalares de mesma espécie (contagem, área, volume, comprimento) e expressar os resultados com a escrita das fórmulas literais estudadas.

É importante ressaltar que as apropriações não se deram naturalmente. Acompanhar o desenvolvimento de cada um dos estudantes não foi simples. O professor precisa estar atento

a todas as manifestações, propiciar o envolvimento de todos, mantê-los concentrados e atentos. Em dado momento do experimento, em que as tarefas exigiam dos estudantes maior concentração para a apropriação de conceitos mais complexos, como a introdução da representação algébrica e símbolos matemáticos, eles mostravam-se cansados e indispostos. Conforme já anunciamos, como forma de amenizar tais reações, optamos por diminuir as aulas diárias (de três para duas) e aumentar os encontros semanais (de um para dois). A estratégia foi eficiente, pois os estudantes se mantinham mais participativos e envolvidos na resolução das tarefas durante todo o período das duas aulas.

Na próxima seção, apresentaremos as tarefas particulares de estudo para a introdução do número em sua expressão aritmética advindo de um processo que articula as representações objetual, gráfica e literal. Em concordância com o anunciado em nossa exposição, o número na perspectiva do sistema Elkonin-Davídov é um caso singular que resulta das relações entre grandezas escalares por meio da medição. Para tanto, acompanhando a orientação desse sistema, o quarto capítulo tem início com a introdução da unidade de medida, seguida pela identificação das múltiplas relações entre ela e a grandeza a ser medida para chegar ao modelo universal do conceito de número.

3.3 INTRODUÇÃO DO CONCEITO DE NÚMERO E RETA NUMÉRICA

As tarefas particulares de estudo que introduzem o número em sua expressão aritmética, no primeiro ano escolar, são situações em que os métodos de comparação já vistos não são suficientes. Conforme exposição na seção anterior, as comparações das grandezas permitem representar a igualdade e a desigualdade nas formas objetual, gráfica e fórmulas literais. A representação na forma aritmética requer a medição das referidas grandezas escalares com uma unidade de medida. Isso justifica os estudantes aprenderem, anteriormente, os modos de comparar as grandezas contínuas (comprimento, área, volume e massa) e discretas (contagem). Nesse sistema de ensino, os estudantes aprendem que o número resulta da quantidade de vezes que a unidade de medida cabe na grandeza a ser medida (Gorbov; Mikulina; Savieliev, 2008). É nesse movimento que “identifica-se a conexão interna das múltiplas relações entre a unidade de medida e a grandeza a ser medida e, finalmente, chega-se ao modelo universal do conceito de número que possibilita a revelação da característica numérica da grandeza” (Rosa, 2012, p. 136).

Para a introdução do número e reta numérica, foram desenvolvidas 40 tarefas particulares de estudo (106 a 145) referentes aos capítulos quatro, cinco e seis do sistema

Elkonin-Davídov (Apêndice C), num total de 15 encontros, cada um com duração de duas aulas de 45 minutos cada. A centralidade do desenvolvimento das tarefas foi o sistema conceitual: comparação das grandezas com a unidade de medida; palavras marcas e medição com as parlendas; unidade de medidas compostas e o modelo universal; introdução da reta numérica e comparação de numerais na reta numérica.

3.3.1 Comparação das grandezas com a unidade de medida

A introdução da unidade de medida teve início com a criação de uma nova necessidade que superasse o conhecimento apropriado até aqui, isto é, para além do nível de desenvolvimento real dos estudantes. Com a finalidade de verificar a compreensão dos estudantes sobre o modo conhecido de comparação, fixamos no quadro quatro tiras de papel cartão de cor verde, com comprimentos das larguras iguais, porém com as alturas diferentes. Com um pedaço de madeira na mão, posicionamo-nos do outro lado da sala, distantes do quadro. Sugerimos que as crianças encontrassem o recorte com o mesmo comprimento da altura do pedaço de madeira. Propositamente, a altura de um dos recortes era bem menor, o que permitia a identificação visual, em dois deles a diferença entre a maior e a menor era bem pequena, não sendo possível identificá-la visualmente, e somente em um as alturas eram coincidentes. Apresentamos a questão: *“Precisamos encontrar qual recorte de papel tem o mesmo comprimento da altura deste pedaço de madeira. Como vamos descobrir?”* A primeira opção de Manu foi usar a régua. Informamos que ainda não usaríamos a régua. Teríamos que buscar outra forma para a solução da situação. Sô foi a primeira estudante a designar um dos recortes: *“Eu acho que é este daqui”*, apontando para um deles. Questionamos: *“Por que você escolheu este?”* Antes de Sô se manifestar, Manu, Yan e Cido se aproximaram do quadro e fizeram suas escolhas. A primeira manifestação foi fazer uma escolha aleatória, mas em seguida sugeriram aproximar pela sobreposição, um a um, ao pedaço de madeira. Mesmo que pela sobreposição a análise pudesse ser a área, os estudantes compararam os comprimentos das alturas conforme a situação requeria. Esse método de comparação era conhecido dos estudantes, por isso não foi difícil para eles realizarem o procedimento.

Porém, para Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008), o objetivo do Ensino Desenvolvimental é avançar no processo de apropriação do conceito de número em sua representação aritmética pela comparação de uma grandeza com uma unidade de medida.

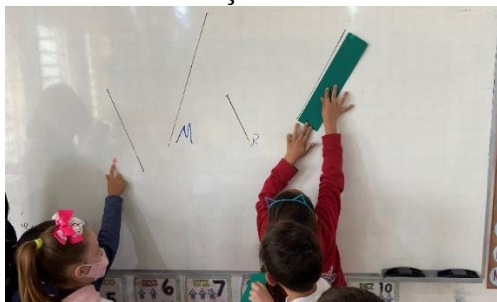
Com esse fim, a necessidade de uma terceira grandeza foi criada na tarefa particular subsequente para a solução de outra situação semelhante à anterior, mas agora com desenhos

de segmentos no quadro. A semelhança estava na finalidade, qual seja, encontrar um segmento com o mesmo tamanho, mas a condição era outra, não havia como manipular objetivamente os segmentos para realizar a comparação.

No quadro, do lado esquerdo, desenhamos um segmento com o comprimento denominado pelos estudantes de “A”, e do lado direito outros quatro segmentos, “B”, “M”, “R” e “P”, com comprimentos diferentes, também dispostos em diferentes posições transversais, somente um deles sendo igual ao segmento “A”. A diferença dos tamanhos em relação a “A”, “M” maior e “R” menor permitia que, pela observação direta, ambos fossem descartados. No entanto, os tamanhos de “B” e “P” possuíam pouca diferença, o que dificultava que visualmente fosse possível designar aquele que possuía o mesmo tamanho de “A”.

Passamos, então, ao questionamento: *“Qual dos segmentos tem o mesmo tamanho de ‘A’?”* Lari afirmou, com certa convicção, *“eu sei”*. Enquanto se dirigia ao quadro, disse *“então!”* Pegou os recortes que tínhamos usado na tarefa anterior, guardados em uma caixa, e começou a compará-los. Inicialmente, colocou-os alinhados no chão da sala. Em seguida, comparou os recortes aos segmentos. O movimento da estudante indicava que estava em processo de investigação. Outros estudantes juntaram-se a ela. Manu encontrou um recorte com o mesmo tamanho do segmento “A”. Nena sugeriu: *“Mede com este!”* Ela aproximou o recorte ao segmento “B” e percebeu que era diferente. Descartou a comparação com os segmentos “M” e “R”, pois a diferença era visível. Aproximou-o ao segmento “P” (Figura 73), e vários estudantes afirmaram *“é o ‘P’”*.

Figura 73 - Identificação do elemento mediador



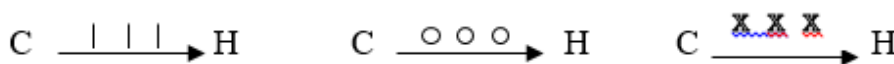
Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

Enquanto os estudantes, de forma colaborativa, buscavam alternativas para solucionar a situação proposta de indicação do segmento com o mesmo tamanho de “A”, procuramos não intervir diretamente, deixando que eles próprios descartassem as opções desfavoráveis e acolhessem aquelas que eram possíveis soluções. Nossa intervenção resumia-se a colocá-los em análise de suas ações/operações no processo de identificação da necessidade

de um elemento mediador (uma nova grandeza) quando a comparação direta não é possível. Como síntese, retomamos todo o movimento realizado pelos estudantes que participaram efetivamente na escolha do elemento mediador (o recorte), mais próximos do quadro, com aqueles que acompanhavam de suas carteiras. Além disso, retomamos as representações que os estudantes já estabeleciam com relação às comparações, representação algébrica com símbolos matemáticos: $A = P$; $A \neq B$; $A > B$, entre outras. Mesmo que indiretamente, nosso foco era para o vir a ser, ou seja, a ideia de que o elemento mediador era o início para se chegar à unidade de medida para a medição das grandezas na expressão da quantidade numérica.

Na sequência, propusemos tarefas particulares (108 a 111) com necessidade de um elemento mediador (pedaço de papel, barbante, compasso, copo, entre outros) para a comparação das grandezas comprimento, área e volume. Foram retomados os modos de comparação dessas grandezas, porém com a introdução da unidade de medida e a expressão do resultado, ainda com símbolos matemáticos ($=$, $\neq$, $>$, $<$). A medição de uma determinada grandeza com a unidade de medida foi representada também com marcas, no esquema, que servem para registrar os resultados desse processo (Figura 74).

Figura 74 - Marcas que representam a quantidade de medidas repetidas



Fonte: Elaborada pela autora com base em Gorbov e Mikulina (2001, p. 26).

A seta é marcada em suas extremidades por letras, e o sentido indica que uma das letras é a unidade e a outra a grandeza a ser medida (Damazio; Cardoso; Santos, 2014). A figura anterior (Figura 73) representa a construção de uma área H com a unidade de medida C; as marcas (riscos, circunferências, xis) indicam quantas vezes a unidade de medida se repetiu para a construção da área H. Segundo Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008), o uso das marcas é um método de contagem das quantidades das medidas caracterizadas historicamente, e isso é feito para atrair a atenção dos estudantes ao processo de medição e reprodução da grandeza.

3.3.2 Palavras marcas e uso de parlendas no processo de medição das grandezas

As tarefas particulares de estudo deste item tratam do modo de registro dos resultados das medições das grandezas, como sequência de séries ordenadas dos números. A

ideia a ser elaborada é que cada número possui um lugar próprio. Para que a revelação dessas características seja consciente e não uma ação mecânica, inicialmente discutem-se os sistemas de numeração não padronizados. Por exemplo, parlendas, cantigas e outros textos (Gorbov; Mikulina; Savieliev, 2008).

Na tarefa de introdução, simulamos uma situação em que precisávamos de um pedaço de barbante do comprimento da largura do quadro. Havia, no fundo da sala, um rolo de barbante que não poderia ser removido e aproximado do quadro. Retomamos a discussão já realizada sobre a necessidade de um elemento mediador; em conjunto, optamos pelo pedaço de madeira. Porém, havia outra condição: cada medida corresponderia a uma palavra de uma parlenda. O desafio era encontrar a palavra que representasse o tamanho do quadro (comprimento da largura). Convidamos Quel e Lia para fazerem o registro das medidas no quadro (Figura 75), enquanto os demais estudantes pronunciavam a sequência das palavras.

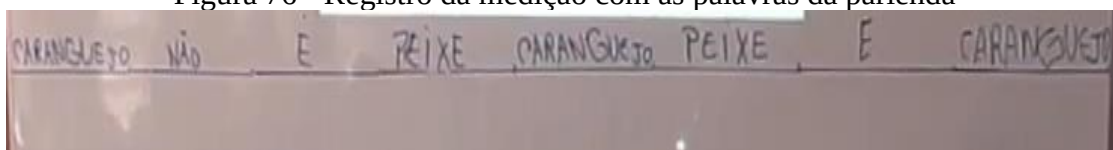
Figura 75 - Registro das medidas com as palavras



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

Alguns declamavam toda a parlenda, não falavam pausadamente para dar tempo de fazerem o registro do segmento representativo da palavra⁶⁵. Propusemos realizar novamente a medição, enquanto escrevíamos a palavra correspondente a cada medida (Figura 76).

Figura 76 - Registro da medição com as palavras da parlenda



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

⁶⁵Os estudantes conheciam a parlenda, a professora já a havia trabalhado em outro contexto. Os que ainda não estavam alfabetizados a memorizaram, por isso declamavam toda a parlenda.

Prosseguindo com a tarefa, questionamos: “*Já sabemos quanto mede o quadro?*”

O debate era conduzido para que os estudantes concluíssem que a medida do quadro era explicitada por uma palavra da parlenda, ou seja, a última palavra: “CARANGUEJO”. O inconveniente da palavra “CARANGUEJO” estar repetida três vezes será discutido mais adiante. Nesse momento, centrávamos a atenção dos estudantes na sequência das palavras que representava o comprimento da largura do quadro: “CARANGUEJO – NÃO – É – PEIXE – CARANGUEJO – PEIXE – É – CARANGUEJO”. Cido apontou para o segmento em que se encontrava a palavra “É” e manifestou sua dúvida na relação entre o tamanho da palavra e o espaço ocupado por ela na medida. O estudante relacionou a quantidade⁶⁶ de letras da palavra ao tamanho do segmento construído com base no comprimento da largura do elemento mediador (unidade de medida). Tal manifestação foi relevante para voltarmos à discussão sobre a unidade de medida (comprimento da largura do pedaço de madeira) independentemente da quantidade de letras da palavra. Para Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008), colocar os estudantes diante de situações que envolvem sistemas não formais, como a sequência de palavras das parlendas, tem como premissa fazê-los refletir sobre as impossibilidades ou defeitos desse modo de representar o resultado da medição das grandezas.

Voltamos à finalidade principal da tarefa, com o desafio: “*Como buscamos um pedaço de barbante do tamanho do comprimento da largura do quadro, sem aproximar o rolo? Precisamos de ideias*”. Um estudante propôs: “*É só cortar*”. A ideia foi apoiada pelos colegas. A ideia de cortar o barbante era propícia, já que o rolo não podia ser deslocado. Mas, em que medida, qual o local? As gêmeas Nena e Sarita se dirigiram ao fundo da sala e desenrolaram uma quantidade de barbante do rolo, cada uma segurava uma extremidade para mantê-lo esticado. Olhavam para o quadro na tentativa de estimar o tamanho correto. Lia se aproximou com uma tesoura, outros estudantes também sugeriram cortar o barbante, porém não conseguiam decidir o melhor lugar e desistiram. Nesse movimento, os estudantes não estavam realizando somente ações objetais; estas estavam propiciando elaborações mentais para a solução da tarefa.

Enquanto isso, próximo ao quadro, Manu contava “*um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito*”. Questionamos: “*O que você contou?*” Ela respondeu “*as medidas*”.

⁶⁶ Provavelmente o pensamento do estudante tem respaldo no ensino da Educação Infantil, com influência do ensino tradicional (Matemática Moderna). Nessa perspectiva, de acordo com D’Augustine (1976), contrário ao que defende o Ensino Desenvolvimental em relação às grandezas, o comprimento não tem nada a ver com a quantidade de elementos de um conjunto. O autor orienta que para corrigir esse erro, o professor deve dispor, em fila, objetos de diferentes quantidades de modo “que o que tem menos elementos fique mais comprido do que o outro. [...] Se a criança disser que o conjunto mais comprido tem mais objetos que o conjunto mais curto, ela está pensando em ‘mais’ em termos de comprimento e não de número” (D’Augustine, 1976, p. 32-33).

Indagamos “Qual medida?” A sugestão de Manu possibilitou-nos um debate sobre a unidade de medida utilizada, sua relação com a sequência das palavras da parlenda e a decisão de usar o elemento mediador “pedaço de madeira” para medir, cortar no lugar correto e buscar o barbante.

Coletivamente, os estudantes sobrepuseram a unidade de medida no barbante esticado no chão tantas vezes quantas foram as palavras da parlenda registradas no quadro (“contaram” pelas palavras). Assim, definiram o lugar em que o barbante seria cortado. Cido orientou: “Agora tem que encostar o barbante no quadro”. Percebemos que, apesar de terem usado a medida conforme as palavras pronunciadas da parlenda, a medição não foi suficientemente rigorosa. Mesmo assim, não interferimos e deixamos que terminassem o processo. Ao encostarem o barbante no quadro, perceberam que os tamanhos (do quadro e do barbante) não coincidiam. Diante do ocorrido, perguntamos: “O que aconteceu que deu errado? Será que usar a medida (pedaço de madeira) e as palavras da parlenda não é a solução correta? A medição foi bem feita?”

Essas questões possibilitaram que os estudantes propusessem refazer a medição, desta vez com mais cuidado. Esse foi um momento conturbado para organizar os estudantes de modo que todos participassem. Solicitamos que se sentassem no chão um em frente ao outro, e o barbante foi esticado ente eles. Enquanto Anita manuseava a unidade de medida, os demais pronunciavam as palavras da parlenda. Era importante que percebessem a necessidade de sobrepor a unidade de medida de modo que o final de uma coincidissem com o início da outra. Precisamos refazer a medição mais de uma vez, porém com êxito, porque no final o tamanho do barbante coincidiu com a medida do quadro.

Com a finalidade de possibilitar que os estudantes percebessem os “defeitos” que inviabilizaram o sistema não formalizado, na continuidade do experimento entregamos para cada estudante um barbante e uma unidade de medida (recorte). Cada estudante deveria recortar um pedaço do barbante com a especificidade da palavra medida “PEIXE”. Deixamos escrita no quadro a parlenda completa: “CARANGUEJO – NÃO – É – PEIXE – CARANGUEJO – PEIXE – É – CARANGUEJO – SÓ – É – PEIXE – NA – ENCHENTE – DA – MARÉ”.

Como anunciamos acima, a parlenda possui a repetição das palavras “CARANGUEJO, PEIXE, É”. A medição com uma dessas palavras é inconveniente, pois há possibilidade de a mesma palavra corresponder a tamanhos diferentes de medidas. Nossa intenção era que os estudantes constatassem que uma parlenda que possui palavras repetidas não é adequada para expressar o resultado da medição. No entanto, salientamos a relevância da apropriação do modo de relacionar a unidade de medida com a grandeza a ser medida, mesmo

nas situações com as parlendas que não são adequadas. Esse é o movimento que o sistema Elkonin-Davídov proporciona ao colocar os estudantes em atividade de estudo para que, mediante a necessidade colocada pela situação, buscassem uma solução para novas situações.

A maioria dos estudantes usou o mesmo procedimento da tarefa anterior: em duplas ou individualmente, esticavam o barbante, usavam o recorte e pronunciavam a sequência das palavras da parlenda até “PEIXE” (Figura 77). Alguns precisaram de nossa ajuda.

Figura 77 - Estudantes realizando a medição com a unidade de medida e a palavra



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

Ressaltamos o cuidado que os estudantes tiveram durante o processo de medição na interligação do fim com o início de cada sobreposição do recorte. Tal cuidado evidenciava a apropriação recorrente das discussões da tarefa anterior sobre o modo correto de medir as grandezas, ambas as situações no que concerne à grandeza comprimento. A aula terminou com a entrega dos barbantes pelos estudantes.

Na aula do encontro seguinte, após debatermos as tarefas desenvolvidas no encontro anterior, propusemos a análise dos pedaços de barbante gerados após a medição realizada pelos estudantes com a unidade de medida (recorte) e a palavra medida “PEIXE”. É importante pontuar que todos usaram a mesma unidade de medida na realização da tarefa. Tomamos dois deles de tamanhos diferentes, fixamo-los com fita adesiva no quadro e levantamos algumas questões a serem analisadas: *“Por que nem todos os barbantes entregues têm o mesmo tamanho? Qual deles tem a medida certa? Como podemos comprovar qual foi medido corretamente?”*

Anita e Dani propuseram conferir a medição, os demais acompanharam pronunciando as palavras da parlenda. Ao final, descobriram que tanto no primeiro quanto no segundo barbante “PEIXE” foi a palavra medida usada, portanto os dois barbantes foram medidos e cortados corretamente (Figura 78).

Figura 78 - Confirmação dos tamanhos dos barbantes com a palavra medida “PEIXE”



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

Antes do debate, alguns estudantes afirmavam que o barbante menor era o que tinha o tamanho correto e o maior estava errado. No entanto, mudaram suas opiniões após análise e constatação de que a palavra “PEIXE” foi usada corretamente nos dois casos. Assim, ambas as respostas estavam corretas, mesmo com a divergência nos comprimentos. Com o intento de verificar se todos haviam compreendido, questionamos mais uma vez: *“Por que os dois tamanhos são corretos?”* Sarita respondeu: *“Porque a palavra é peixe”*. A mesma palavra (PEIXE) representa quantidades de unidades diferentes: na primeira vez que a palavra aparece, quatro unidades; na segunda, seis. Havia ainda mais uma possibilidade que não foi contemplada pelos estudantes, na terceira vez, onze unidades. Porém, centramos nossas intervenções para que os estudantes comparassem as grandezas diretamente, sem a necessidade de contar as unidades por meio de uma sequência numérica, o que será realizado mais adiante.

Trouxemos ao debate a seguinte questão:

Pesquisadora: *Se o problema da parlenda é ter palavra repetida, qual é a solução?*

Jô: *Tem que colocar outra parlenda.*

Pesquisadora: *E como tem que ser a outra parlenda?*

Jô: *Tem que ter outras palavras não repetidas.*

Os demais estudantes concordaram com Jô, aparentemente a inviabilidade do uso de parlendas com palavras repetidas estava sanado. Sendo assim, propusemos que medissem com uma parlenda sem palavras repetidas uma extensão maior do que a do quadro já medido, o comprimento da largura da sala de aula. A quantidade de palavras da parlenda não era suficiente para medir toda a extensão. E agora! Como resolver essa situação? Outra limitação do sistema não padronizado se apresentava: a parlenda tem um limite de palavras, seria necessário uma nova parlenda, mais uma, mais uma... conforme a extensão se ampliasse (comprimento da largura da quadra de esporte, distância da escola até a residência de cada um). Discutir isso com os alunos tinha o objetivo de compreender a necessidade de continuar a parlenda ilimitadamente, no entanto, toda parlenda tem fim. De acordo com Rosa (2012, p.

151), “As tarefas com as parlendas geram as necessidades que levam à reprodução da gênese do conceito científico de número natural, com suas leis fundamentais”.

O aspecto ordinal do número, sob a perspectiva do Ensino Desenvolvimental e do sistema Elkonin-Davídov, é desenvolvido conscientemente pelos estudantes, inicialmente com tarefas do sistema não padronizado, pois elas criam a necessidade do sistema padronizado de números e símbolos (algarismos). Nesse contexto, as tarefas de estudo permitem discutir os “defeitos” do uso das parlendas (ou outros textos), as quais são limitadas em relação às propriedades básicas da sequência numérica: 1) os números seguem um ao outro numa determinada ordem que não pode ser alterada; 2) os números numa série encontram-se uma vez só, não podem ser repetidos; 3) sempre é possível continuar a série numérica, são infinitos; 4) os números devem ser iguais para todas as pessoas (Gorbov; Mikulina; Savieliev, 2008).

As tarefas particulares 114 a 118 do Apêndice C envolvem a medição de diferentes grandezas (comprimento, área, volume e contagem) com palavras das parlendas na forma de esquema de seta. As marcas (riscos) no esquema de seta são substituídas pela palavra marca. Por exemplo, tem-se uma unidade de medida de volume “E”, a palavra marca da parlenda (indica a quantidade de unidade de medidas). É preciso determinar o volume “K” do recipiente. Em outra tarefa particular se apresenta um segmento “B” e a unidade de medida “K”. A proposição é descobrir a palavra marca da parlenda que representa o resultado do processo de medição. Cada uma é associada a uma medida, a palavra marca é aquela que corresponde à última medida. Na tarefa particular 116, os estudantes analisam a construção da área realizada por um estudante com uma unidade de medida e a palavra. O objetivo é que os estudantes percebam o equívoco, pois a área não foi construída conforme a palavra indicada no esquema de setas. Os diferentes procedimentos de análise promovem apropriações mentais conscientes pelos estudantes. Não há uma repetição de expressões mecanizadas.

Essas tarefas particulares são importantes porque propiciam a apropriação, pelos estudantes, dos elementos essenciais das relações entre as grandezas (grandeza a ser medida, a unidade de medida e o resultado), para que em tarefas subsequentes se elabore o modelo universal do conceito de número que se constitui na relação de multiplicidade e divisibilidade entre as grandezas.

Na tarefa 119, conforme Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008), a finalidade é iniciar o processo de representação do resultado da medição com os símbolos numéricos arábicos. Propusemos que medissem a área “A” de uma malha quadrícula (doze unidades quadradas) com a unidade de medida “E” (duas unidades da malha). A tarefa foi realizada coletivamente. No quadro estavam expostas as imagens (*PowerPoint*) da unidade de medida de área “E” e a

área “A” a ser medida. Enquanto um estudante media a área com um recorte de papel do tamanho de “E”, os demais acompanhavam: *“Um, dois, três, quatro, cinco, seis!”* Para medir a área (superfície) “A” foi necessário sobrepor “E” por seis vezes, portanto, no esquema de setas, a palavra marca é substituída pelo símbolo numérico 6 (seis). Continuamos o debate sobre a possibilidade de aumentarmos a área com a unidade de medida, além do seis, mais uma, mais uma... Intentamos fazê-los refletir sobre a possibilidade de sempre acrescentar mais um quando usamos os algarismos. A estudante Tina concluiu: *“Sempre dá para somar mais um porque os números são infinitos”*.

Na sequência, desenvolvemos as tarefas particulares do sistema Elkonin-Davídov que contemplam o processo de medição de grandezas em que a unidade de medida é composta.

3.3.3 Unidades de medidas compostas e o modelo universal

Na continuidade do experimento, as tarefas de estudo possibilitam que os estudantes aprimorem o processo de medição das grandezas com a ajuda da unidade de medida composta. Isso é essencial para que os estudantes tenham clareza de que a unidade de medida não é o objeto. E com isso compreendam, em tarefas futuras, que o número 1, por exemplo, é o resultado do processo de medição em que a grandeza medida e a unidade de medida são iguais. O número 1, portanto, não é um objeto isolado, e sim resulta da comparação entre duas grandezas em que a unidade de medida cabe uma vez na grandeza a ser medida.

A tarefa particular de estudo que introduz a medida composta propõe irrigar três plantas que estão em vasos de tamanhos distintos. A necessidade de água de cada planta está atrelada ao tamanho do vaso, por isso, são necessários três pequenos recipientes (copos) de tamanhos diferentes para regá-las. Há um recipiente grande com água na mesa do professor, o desafio é descobrir quantas vezes é possível regar as três plantas com o volume de água disponível. O professor enche os três copos e rega as três plantas, proporcionalmente, ao tamanho de cada vaso. Os alunos são instruídos a dizerem “um”. Na segunda vez, o professor coloca água somente em um dos copos e diz “dois”. O objetivo é que os estudantes percebam que essa não é a medida integral, o “dois” corresponde à medida composta pelos três copos. Um estudante continua o procedimento até que a quantidade de água do recipiente maior se esvazie. É demonstrada a possibilidade de regar quatro vezes. No final sugere-se que os estudantes escolham letras para a unidade de medida (composição dos três copos) e o volume medido (recipiente maior) e façam o registro com o esquema de setas (Gorbov; Mikulina; Savieliev, 2008).

De acordo com Rosa (2012), no processo de medição da situação descrita com a medida composta, a sequência dos números “é introduzida a partir da união do contraste discreto-contínuo no processo de medição: o contínuo (volume de água) é medido por unidades de medidas discretas que, por sua vez, compõem-se pelo volume de água (grandeza contínua) dos três copinhos”.

Na sequência do nosso experimento, propusemos uma tarefa particular em que era preciso medir a quantidade discreta “A” de círculos com a unidade de medida “C”, composta por dois círculos, e expressar o resultado com um algarismo arábico no esquema de setas (Figura 79).

Figura 79 - Medição com a unidade de medida composta



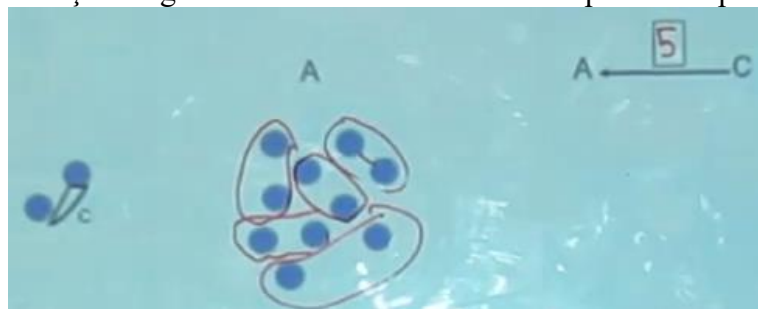
Fonte: Elaborada pela autora com base em Gorbov e Mikulina (2001, p. 45).

Os estudantes haviam aprendido como realizar a mediação, bem como o significado do esquema de setas. Para nos certificarmos de suas apropriações, realizamos alguns questionamentos: “*Temos que contar o quê?*” Um estudante disse: “O ‘A’”. A resposta evidenciava que o estudante avançara para além da forma objetual, pois sua manifestação contemplava a representação algébrica da quantidade de objetos e não os objetos em si. Continuamos: “*Ah! Então vamos contar*”. Iniciamos propositalmente a contagem: “*Um, dois, três...*” Alguns estudantes interromperam a contagem para dizer “*é de dois em dois*”. Nosso propósito era analisar se haviam se apropriado do procedimento correto de medição da grandeza com a medida composta, o que foi confirmado pela manifestação dos estudantes. Solicitamos que um deles fosse até o quadro realizar a medição, e, como de costume, muitos se prontificaram. Consideramos que a disponibilidade da maioria evidenciava a possibilidade de apropriação da tarefa. A centralidade, conforme o sistema de ensino, é propiciar o envolvimento de todos. Tínhamos convicção de que a participação efetiva ocorria nos momentos individuais, enquanto realizavam as tarefas no quadro, ou coletivos, quando opinavam e analisavam a resolução com os colegas. Os estudantes estavam estimulados para a ação que possibilitava a apropriação do conceito, pressuposto inerente a atividade de estudo.

Propusemos a continuidade da tarefa coletivamente. Cinco estudantes mediram “A” com a unidade composta “C”. Para acompanhar e visualizar o processo de medição, o primeiro

estudante circulou um dos pares, simulando que a unidade composta “C” cabia uma vez – os colegas pronunciavam “*um*”. Em seguida, outro estudante fez o segundo agrupamento e a expressão “*dois*”. Antes que o quinto estudante terminasse o processo de medição, Lari apontou entusiasmada para o espaço com a interrogação no esquema de setas e disse: “*É cinco!*” Ela completou o esquema (Figura 80).

Figura 80 - Medição da grandeza “A” com a medida composta “C” pelos estudantes



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

Conforme Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008), é preciso que os estudantes compreendam que o número representa o resultado da relação entre a unidade de medida (composta ou não) e uma grandeza. Por isso, retomamos o processo de medição da grandeza “A”, simulando a sobreposição da medida composta “C”. Os estudantes pronunciavam em voz alta cada movimento: um, dois, três, quatro, cinco. No esquema, o número cinco representa a relação entre a unidade de medida composta por dois círculos e a quantidade total de círculos.

Na sequência, propusemos outras tarefas particulares (122 a 128) que relacionavam grandezas contínuas (área, volume e comprimentos) ou grandezas discretas (figuras) com unidades de medidas compostas. No sistema Elkonin-Davídov, o objetivo é a generalização teórica do conceito de número. Cada tarefa apresenta uma necessidade nova que a diferencia da outra, ao mesmo tempo que as inter-relaciona. Para Rosa (2012, p. 154), nessa proposição de ensino “as tarefas idênticas são evitadas para não conduzir à generalização empírica da relação universal entre grandezas”. Na tarefa anterior, o objetivo foi encontrar o número correspondente ao resultado da medição. Nas subsequentes, além da relação entre a grandeza e a expressão do número no esquema, acrescenta-se a representação do movimento da unidade de medida por segmentos. Nesse contexto, o esquema de setas e os segmentos são elaborados com base na unidade de medida composta e na grandeza a ser medida.

Discutimos, na sequência, uma nova tarefa particular. No quadro, expusemos algumas figuras (círculos), a unidade de medida “C”, composta por três círculos, e “H”, a grandeza a ser medida, com seis círculos. Questionamos: “Qual é a unidade de medida?” Ket

e JB observaram as imagens e não se manifestaram. Jô disse que teria que contar de três em três. Ao questionarmos por que, o estudante explicou que: “O ‘C’ tem três bolinhas”. Lari aproximou-se “*é assim*”, e simulou dois agrupamentos circulando com o dedo indicador a imagem no quadro. Na primeira vez contornou três círculos, na segunda mais três círculos. Apontou para o esquema de setas e escreveu o número dois (Figura 81).

Figura 81 - Medição com a unidade de medida composta por três círculos

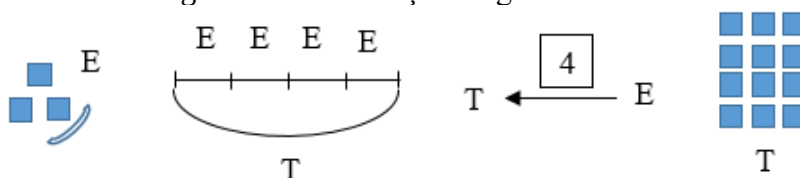


Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

Solicitamos que explicassem por que os agrupamentos foram de três em três, e não de dois em dois, como na tarefa anterior. Lari aproximou-se e disse: “*Porque não é a gente que manda é aqui, óh!*” Apontou para a unidade de medida “C” e complementou: “*Quem manda é o ‘C’*”. Implícita à expressão de Lari, “*quem manda é o ‘C’*”, está a função da unidade de medida no processo de medição das grandezas. Pode-se iniciar a contagem a partir de qualquer parte da grandeza que se está medindo, cada parte deve ser contada uma vez (Gorbov; Mikulina; Savieliev, 2008).

Em outra tarefa particular, propusemos a construção da grandeza “T” por meio da unidade de medida composta “E” e o movimento a ser executado conforme os segmentos, “T” é composto por “E” + “E” + “E” + “E” (Figura 82).

Figura 82 - Construção da grandeza “T”



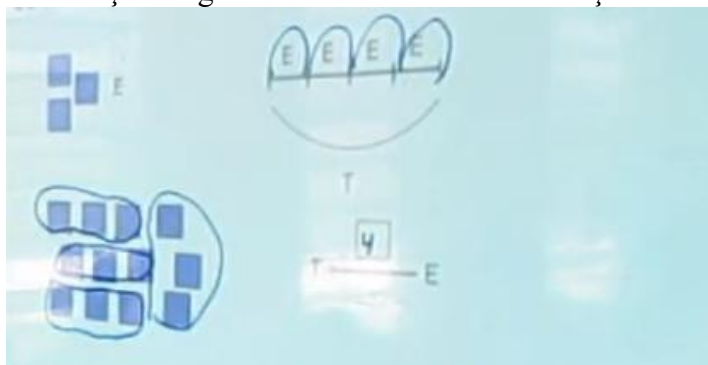
Fonte: Elaborada pela autora com base em Gorbov e Mikulina (2001).

A finalidade principal da tarefa consistia na compreensão de que a unidade de medida composta por três quadrados corresponde, no conjunto, a uma vez inteira (quantidade

discreta). Chamamos a atenção dos estudantes para a análise do esquema com segmentos. A cada um, repetia-se a unidade de medida “E”. No total, quatro. Logo os estudantes sugeriram colocar o número quatro no esquema de seta.

Com a grandeza “T” construída, provocamos a análise do movimento inverso, ou seja, verificar quantas medidas “E” foram necessárias para formar “T”, bem como a relação com os esquemas (Figura 83).

Figura 83 - Elaboração da grandeza “T” com base na relação com os esquemas



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

Iniciou-se aqui o movimento de pensamento dos estudantes que propiciará, nas próximas tarefas, o entendimento da relação de multiplicidade e divisibilidade, na comparação das grandezas (unidade de medida e grandeza a ser medida), para a formulação do modelo universal do conceito de número.

A multiplicidade foi generalizada na seguinte questão: quantos “E” constituem “T”? $T = \text{“E”} + \text{“E”} + \text{“E”} + \text{“E”}$; $T = E \times 4$. Para construir a grandeza “T”, a unidade de medida composta “E” (três quadradinhos) foi desenhada quatro vezes.

A divisibilidade foi contemplada com base na resposta à indagação: quantas vezes “E” cabe em “T”: $\frac{T}{E} = 4$. Solicitamos que verificassem se a construção da grandeza “T” estava correta. Uma estudante foi até o quadro e, conforme a especificidade da unidade de medida “C”, circulou e agrupou os quadradinhos de três em três (Figura 81). A cada movimento realizado, os demais estudantes pronunciavam um, dois, três e quatro. A síntese era que a unidade de medida “E” cabia quatro vezes na grandeza “T”. Caraça (2003) também afirma que a resposta a essas perguntas exige um termo de comparação único para todas as grandezas de mesma espécie, a unidade de medida da grandeza de que se trata, e o número que revela o resultado da comparação com a unidade de medida. O autor complementa: “[...] há, portanto, no problema da medida, três fases e três aspectos distintos – *escolha* da unidade; *comparação*

com a unidade; *expressão* do resultado dessa comparação por um número” (Caraça, 2003, p. 30).

É na inter-relação das representações objetal (figuras), gráfica (esquema de seta e de segmentos), algébrica (letras) e numérica (resultado da relação entre a unidade de medida e a grandeza medida) que os estudantes assimilam o modelo universal, ou seja, a apropriação do conceito teórico de número real (Damazio; Cardoso; Santos, 2014). Para Rosa (2012, p. 156), “O modelo abstrato do conceito teórico de número é expresso por duas fórmulas que se complementam mutuamente: $\frac{A}{E} = n$ e $A = nE$ ”.

Ao final do desenvolvimento de aproximadamente 125 tarefas particulares de estudo atingimos, em nosso experimento, o objetivo principal da organização do ensino do conceito de número no sistema Elkonin-Davídov, ou seja, a propriedade numérica da grandeza advinda da relação de uma com outra de mesma espécie tomada como unidade de medida.

O foco de nossa exposição no próximo item são as tarefas de estudo para a generalização teórica do conceito de número, a construção geométrica do modelo universal, isto é, a reta numérica.

3.3.4 Introdução e comparação de números na reta numérica

A construção da reta numérica representa concretamente o resultado do processo de medição da grandeza com uma unidade de medida, movimento que propicia a experimentação do modelo universal. Para Damazio, Cardoso e Santos (2014, p. 191), na constituição da reta numérica “os estudantes se envolvem em tarefas que lhes permitem o entendimento de que todo número é composto por certa quantidade de unidades, representadas na reta numérica por certa quantidade de passos”. De acordo com Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008), para a construção da reta numérica é necessário observar as seguintes condições: o ponto inicial, a direção⁶⁷ e o sentido (à direita ou à esquerda se a direção for horizontal), bem como o passo. Inicialmente o aspecto ordinal do número é representado com pontos na reta. Mais tarde, o número passa a ser visto como segmento de reta que exprime o aspecto qualitativo do número real. Aqui, como explicitou Caraça (2003), a qualidade se apresenta como possibilidade de medição, que revela uma quantidade numérica na relação entre as grandezas.

Para a introdução e comparação de números na reta numérica, foram desenvolvidas 18 tarefas particulares, conforme o apêndice C. Na primeira tarefa, colocamos na mesa do

⁶⁷ A direção da reta corresponde à sua posição, que pode ser horizontal, vertical ou transversal.

professor um recipiente com líquido e um copo vazio, tomado como a unidade de medida “C”. Escrevemos no quadro $A = 5C$, e dissemos: “‘A’ é o volume de líquido que o recipiente deve conter. Não sabemos quanto tem, pois foi retirado um pouco. Temos um desafio! Como vamos descobrir quanto de líquido tem no recipiente?” Jô disse, empolgado: “Oba! Um desafio!” Logo se aproximou da mesa e fez uma contagem (com o dedo indicador) na extensão do recipiente com líquido: “Um, dois três... dezessete”. Outros também disseram que era só contar e usaram a mesma estratégia de Jô, porém perceberam resultados diferentes. Questionamos: “O que aconteceu? Por que vocês não encontraram o mesmo tanto! Os estudantes ficaram pensativos, mas não responderam à questão.

Voltamos a informar que não sabíamos quanto de líquido havia no recipiente. Lari percebeu o copo, pegou-o nas mãos, mas não sugeriu proceder à medição com ele. Continuamos a questionar: “Como medimos volume?” Outra estudante aproximou-se com uma régua, encostando-a ao recipiente. Questionamos: “Dá para medir a grandeza volume com a régua?” Vários estudantes afirmaram que não e outros afirmaram que sim. Para que percebessem a impossibilidade de medir a grandeza volume com uma unidade de medida da grandeza comprimento, simulamos despejar o líquido na régua. Jô, em tom de desespero, advertiu: “Vai derramar!!!”

Centramos o debate na unidade de medida apropriada para medir o volume. Na mesa tinha um copo vazio, uma régua e um recorte de papel. Perguntamos: “Podemos medir o líquido que está no recipiente com a régua ou com o recorte de papel?” Nesse momento do debate, todos afirmavam que não era possível. Durante a discussão não mencionamos a existência do copo, apesar de deixá-lo exposto próximo ao recipiente com líquido. Entendemos que nossa ajuda, nesse processo, era orientá-los para que lembrassem das discussões já realizadas durante o experimento. Tínhamos convicção de que sabiam como medir a grandeza volume. Por isso, voltamos à anotação no quadro $A = 5C$, e questionamos o que era “A”. Disseram o volume do recipiente. E o “C”? Responderam a unidade de medida. Perguntamos mais uma vez: “Qual é a unidade de medida C?” Anita, sentada no fundo da sala, disse: “É o copo.” A identificação da unidade de medida “C” pela estudante possibilitou medir o volume do recipiente.

A resolução da tarefa teve início com a participação voluntária de quatro estudantes. Dois executavam o processo de medição do líquido do recipiente (experimento objetual), enquanto os outros dois o movimento do esquema no quadro (representação geométrica e algébrica). Os demais estudantes participavam de suas carteiras (Figura 84).

Figura 84 - Medição do volume do recipiente e registro no esquema

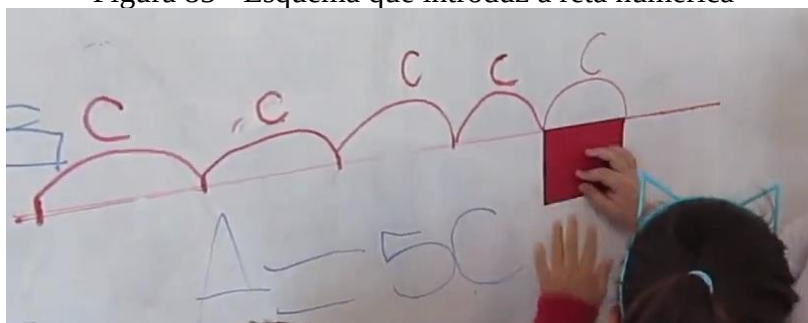


Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

A medição do volume do recipiente com a unidade de medida “C” foi realizada com tranquilidade. A cada movimento, marcavam a unidade no recipiente, com um pincel atômico, para que no final ficasse visível a quantidade de vezes que a medida se repetiu na medição do volume. Sem a marcação seria impossível visualizá-las, porque o líquido se mistura. Antecipadamente, havíamos desenhado no quadro uma linha reta com uma régua, marcando o início com um pequeno traço vertical e o sentido. Os outros dois estudantes, com um recorte de papel, marcavam no esquema (reta), para cada medida de líquido transferida de um recipiente ao outro, o tamanho do comprimento do recorte com um arco (Figura 85). No final, concluímos que no recipiente havia somente três medidas.

Voltamos a questionar: “*A quantidade do volume do recipiente está correta? A é igual a 5C?*” Imediatamente os estudantes disseram que não. “*Faltam duas medidas*”. Solicitamos que Manu e Sô continuassem a resolução. “*Temos que retirar ou acrescentar líquido no recipiente?*” As estudantes avaliaram que deveriam acrescentar. Tínhamos uma garrafa com líquido na mesa. Jô apontou para a garrafa e disse que era dela que se deveria pegar o líquido. As estudantes acrescentaram duas vezes a unidade de medida “C” no recipiente que tinha três medidas e, no quadro, mais dois arcos (Figura 85).

Figura 85 - Esquema que introduz a reta numérica



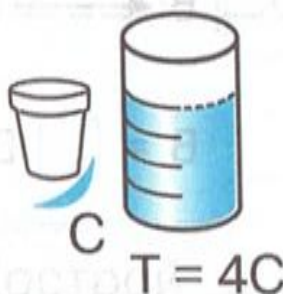
Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

O esquema apresenta a relação da multiplicidade do modelo universal do conceito de número, o qual se efetivará na construção da reta numérica em tarefas subsequentes. O

tamanho do comprimento da largura do recorte é uma medida unitária livre, isso significa que a unidade que representa o movimento objetal no esquema é consenso. Porém, a sua representação tem que ser cuidadosa. Para cada unidade de medida “C”, o tamanho da unidade tem que ser igual. Na sequência, as tarefas particulares (131 a 133) com a mesma finalidade da anterior, possibilitam que os estudantes percebam os tamanhos dos segmentos na representação no esquema.

Apresentamos o desenho de um recipiente com marcações que indicam quantas unidades de medidas foram utilizadas para compor o volume do recipiente (Figura 86).

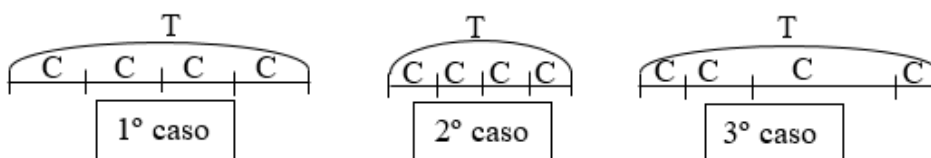
Figura 86 - Composição do volume T



Fonte: Gorbov e Mikulina (2001, p. 50).

O desenho representa o volume “T”, composto por quatro unidades de medida “C” ($T = 4C$). Os estudantes já sabiam o significado e descobriram que a primeira marca correspondia a uma unidade de medida (primeira vez que o líquido foi colocado no recipiente). A segunda marca à segunda medida, e assim chegava-se à quarta marca, o volume total. No entanto, o que justifica a tarefa é a análise das soluções da representação das medidas no esquema (Figura 87).

Figura 87 - Representação do modo correto e errado das medidas no esquema



Fonte: Elaborada pela autora com base em Gorbov e Mikulina (2001).

A tarefa é de controle, os estudantes devem perceber que o segundo caso, assim como o primeiro, está correto, ambos representam a mesma unidade de medida “C”, a escolha do tamanho (comprimento) do segmento que representa a unidade de medida, por ser livre, é

diferente. Em cada caso específico possuem o mesmo tamanho e se repetem o mesmo tanto de vezes (quatro). No entanto, o terceiro caso não está correto, apesar de terem colocado em cada vez o mesmo volume de água (medida) marcados com a mesma letra, os comprimentos dos segmentos são diferentes (Gorbov; Mikulina; Savieliev, 2008).

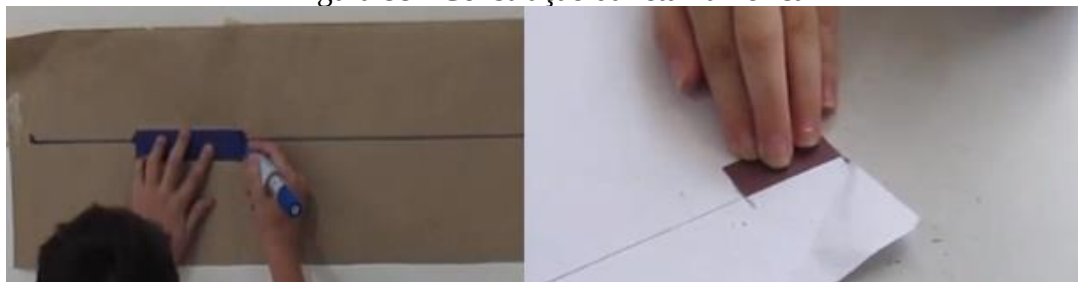
Nas tarefas seguintes, avançamos para a representação numérica da relação entre as grandezas na reta. O início é marcado com um traço vertical ou um símbolo (bandeirinha). O sentido, também livre (para à direita ou para à esquerda), é indicado com uma seta, e entre os números vizinhos os espaços devem possuir o mesmo tamanho.

Para a construção coletiva da reta numérica, entregamos a cada estudante uma folha de papel A4 e um recorte pequeno de papel cartão (unidade de medida). Na folha, solicitamos que desenhassem uma linha reta. A condição do uso da régua para desenhar a linha reta era apropriada, os próprios estudantes solicitaram o instrumento, sem necessitar de nossa intervenção. Ressaltamos aqui as tarefas de construção de linha reta e sua inter-relação com os pontos e segmentos, no início do experimento. Havíamos anunciado, naquele momento, a relevância das referidas tarefas para a generalização abstrata do número na reta numérica. Conforme Caraça (2003), uma reta tem infinitos pontos e sua associação aos números inteiros naturais corresponde à ideia de que se passa de um número ao outro somando-lhe uma unidade. Essa relação permite que compreendamos a existência de um conjunto numérico que, por sucessão, tende ao infinito.

Na mesa do professor havia um recipiente vazio (vidro de conserva), uma garrafa com líquido e um copo pequeno (unidade de medida). A finalidade era construir a reta numérica com base na medição do volume de líquido da garrafa. Enchemos o copo, despejamos no recipiente vazio, com o pincel atômico marcamos o volume e questionamos: *“Tem quanto de líquido no recipiente?”* Os estudantes responderam *“um”*. Do mesmo modo que os estudantes fizeram na folha A4, havíamos fixado, no quadro, um pedaço de papel pardo e o desenho de uma linha reta. Solicitamos a representação do movimento objetal do líquido na reta, desenhada no papel fixado no quadro. Nas medições seguintes, optamos por não fazer as marcas no vidro. A intenção era que associassem e percebessem a reciprocidade entre o processo de medição pelo manuseio dos recipientes e a representação do resultado na reta numérica. Lia aproximou-se, marcou o início da reta com um pequeno traço na vertical, encostou o recorte e definiu o espaço (segmento) do tamanho da largura do recorte com outro traço vertical. No lugar indicado, colocou o número 1. Lari sugeriu colocar uma seta no lado contrário, do início da reta. Conforme Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008), a seta é indicativa da sucessão dos segmentos (mais um, mais um, mais um...), a cada “passo” mais um número, com tendência

para o infinito. Nena e Sarita já tinham construído a reta com a seta, mesmo antes da sugestão da colega. O procedimento foi realizado concomitantemente pelos demais estudantes na folha de papel A4 (Figura 88).

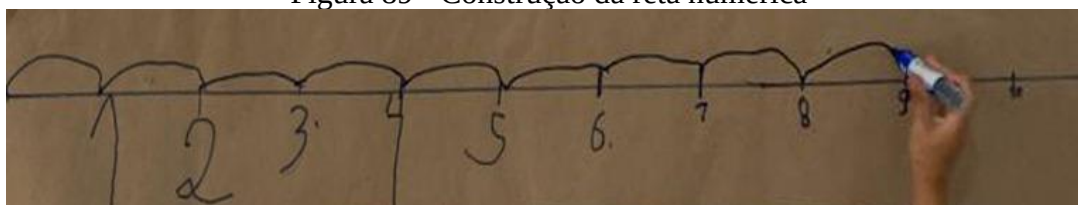
Figura 88 - Construção da reta numérica



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

Cada vez que acrescentávamos uma unidade de medida de volume no vidro de conserva, um estudante a representava na reta com o acréscimo de um segmento e o número correspondente. Esse procedimento foi repetido até que não existisse mais espaço no vidro de conserva, chegando a 10 (Figura 89).

Figura 89 - Construção da reta numérica



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

Assim, com o término do período de aula daquele dia, propusemos continuar medindo o volume da garrafa no próximo encontro. Recolhemos as folhas A4 com a produção dos estudantes até então.

Vale lembrar um fato que ocorreu no momento em que os estudantes desenvolviam tarefas relacionadas à medição de grandezas. Em nosso experimento, sugerimos uma tarefa particular em que os estudantes medissem a superfície de suas carteiras com uma unidade de medida (a superfície de um recorte). A sobreposição resultou em um número de vezes inteira, mas restava uma parte da superfície da carteira em que a medida não coube inteira. No processo de medição que envolve as grandezas contínuas lhes é permitido, além da apropriação do número natural no primeiro ano, também a noção de que entre os números naturais existem pontos que correspondem aos lugares dos números em que a medida não cabe inteiras vezes. Nosso objetivo foi avaliar se haviam compreendido o processo de medição em que uma nova

necessidade surge, quando a unidade de medida não cabe inteiras vezes, sem a pretensão de chegar ao valor numérico. Nesse momento, era suficiente a compreensão de que entre um número natural e outro existem números.

Retomamos a discussão das tarefas da reta numérica no encontro seguinte, com a devolução das folhas A4 contendo as produções de cada estudante. Propusemos a continuidade em duplas. Organizamos as duplas colocando um estudante que havia participado da aula anterior e outro que havia faltado ou que, segundo nosso olhar, ainda estava no processo de apropriação e poderia ser ajudado pelo outro. Com o mesmo fim, retomamos as discussões já realizadas para refazermos coletivamente a medição do líquido da garrafa. Em uma das mãos tínhamos o copo e na outra a garrafa. Estabelecemos o seguinte debate:

Pesquisadora: *O que é o copo?*

Estudantes: *A unidade de medida!*

Pesquisadora: *Vamos usar a unidade de medida para quê?*

Jô: *Vamos medir o volume da garrafa com o copo!*

Os estudantes sabiam executar a medição do volume de líquido com a unidade de medida. A discussão implicava verificar se compreendiam a relação entre o movimento objetal, ou seja, quantas unidades de medida eram necessárias para compor o volume total da garrafa, a expressão singular (número natural), e o lugar geométrico na reta numérica. Para o número 1, a medida de um segmento; para o número 2, um mais um; para o 3, dois mais um, e assim sucessivamente.

O vidro de conserva utilizado para transpor o volume da garrafa no processo de medição não foi suficiente. Ele comportava somente dez unidades de medida (copo), menor que o volume total da garrafa. Questionamos: *“Foi possível medir todo o líquido da garrafa?”* Os estudantes responderam que não. Tínhamos que medir o volume total, então propusemos que pensassem em um modo de resolver a situação. Jô rapidamente sugeriu: *“Pega uma jarra maior para colocar.”* Acatamos a sugestão, porém, com o objetivo de fazê-los refletir sobre o trabalho de medição já realizado, indagamos: *“Teremos que medir novamente? Quantas unidades (copo) cabe no vidro de conserva?”* Os estudantes não achavam necessário medir novamente, porque já sabiam quantas unidades de medida havia no vidro. Ket e Lia despejaram o líquido na jarra maior (Figura 90).

Figura 90 - Experimento objetual da representação abstrata do número na reta numérica



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

A escolha do vidro de conserva com capacidade para dez unidades de medida não foi aleatória. Pretendíamos trazer ao debate a relação do movimento de medição, a representação na reta do número e a constituição do sistema decimal, sistema mais utilizado em situações da realidade social, entre elas a escolar. Na organização do ensino de Elkonin-Davídov, o sistema de numeração decimal é aprofundado no segundo ano escolar com o estudo de diferentes bases numéricas. As bases numéricas são definidas pela contagem e formação de agrupamentos de quantidades contínuas e discretas. O registro de uma quantidade, na linguagem matemática, é escrito por meio de ordens: primeira, segunda, terceira, entre outras (Rosa; Damazio; Silveira, 2014). Por exemplo, se para registrar o volume de um recipiente se conta a unidade de medida somente até quatro, significa que a base numérica é a quaternária. A primeira ordem indica os grupos com uma unidade, menores que quatro; a segunda consiste nos grupos com quatro unidades cada, também inferior a quatro. Conforme Ifrah (1997, p. 48),

[...] é possível repartir os números e seus diversos símbolos segundo estágios sucessivos, aos quais se pode dar os respectivos nomes: unidades de primeira ordem, unidades de segunda ordem, unidades de terceira ordem, e assim sucessivamente. E é dessa maneira que se chegou a uma simbolização estruturada dos números, evitando-se esforços de memória ou de representação considerável.

Em nosso experimento, com a unidade de medida básica (copo) propusemos contar até dez e formar uma nova unidade de medida (vidro de conserva). Os grupos formados com a unidade (copo) até nove correspondiam à primeira ordem, enquanto o agrupamento formado por dez unidades básicas (ou uma unidade do vidro de conserva) formava um grupo de segunda ordem. O movimento de transferência do volume do vidro de conserva para a jarra, como mostra a figura (Figura 90), permite que os estudantes estabeleçam relação entre o agrupamento

das dez unidades e a formação de um novo agrupamento, imediatamente superior posicionado à esquerda da unidade. Sendo assim, a escrita do número 10, no sistema decimal, significa um grupo de segunda ordem e nenhum grupo de primeira ordem. Davídov (1988, p. 210) afirma que “O registro dos resultados das medições é feito na forma de número posicional, que dependendo da relação das medições pode ser a qualquer sistema de numeração, inclusive o decimal, se essa relação for múltipla de dez”⁶⁸.

Propusemos continuar a medição do volume total da garrafa, por meio da transferência do que ainda restava de líquido para a jarra e a representação na reta numérica (Figura 91).

Figura 91 - Processo de medição do líquido da garrafa

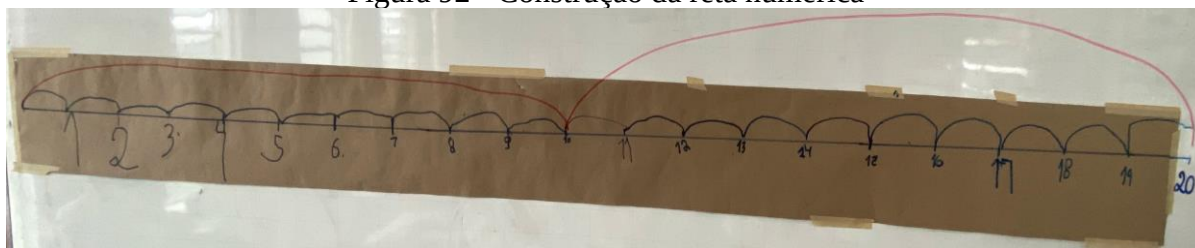


Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

Tínhamos na mesa do professor: o copo pequeno, o vidro de conserva, a garrafa com parte do líquido e a jarra com o líquido transferido da garrafa. No quadro, o papel pardo com o desenho da reta e a expressão numérica da medição realizada até 10 (Figura 89). Para envolver todos os estudantes no processo, cada dupla executou uma medição. Sarita encheu o copo pequeno com o líquido da garrafa e despejou na jarra. Perguntamos aos estudantes: “*O que devemos fazer na reta?*” Biel, referindo-se ao segmento, indicou: “*Colocar mais um*”. Cido aproximou o recorte e marcou com o pincel atômico o segmento e o número 11. O debate centrou-se no significado do algarismo 1 na posição da primeira ordem (uma unidade) e do 1 na segunda ordem (agrupamento com dez unidades – uma dezena). A medição do líquido da garrafa e o registro na reta numérica prosseguiu, para cada unidade de medida (copo) acrescida à jarra, mais um segmento na reta e o número correspondente, chegando até 20 (Figura 92).

⁶⁸“El registro de los resultados de la medición tiene la forma de número posicional, el que en dependencia del valor de la relación permanente de las medidas puede ser referido a cualquier sistema de cálculo, entre ellos el decimal si esta relación es múltiplo de diez.”

Figura 92 - Construção da reta numérica



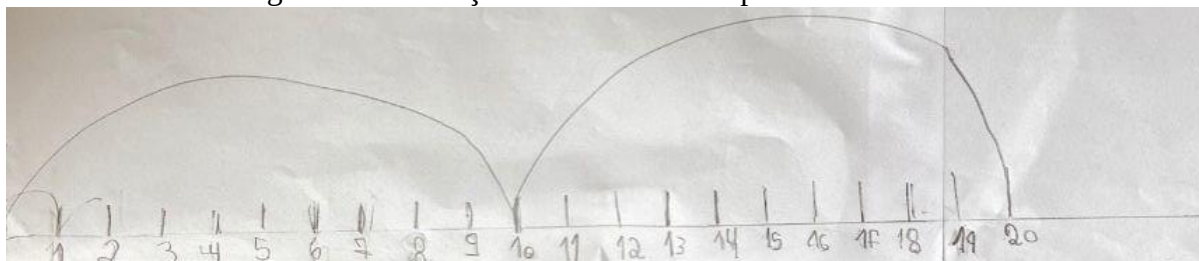
Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

Nossa pretensão, em conformidade com Davídov (1988), foi utilizar as unidades de medida (copo e vidro de conserva) para que os estudantes sentissem a necessidade de estabelecer relação entre a medida seguinte e a anterior. No desenho da reta numérica, o arco maior (vermelho) indica o agrupamento dos dez arcos menores (azul).

No final, sugerimos que em outra jarra idêntica àquela que usávamos para a transferência do líquido, colocássemos duas unidades de medida (vidro de conserva) de líquido e, por aproximação, verificássemos a igualdade do volume nas duas jarra. A escrita numérica do resultado da medição do líquido com a unidade de medida (copo) e a unidade de medida (vidro de conserva), no sistema decimal é 20. Ou seja, duas unidades de segunda ordem e nenhuma de primeira ordem.

Consideramos relevante acentuar que, para o desenvolvimento da tarefa de construção da reta numérica, cada estudante foi envolvido tanto no experimento objetual, relação com as unidades de medida e o volume a ser medido, quanto na expressão do resultado dessa relação (número) na reta numérica. Isso ocorreu com a participação das duplas no quadro, em cada movimento do processo de medição e individualmente, na folha A4 (Figura 93).

Figura 93 - Produção da reta numérica por uma estudante



Fonte: Acervo da pesquisadora (2021).

A maioria dos estudantes construiu a reta numérica de acordo com as discussões durante a realização da tarefa: construção da linha reta com a régua; utilização de uma unidade de medida (recorte), para que entre um número natural e outro haja a mesma distância (segmentos do mesmo tamanho); identificação do lugar do número 1 no final do primeiro

segmento, e não no início (primeira marca vertical) e o sentido da reta com a seta, que indica a possibilidade de sempre acrescentar mais uma unidade. Alguns precisaram de nossa ajuda, principalmente na marcação das unidades com o recorte, para que o lugar de cada número natural estivesse a uma mesma distância um do outro.

Ainda havia líquido na garrafa, por isso continuamos o experimento até que tudo fosse transferido para a jarra. No final ficou constatado que o volume da garrafa era 40. Avaliamos que o objetivo da tarefa foi alcançado pela maioria dos estudantes. Assim, temos consciência de que o processo de apropriação do conceito abstrato de número, no primeiro ano escolar, conforme a organização do sistema de Elkonin-Davídov, constitui-se pela generalização teórica “que consiste na redução dos diversos fenômenos à sua base única, na dedução da correspondente diversidade, como concreticidade” (Rosa, 2012, p. 168). Gorbov, Mikulina e Savieliev (2008) explicam que na reta numérica se efetiva a propriedade abstrata do número. O número 40 é representado como resultado da medição da grandeza volume, em nosso experimento. Porém, poderia ser da relação de qualquer outra grandeza (comprimento, área, massa, contagem de objetos, entre outras). Desse modo, na reta numérica se concretiza o número em sua expressão abstrata, e não a grandeza.

As últimas tarefas particulares de estudo (135 a 145) desenvolvidas em nosso experimento, propuseram, com base na reta numérica, a comparação dos numerais. A resolução permitiu que os estudantes estabelecessem a relação “maior-menor” aos números sob a condição de que as quantidades na reta se estabelecessem pela mesma medida. Desse modo, a síntese elaborada foi que quanto mais adiante, no sentido da seta, do início da reta se localiza o número, maior ele é.

Aqui concluímos a exposição do desenvolvimento das tarefas de estudo do conceito de número em conformidade com o sistema Elkonin-Davídov em nosso Experimento Didático. Na sequência, apresentaremos as considerações finais, como síntese da possibilidade de os estudantes do primeiro ano escolar se apropriarem do conteúdo das tarefas de estudo do conteúdo teórico do conceito de número.

4 ESTUDANTES BRASILEIROS CUMPREM AS TAREFAS DE ESTUDO PARA APROPRIAÇÃO DO CONTEÚDO TEÓRICO DO CONCEITO DE NÚMERO

Aqui apresentamos a síntese e as conclusões dos resultados do desenvolvimento das tarefas de estudo de nosso Experimento Didático. Nossa tese se configura pela compreensão de que é possível que estudantes brasileiros realizem e se apropriem do conteúdo das tarefas de estudo referentes ao conceito de número do sistema Elkonin-Davídov.

O que nos incentivou a investigar se estudantes brasileiros possuem condições cognoscitivas para assimilar o conteúdo do conceito tematizado nas tarefas de estudo que, segundo Elkonin-Davídov, desenvolvem o pensamento teórico dos estudantes, foi a manifestação de acadêmicos dos cursos de Matemática e Pedagogia e professores que atuam na área de Matemática nas redes de ensino. Para eles, o modo de organizar o ensino nessa perspectiva é considerado muito “difícil”, e estudantes brasileiros não teriam condições de acompanhar seu desdobramento, portanto, de aprender.

Entendemos que o olhar, tanto dos acadêmicos em formação inicial quanto dos professores que participam de formação continuada, fundamenta-se na compreensão empírica do modo de organizar o ensino do conceito de número conforme o que se apresenta nos livros didáticos brasileiros.

A organização do ensino no sistema Elkonin-Davídov parte do pressuposto de que o conteúdo teórico do conceito de número tem que ser ensinado para que o estudante se aproprie do conhecimento científico e, por consequência, desenvolva pensamento teórico. Nesse contexto, há divergência entre o modo de organização do ensino brasileiro e o proposto pelo sistema dos autores russos. Com relação ao conceito de número, a principal discordância está no conteúdo e na forma de seu desenvolvimento. O ensino brasileiro tem base empírica, em que o número é apresentado como unidade discreta de elementos verificáveis no cotidiano. No sistema Elkonin-Davídov, o número decorre da relação entre grandezas contínuas e discretas, a qual possibilita a apropriação do número real (natural, racional, inteiro e irracional) em nível teórico, com início no primeiro ano escolar. No entanto, segundo Davídov (1988), para que isso ocorra o processo de ensino nas escolas tem que ser organizado para que os estudantes assimilem o conteúdo teórico dos conceitos. Assim, não é qualquer ensino que ocasionará o desenvolvimento do pensamento em nível teórico.

Para compreendermos a diferença de organização do ensino, foi relevante o estudo dos princípios que o estruturam em direção ao desenvolvimento do pensamento empírico (ensino tradicional ou pedagogia estagnada) e aqueles que, ao contraporem-se aos primeiros,

orientam-no ao desenvolvimento do pensamento teórico. Davídov e Slobódchikov (1991) apontam os princípios do “novo pensamento pedagógico” – Ensino Desenvolvimental do sistema Elkonin-Davídov – com vistas a superar a visão empírica do conhecimento. Os estudantes precisam perceber o caráter novo, o que se caracteriza de “diferente” daquilo que já conheciam. Para Davydov (2017), a apropriação dos conhecimentos científicos pelos estudantes, no primeiro ano escolar, materializa-se com o início da formação da atividade de estudo. Nesse processo, o novo pensamento pedagógico fundamenta-se na tese vigotskiana de que o desenvolvimento psíquico dos estudantes é mediado pela educação e pelo ensino. O Ensino Desenvolvimental, com esse pressuposto, é organizado para que sejam criadas necessidades ainda não existentes nos estudantes. O professor tem papel essencial ao propor tarefas em que, inicialmente, os estudantes precisam de ajuda para solucioná-las, mas que posteriormente são capazes de realizá-las autonomamente. A esse princípio se articula o da atividade, em que os conhecimentos científicos são apropriados pelos próprios estudantes na resolução de tarefas particulares de estudo que revelem as condições de sua origem pela ação investigativa. As ações objetais, para o novo pensamento pedagógico, são reveladoras do conteúdo teórico do conceito na relação do geral ao particular.

A superação dos princípios que fundamentam a pedagogia estagnada por aqueles que formam nos estudantes um novo pensamento pedagógico não ocorre espontaneamente. O desenvolvimento do pensamento dos estudantes está vinculado ao ensino que lhes é proporcionado. Desse modo, o professor precisa conhecer “o novo”, apropriar-se desse modo de organização do ensino cuja finalidade é desenvolver o pensamento teórico. O “novo”, nesse ensino, consiste na superação da exposição, pelo professor, do conhecimento pronto.

De modo geral, o ensino brasileiro tem em sua concepção a base advinda do ensino tradicional, com prioridade para a transmissão direta (definição verbal) do conceito para que os estudantes o reproduzam, especialmente nas avaliações, do mesmo modo que lhes foi dado. As vivências e experiências do ensino do conceito de número, para estudantes da Educação Básica, organizadas com base na contagem discreta de objetos, mantêm-se durante a formação inicial e continuada dos professores. Esse é um movimento cíclico, que será quebrado somente com a mudança do modo de organizar o ensino, o que exige uma mudança na compreensão do conteúdo dos conceitos, cuja eficácia está na efetivação do conteúdo teórico que determina os procedimentos. Conforme aponta Vigotski (2001), é difícil nos libertar desse pensamento que se encontra fossilizado, pois, ainda que contenha conteúdo teórico, concebe-no como expressões verbais, e não como compreensão das relações que de fato estão contidas na origem do desenvolvimento, no processo de apropriação do conhecimento teórico do número.

Sabemos que os professores buscam alternativas para avançar no processo de ensino e propiciar, de fato, a aprendizagem dos estudantes. No entanto, essa busca muitas vezes está vinculada ao uso de diferentes técnicas de ensino que continuarão insuficientes para a aprendizagem se, com elas, os estudantes não se apropriarem do conteúdo teórico dos conceitos (Davídov; Slobódchikov, 1991). A premissa do caráter novo do conhecimento consolida-se na atividade de estudo com enfoque investigativo do material didático na resolução das tarefas de estudo para que o estudante perceba a diferença entre o que ele conhece e o novo.

Davídov (1988) afirma que o programa educacional na perspectiva da formação da atividade de estudo estabelece o conteúdo (teórico) e determina os métodos, o material didático, os períodos de ensino. Sua afirmação é sustentada pela necessidade de um planejamento coletivo com todos os envolvidos no processo de formação da atividade de estudo dos estudantes. A atividade de estudo tem sua estrutura (necessidade, finalidade, motivo, tarefas de estudo, ações de estudo, ações de controle e avaliação) fundamentada na Teoria da Atividade. Nesse sentido, o essencial de nossa investigação é expor o papel da atividade de estudo para a aprendizagem com foco na apropriação do conceito de número no primeiro ano escolar para a formação do pensamento teórico dos estudantes.

É nesse contexto que se insere a necessidade de estudo para a apropriação do sistema de ensino Elkonin-Davídov, reivindicado pelos acadêmicos e professores em formação continuada. Justificam-se, também, as suspeitas dos referidos sujeitos em relação à possibilidade do desenvolvimento desse novo modo de organizar o ensino de matemática com estudantes brasileiros. Os acadêmicos e professores julgam, em decorrência de sua formação, que os estudantes do primeiro ano escolar não são capazes de aprender o conceito de número na perspectiva do ensino Elkonin-Davídov, uma vez que eles próprios o consideram de difícil compreensão. Como já mencionamos, eles concordam com a relevância desse novo ensino, mas requerem estudo para que possam se apropriar do novo pensamento, e reivindicam comprovação de sua eficácia na prática pedagógica.

No sistema Elkonin-Davídov, o conceito de número não se apresenta diretamente pelo numeral relacionado à contagem discreta de objetos, como ocorre no ensino tradicional brasileiro. No Ensino Desenvolvidor, a concretização do conceito de número ocorre em um processo que se constitui na relação entre grandezas discretas (contagem) e contínuas (comprimento, área, volume e massa). Para o professor, o desenvolvimento do conceito de número na relação entre grandezas é o ponto de partida, mas para o estudante é ponto de chegada. O ponto de partida do estudante são as tarefas de estudo organizadas pelo professor e que não consistem em apresentar o conceito pronto. A finalidade é que o estudante se aproprie

do conteúdo teórico do conceito de número. Assim, o ponto de partida do professor coincide com o ponto de chegada do estudante.

Na primeira seção da exposição de nosso Experimento Didático, evidenciamos que estudantes do primeiro ano escolar são capazes de solucionar tarefas de estudo sem a antecipação de definições prontas pelo professor. As tarefas de estudo do sistema Elkonin-Davídov têm, em sua essência, o mote de colocar os estudantes em investigação. O pressuposto é que eles aprendam a formular “boas” perguntas ao professor. Essas perguntas não são eventuais, não é qualquer pergunta que desenvolve a ação investigativa. Por isso, são apresentadas figuras ou objetos aos estudantes para analisarem suas características – cor, forma, tamanho e posição – e compará-los pela mesma característica. A ação orientada de análise das qualidades, inicialmente não mensuráveis (características das figuras ou objetos), é que possibilita formular as questões eficazes. A resposta não está dada, necessita ser investigada. O processo de investigação é acentuado com a sequência das tarefas em que, embora com relativa autonomia, cada uma se articula com a seguinte, formando um sistema conceitual coeso.

O sistema conceitual é formado porque cada tarefa de estudo traz componentes gerais do conceito, mas que não se manifestam de imediato, promovendo uma nova necessidade. O que o estudante conhece não é suficiente, mas o pouco que domina é satisfatório para, em colaboração com o(s) outro(s), investigar a possível solução. Assim, aumenta-se a possibilidade de a maioria dos estudantes assimilarem o conteúdo da tarefa quando estabelecem relação com o que conhecem e o que estão em processo de assimilação. A solução das tarefas de estudo desse sistema requer outro tempo pedagógico, porque nas mediações estabelecidas o estudante tem tempo para pensar ou refletir (movimento de pensamento) sobre as diversas possibilidades. Esse é outro diferencial desse ensino, posto que a reflexão permite aos estudantes encontrarem uma resposta que, normalmente, não é única.

As elaborações foram fruto de permanentes debates na resolução das tarefas de estudo realizados com os estudantes e entre eles. Momentos especiais são aqueles em que um estudante auxilia o outro, quando este ainda não se apropriou do objetivo da tarefa. Por exemplo, durante a tarefa particular com o uso de um instrumento (régua) para desenhar uma linha reta, uma estudante mostra para a outra o procedimento e explica que é preciso pressionar com força a régua sobre o caderno, e em seguida esta realiza o procedimento autonomamente. Isso pode parecer óbvio ao leitor, mas o que queremos destacar é a relevância, conforme Vigotski (2001), do coletivo, da interação, da ajuda, da possibilidade de colocar o estudante em movimento de pensamento.

Afirmamos, com isso, que tal modo de organizar o ensino exige do professor o domínio do conteúdo. Não queremos dizer que os estudantes resolvem todas as situações de forma coerente o tempo todo, mas, inclusive, seus equívocos possibilitam-lhes refletir sobre suas soluções. O professor conduz as tarefas para que os próprios estudantes percebam seus equívocos e busquem outras soluções mais eficazes.

As primeiras tarefas possibilitam que os estudantes explicitem a necessidade de comparar grandezas pelas suas qualidades mensuráveis ou não. Nas tarefas de estudo das qualidades não mensuráveis das grandezas, surge a necessidade de o estudante ir além delas. Ele compreende que estas não são suficientes para expressar o seu valor numérico, pois não permitem em si a medição e atribuição de valor que possa ser quantificada.

Os conceitos são elaborados pelos estudantes em colaboração com o professor, por meio da resolução de tarefas de estudo que os conduzam à apropriação dos modos corretos de comparar as grandezas. O avanço na análise das tarefas do capítulo de introdução, no referido sistema de ensino, refere-se à relação que não é identificada somente como igual ou diferente, mas como uma primeira quantificação. As tarefas permitem a assimilação de que, na comparação de grandezas de mesma espécie, o resultado, por exemplo, entre os comprimentos da largura de dois recortes, seja a igualdade ou a desigualdade. A diferença entre os comprimentos pode ser a maior ou a menor ($>$ ou $<$). Tais análises são propícias para que os estudantes reflitam: quanto é maior? Ou quanto é menor? É esse movimento conceitual que cria as condições para se chegar ao modelo universal do conceito de número que permite a revelação da qualidade numérica da relação entre grandezas.

As tarefas de estudo que consolidam o número na relação entre grandezas são aquelas que introduzem a unidade de medida, na proposição de que os estudantes devem se apropriar da medição das diferentes grandezas (contínuas e discretas). Nesse processo – a comparação das grandezas com apoio da unidade de medida –, o número é resultado da medição quando se descobre quantas vezes uma grandeza cabe na outra. A grandeza a ser medida e a unidade de medida concebem o modelo universal do conceito de número, na relação de multiplicidade e divisibilidade.

As tarefas que finalizam nosso Experimento Didático são as que encaminham para a elaboração da reta numérica, a essência do conceito teórico de número que inter-relaciona as ideias geométricas, algébricas e aritméticas. Ademir Damazio destaca, dentre outros diferenciais dessa organização, que este ensino “permite o trânsito, concomitante, pela álgebra,

geometria e aritmética, pois, desde o primeiro ano, os estudantes se envolvem num sistema de tarefas particulares em que a ideia central – geral – do conceito é focada.”⁶⁹

Com base no processo do desenvolvimento das tarefas de estudo em nosso Experimento Didático, podemos afirmar que provavelmente o estudante do primeiro ano escolar não possui a necessidade de aprender o conceito teórico de número, isso porque ele acredita que já sabe. Para Davídov (1988), o estudante do primeiro ano escolar tem que perceber a diferença entre o conhecimento adquirido na pré-escola e o novo no primeiro ano do Ensino Fundamental. Com relação ao conceito de número, a diferença é o conteúdo teórico que determina o modo de organizar o ensino, qual seja, a relação entre as grandezas que permite a apropriação do número real no primeiro ano (natural e, em certa dimensão, o racional). São as tarefas de estudo com teor desafiador que criam a necessidade desse novo conhecimento e que geram o motivo de os estudantes se apropriarem do conceito teórico de número.

O estudante somente está em atividade de estudo quando atua conscientemente e com responsabilidade durante a execução das tarefas de estudo. O compromisso com a apropriação do conhecimento se evidenciou durante todo o experimento, em que os estudantes se mostravam dispostos a: expor aos colegas suas apropriações; realizar os experimentos; resolver as tarefas impressas; auxiliar os colegas; buscar diferentes modos de resolver as tarefas. Vale reforçar a ideia de que esse modo de organização do ensino independe das condições gerais (cognoscitivas, econômicas, sociais entre outras) dos estudantes matriculados na escola regular. Para Ademir Damazio, o Ensino Desenvolvidor “dá oportunidade para que todos os estudantes da escola pública se apropriem de conceitos científicos como condição para o entendimento do potencial humano de transformar a realidade”⁷⁰. É esse ensino que, em conformidade com a tese vigotskiana, promove o desenvolvimento. Assim, não é exigida uma prévia preparação do estudante para desenvolver as tarefas de estudo sobre o conceito de número no primeiro ano escolar, pois não se trata de o estudante estar pronto para aprender, é a aprendizagem que promove o seu desenvolvimento.

Na última seção de nossa análise, as tarefas de estudo do conceito de número sintetizam as ideias geométricas, algébricas e aritméticas do número como uma abstração teórica da representação das relações entre as grandezas na reta numérica. É importante ressaltar que buscamos, no desenvolvimento das tarefas, que os estudantes se apropriassem da síntese

⁶⁹ Palestra de Abertura do VII ECEM (Encontro Catarinense de Educação Matemática), intitulada “Educação Matemática e Formação Profissional: Necessidade de Opção Teórica”, realizado na FURB (Universidade Regional de Blumenau), em 31 de outubro de 2011.

⁷⁰ Da mesma fonte da nota 68.

do número como resultado da medição de uma grandeza com uma unidade de medida. Conforme Davidov (2019c, p. 227), com subsídio do professor, os estudantes concluem que todas as tarefas de estudo mostram que “[...] é necessário realizar uma comparação mediada”, porém o lugar do número (ponto), na reta numérica, independe da grandeza medida. Embora na maioria das tarefas para o primeiro ano, o processo de medição resultava em um número natural, a relação entre as grandezas contínuas e discretas permitiu que os estudantes abstraíssem a existência de outros números entre os naturais. Esse pensamento ficou evidente, pois perceberam que a medida poderia não caber inteiras vezes na grandeza medida, diferentemente do que ocorre quando o ensino do conceito de número tem por base somente a contagem discreta de objetos.

O último encontro, na escola, foi marcado por momentos inesquecíveis e de muita emoção. Com o objetivo de avaliarmos as apropriações dos estudantes em relação ao conteúdo do conceito de número com base na resolução das tarefas de estudo do sistema Elkonin-Davídov, entregamos uma folha A4 e solicitamos que representassem nela o que aprenderam durante as aulas de matemática (Anexo A). A maioria dos estudantes realizou a representação dos números na reta numérica. Associaram a relação de comparação das grandezas por meio da medição e sua representação algébrica e numérica. Marcaram o início da reta, utilizaram uma unidade de medida (segmento) para indicar a sequência numérica. Revelaram que o sentido da reta numérica (identificado pela seta) não é único, tanto pode ser para a direita como para a esquerda, e que existem números entre dois naturais. Outras manifestações são reveladoras da compreensão do número advindo da comparação e relação entre as grandezas contínuas e discretas: análise das propriedades das figuras pela cor e forma, linhas quebradas (fechadas e abertas), representação gráfica da igualdade e desigualdade, unidades de medidas não padronizadas como as palavras, comparação das grandezas e expressão do resultado na forma algébrica por símbolos matemáticos ($>$ e $<$). Entendemos que essas manifestações revelam a superação do entendimento sobre o conceito de número que formaram no período pré-escolar, cujo foco era predominantemente na quantidade discreta (pensamento aritmético) e, com isso, evidenciamos a possibilidade de estudantes brasileiros assimilarem o conceito de número na perspectiva anunciada.

De acordo com Ademir Damazio (2011), a Educação Matemática sob a ótica da Teoria Histórico-Cultural é uma opção que permite ao professor “ter ciência que o pensamento aritmético de característica empírica obstaculiza o desenvolvimento do pensamento algébrico,

forma mais desenvolvida do pensar humano.⁷¹ No estado de Santa Catarina os fundamentos psicológicos e pedagógicos, respectivamente, da Teoria Histórico-Cultural e do Ensino Desenvolvimental, embasam o Currículo Base do Território Catarinense. No entanto, em sua maioria, os professores de Matemática têm o livro didático brasileiro (com fundamentos no ensino tradicional) como principal referência para a organização do ensino. Como afirma Vigotski, o pensamento empírico fossilizado obstaculiza a formação do pensamento teórico. Desse modo, para que os estudantes se apropriem do conteúdo teórico do conceito, é necessário que o professor tenha formação para se apropriar desse conteúdo e reorientar a organização de seu ensino. Portanto, reiteramos que as afirmações dos acadêmicos e dos professores em relação à impossibilidade de estudantes brasileiros solucionarem as tarefas de estudo do sistema Elkonin-Davídov e se apropriarem do conteúdo teórico do conceito de número são equivocadas.

Nossa investigação mostra que os estudantes realizam as tarefas de estudo propostas pelo sistema Elkonin-Davídov, mas não basta provar que conseguem realizá-las. O professor tem que ter condições de se apropriar do conteúdo teórico dos conceitos matemáticos para orientar o desenvolvimento das tarefas de estudo no movimento de generalização e abstração do conceito de número em nível teórico.

No entanto, não queremos com o resultado desta pesquisa enfatizar que a efetivação desse sistema de ensino no contexto brasileiro depende unicamente do estudante e do professor em sala de aula. Há outros elementos a serem considerados como as questões objetivas que envolvem o currículo, o material didático, a formação de professores entre outras, que muitas vezes são determinadas por políticas públicas com outras perspectivas teóricas.

Enfim, nosso anseio é que os resultados apontados por este estudo inspirem outros pesquisadores a realizarem experimentos em períodos mais longos, no primeiro e segundo ano, por exemplo. Quiçá pesquisadores brasileiros possam avançar nessas pesquisas e, cada vez mais, investiguem a atividade de estudo conforme a estrutura do experimento formativo desenvolvido nas escolas da Rússia e da Ucrânia e que os resultados destas investigações possam ser apropriados pelos acadêmicos e professores. Consideramos que com o desenvolvimento de mais experimentos em nível de pesquisa poderemos no futuro avaliarmos a eficácia desse ensino e a transformação dos resultados que ora se apresentam insatisfatórios, segundo avaliação do ensino de matemática no Brasil.

⁷¹ Da mesma fonte da nota 68.

REFERÊNCIAS

- AMARAL, C. C. F. do. **A significação do conceito matemático de área expresso por estudantes provenientes de uma Atividade Orientadora de Ensino**. 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Docência para Educação Básica) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências, Bauru, 2018.
- ANJOS, R. E. dos; DUARTE, N. Adolescência inicial: comunicação íntima pessoal, atividade de estudo e formação de conceitos. *In*: MARTINS, L.M.; ABRANTES, A. A; FACCI, M. G. D. (org.). **Periodização Histórico-Cultural do desenvolvimento Psíquico: do nascimento à velhice**. Campinas: Autores Associados, 2016.
- AQUINO, O. F. O experimento didático-formativo: contribuições de L.S. Vigotski, L. V. Zankov e V.V. Davidov. *In*: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (org.). **Fundamentos psicológicos e didáticos do Ensino Desenvolvimental**. Uberlândia: EDUFU, 2017.
- ARAUJO, E. S.; MORAES, S. P. G. de. Dos princípios da pesquisa em educação como atividade. *In*: MOURA, Manoel Oriosvaldo de. (org.). **Educação Escolar e pesquisa na Teoria Histórico-Cultural**. São Paulo: Edições Loyola, 2017.
- ASBAHR, F. da S. F. Idade escolar e atividade de estudo: educação, ensino e apropriação dos sistemas conceituais. *In*: MARTINS, L. M.; ABRANTES, A. A; FACCI, M. G. D. (org.). **Periodização Histórico-Cultural do desenvolvimento Psíquico: do nascimento à velhice**. Campinas: Autores Associados, 2016.
- BEATÓN, G. A. La visión integral o de totalidad en el método dialéctico, su presencia en lo histórico cultural y sus proyecciones en la práctica educativa. *In*: MENDONÇA, S. G. de L.; PENITENTE, L. A. A.; MILLER, Stela (org). **A Questão do método e a teoria histórico-cultural: bases teóricas e implicações pedagógicas**. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2017.
- BECKER, J. D. P.; CARDOSO, E.F.M. O Conceito de número na proposição Davidoviana: uma reflexão sobre as manifestações de estudantes do primeiro ano do ensino. Fundamental. **Revista Saberes Pedagógicos**, Criciúma, v.3, n.2, p. 412-436, jul./dez. 2019.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, DF: Ministério da Educação, [2018].
- CHIQUETTO, M.; VALENTIM, B.; PAGLIARI, E. **Aprendendo Física**. São Paulo: Scipione, 1996.
- CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. 5. ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa, 2003.
- CARPAY, J. A. M. **Developmental Education: from Vygotsky to Davydov: A short reflection on curriculum studies in Russia**. Academie voor OGO, 2009.
- CARRAHER, D. W., SCHLIEMANN, A. D. Modeling reasoning. *In*: K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. Oers, L. Verschaffel (Eds.), **Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education** (p. 295–304). The Netherlands: Kluwer, 2002.

CEDRO, W. L.; NASCIMENTO, C.P. Dos métodos e das metodologias em pesquisas educacionais na Teoria Histórico-Cultural. *In: MOURA, M. O. de. (org.). Educação Escolar e pesquisa na Teoria Histórico-Cultural*. São Paulo: Edições Loyola, 2017.

DAMAZIO, A.; AMORIM, M. P. O desenvolvimento do pensamento geométrico de escolares do ensino fundamental. *In: IV FÓRUM DE INVESTIGAÇÃO QUALITATIVA*, Juiz de Fora, MG: UFJF, 2005.

DAMAZIO, A.; CARDOSO, E. F. M.; SANTOS, F. E. dos. Organização do ensino da matemática no sistema de ensino Elkonin-Davidov. **Revista Electrónica de Investigación y Docencia (REID)**, n.11, p. 179-198, Enero. 2014. Disponível em: <https://revistaselectronicas.ujaen.es/index.php/reid/article/view/1231/1077>. Acesso em: 05 ago. 2023.

DAMAZIO, A.; PEREIRA, A. E.; CARDOSO, E. F. M.; ROSA, J.E. da. As apropriações, por parte de uma professora, de uma nova proposição para o ensino de matemática. *In: MENDES SOBRINHO, J. A. C; DAMAZIO, A. (org.). Formação docente e práticas educativas em Matemática*. Teresina: EDUFPI, 2016.

DAMAZIO, A. Aproximações e distanciamentos entre V. V. Davidov e L. V. Zankov a respeito da organização do ensino e o consequente desenvolvimento do pensamento conceitual. *In: PUENTES, R. V.; LONGAREZI, A. M. (org.). Enfoque histórico-cultural e aprendizagem desenvolvimental: aproximações e distanciamentos entre os principais representantes*. São Carlos: Pedro & João Editores, 2023.

D'AUGUSTINE, C. H. **Métodos modernos para o ensino da matemática**. 2. ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1976.

DAVYDOV, V. V. Análise dos princípios didáticos da escola tradicional e dos possíveis princípios do ensino em um futuro próximo. *In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R.V. (org.). Ensino Desenvolvimental. Antologia*. Uberlândia: Edufu, 2017.

DAVIDOV, V. V. Os problemas psicológicos do processo de aprendizagem dos Estudantes. *In: PUENTES, R. V.; CARDOSO, C. G. C. C.; AMORIN, P. A. P. (org.). Teoria da atividade de estudo: Contribuições de D. B. Elkonin, V. V. Davidov e V. V. Repkin: Livro I*. Curitiba: CRV, 2019a.

DAVIDOV, V. V. Atividade de estudo e aprendizagem desenvolvimental. *In: PUENTES, R. V.; CARDOSO, C. G. C. C.; AMORIN, P. A. P. (org.). Teoria da atividade de estudo: Contribuições de D. B. Elkonin, V. V. Davidov e V. V. Repkin: Livro I*. Curitiba: CRV, 2019b.

DAVIDOV, V. V. Conteúdo e estrutura da atividade de estudo. *In: PUENTES, R. V.; CARDOSO, C. G. C. C.; AMORIN, P. A. P. (org.). Teoria da atividade de estudo: Contribuições de D. B. Elkonin, V. V. Davidov e V. V. Repkin: Livro I*. Curitiba: CRV, 2019c.

DAVIDOV, V.V. Desenvolvimento psíquico da criança. *In: PUENTES, R. V.; CARDOSO, C. G. C. C.; AMORIN, P. A. P. (org.). Teoria da atividade de estudo: Contribuições de D. B. Elkonin, V. V. Davidov e V. V. Repkin: Livro I*. Curitiba: CRV, 2019d.

DAVIDOV, V. V.; MÁRKOVA, A. O conceito de atividade de estudo dos estudantes. *In*: PUENTES, R. V.; CARDOSO, C. G. C. C.; AMORIN, P. A. P. (org.). **Teoria da atividade de estudo**: Contribuições de D. B. Elkonin, V. V. Davidov e V. V. Repkin: Livro I. Curitiba: CRV, 2019.

DAVÍDOV, V.; MÁRKOVA, A. La concepción de la actividad de estudio de los escolares. *In*: SHUARE, M. (org). **La psicología evolutiva y pedagógica en la URSS**: Antología. Moscú: Progreso, 1987.

DAVÍDOV, V. Analisis de los principios didacticos de la escuela tradicional y posibles principios de enseñanza en el futuro próximo. *In*: SHUARE, M. (org). **La psicología evolutiva y pedagógica en la URSS**: Antología. Moscú: Progreso, 1987.

DAVÍDOV, V.; SLOBÓDCHIKOV, V. I. La enseñanza que desarrolla en la escuela del desarrollo. *In*: MUDRIK, A. V. (org.). **La educación y la enseñanza**: una mirada al futuro. Moscú: Editorial Progreso, 1991.

DAVÍDOV, V. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico**: investigación teórica y experimental. Moscú: Editorial Progreso, 1988.

DUARTE, N. **A individualidade para-si**: contribuições a uma teoria histórico-social da formação do indivíduo. Campinas: Autores Associados, 2017.

DUSAVITSKII, A.K. Educação desenvolvnte e a sociedade aberta. **Ensino em Re-Vista**, Uberlândia, v. 21, n.1, p. 77- 84, jan./jun. 2014.

ELKONIN, D. Problemas psicológicos del juego en la edad pré-escolar. *In*: SHUARE, M. (org). **La psicología evolutiva y pedagogia en la URSS**: antologia. Moscú: Editorial Progreso, 1987.

ELKONIN, D. B. Atividade de Estudo: sua estrutura e formação. *In*: PUENTES, R. V.; CARDOSO, C. G. C. C.; AMORIN, P. A. P. (org.). **Teoria da atividade de estudo**: Contribuições de D. B. Elkonin, V. V. Davidov e V. V. Repkin: Livro I. Curitiba: CRV, 2019a.

ELKONIN, D. B. Questões Psicológicas relativas à formação da Atividade de estudo. *In*: PUENTES, R. V.; CARDOSO, C. G. C. C.; AMORIN, P. A. P. (org.). **Teoria da atividade de estudo**: Contribuições de D. B. Elkonin, V. V. Davidov e V. V. Repkin: Livro I. Curitiba: CRV, 2019b.

FIorentini, Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino de matemática no Brasil. **Revista Zetetiké**, Campinas, v. 3, n. 4, p. 1-36, nov. 1995.

GALPERIN, P.; ZAPORÓZHETS A.; ELKONIN D. Los problemas de la formación de conocimientos y capacidades en los escolares y los nuevos métodos de enseñanza en la escuela. *In*: SHUARE, M. (org). **La psicología evolutiva y pedagogia en la URSS**: antologia. Moscú: Editorial Progreso, 1987.

GALPERIN, P. Sobre la investigación del desarrollo intelectual del niño. *In*: SHUARE, M. (org). **La psicología evolutiva y pedagogia en la URSS**: antologia. Moscú: Editorial Progreso, 1987.

GALDINO, A. P. da S. **O conhecimento Matemático de estudantes do 3º ano do Ensino Fundamental sobre o conceito de multiplicação**: um estado com base na Teoria Histórico-Cultural. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2016.

GONÇALVES, L. R. dos S. **Organização do ensino da Matemática no primeiro ano escolar no Brasil e na Rússia: desenvolvimento do pensamento algébrico**. 2022. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2022.

GORBOV, S.F.; MIKULINA, G.G.; SAVIELIEV, O.V. **Ensino de Matemática. 1 ano**: livro do professor do ensino fundamental (Sistema do D.B. Elkonin – V.V. Davidov). 2. ed. Moscou: Vita-Press, 2008.

GORBOV, S.F; MIKULINA, G.G. **Livro de exercícios de matemática, nº 1, 1º ano**: um conjunto de dois livros de exercícios. Sistema ELKONIN, D.G; DAVYDOV, V.V. 4. ed. Moscou: Vita-Press, 2011.

GORBOV, S.F; MIKULINA, G.G. **Livro de exercícios de matemática, nº 1, 1º ano**: um conjunto de dois livros de exercícios. Sistema ELKONIN, D.G; DAVYDOV, V.V. 2. ed. Moscou: Vita-Press, 2001.

IFRAH, G.; MUÑOZ, A. **História Universal dos algarismos**. 2.ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

ILYENKOV, E. V. Nossas escolas devem ensinar a pensar! **Journal of Russian and East European Psychology**, v.45, n.4. p. 9-49, July-August, 2007.

ISIDORO, L. C. do N. **Modo de organização do ensino desenvolvimental de fração**: o conhecimento revelado por acadêmicas de pedagogia. 2019. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2019.

LAZARETTI, L. M. Idade pré-escolar (3-6 anos) e a educação infantil: a brincadeira de papéis sociais e o ensino sistematizado. *In*: MARTINS, Lígia Márcia, ABRANTES, A. A., FACCI, M. G. D. (org.). **Periodização Histórico-Cultural do Desenvolvimento Psíquico**: do nascimento à velhice. Campinas: Autores Associados, 2016.

LEE, J. E. **An analysis of difficulties encountered in teaching Davydov's mathematics curriculum to students in a U.S. setting and measures found to be effective in addressing them**. 2002. Dissertation (Doctor of Education in Educational Theory and Practice) – Graduate School of Binghamton University, State University of New York, 2002.

LEONTIEV, A. N. **Atividade, Consciência, Personalidade**. Bauru, SP: Mireveja, 2021.

LEONTIEV, A. N. Uma Contribuição à Teoria do Desenvolvimento da Psique Infantil. *In*: VIGOTSKII, L. S.; LURIA A. R.; LEONTIEV A. N. (org.). **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. São Paulo: Ícone, 2010.

LEONTIEV, Alex. **O desenvolvimento do psiquismo**. Lisboa: Livros Horizonte, 1978.

LIBÂNEO, J. C.; FREITAS, R. A. M. da M. Vasily Vasilyevich Davydov: a escola e a formação do pensamento teórico-científico. *In*: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (org.). **Ensino Desenvolvimental: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos**. Uberlândia: EDUFU, 2013.

LONGAREZI, A. M.; FRANCO, P. L. J. A.N. Leontiev: A vida e a obra do psicólogo da Atividade. *In*: LONGAREZI, Andréa Maturano; PUENTES, R. V. (org.). **Ensino Desenvolvimental: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos**. Uberlândia: EDUFU, 2013.

MAME, O. A. C. **Os conceitos geométricos nos dois anos iniciais do ensino fundamental na proposição de Davydov**. 2014. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2014.

MAREGA, Á. M. P. **A criança de seis anos na escola: Transição da Atividade lúdica para a atividade de estudo**. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2010.

MARX, K. **Contribuição à crítica da economia política**. 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1983.

MARX, K. **O capital: crítica da economia política**. 16. ed. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1998.

MARX, K. **Grundrisse: manuscritos econômicos de 1857-1858 esboços da crítica da economia política**. São Paulo: Boitempo; Rio de Janeiro: Ed. UFRJ, 2011.

MARTINS, J. C.; FACCI, M. G. D. A transição da educação infantil para o ensino fundamental: dos jogos de papéis sociais à atividade de estudo. *In*: MARTINS, L.M.; ABRANTES, A. A; FACCI, M. G. D. (org.). **Periodização Histórico-Cultural do desenvolvimento Psíquico: do nascimento à velhice**. Campinas: Autores Associados, 2016.

MATVEEVA, N. I.; REPkin, V. V.; SKOTARENKO, R. V. Condições de domínio das formas autônomas da atividade de estudo na escola. *In*: PUENTES, R. V.; CARDOSO, C. G. C. C.; AMORIN, P. A. P. (org.) **Teoria da atividade de estudo: Contribuições de D. B. Elkonin, V. V. Davidov e V. V. Repkin: Livro I**. Curitiba: CRV, 2019.

MOREIRA, L. A. L. A formação humana à luz da Teoria de Leontiev. **Revista Eletrônica Arma da Crítica**, Ano 2, número especial, dezembro de 2010.

MOURA, M. O. A atividade de ensino como unidade formadora. **Bolema**, Rio Claro, v. 11, n. 12, p. 29-43, 1997.

MOURA, M. O. A atividade de ensino como ação formadora. *In*: CASTRO, A.; CARVALHO, A (org.). **Ensinar a ensinar**: didática para a escola. São Paulo: Editora Pioneira, 2001.

MOURA, M. O. Pesquisa colaborativa: um foco na ação formadora. *In*: BARBOSA, Raquel Lazzari Leite (org). Trajetórias e perspectivas da formação de educadores. São Paulo: Editora UNESP, 2004.

MOURA, M. O. de *et al.* Atividade Orientadora de Ensino: unidade entre ensino e aprendizagem. **Revista Diálogo Educacional.**, Curitiba, v.10, n.29, p. 205-229, jan./abr. 2010.

MOYA, P. T. **Princípios para a organização do ensino de matemática no primeiro ano do ensino fundamental**. 2015. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2015.

OBÚJOVA, L. Dos vias para formar un sistema simple de conceptos científicos. *In*: SHUARE, M. (org). **La psicologia evolutiva y pedagogia en la URSS**: antologia. Moscú: Editorial Progreso, 1987.

POLOTSKAIA, Elena. How the Relational Paradigm Can Transform the Teaching and Learning of Mathematics: Experiment in Quebec. **Revista Internacional para Ensino e Aprendizagem de Matemática**, Quebec, v.18, January 2018.

PRESTES, Z.; TUNES, E.; NASCIMENTO, R. Lev Semionovitch Vigotski: Um estudo da Vida e da Obra do criador da Psicologia Histórico-Cultural. *In*: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R.V.(org). **Ensino Desenvolvemental**: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. Uberlândia: Edufu, 2013.

PUENTES, R. V. Teoria da Atividade de Estudo: estado da arte das pesquisas russas e ucranianas (1958-2018). *In*: PUENTES, R. V.; CARDOSO, C. G. C. C.; AMORIN, P. A. P. (org.). **Teoria da atividade de estudo**: Contribuições de D. B. Elkonin, V. V. Davidov e V. V. Repkin: Livro I. Curitiba: CRV, 2019.

REPkin, V.V. Aprendizagem Desenvolvemental e Atividade de Estudo. *In*: PUENTES, R. V.; CARDOSO, C. G. C. C.; AMORIN, P. A. P. (org.). **Teoria da atividade de estudo**: Contribuições de D. B. Elkonin, V. V. Davidov e V. V. Repkin: Livro I. Curitiba: CRV, 2019.

REPkin, V.V. Ensino Desenvolvente e Atividade de Estudo. **Ensino Em Re-Vista**, Uberlândia, v. 21, n.1, p.85-99, jan./jun. 2014.

RODRIGUES, V. L. G. de C. **Aprendizagem do conceito de volume e o desenvolvimento intelectual: uma experiência no ensino fundamental**. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2006.

ROSA, J. E. da. **Proposições de Davydov para o ensino de Matemática no primeiro ano escolar**: inter-relações dos sistemas de significações numéricas. 2012. Tese de Doutorado (Programa de Pós-Graduação em Educação) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

ROSA, J. E. da. DAMAZIO, A. SILVEIRA, G. M. O Sistema de Numeração nas Tarefas Propostas por Davýdov e seus Colaboradores para o Ensino de Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 28, n. 50, p. 1135-1154, dez. 2014. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/bolema/a/pjjMNkmbY8tmBkLT8dj3LLy/?format=pdf&lang=pt>. Acesso em: 07 jul. 2023.

ROSA, J. E. da; DAMAZIO, A. O ensino de matemática no primeiro ano escolar: uma articulação entre a proposição gepapeana e a davydoviana. In: MOURA, M. O. de (org). **Educação Escolar e Pesquisa na Teoria Histórico-Cultural**. São Paulo: Edições Loyola, 2017.

SANTA CATARINA. Secretaria de Estado da Educação. **Proposta Curricular de Santa Catarina**: formação integral na educação básica. Florianópolis, SC: Secretaria de Estado da Educação, [2014].

SANTA CATARINA. Secretaria de Estado da educação. **Currículo Base da Educação Infantil e do Ensino Fundamental do Território Catarinense**. Florianópolis, SC: Secretaria do Estado da Educação, [2019].

SANTOS, C. A. dos; BRITO, A. E. Formação de professores de Matemática: Dos saberes docentes e das necessidades formativas. In: SOBRINHO, J. A. de C. M. e DAMAZIO, A. (org). **Formação Docente e práticas Educativas em Matemática**. Terezina: EDUFPI, 2016.

SANTOS, S. M. P. dos. **Sentidos e significados do conceito de divisão provenientes de Atividade Orientadora de Ensino**. 2016. Dissertação (Mestrado em Docência para a Educação Básica) – Universidade Estadual Paulista Faculdade de Ciências, Bauru, 2016.

SAVIANI, D. **Pedagogia histórico-crítica**: primeiras aproximações. 10.ed. Campinas: Autores Associados, 2008.

SCHMITTAU, J. The development of algebraic thinking: a Vygotskian perspective. **Zentralblatt Fuer Didaktik Der Mathematik International Review of Mathematics Education**, v. 37, p. 16-22, 2005. Disponível em: <http://www.emis.de/journals/ZDM/zdm051i.html>. Acesso em: 15 nov. 2019.

SCHMITTAU, J.; MORRIS, A. The development of algebra in the elementary mathematics curriculum of V. V. Davydov. **The mathematics educator**, [S. l.], v. 8, n. 1, p. 60-87, 2004. Disponível em: <https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=41ba94cffe4420e2ecbfc5d9ff9a9a968dfd0a4>. Acesso em: 18 out. 2019.

SERCONEK, G. C. **Teoria do Ensino Desenvolvidamental e Aprendizagem**: um experimento com conceitos de área e perímetro. 2018. Tese de Doutorado (Pós-Graduação em Educação) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2018.

SFORNI, M. S. F. **Aprendizagem Conceitual e Organização do Ensino**: Contribuições da Teoria da Atividade. Araraquara: JM Editora, 2004.

SFORNI, M. S. de F. O método como base para reflexão sobre um modo geral de organização do ensino. In: MENDONÇA, S. G. de L.; PENITENTE, L. Aparecida A.; MILLER, S. (org).

A Questão do método e a teoria histórico-cultural: bases teóricas e implicações pedagógicas. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2017.

SIDNEVA, A, Developmental Effects of Davydov's Mathematics Curriculum in Relation to School Readiness Level and Teacher Experience. **Front. Psychol**, Moscow, v. 11, nov. 2020. Disponível em: <https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fpsyg.2020.603673/full>. Acesso em: 15 dez. 2022.

SOUZA, V. G. de. **Realidade e Possibilidades da Prática Docente em Matemática nos Anos Iniciais:** Um Estudo Mediado Pelas Proposições Davydovianas. 2014. Tese de Doutorado (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2014.

VIGOTSKI, L. S. **A formação social da mente:** o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. 6. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

VIGOTSKI, L. S. **A Construção do Pensamento e da Linguagem.** São Paulo: Martins Fontes, 2001.

VIGOTSKI, L.S. **Psicologia Pedagógica.** 2ª ed. São Paulo: Martins Fontes, 2004.

VITORIO, V; ORTIGARA, V. Conhecimento e formação continuada: questões pertinentes à Proposta Curricular de Santa Catarina. **Perspectiva**, Florianópolis, v. 34, n. 3, p. 903-927, 2016. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/perspectiva/article/view/2175-795X.2016v34n3p903>. Acesso em: 14 fev. 2023.

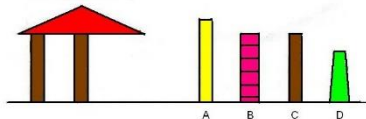
VYGOTSKI, L. S. **Obras Escogidas.** Tomo II. 2 ed. Madrid: Visor, 2001.

VYGOTSKI, L. S. **Obras Escogidas.** Tomo III. 2 ed. Madrid: Visor, 2000.

APÊNDICE A – COMPARAÇÃO DE FIGURAS E OBJETOS POR SUAS CARACTERÍSTICAS: COR, FORMA, TAMANHO E POSIÇÃO

1- Tarefa de introdução

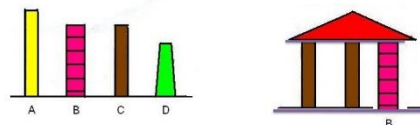
Há um modelo de uma casa inacabada (falta uma coluna) e há algumas colunas diferentes pela **cor** e pela **forma**. Temos que encontrar a coluna que falta.



(Adaptado de Rosa, 2012, p. 71)

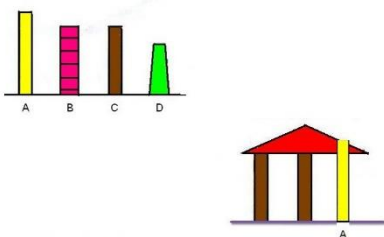
É provável que as crianças farão a escolha certa de pronto. Porém, é preciso discutir as variantes erradas também. Por isso o professor sugere usar as outras colunas.

P: Um aluno meu acha que aqui cabe a coluna *b*. Ela é a mais bonita!



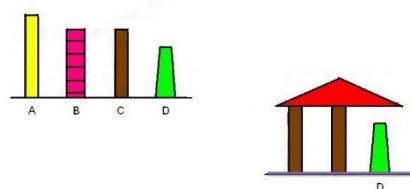
C: Não, ela não tem a mesma cor.
C: Não, ela é mais larga.

P: E a coluna *a*?



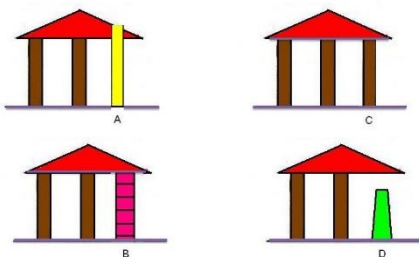
C: Não, ela é de outra cor.
C: Não, ela é mais alta.

P: E quanto a coluna *d*?



C: Não, ela não tem a mesma forma.
C: Não, ela não tem a mesma cor.
C: Não, ela não tem a mesma altura.

Qual coluna cabe tanto pela forma quanto pela cor?



O professor deve destacar com entonação as palavras em **negrito** para que as crianças se acostumem com elas.

Tarefa 2 - Na sala as crianças devem procurar os objetos

Os estudantes, individualmente, deveriam escolher dois de seus pertences e os comparassem pelas características estudadas.

(Adaptado de Gorbov; Mikulina; Savieliev, 2008)

Tarefa 3 - Escolha a xícara para o conjunto



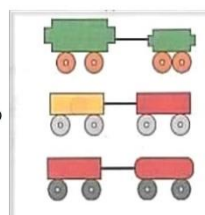
Por que as outras duas xícaras não combinam?

(Gorbov; Mikulina, 2001, p. 3)

Tarefa 4 - O que é que os vagões têm em comum, como se chama esta característica, o que eles têm de diferente, como se chamam estas características?

Em comum

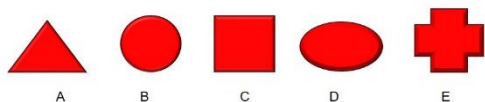
- 1º cor e forma
- 2º forma e tamanho
- 3º cor e tamanho



Em diferente

- 1º tamanho
- 2º cor
- 3º forma

(Gorbov; Mikulina, 2001, p.3)

Tarefa 5 - Adivinhem em qual figura estou pensando

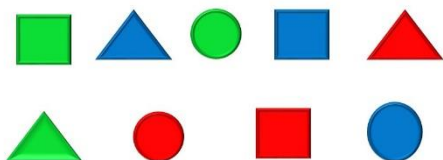
Pergunta boa: Que forma essa figura tem?

(Rosa, 2012, p. 72)

Tarefa 6 - Qual figura estou pensando.

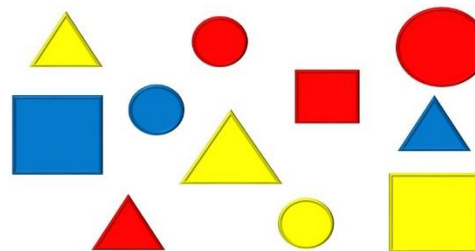
Pergunta boa: Qual é a cor desta figura?

(Rosa, 2012, p. 73)

Tarefa 7 - Em qual figura estou pensando?

Perguntas boas: De que cor é a figura? Que forma tem?

(Rosa, 2012, p. 74)

Tarefa 8 - Em qual figura estou pensando?

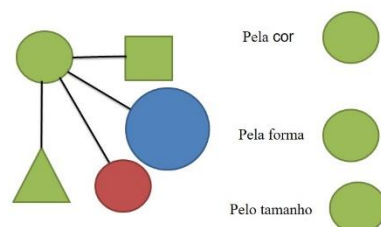
Perguntas boas: De que cor é a figura? Que forma tem? Que tamanho?

(Rosa, 2012, p. 75)

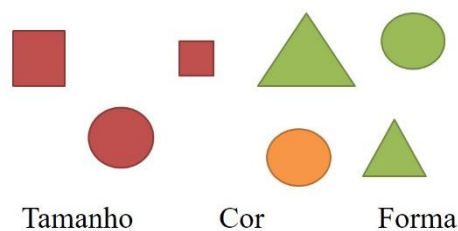
Tarefa 9 - Cada criança tem um kit de figuras geométricas na carteira. O professor tem o dele que é diferente do das crianças.

O professor mostra uma figura e pede para as crianças mostrar uma igual a dele. Caso as crianças digam que não tem uma igual, o professor explica: Igual pela forma (pela cor). Caso as crianças mostrem figuras de pronto o professor pede para comparar suas figuras com o modelo, destacando as diferenças e assim estimulando as crianças a explicar por que é que as suas figuras são iguais a dele, pelas quais características.

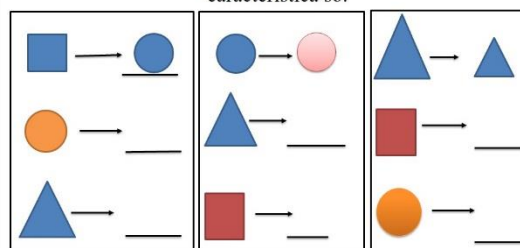
(Adaptado de Gorbov; Mikulina; Savieliev, 2008)

Tarefa 10 - Desenhe as figuras iguais ao círculo verde

(Adaptado de Gorbov; Mikulina, 2001, p. 4)

Tarefa 11 - Desenhe as figuras pela cor, pela forma e pelo tamanho.

(Adaptado de Gorbov; Mikulina, 2001, p. 4)

Tarefa 12 - Modifique as figuras mudando uma característica só.

Na tarefa 12 é preciso considerar a característica pela qual acontece a modificação do objeto e também as características pelas quais o objeto não modifica-se.

(Adaptado de Gorbov; Mikulina, 2001, p.4)

Tarefa 13 - O jogo “Adivinhe a figura”. Oferece-se um kit de figuras geométricas que se diferem pela cor, pela forma e pelo tamanho. Como era antes, as crianças devem descobrir qual é a figura que o professor pensou fazendo menos perguntas possível. Porém o professor desta vez responde as perguntas “inteligentes” mostrando uma figura do seu kit e fala: *É igual a essa.*

(Gorbov; Mikulina; Savieliev, 2008)

Tarefa 14 - Em qual figura estou pensando?



Perguntas inteligentes:

- 1 - De que cor é o quadrado?
- 2 - Onde fica este quadrado, acima ou abaixo do quadrado vermelho?

(Rosa, 2012, p. 76)

Tarefa 15 - Em qual figura estou pensando?



Perguntas “boas”:

- 1 - De que cor é o círculo?
- 2 - Onde fica este círculo, a direita ou esquerda do círculo verde?

(Rosa, 2012, p. 77)

Tarefa 16 - Compondo as palavras com as cartilhas coloridas com as letras:



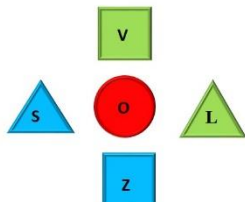
O professor pede às crianças para colocarem as cartilhas com as letras segundo seus comandos. Se as crianças colocarem as cartilhas corretamente, serão formadas as palavras (de esquerda para direita na horizontal e de cima para baixo na vertical). Por exemplo:

(Adaptado de Gorbov; Mikulina; Savieliev, 2008)

Coloque o recorte do círculo.

Coloque o recorte do triângulo azul a esquerda do recorte do círculo.

Agora coloque o recorte do triângulo verde a direita do recorte do círculo. (SOL)



Coloque o recorte do quadrado verde acima do círculo.

Coloque o recorte do quadrado azul abaixo do círculo. (VOZ)

Tarefa 17 - Aponte os círculos que estão:

À esquerda do quadrado.



À direita da estrela



Entre o quadrado e a estrela.



(Adaptado de Gorbov; Mikulina, 2001, p. 5)

Tarefa 18 - Mostre os triângulos que estão:

acima do quadrado



abaixo da estrela



entre a estrela e o quadrado



(Adaptado de Gorbov; Mikulina, 2001, p.5)

Tarefa 19

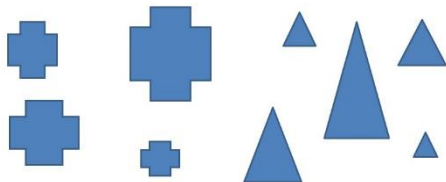
- 1 - Quais são as figuras que ficam a direita do grande círculo azul?
- 2 - Quais são as figuras que ficam entre o grande triângulo amarelo e o grande círculo azul?
- 3 - Quais são as figuras que ficam a esquerda do círculo azul pequeno?



(Rosa, 2012, p. 77)

Tarefa 20

Tarefa 28 – Coloque as figuras na mesma ordem.



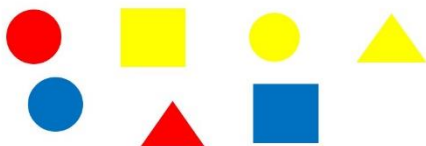
(Adaptada de Gorbov; Mikulina, 2001, p.7)

Tarefa 22 - As crianças tem nas carteiras um kit de recortes diferentes pela forma e pela cor.

Mostrem um recorte vermelho, que não é um recorte triangular.

Mostrem o recorte de forma quadrada, que não é amarelo.

Mostrem os recortes amarelos, que não são de forma circular.



(Adaptado de Gorbov; Mikulina; Savieliev, 2008)

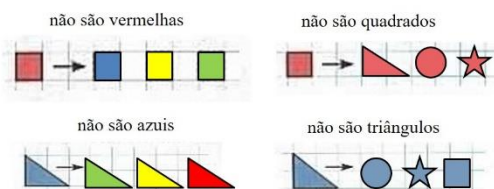
Tarefa 21 - Em qual figura estou pensando?**Referências Bibliográficas**

GORBOV, S.F.; MIKULINA, G.G. **Livro de exercícios de matemática, nº 1, 1º ano:** um conjunto de dois livros de exercícios. Sistema ELKONIN, D.G.; DAVYDOV, V.V. 2ª ed. Moscou: Vita-Press, 2001.

GORBOV, S.F.; MIKULINA, G.G.; SAVIELIEV, O.V. Ensino de Matemática. 1 ano: livro do professor do ensino fundamental (Sistema do D.B. Elkonin – V.V. Davidov). 2ª edição redigida, Moscou, Vita-Press, 2008.

ROSA, J. E. da. **Proposições de Davydov para o ensino de Matemática no primeiro ano escolar:** inter-relações dos sistemas de significações numéricas. 2012. Tese de Doutorado (Programa de Pós-Graduação em Educação) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

Tarefa 23 - Modifique a figura, mudando uma característica só:



Na tarefa 23 é preciso desenhar no caderno, elas diferem-se da figura modelo por uma das características e não diferem-se pela outra.

(Gorbov; Mikulina, 2001, p. 6)

Tarefa 24

Quais são as figuras que ficam a direita do triângulo azul?
Quais são as figuras que ficam a esquerda do triângulo azul?
Quais são as figuras que ficam entre o triângulo azul e o círculo verde?

O professor apaga a superfície quadrada que está à esquerda das figuras (pequena) e acrescenta uma de cor vermelha grande à direita, maior que aquela que ficou. E questiona novamente:

Quais são as figuras que ficam entre o triângulo azul e o círculo verde?



(Rosa, 2012, p. 81)

Tarefa 25

De que cor é esta figura?

De que forma é?

Qual é o tamanho dela?

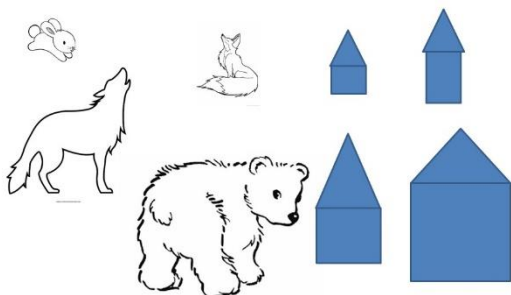
Podem responder agora?

E agora, ela é grande ou é pequena?



(Rosa, 2012, p. 82)

Tarefa 26 - Mostre a casinha de cada um dos bichos



(Adaptada de Gorbov; Mikulina, 2001, p.7)

Tarefa 27 - As crianças estão com os kits de cinco recortes de triângulos, que diferem-se pelo seu tamanho e sua cor:



Uma criança trabalha no quadro, outras nos seus lugares nas carteiras. Professor fala para as crianças pegarem o recorte do triângulo verde e o colocarem na frente delas. Depois pede para pegar o recorte do triângulo azul e compará-lo ao verde. Descobre-se que o recorte do triângulo azul é maior que o recorte do verde.

(Rosa, 2012, p. 83)

Tarefa 36:

Desenhem uma linha reta;
 Nela marque dois pontos;
 Destaque a parte da reta que fica entre ambos;
 Marque mais dois pontos em outro lugar da reta;
 Destaque a parte da reta entre os novos dois pontos.



A parte destacada chama-se segmento. Por isso, às vezes, as extremidades dos segmentos são marcadas com riscos, como se fosse a linha de corte.

(Rosa, 2012, p. 89)

Tarefa 37:

Marque dois pontos no quadro;
 Marque o segmento de reta que os une;
 Prolongue ara ambos os sentidos.



Questões:

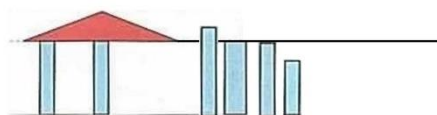
Qual tipo de linha foi desenhada?

O quanto ela pode ser estendida? Tem fim ou não?

(Rosa, 2012, p. 89)

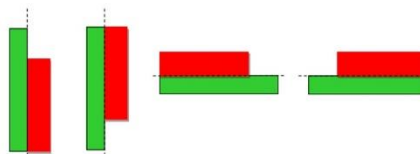
Tarefa 38

1) Escolha uma coluna que caiba aqui. Por que as outras não servem?



(Rosa, 2012, p. 91)

Tarefa 39 - É preciso uma tarefa que dirija a atenção da criança para a comparação de comprimento.



(Rosa, 2012, p. 92)

Tarefa 40 - Distribua dois recortes de papel, iguais em relação ao tamanho e a forma, diferentes em relação a cor.



Questionar: Quais comparações podemos fazer com os recortes?

No que corresponde a grandeza comprimento, são idênticos na largura e na altura.

(Adaptado de Rosa, 2012, p.93)

Tarefa 41 - Cortar um dos recortes diminuindo pelo comprimento da largura.



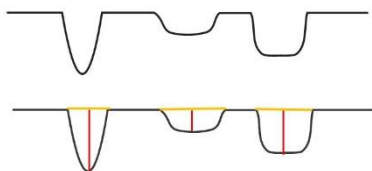
Questionar: Qual a nova relação de comprimentos dos recortes?



A direção é para que construam um novo segmento entre os recortes que representa o comprimento da altura de ambos.

(Rosa, 2012, p.92-93)

Tarefa 42 - Desenhe no quadro três “buracos” e proponha aos estudantes que os compare pelo tamanho.

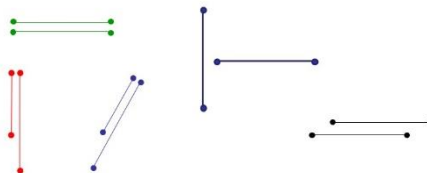


A situação é propícia para detectar dois tipos de tamanhos: a profundidade (comprimento vertical) e a largura (comprimento horizontal), representados por segmentos.

Entre as conclusões está a evidência para a comparação pela profundidade em vez da largura.

(Rosa, 2012, p. 93)

Tarefa 43 - Compare os segmentos pelo comprimento. Todos os modos de comparação estão corretos? Justifique.



(Gorbov; Mikulina, 2001, p.10)

Tarefa 44 - Faça uma tira que seja mais comprida que a vermelha e mais curta que a verde.



(Gorbov; Mikulina, 2001, p.11)

Tarefa 45:

Comparação dos tamanhos dos comprimentos das alturas dos estudantes.

Medir os tamanhos dos comprimentos das alturas dos estudantes. Representação por tiras de papel pardo e segmentos.

As alturas identificadas e nomeadas com a primeira letra do nome de cada estudante.

Posteriormente foram fixadas na parede em ordem crescente.

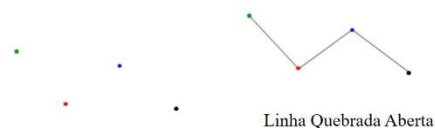
(Elaboração da autora, 2021)

Tarefa 46 - Desenhe segmentos para comparar as crianças pela altura.



(Gorbov; Mikulina, 2001, p.11)

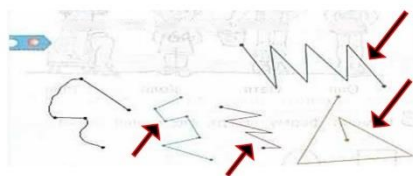
Tarefa 47 - A tarefa consta de quatro pontos de cores diferentes marcados no quadro de modo que não fiquem em linha reta, não colineares.



Linha Quebrada Aberta

(Rosa, 2012, p. 95)

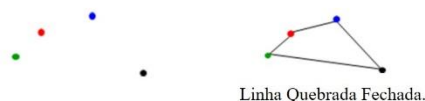
Tarefa 48 - Mostre todas as linhas quebradas



É preciso lembrar que as linhas que incluem segmentos e também os elos da curva não podem ser considerados quebradas.

(Gorbov; Mikulina, 2001, p.12)

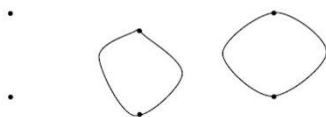
Tarefa 49 - Na sequência, o professor faz novamente, no quadro, quatro pontos de cores diferentes. As crianças copiam em seus cadernos e os unem na ordem sugerida, inclusive os dois pontos extremos da linha quebrada.



Linha Quebrada Fechada.

(Rosa, 2012, p. 95)

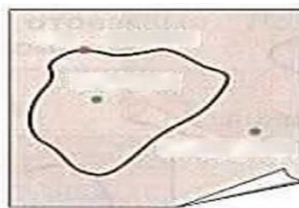
Tarefa 50 - Novamente, no quadro e nos cadernos, desenham-se dois pontos a serem unidos por duas linhas curvas, não quebradas.



Nesse caso formou-se uma linha curva fechada, ou seja, não quebrada.

(Rosa, 2012, p. 96)

Tarefa 51 - Faça uma linha curva fechada, coloque três pontos: um em cima da linha curva, um dentro da linha curva (interno) e um fora da linha curva (externo).



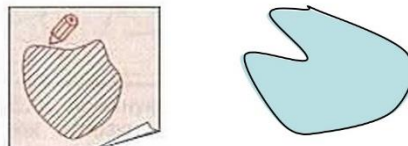
(Gorbov; Mikulina, 2001, p.14)

Tarefa 52 - Quais pontos estão dentro da linha, quais pontos estão fora?



(Gorbov; Mikulina, 2001, p.14)

Tarefa 53 - Faça uma linha curva fechada, pinte a parte interna limitada por ela.



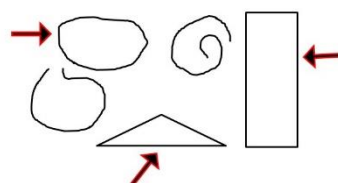
(Gorbov; Mikulina, 2001, p.14)

Tarefa 54 - As figuras pintadas, possuem que tipo de linhas?



(Gorbov; Mikulina, 2001, p.15)

Tarefa 55 - Quais linhas limitam as figuras? Porquê?



Estas 3 linhas são fechadas por isso que limitam as figuras.

(Adaptado de Gorbov; Mikulina, 2001, p. 15)

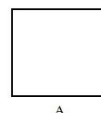
Tarefa 56 - Entregar para as crianças um kit com recortes de papel grosso. Pedir que elas contornem os recortes e indiquem que tipo de linha foi obtida:



O conceito de quadrado, triângulo, círculo, entre outros, não é sistematizado no primeiro ano. Mesmo que as crianças digam que obtiveram um quadrado, o professor deve sugerir que falem o nome da linha, não da figura.

(Rosa, 2012, p.97-98)

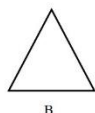
As crianças podem dizer que no primeiro caso obtiveram o quadrado. O professor reforça que é preciso dizer como chama-se a linha e não a figura:



Isto é uma linha quebrada fechada composta por 4 segmentos.

(Rosa, 2012, p.97-98)

No segundo caso a quebrada é composta por 3 segmentos. Como se chama a linha



Linha quebrada fechada composta por três segmentos

(Rosa, 2012, p.97-98)

O professor informa que esta linha chama-se circunferência. A última linha pode ser chamada de **anel**. Seu limite é composto por duas circunferências.

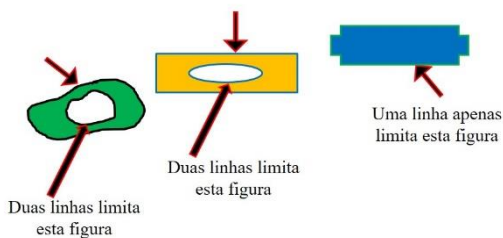


Comentário: saber diferenciar o círculo e a circunferência é uma tarefa a parte, que será resolvida mais tarde.

Aqui se trata apenas de ilustrar a ideia de limite de figura. Por isso não há necessidade que as crianças lembrem a palavra *circunferência*. O mesmo é verdadeiro para a palavra *anel*.

(Rosa, 2012, p.97-98)

Tarefa 57 - Quantas linhas limitam cada uma das figuras pintadas?



(Gorbov; Mikulina, 2001, p.15)

Tarefa 58 - Sugere-se que sobreponham os recortes, porém, no primeiro momento vê-se que o comprimento do recorte vermelho é maior que o do amarelo.

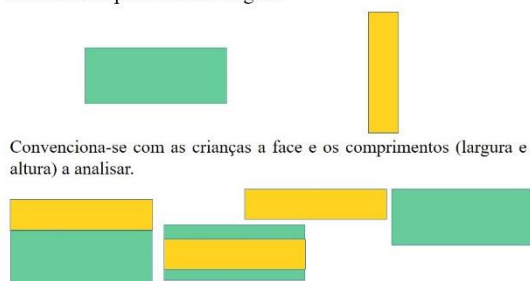


O professor faz essa primeira sobreposição de forma intencional, para que os alunos contestem a posição e eles mesmos vão rotacionando os recortes.

Até perceberem que o recorte vermelho fica completamente sobre o amarelo e se perceba a diferença entre as duas superfícies.

(Rosa, 2012, p. 100-101)

Tarefa 59 - É proposta as crianças a comparação de dois recortes (superfícies retangulares) pela área, comprimento da altura e comprimento da largura.



Convencionou-se com as crianças a face e os comprimentos (largura e altura) a analisar.

(Rosa, 2012, p. 102)

Em cada caso, exige-se atenção ao modo correto de comparação que requer a colocação um ao lado do outro, quando o foco é a grandeza comprimento, e um sobre o outro, no caso da grandeza área (gorbov, микulina e савельева, 2008).



(Rosa, 2012, p. 102)

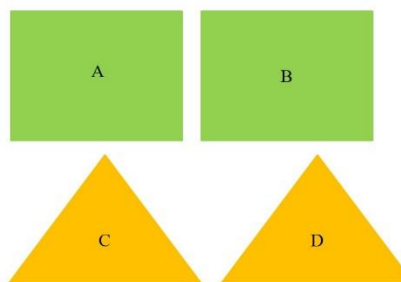
Tarefa 60:



Apesar de a comparação de áreas ser feita aproximadamente, as crianças devem toda vez argumentar sua resposta descrevendo o modo de comparação das áreas. (Se colocarmos...)

(Adaptado de Rosa, 2012, p. 103)

Tarefa 61- Compare de diferentes modos os recortes de forma quadrangular e os recortes de forma triangular:



(Elaboração da autora, 2021)

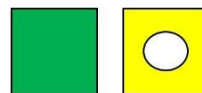
Tarefa 62 - A área das figuras está sendo modificada. O que não foi modificado?



A forma não foi modificada

(Gorbov; Mikulina, 2001, p.16)

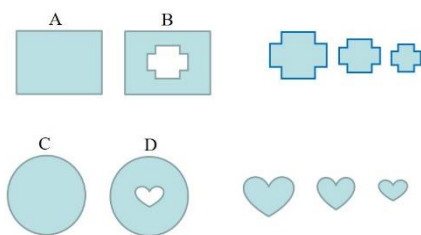
Tarefa 63 - Compare as figuras verde e azul pela área.



A área da figura amarela é menor que a área da figura verde, porque a figura amarela tem um limite dentro.

(Gorbov; Mikulina, 2001, p.16)

Tarefa 64 - Como fazer com que as áreas das figuras sejam iguais?



(Gorbov; Mikulina, 2001, p. 16)

Tarefa 65:

O foco inicial é na diferença entre as propriedades estudadas (cor, forma, figuras planas, corpos).

A resposta dos estudantes, quando o professor mostra duas figuras para que comparem todas as propriedades estudadas, em silêncio, é por meio de tiras (representação objetal).



(Rosa, 2012, p.105)

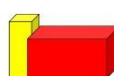
Tarefa 66 - Para a tarefa de introdução do volume dos corpos, o professor apresenta duas caixas, em forma de paralelepípedo.



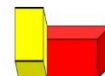
As crianças deverão compará-las pelas características e grandezas estudadas.

(Rosa, 2012, p.105-106)

Pelo comprimento da altura



Pelo comprimento da largura



Pelo comprimento da profundidade



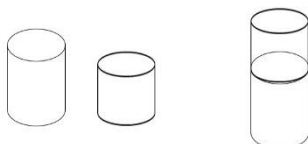
Pelo volume



O professor propõe que as crianças encontrem um modo que permita a comparação das caixas em sua totalidade e não apenas nos diferentes comprimentos.

(Rosa, 2012, p.105-106)

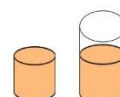
Tarefa 67 - O professor apresenta dois recipientes cilíndricos que se diferem somente pela altura.



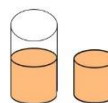
Dado que, visivelmente, o volume do recipiente mais alto é maior, dá-se como condição que elas verifiquem a impossibilidade do mais baixo ser colocado dentro do mais alto, por serem de bases iguais.

(Rosa, 2012, p.106)

Propõe-lhes para encher com líquido ou grãos o recipiente menor e, depois, transferir o conteúdo para o recipiente mais alto, em que se evidenciará a sobra de espaço.



Agora faremos o inverso:



(Rosa, 2012, p.106)

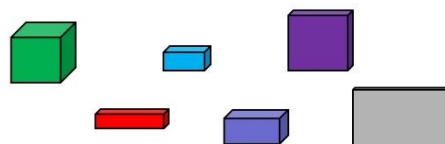
Tarefa 68 - Existe dois recipientes, um cheio e outro vazio, como descobrir se seus volumes são iguais ou diferentes?



No recipiente com formato de bloco retangular ainda consta líquido após completar o cilindro. Por isso, o seu volume é maior do que o volume do cilindro.

(Adaptado de Rosa, 2012, p.107)

Tarefa 69 - O professor tem várias caixinhas, umas de formas iguais e outras de formas diferentes. O professor mostra duas de cada vez e as crianças devem adivinhar se elas têm o mesmo volume ou não, mostrando as tiras.



Se as crianças não conseguem dar a resposta correta, então alguém vem até o quadro e sem dizer nada faz a comparação (usando os grãos), e as outras crianças, vendo o resultado, respondem com as tiras.

(Gorbov; Mikulina; Savieliev, 2008)

Tarefa 70 – Analisem os volumes dos recipientes. Mostre com as tiras ou segmentos se os volumes são iguais ou diferentes:

NÍCOLAS



JOÃO



TÂNIA



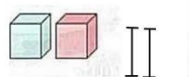
(Gorbov; Mikulina, 2001, p.17)

1) Pedro representou com as tiras de comprimentos iguais, pois os recipientes são iguais "suportam o mesmo volume"

2) Nicolas representou com as tiras de comprimentos diferentes, pois os recipientes são diferentes pelo comprimento da largura "suporta volumes diferentes"

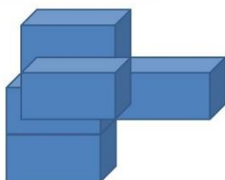
3) Aqui está o controle, os recipientes que Tânia utilizou são diferentes nos dois comprimentos "largura e altura", assim fica difícil saber se são iguais ou diferentes pelo volume. É preciso fazer manipulações para ter certeza.

Tarefa 71 - Desenhe tiras ou segmentos para identificar os volumes iguais ou diferentes.



(Adaptado de Gorbov; Mikulina, 2001, p.17)

Tarefa 72 - Há duas caixas iguais na cor, forma, comprimento da altura, da espessura, da largura, nas áreas das faces e no volume.



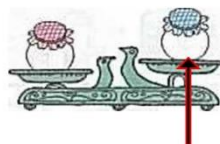
Porém, outras crianças ao compará-las expressaram o resultado, por meio de tiras diferentes.

Qual a propriedade considerada?

A massa: uma caixa é mais pesada que a outra.

(Rosa, 2012, p.107)

Tarefa 73 - Temos dois potes iguais na balança: um deles contém mel, outro está vazio. Qual deles está vazio?



Este é o vazio, porque ficou mais leve.

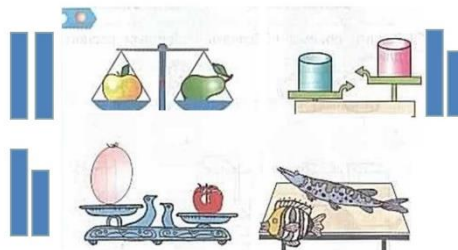
(Gorbov; Mikulina; Savieliev, 2008)

Tarefa 74 -

Propomos que os estudantes escolhessem dois objetos para comparar a massa com as mãos. Quando a massa diferiam muito era fácil identificar. Porém, a massa de alguns era muito pequena e ficava difícil diferenciar. Nestes casos, foi usado a balança de dois pratos.

(Adaptado de Rosa, 2012, p. 108)

Tarefa 75 - As crianças possuem três tiras, duas iguais pelo comprimento da altura, e uma diferente. Com as tiras elas identificarão as massas dos objetos.



(Gorbov; Mikulina, 2001, p.18)

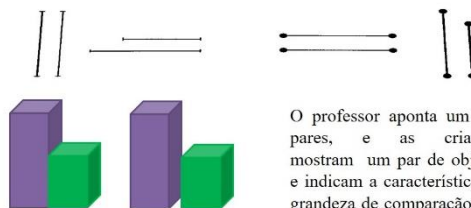
Tarefa 76 -As crianças dispõem de dois objetos para serem comparados por todas as propriedades conhecidas.



O objetivo é introduzir a modelagem gráfica das relações de igualdade e desigualdade.

(Rosa, 2012, p. 109)

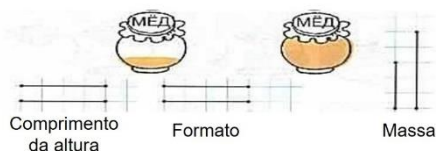
Tarefa 77 - O professor desenha no quadro alguns pares de segmentos iguais e desiguais.



O professor aponta um dos pares, e as crianças mostram um par de objetos e indicam a característica ou grandeza de comparação que podem ser representados com este par de segmentos.

(Adaptado de Rosa, 2012, p. 109)

Tarefa 78 - O resultado de comparação dos potes com mel é representado pelos segmentos. Indique as características ou a grandeza



(Gorbov; Mikulina, 2001, p.19)

Tarefa 79 – Cada par de objetos são iguais pela grandeza ou pela característica? Quais?



(Gorbov; Mikulina, 2001, p.19)

Tarefa 80 - Qual é a característica ou grandeza em que os objetos são iguais? E desiguais?



Tem alguma característica que não é possível dizer se são iguais ou diferentes?



(Gorbov; Mikulina, 2001, p.19)

Tarefa 81 - O professor mostra dois objetos de volumes diferentes e sugere que as crianças indiquem o segmento respectivo que os representam.



Com a cor e a forma inexistente a relação maior-menor.

A propriedade pela qual o objeto pode ser maior ou menor é chamada de grandeza. Desde então a palavra “propriedade” é substituída por “grandeza”.

(Rosa, 2012, p. 110)

Tarefa 82 - Para a execução da primeira tarefa que cumpre a referida finalidade, cada estudante tem quatro cartões com a figura de uma bandeira e outros quatro com o desenho de uma criança.



A conclusão será de que a quantidade de bandeiras é igual à quantidade de crianças, cujo resultado da comparação (igualdade) é representado com dois segmentos de mesmo comprimento.

(Rosa, 2012, p.112)

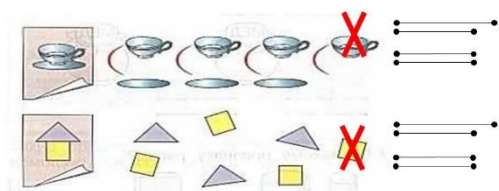
Tarefa 83 – O professor sugere redistribuir entre as crianças as bandeiras de modo que cada uma receba duas delas.



Neste caso, faltarão bandeiras, dado que há uma quantidade menor do que a necessária.

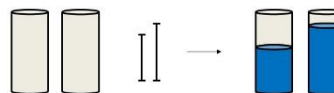
(Rosa, 2012, p. 114)

Tarefa 84 – Compare os objetos, como podemos igualá-los?



(Gorbov; Mikulina, 2001, p.20)

Tarefa 85 - Na mesa do professor existem dois recipientes iguais e, no quadro, dois segmentos de comprimentos diferentes que representam o volume de líquido que as crianças devem colocar nos recipientes.



Elas recebem a orientação para que, inicialmente, encham o volume representado pelo segmento menor e, depois, o outro recipiente.

(Rosa, 2012, p.117)

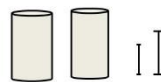
Tarefa 86 - Essa tarefa tem por base dois recipientes iguais, com volumes distintos de líquido, que estão na mesa do professor.



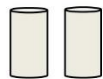
Os segmentos representam o volume de líquido que devem ser colocados nos recipientes; Igualar o volume de líquido do segundo recipiente com o do primeiro; Operação inversa: Igualar o volume de líquido do primeiro recipiente com o do segundo.

(Rosa, 2012, p. 118)

Tarefa 87 -Pinte nos recipientes uma quantidade de líquidos, conforme indicação dos segmentos

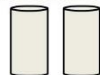


O que fazer para igualar o tanto de líquido do primeiro recipiente com mesmo tanto do segundo?



O que acontece com os segmentos? Desenhe os segmentos.

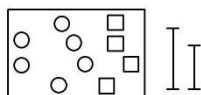
O que fazer para igualar o tanto de líquido do segundo recipiente com o mesmo tanto do primeiro?



O que acontece com os segmentos? desenhe os segmentos

(Adaptado de Rosa, 2012, p. 118-119)

Tarefa 88 – Iguale as quantidades de quadrados e circunferências.



Cria-se a necessidade de tomar a decisão entre diminuir a quantidade maior ou aumentar a quantidade menor. O mesmo procedimento deve ser realizado em relação aos segmentos.

(Rosa, 2012, p. 120)

Tarefa 89 - O professor desenha no quadro um segmento que representa a superfície de uma tira de papel. Para os estudantes é distribuído uma tira de papel.



Depois, o professor risca uma parte do segmento. O que é preciso fazer com a tira?

A referência da discussão dessa tarefa, acontece ao contrário das anteriores, pois a representação gráfica mediatiza a ação objetal.

(Rosa, 2012, p.121)

Tarefa 90 - As crianças dispõem de um pacote de cereal, cuja massa é representada por um segmento.

O professor risca uma parte do segmento e pergunta: O que é preciso fazer com o cereal?



É esperado que os estudantes retirem uma parte do cereal do pacote.

(Adaptado de Rosa, 2012, p.121)

Um estudante é convidado a simular com as duas mãos, sobre o segmento riscado, o intervalo correspondente à massa inicial. Outro estudante adotará o mesmo procedimento em relação ao que ficou depois de ter sido diminuída.

Posteriormente, constrói-se a representação da referida demonstração gestual com linhas em forma de arcos.



(Adaptado de Rosa, 2012, p.121)

Tarefa 91- O professor desenha um retângulo e um segmento no quadro. E questiona os estudantes: Qual alternativa ideal para o aumento do retângulo?

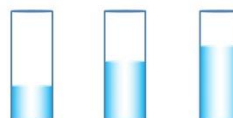


Após a alteração, eles mostram a área inicial, gestualmente, com as duas mãos no retângulo e no segmento. Em seguida, o gesto é substituído por arcos. O mesmo procedimento se repete com a área final do retângulo.

(Adaptado de Rosa, 2012, p.122)

Tarefa 92 - O professor mostra um desenho aos estudantes e solicita a eles que o analisem.

Depois de ter analisado o desenho, conclui-se que foi feito dois procedimentos consecutivos com a água no recipiente. Em seguida o professor sugere marcar com os arcos de cores diferentes todos os três volumes (inicial, resultado do primeiro aumento, final):



(Adaptado de Gorbov; Mikulina, 2001, p.26)

Tarefa 93 - O professor diz que os estudantes da outra sala alteraram o volume de líquido no recipiente e o demonstraram no esquema exposto no quadro.

No esquema abaixo o arco maior representa o volume de líquido maior e o arco menor representa o volume de líquido menor;

Qual era o volume inicial e o final?

A resolução do problema não está dada em sua imediatez, pela aparência externa, isto é, empiricamente.

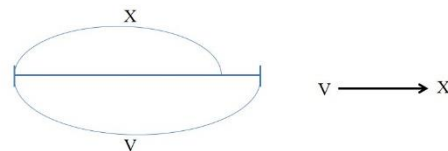


(Rosa, 2012, p.123-124)

O volume menor mede X e o volume maior mede V;

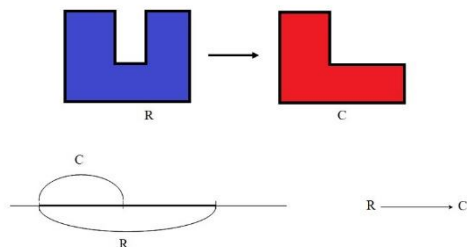
A seta indica o movimento que vai do volume inicial ao final;

Isso significa dizer que o volume de líquido inicialmente era maior.



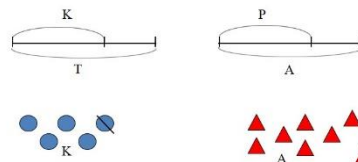
(Rosa, 2012, p.124-125)

Tarefa 94 - Marque no esquema a representação correta para as áreas R e C.



(Gorbov; Mikulina, 2001, p. 25)

Tarefa 95 - Como podemos modificar cada quantidade de acordo com o esquema?



O importante é que os estudantes entendam o esquema, "se é para diminuir ou aumentar". Pretende-se aqui que o estudante retire círculos e acrescente triângulos, não importa o quanto.

(Gorbov; Mikulina, 2001, p. 25)

Tarefa 96 - Para o desenvolvimento dessa tarefa, o professor expõe uma figura de superfície quadrangular e solicita a indicação de uma letra para representar a sua área (A).

Corta um canto e separa-o, a referência passa ser a área da superfície restante, e, para sua identificação, adota-se outra letra (C).



As letras são registradas no quadro: $A \rightarrow C$.

(Rosa, 2012, p. 126)

Na sequência, o professor repõe a parte retirada em seu lugar, o que se obtém novamente A. Essa junção sugere um novo esquema de representação.



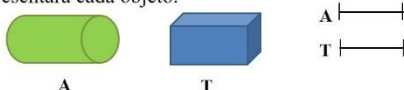
O professor retira novamente o canto cortado para aproximá-lo em outro lugar de C e questiona sobre a variação ou não da área em relação a A.



A conclusão a ser elaborada é de que, independente da parte de C na qual será anexada o pedaço recortado, permanecerá com área A, embora altere sua forma. Por isso, o registro permanece o mesmo.

(Rosa, 2012, p. 127)

Tarefa 97 - Para realizar essa tarefa, os estudantes recebem dois objetos. Em seguida registra-se no quadro a letra que representará cada objeto.



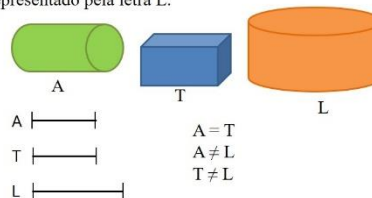
Por qual propriedade os objetos podem ser comparados?

Os objetos são iguais com relação a massa. Sugere-se o uso da balança de dois pratos para a comparação e, em seguida, o registro do resultado.

Podemos dizer que $A = T$. Ao mesmo tempo, fala: *A Massa A é igual à massa T.*

(Rosa, 2012, p. 129)

Para continuar a análise o professor entrega um terceiro objeto, representado pela letra L.



O objetivo é comparar a massa do terceiro objeto (L), com a massa de um dos primeiros objetos (A ou T).

Após a análise, é possível verificar e comprovar com o uso da balança, que os objetos A e L são diferentes pela massa, logo apresenta-se o registro da desigualdade: $A \neq L$. As crianças lêem: a massa A não é igual a massa L.

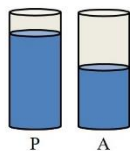
Adaptado de Rosa, 2012, p. 129

Tarefa 98 - O volume de líquido **P** é diferente do volume **A**;

Como se pode fazer para que o segundo recipiente tenha o mesmo volume de líquido que o primeiro?

É necessário acrescentar líquido ao volume **A**.

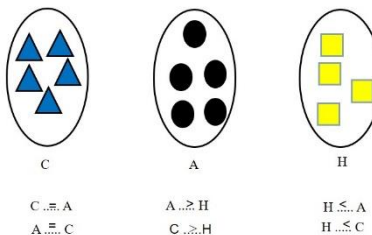
Será que existe também o sinal de “menor”?



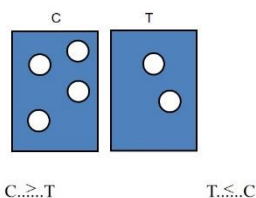
$P \neq A$
 $P > A$
 $P = A$
 $A < P$

(Rosa, 2012, p. 132)

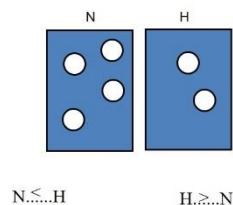
Tarefa 99 - Compare as quantidades. Dê preferência aos sinais “=, $\neq$, $>$, $<$ ”. Coloque um sinal mais preciso se houver necessidade.



(Adaptado de Gorbov; Mikulina, 2001, p. 30)

Tarefa 100 – Compare pela quantidade de furos.

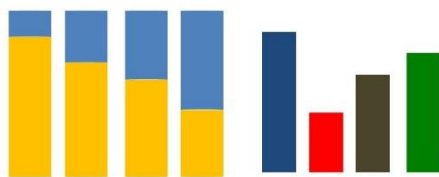
(Adaptado de Gorbov; Mikulina, 2001, p. 32)

Tarefa 101 – Compare pela área.

(Adaptado de Gorbov; Mikulina, 2001, p. 32)

Tarefa 102 - O professor tem quatro recipientes de volumes diferentes, enquanto as crianças dispõem de quatro tiras de alturas e cores diferentes.

Os recipientes são colocados na ordem decrescente de volumes, procedimento que os estudantes adotarão para dispor as fichas.



(Rosa, 2012, p. 133)

Após esse movimento o professor pode fazer algumas perguntas aos alunos:

- 1) O que foi feito com os recipientes?
- 2) O que foi feito para ordenar os recipientes?
- 3) Representem esta ordem com ajuda das suas tiras.

Depois, as crianças escrevem letras nas tiras, representativas das marcas dos volumes dos recipientes.



(Rosa, 2012, p. 133)

Desencadeia-se um processo de discussão, orientado pelo professor, por meio de perguntas do tipo:

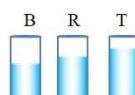
- 1) Qual volume é menor que o volume **K**?
- 2) Qual volume é maior que o volume **A**?
- 3) Qual volume é maior que o volume **R**?
- 4) E menor que o volume **R**?
- 5) E maior que o volume **K**?
- 6) Qual foi o volume que eu pensei se é maior que o **H**, e menor que o **A**?
- 7) Qual foi o volume que eu pensei se é menor que o **A**, e maior que o **H**?
- 8) Qual foi o volume que eu pensei se ele é maior que o **K**, mas é menor que o **R**?



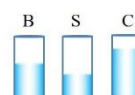
(Rosa, 2012, p. 133)

Tarefa 103 - Complete os volumes de cada cilindro de acordo com as anotações, e verifique se os volumes estão em sequência ordenados.

$R > B$ $T > R$ $S < B$ $C > B$



Estão em sequência ordenada



Não estão em sequência ordenada

(Adaptado de Gorbov; Mikulina, 2021, p. 33)

Tarefa 104 - Construa o segmento de acordo com a anotação.

$$H > B \quad C < B$$

Segmento	B	
Segmento	H	
Segmento	C	

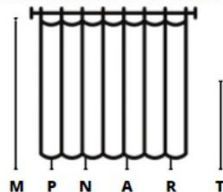
Escreva uma letra em cada quadrado de modo que fique na ordem decrescente.

H	B	C
---	---	---

(Gorbov; Mikulina, 2021, p. 34)

Tarefa 105 - Compare os comprimentos dos segmentos ordenados.

Qual a ordem? Crescente ou Decrescente?.



$P > N$	$R < P$	$N < M, P$
$N > R$	$A < N$	$A > R, T$

Referências Bibliográficas

GORBOV, S.F.; MIKULINA, G.G. **Livro de exercícios de matemática, nº 1, 1º ano**: um conjunto de dois livros de exercícios. Sistema ELKONIN, D.G; DAVYDOV, V.V. 2ª ed. Moscou: Vita-Press, 2001.

GORBOV, S.F.; MIKULINA, G.G.; SAVIELIEV, O.V. **Ensino de Matemática. 1 ano**: livro do professor do ensino fundamental (Sistema do D.B. Elkonin – V.V. Davidov). 2ª edição redigida, Moscou, Vita-Press, 2008.

ROSA, J. E. da. **Proposições de Davydov para o ensino de Matemática no primeiro ano escolar**: inter-relações dos sistemas de significações numéricas. 2012. Tese de Doutorado (Programa de Pós-Graduação em Educação) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

APÊNDICE C – INTRODUÇÃO DO CONCEITO DE NÚMERO E RETA NUMÉRICA

Tarefa - 106

Sobre a mesa do professor, há algumas tiras de cartolina e, do outro lado da sala, está o professor com um pedaço de madeira na mão.

Ele sugere que as crianças encontrem uma tira que tenha o mesmo comprimento da altura que a madeira.

Num ambiente de debates e de levantamento de hipóteses, atinge-se a conclusão de necessidade da aproximação dos objetos.



Isso significa que o procedimento utilizado para resolver a tarefa foi a comparação direta entre as duas grandezas.

(Adaptado de Rosa, 2012, p. 140)

Tarefa 107

Do lado esquerdo do quadro há um segmento de comprimento A;

E ao lado direito mais quatro segmentos;

Qual segmento da direita tem a mesma medida de A?

Não é possível mover os segmentos para proceder a comparação direta entre as duas grandezas;

Faz-se necessário um elemento mediador;

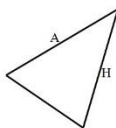
Por isso, trata-se de uma comparação mediatizada.



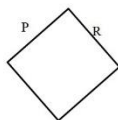
(Adaptado de Rosa, 2012, p. 141)

Tarefa 108

Compare os comprimentos dos lados das figuras (não pode usar régua)



A ____ H



P ____ R

Inicialmente conclui-se que é impossível comparar os comprimentos dos lados das figuras sem uma medida. Sugere-se usar como uma medida uma tira de papel (não pode ser uma régua!). Professor mostra como tem que colocar a tira contra o segmento respectivo e marcar o seu comprimento.

(Adaptado de Gorbov; Mikulina, 2001, p. 35)

Tarefa 109

Nessa tarefa, cada criança receberá um envelope com recortes quadrangulares. Dentre eles, um tem a área da superfície igual a área de um quadrado desenhado numa folha - quadrado da esquerda.

Tendo como parâmetro cada um dos recortes da direita as crianças verificam qual tem a mesma área do quadrado da folha (esquerda).



(Rosa, 2012, p. 141)

Tarefa 110

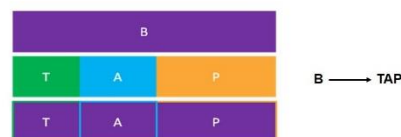
Cada criança receberá um envelope com vários recortes de base retangulares, cujas áreas estão marcadas por letras. Além disso, uma folha com o desenho de um retângulo.



As crianças precisam encontrar a área do retângulo desenhado na folha (área B). No entanto, no envelope não tem nenhum recorte correspondente.

(Rosa, 2012, p. 144)

Consequentemente, a área B será formada por mais de uma parte que, ao serem identificadas, serão contornadas (marcadas) sobre a referida superfície B.



Pressupõe-se que os estudantes concluem que a área B foi obtida com as medidas das áreas T, A e P, ou seja: $T + A + P$.

(Rosa, 2012, p. 144)

Tarefa 111

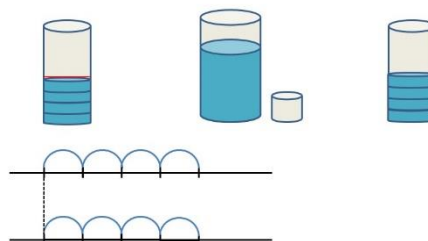
Em duas mesas distantes uma da outra há dois recipientes vazios e no meio delas outra mesa com um recipiente maior com líquido. Propõe-se a transferência do líquido para os recipientes vazios, mas com a condição de que esses recebam a mesma quantidade de líquido e que eles não sejam movidos ou transferidos de uma mesa para outra.



(Adaptado de Rosa, 2012, p.145)

Discute-se com os estudantes a forma de transferência de líquido e conclui-se que é necessário a utilização de uma unidade de medida (copo).

Para cada copo de líquido é feito uma marca no esquema.



Para o segundo recipiente as crianças conduzem o professor na transferência de líquido.

(Adaptado de Rosa, 2012, p.146)

Tarefa 112- É preciso buscar um pedaço de barbante de comprimento igual à extensão da largura do quadro.

Utiliza-se uma sequência de palavras conhecidas para medi-lo;

Parlenda: Caranguejo não é peixe. Caranguejo peixe é. Caranguejo só é peixe na enchente da maré...

A medida do quadro é *peixe*, portanto o barbante terá peixe unidades.



(Adaptado de Rosa, 2012, p. 147-148).

Tarefa 113

Os estudantes recebem um kit com um pedaço de cordão e um recorte (unidade de medida).

O professor solicita que cortem um pedaço de barbante do tamanho da palavra medida "peixe" da parlenda do caranguejo.

caranguejo	não	é	peixe
------------	-----	---	-------

caranguejo	peixe	é
------------	-------	---

caranguejo	só	É	peixe
------------	----	---	-------

na	enchente	da	maré
----	----------	----	------

Como a palavra "peixe" é repetida na parlenda os tamanhos dos barbantes podem ser distintos, dependentemente da palavra medida usada pelos estudantes.

(Elaborada pela pesquisadora, 2021)

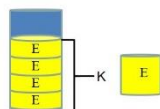
Tarefa 114- Pegue um copo (unidade de medida) e coloque água na jarra vazia. Use as palavras da parlenda e a anotação.

uni	duni	te	salamê
-----	------	----	--------

mingue	sorvete	colore
--------	---------	--------

o	escolhido	foi
---	-----------	-----

você



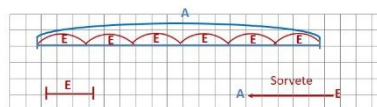
Salamê
K ← E

(Adaptado de Gorbov; Mikulina, 2001, p. 40)

Tarefa 115 - Construir um segmento de comprimento A. A palavra medida é "sorvete".

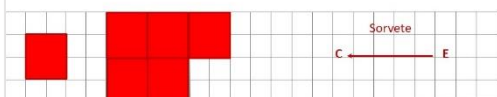
uni	duni	te	salame
-----	------	----	--------

mingue	sorvete
--------	---------



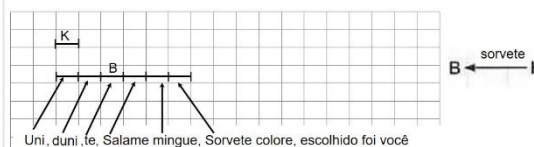
(Adaptado de Gorbov; Mikulina, 2001, p. 40)

Tarefa 116 - Maria construiu a área com base na palavra "sorvete" da parlenda. verifique se a área construída está correta.



(Adaptado de Gorbov; Mikulina, 2001, p. 40)

Tarefa 117- Meça os valores usando parlenda. Qual palavra está faltando na anotação?



(Adaptado de Gorbov; Mikulina, 2001, p. 40)

Tarefa 118- Qual é a palavra medida?



A ← te E

uni	duni	te	salame
-----	------	----	--------

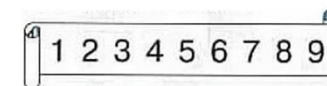
mingue	sorvete	colore
--------	---------	--------

o	escolhido	foi
---	-----------	-----

você

(Adaptado de Gorbov; Mikulina, 2001, p. 40)

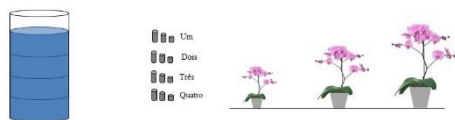
Tarefa 119- Meça a área "a", anote o resultado usando números arábicos.



A ← 6 E

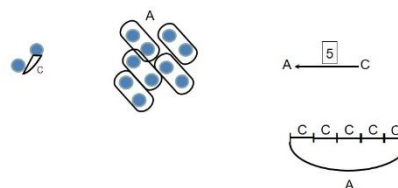
(Gorbov; Mikulina, 2001, p. 44)

Tarefa 120- A sequência numérica é introduzida a partir da união do contraste discreto-contínuo no processo de medição: o contínuo (volume de água) é medido por unidades de medidas discretas (três copinhos) que, por sua vez, compõem-se pelo volume de água (grandeza contínua).



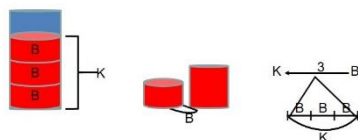
(Rosa, 2012, p. 153).

Tarefa 121- Encontre o valor de “a” usando a unidade de medida composta c. Represente a sequência das suas ações no esquema.



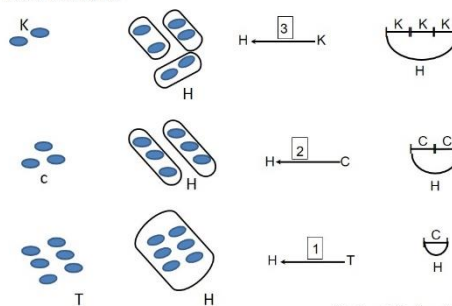
(Gorbov; Mikulina, 2001, p. 45)

Tarefa 122- Meça volume k usando medida composta b. Represente o resultado por meio dos segmentos.



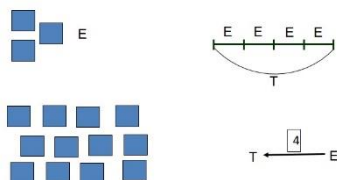
(Gorbov; Mikulina, 2001, p. 45)

Tarefa 123 - Represente o valor H com unidades de medidas diferentes. Faça o esquema e mostre nele valor H com um arco.



(Gorbov; Mikulina, 2001, p.46)

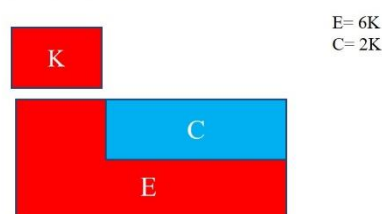
Tarefa 124 - Construa a quantidade T de quadrados usando a indicação do esquema e a unidade E. Complete a anotação.



(Adaptado de Gorbov; Mikulina, 2001, p.46)

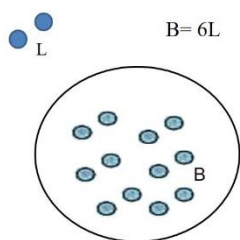
Tarefa 125 - Use a unidade de medida K e faça um figura com área E.

Pinte dentro dela a parte C.



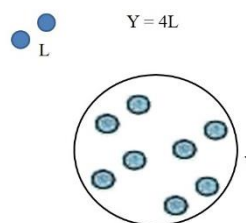
(Adaptado de Gorbov; Mikulina, 2001, p. 48)

Tarefa 126- Construa a quantidade “B” com a unidade de medida “L”



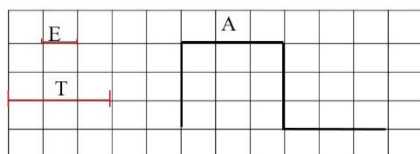
(Gorbov; Mikulina, 2001, p. 48)

Tarefa 127 - Construa a quantidade “Y” com a unidade de medida “L”



(Gorbov; Mikulina, 2001, p. 48)

Tarefa 128 - Quantas unidades de medidas E cabem no A?
Quantas unidades de medidas T constituem A



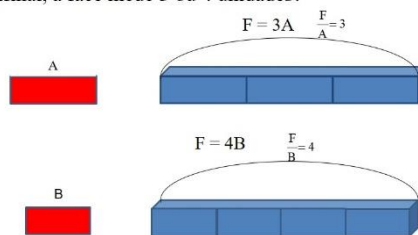
$$A = 12 E$$

$$A = 4 T$$

(Gorbov; Mikulina, 2001, p. 48)

Tarefa 129 - Com as medidas A e B meça a face da caixa.

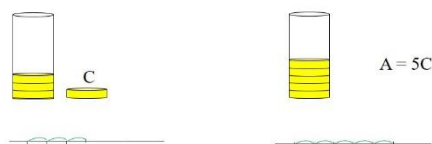
Afinal, a face mede 3 ou 4 unidades?



(Rosa, 2012, p. 179).

Tarefa 130 - Sobre a mesa do professor há um recipiente com líquido e outro vazio que será usado como unidade de medida (C). no quadro está escrito o seguinte registro: $A = 5C$.

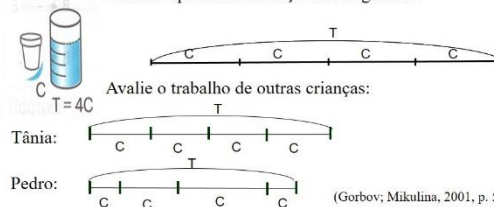
O professor informa que A é o volume de líquido a ser despejado no recipiente, mas um determinado tanto fora colocado, porém, se faz necessário completá-lo. No entanto, é preciso, primeiramente, identificar a quantidade de medidas de líquido já existente no recipiente.



(Rosa, 2012, p. 163).

Tarefa 131- Analisa-se o desenho e as crianças descobrem, quantas medidas são colocadas no recipiente no desenho do quadro nota-se que graças às marcas – risquinhos no recipiente, isso pode ser feito sem precisar medir novamente. O respectivo volume de água é marcado no desenho com o arco e com a letra T.

1) Nicolas estava colocando água com a medida C e fazia marcação no vidro. Represente suas ações no segmento.

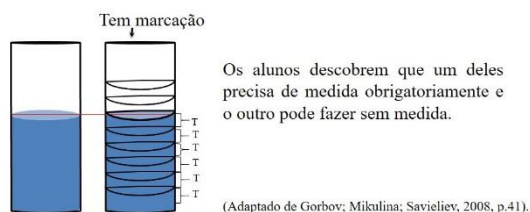


(Gorbov; Mikulina, 2001, p. 50)

Tarefa 132- Há dois recipientes vazios de formas iguais na mesa do professor, num deles tem marcação.

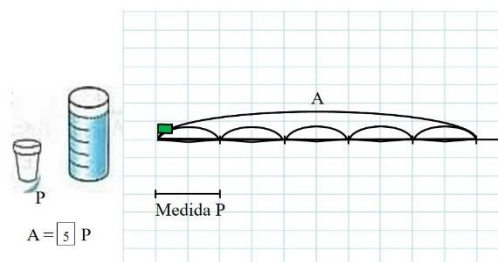
O professor fala que nos recipientes haviam colocado água com uma medida T assim (mostra), marcando cada medida.

Em seguida ele faz um registro no quadro: $M = 6T$ e pede para colocar em cada recipiente um volume de água igual a M.



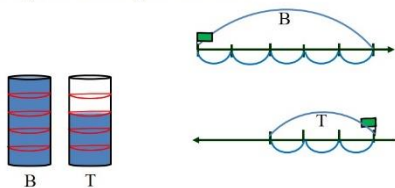
(Adaptado de Gorbov; Mikulina; Savieliev, 2008, p.41).

Tarefa 133 – Analise o recipiente com líquido e a unidade P. Represente na reta numérica o volume A.



(Gorbov; Mikulina, 2001, p. 50)

Tarefa 134 - Descubra usando os esquemas até que nível temos que colocar água nos vidros.

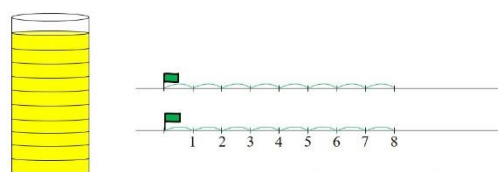


(Adaptado de Gorbov; Mikulina, 2001, p.52)

Tarefa 135 - Os esquemas abaixo representam o volume de líquido do recipiente a esquerda.

Qual dos dois esquemas permite a identificação da propriedade numérica da grandeza sem ter que contar unidade por unidade?

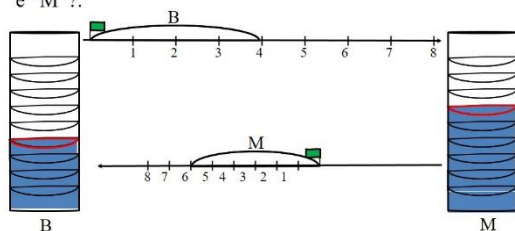
A reta numérica.



(Adaptado de Rosa, 2012, p. 163-164).

Tarefa 136- Analise a reta numérica.

Até que nível temos que colocar água nos recipientes “B” e “M”?

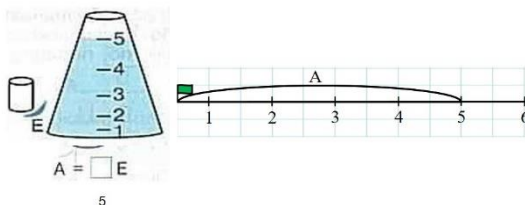


(Adaptado de Gorbov; Mikulina, 2001, p.52)

Tarefa 137 - Analise o desenho do recipiente.

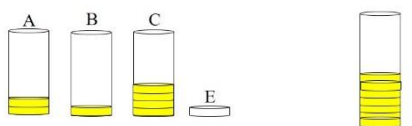
Como foram feitas as marcas no vidro.
qual o volume do recipiente?

Continue o trabalho com a reta numérica. Marque na reta a medida de A.



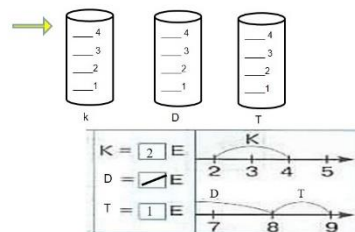
(Adaptado de Gorbov; Mikulina, 2001, p.53)

Tarefa 138 - Nessa tarefa, dispõe-se de três recipientes com volumes de líquido diferentes e um quarto bem maior, vazio, para o qual foi transferido o volume de líquidos dos anteriores. O procedimento foi representado na reta numérica e as crianças deverão identificar quantas medidas E contêm em cada recipiente.



(Rosa 2012, p.165-166)

Tarefa 139 - Mostre no desenho dos recipientes os volumes marcados com arcos na reta numérica. Complete as anotações.



Conclui-se que é possível identificar o significado do número na reta numérica, mesmo se ele começa do outro ponto que não seja o inicial. Não é possível determinar a medida da grandeza D, por que não se sabe onde é o começo do arco.

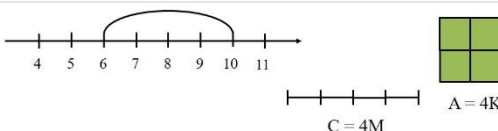
(Adaptado de Gorbov; Mikulina, 2001, p.55)

Tarefa 140 - Aos estudantes é solicitado a produção de uma figura, a partir de uma unidade de referência (a superfície K) e a reta numérica.

 $A = 4K$

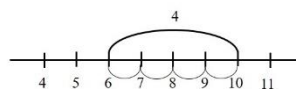
O número quatro é expressão singular da relação particular entre as áreas A e K.

(Rosa, 2012, p. 166).



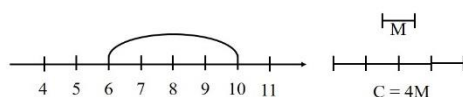
Na reta numérica só se representa a quantidade de unidades e não é possível saber o tipo de grandeza. Assim, a unidade representa o número 1, e não a grandeza.

A extensão do arco indica a quantidade de unidades (4) que compõem a grandeza: a sua propriedade numérica.



(Rosa, 2012, p.168).

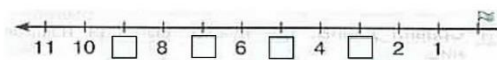
Tarefa 141- Os estudantes deverão compor um segmento, considerando a unidade M. O comprimento total está representado pelo arco na reta numérica. Cada estudante adota a letra C como indicativa da sua medida assim expressa: $C = 4M$.



Essas duas tarefas foram compostas por duas grandezas diferentes: a área 4K e o comprimento 4M. Na presente tarefa, lança-se a pergunta: Qual delas é representada na reta numérica?

(Rosa, 2012, p. 167-168).

Tarefa 143 – Quais são os números que estão faltando?



(Gorbov; Mikulina, 2001, p.59)

Tarefa 144 - Usando a reta numérica compare e complete as anotações.

$6 \underline{\quad} 4$

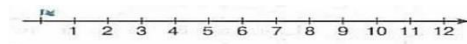
$8 > \square$

$\square < 4$

$9 \underline{\quad} 11$

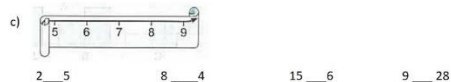
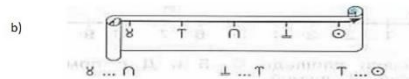
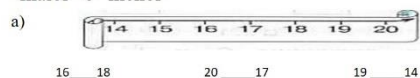
$8 < \square$

$\square > 4$



(Gorbov; Mikulina, 2001, p.59)

Tarefa 145 - compare os números com os símbolos “maior” e “menor”



(Gorbov; Mikulina, 2001, p.59)

Referências Bibliográficas

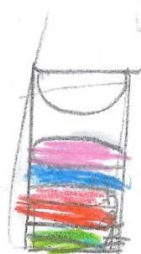
GORBOV, S.F.; MIKULINA, G.G. **Livro de exercícios de matemática, nº 1, 1º ano:** um conjunto de dois livros de exercícios. Sistema ELKONIN, D.G; DAVYDOV, V.V. 2ª ed. Moscou: Vita-Press, 2001.

GORBOV, S.F.; MIKULINA, G.G.; SAVIELIEV, O.V. **Ensino de Matemática. 1 ano:** livro do professor do ensino fundamental (Sistema do D.B. Elkonin – V.V. Davydov). 2ª edição redigida, Moscou, Vita-Press, 2008.

ROSA, J. E. da. **Proposições de Davydov para o ensino de Matemática no primeiro ano escolar:** inter-relações dos sistemas de significações numéricas. 2012. Tese de Doutorado (Programa de Pós-Graduação em Educação) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

ANEXO A – APROPRIAÇÕES DOS ESTUDANTES





A



ρ

$$A = 5p$$

[illegible]

A ÉLOIR É UMA PROFEÇOURA
MUITO LEGAL

