UNIVERSIDADE DO EXTREMO SUL CATARINENSE – UNESC
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO – PPGE
MESTRADO EM EDUCAÇÃO

FRANCIELI MENDONÇA COLOMBO

O CONCEITO TEÓRICO DE EQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU: PERSPECTIVA DE ORGANIZAÇÃO DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade do Extremo Sul Catarinense – UNESC, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação.

Orientador: Prof. Dr. Ademir Damazio

CRICIÚMA
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

C718c Colombo, Francieli Mendonça.
O conceito teórico de equação do primeiro grau : perspectiva de organização do ensino desenvolvimental / Francieli Mendonça Colombo. – 2021.
201 p. ; il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Programa de Pós-Graduação em Educação, Criciúma, 2021.
Orientação: Ademir Damazio.

1. Equações - Conceito. 2. Equação do primeiro grau. 3. Ensino desenvolvimental. 4. Sistema Elkonin-Davidov. I. Título.

CDD. 22. ed. 512.94

Bibliotecária Eliziane de Lucca Alosilla – CRB 14/1101
Biblioteca Central Prof. Eurico Back - UNESC

FRANCIELI MENDONÇA COLOMBO

"O CONCEITO TEÓRICO DE EQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU: PERSPECTIVA DE ORGANIZAÇÃO DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL"

Esta dissertação foi julgada e aprovada para obtenção do Grau de Mestre em Educação no Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade do Extremo Sul Catarinense.

Criciúma, 30 de junho de 2021.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ademir Damazio
(Orientador – UNESC)

Profa. Dra. Circe Mary Silva da Silva Dynnikov (Membro - UFPel)

Profa. Dra. Josélia Euzébio da Rosa
(Membro – UNISUL)

Profa. Dra. Graziela Fatima Giacomazzo
(Suplente – UNESC)

Prof. Dr. Vidalcir Ortigara
Coordenador do PPGE-UNESC

Francieli Mendonça Colombo
Mestranda

Àqueles que acreditam e lutam por uma educação de qualidade para todos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para a concretização do presente estudo. Em especial:

Aos meus pais, Jorge e Marilene, amores da minha vida. Obrigada por não medirem esforços a fim de me proporcionarem estudo. Sei que nem sempre entenderam essa minha sede constante por conhecimento, mas, mesmo assim, apoiaram todas as minhas decisões. Palavra alguma consegue descrever o tanto de amor, carinho e admiração que eu tenho por vocês.

Ao professor Ademir Damazio por todas as manhãs, tardes e noites de orientação, por todas as conversas e todos os ensinamentos. Muito obrigada por me acolher, em meio às minhas limitações, com tanta simplicidade, paciência e comprometimento. És um exemplo de profissional e ser humano.

Ao meu amado companheiro, Ariel, por todo o seu apoio. Obrigada por caminhar ao meu lado, por acreditar em mim e por me ajudar a ser uma pessoa melhor a cada dia.

Aos meus irmãos, Diogo e Gustavo, que, com seus jeitos totalmente diferentes, não medem o tanto de amizade, amor e parceria.

À minha querida amiga Vanessa por todos os momentos que vivemos juntas e por toda a ajuda durante a elaboração deste trabalho.

Às amigas/irmãs que a graduação me deu, Fátima e Juliana. Obrigada pela partilha constante, pela união nos bons e maus momentos e por fazerem parte da minha vida e de quem eu sou. Eu amo vocês!

Aos meus “toquinhos”, de sangue e de coração, Anita, Cece, Malu, Manu e Pedro, e aos meus não mais “toquinhos”, Gabriel e Lucas, por tanto amor. Saibam que sempre farei tudo o que estiver ao meu alcance para que vocês vivam em um lugar melhor, livre de preconceitos e de tudo o que faz mal.

Aos meus amados alunos, os que já foram e os que ainda são. É por e para vocês. É para que, juntos, possamos construir a sociedade que desejamos.

Aos professores e colegas do PPGE, por todas as contribuições, direta e indiretamente.

Aos colegas do GPEMAHC (Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: uma abordagem histórico-cultural), pela acolhida, pelas discussões, pelos estudos e pela luta incessante em prol da educação.

A todos os meus familiares e amigos e a todos aqueles que não mencionei, mas que fazem parte da minha vida, de quem eu sou e serei, afinal, estamos em constante desenvolvimento.

A todos vocês, muito obrigada!

"La escuela y la sociedad son indivisibles.
La sociedad vive y se desarrolla tal como
aprende. Y aprende tal como quiere vivir".

Davídov e Slobódchikov

RESUMO

A presente pesquisa é resultado de investigações referentes ao modo de organização do ensino desenvolvimental, com delimitação para o conceito de equação do primeiro grau. Nesse sentido, apresenta-se a proposta de Davidov e colaboradores, que visa ao desenvolvimento do pensamento teórico nos estudantes. O estudo se direciona pelo seguinte problema: o que caracteriza uma organização do ensino de equação do primeiro grau, fundamentada na perspectiva do sistema Elkonin-Davidov, que se apresenta como promotora de possibilidade para que os estudantes se apropriem teoricamente do referido conceito? Trata-se de uma pesquisa na modalidade bibliográfica, que tem como fonte de análise os livros didáticos e de orientação ao professor – primeiro ao sexto ano – elaborados por Davidov e seus colaboradores, fundamentados na Teoria Histórico-Cultural. A análise se centra em um conjunto de tarefas particulares, extraídas dos livros mencionados, com ênfase no movimento de permanência e surgimento das características referentes ao conceito de equação do primeiro grau. A pesquisa revela que esse conceito está envolto em um sistema matemático mais complexo. Nesse sentido, cada uma das tarefas se caracteriza por satisfazer uma necessidade conceitual e, concomitantemente, emergir outra necessidade. No âmbito de delimitação da pesquisa, podemos dizer que, no modo davidoviano de organização do ensino, o referido conceito se manifesta desde o primeiro ano escolar. As tarefas desencadeiam um movimento referente ao conceito de equação do primeiro grau e do modo de ação para resolvê-la. Elas revelam o movimento de complexificação do conceito e, consequentemente, de apropriação pelos estudantes da forma mais atual (no sexto ano) de resolução desse tipo de equação. A relação todo-partes – base do conceito teórico de adição e subtração no primeiro ano escolar – se constitui referência para a resolução das equações do primeiro grau. De $ax + b = 0$ se atinge a reflexão de que a solução da equação é um número, que se justifica pelo modelo da relação geral $x = \frac{-b}{a}$. Somente no sexto ano é que emerge a necessidade de adoção da ideia de operação inversa e do princípio de equivalência. Esse modo de organização de ensino desenvolve uma apropriação conceitual que contempla o movimento histórico-lógico em nível teórico, em uma autêntica atividade de estudo.

Palavras-chave: Equação do primeiro grau. Ensino Desenvolvimental. Organização do ensino. Sistema Elkonin-Davidov.

ABSTRACT

The present research is the result of investigations regarding the way of organization of developmental education, with delimitation for the concept of first-degree equation. In this sense, the proposal by Davidov and collaborators is presented, which aims at the development of theoretical thinking in students. The study is guided by the following problem: what characterizes an organization of the teaching of the first-degree equation, based on the perspective of the Elkonin-Davidov system, which presents itself as a promoter of the possibility for students to theoretically appropriate this concept? It is a research in the bibliographic modality that has as its source of analysis the textbooks and teacher guidance books – first to sixth grade – elaborated by Davidov and his collaborators, based on the Historical-Cultural Theory. The analysis focuses on a set of particular tasks, taken from the books mentioned, with an emphasis on the permanence movement and the emergence of characteristics related to the concept of the equation of the first degree. Research reveals that this concept is involved in a more complex mathematical system. In this sense, each of the tasks is characterized by satisfying a conceptual need and, at the same time, another need emerging. In the scope of the research delimitation, we can say that, in the Davidovian way of teaching organization, the referred concept manifests itself from the first school year. The tasks trigger a movement, referring to the concept of the first degree equation and the mode of action to solve it. They reveal the movement of complexification of the concept and, consequently, of the appropriation by students of the most current form (in the sixth year) of solving this type of equation. The whole-parts relationship – the basis of the theoretical concept of addition and subtraction in the first school year – constitutes a reference for solving elementary school equations. From ax + b = 0, we reach the reflection that the solution to the equation is a number, which is justified by the model of the general relation $x = \frac{-b}{a}$. Only in the sixth year does the need to adopt the idea of inverse operation and the principle of equivalence emerge. This way of organizing teaching develops a conceptual appropriation that contemplates the historical-logical movement at the theoretical level, in an authentic study activity.

Keywords: First degree equation. Developmental Teaching. Organization of teaching. Elkonin-Davidov system.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoa de Nível Superior
GPEMAHC	Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: Uma Abordagem Histórico-Cultural
MMM	Movimento da Matemática Moderna
PPGE	Programa de Pós-Graduação em Educação
TEDEMAT	Teoria do Ensino Desenvolvimental na Educação Matemática
UNESC	Universidade do Extremo Sul Catarinense
UNISUL	Universidade do Sul de Santa Catarina
UFPel	Universidade Federal de Pelotas
URSS	União das Repúblicas Socialistas Soviéticas

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

A gênese de nosso estudo se encontra em necessidades que emergiram durante todo o percurso de formação, mas que só se tornaram mais evidentes durante o curso de licenciatura em Matemática. As inquietações se aguçaram quando, no curso de graduação, algumas disciplinas nos proporcionaram parâmetros para questionar determinados modos de organização do ensino de Matemática. A forma pela qual os conceitos eram desenvolvidos, nessas disciplinas em específico, diferenciava-se de qualquer experiência que tivemos durante toda a formação. Não era um estudo pragmático dos conceitos matemáticos, mas, sim, um estudo no qual os três campos da Matemática – álgebra, aritmética e geometria – se relacionavam.

Contribuiu ainda mais para nossas reflexões quando, na disciplina de Estágio Obrigatório do Ensino Fundamental, tivemos os primeiros contatos com a Teoria Histórico-Cultural. Concomitantemente, ocorreu o início da atuação como professora efetivamente em sala de aula. Nesse contexto, as diferenças entre os modos de organização do ensino se tornaram perceptíveis, assim como a necessidade de aprofundar os estudos em relação aos pressupostos da base teórica em questão. Portanto, começou a surgir uma temática de pesquisa, ainda que incipiente, pois passou a se configurar como uma certa curiosidade, ou uma gênese de uma necessidade, para que se possa compreender quais os pressupostos que dão base para uma outra organização do ensino, diferente daquela predominante nos diversos níveis escolares que vivenciamos.

Para tanto, a primeira ação em busca da produção do objeto de estudo foi cursar uma disciplina isolada do Mestrado em Educação. Ela nos permitiu uma melhor compreensão da Teoria Histórico-Cultural, cuja matriz é o materialismo histórico e dialético. Por consequência, traçamos algumas delimitações e, ao ingressarmos no mestrado, chegamos ao seguinte objeto de estudo: modo de organização do ensino do conceito teórico de equação do primeiro grau na perspectiva do ensino desenvolvimental.

A exposição do processo de investigação do referido objeto – materializada na presente dissertação – ocorre, assim, em cinco capítulos. O primeiro, dividido em duas seções, tem como objetivo apresentar o objeto de estudo, o problema que o orienta – cuja questão é: o que caracteriza uma organização do ensino de equação do primeiro grau, fundamentada na perspectiva do sistema Elkonin-Davidov, que se apresenta como promotora de possibilidade para que os estudantes se apropriem teoricamente do referido conceito? –, seus objetivos e suas bases de contextualização, além da apresentação das orientações metodológicas que norteiam a pesquisa.

O segundo capítulo, também dividido em duas seções, discute as teorias que fundamentam o estudo. A primeira seção se refere aos pressupostos das Teorias Histórico-Cultural e da Atividade, com especificidade para a Atividade de Estudo. Por sua vez, a segunda seção traz os pressupostos e as orientações do ensino desenvolvimental, particularmente do sistema de ensino Elkonin-Davidov.

O capítulo três é dedicado à busca, na literatura, dos fundamentos conceituais da equação do primeiro grau que, articuladamente com os fundamentos teóricos apresentados no capítulo dois, subsidiam a leitura analítica das tarefas que trazem evidências do objeto de estudo. Nele, ocorre a divisão em duas seções. Na primeira, são apresentados alguns componentes essenciais do referido conceito, observados no movimento do seu desenvolvimento histórico. A segunda seção, por sua vez, apresenta alguns estudos de pesquisas que tratam do conceito matemático em pauta na perspectiva da Teoria do Ensino Desenvolvimental. O estudo dessas pesquisas foi de extrema importância para a análise efetuada no capítulo quatro.

O objetivo do quarto capítulo se volta à análise do desenvolvimento do conceito teórico de equação do primeiro grau, no sistema de ensino Elkonin-Davidov, com base em tarefas extraídas dos livros didáticos e de orientação ao professor (primeiro ao sexto ano) elaborados por Davidov e colaboradores. Trata, pois, de manifestações referentes ao modo geral de organização do ensino para o referido conceito no transcorrer do ensino fundamental.

Por fim, no último capítulo, elencamos algumas considerações a respeito de toda a análise desenvolvida durante a pesquisa, expondo o que de significativo ficou a seu respeito. Além disso, apresentamos algumas inquietações que ainda se fazem presentes e que se caracterizam como possibilidades de avanços e superações para estudos futuros.

1 AS BASES DE CONTEXTUALIZAÇÃO DO OBJETO DE PESQUISA E ORIENTAÇÕES METODOLÓGICAS

O presente capítulo está dividido em duas seções. A primeira tem como objetivo apresentar o objeto de estudo, o problema que o orienta, seus objetivos e suas bases de contextualização. A segunda seção se centraliza na apresentação das orientações metodológicas que norteiam a pesquisa.

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO DO OBJETO DE PESQUISA

À primeira vista, parece algo saturado o estudo da temática referente ao ensino da equação do primeiro grau. A pergunta que pode ser óbvia aos leitores e pesquisadores é: existe a possibilidade de algo novo no que diz respeito à organização do ensino de Matemática para o referido conceito no âmbito da educação brasileira? A resposta para essa pergunta requer uma imersão na literatura de cunho pedagógico/histórico.

Para tanto, a referência inicial é Fiorentini (1995) ao afirmar que há diferentes modos de conceber a questão da qualidade do ensino de Matemática, dada a sua complexidade. Como reitera o autor, o conceito de qualidade do ensino é relativo e modifica-se historicamente, em conformidade com as determinações socioculturais e políticas. Também depende muito do entendimento e do envolvimento de cada professor.

Trazemos a questão da qualidade do ensino aqui, pois ela tem ligação direta com a nossa pesquisa, que trata do modo de organização do ensino de um conceito matemático: equação do primeiro grau. Libâneo (2004) afirma que a escola é lugar de mediação cultural onde o desenvolvimento cognitivo, afetivo e moral dos indivíduos é possibilitado. Nesse sentido, pensar a organização do ensino do referido conceito requer que nos reportemos a algo que ainda não foi desenvolvido nem estudado no contexto brasileiro de pesquisa. As perguntas que se apresentam são: em que ainda podemos contribuir em um estudo científico sobre a organização do ensino do conceito teórico de equação do primeiro grau? O que ainda pode ser considerado como novo e de qualidade? O novo e a qualidade em que concepção? Em que tendência de ensino da Matemática?

Nesse contexto de questionamentos é que se apresenta este estudo, em sua especificidade conceitual (conceito teórico de equação do primeiro grau), que traz a preocupação com um modo de organização do ensino, que é objeto de pesquisas no âmbito brasileiro e internacional: o sistema Elkonin-Davidov[1]. Dentre os vários estudos, cita-se, no contexto brasileiro: Rosa (2012), Cunha (2019), Serconek (2018) e Libâneo (2004, 2010). No âmbito internacional, vale a menção a Lee (2002), Schmittau (2005) e Schmittau e Morris (2004). Partimos do pressuposto de que é de extrema importância a compreensão de que todas as relações envolvendo a educação são construídas historicamente. Isso significa dizer que o modo pelo qual o professor ensina está intimamente ligado ao seu entendimento da relação entre o homem singular e a sociedade em si. É essa compreensão que norteará a organização do ensino.

Do mesmo modo, há uma inter-relação entre uma base teórica e o modo de investigar o objeto de estudo. Por isso, consideramos necessária a explicitação do nosso entendimento a respeito do que seja um novo modo de organização do ensino do conceito teórico de equação do primeiro grau como explicitação de um objeto de estudo com teor novo. Fiorentini (1995) afirma que, no Brasil, há diferentes tendências pedagógicas de ensino de Matemática em decorrência de diversos momentos históricos. No entanto, o autor não faz menção àquela cujos fundamentos serão base no presente estudo, denominada por Damazio e Rosa (2013) Tendência Histórico-Cultural.

Essa tendência tem como fundamentos a Teoria Histórico-Cultural, cujo precursor é Vigotski (1896-1934), que se expandiu para a Teoria do Ensino Desenvolvimental, sendo Davidov (1930-1998) um dos seus colaboradores, e cuja matriz teórica é o materialismo histórico e dialético. A justificativa para tal opção é seu compromisso com uma organização do ensino, que tem como tarefa o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes por meio da apropriação dos conceitos científicos.

Nossa escolha pela base teórica, mais particularmente pelo sistema Elkonin-Davidov, pode ser explicitada pelos mesmos apontamentos realizados por Dusavitskii (2014, p. 80-81) a respeito das diferenças entre o sistema de ensino desenvolvimental e outras inovações pedagógicas:

> 1. Construído sobre bases filosóficas definidas;
> 2. Se baseia em pesquisa psicológica fundamental, em 40 anos de experimentos psicológico-pedagógicos;

[1] Puentes (2019a) denomina sistema Elkonin-Davidov-Repkin. No entanto, preservaremos a expressão Elkonin-Davidov como temos lido na literatura russa e de outros países estrangeiros.

> 3. Nesse sistema foi estruturado um novo conteúdo teórico da educação primária correspondente à zona de desenvolvimento incipiente da criança – domínio da forma da atividade de estudo e dos fundamentos da consciência teórica e do pensamento;
> 4. Para o novo conteúdo correspondente, um método radicalmente novo de ensinar;
> 5. A avaliação objetiva dos resultados do sistema de ensino é assegurada por um conjunto de testes de diagnóstico especialmente desenvolvido sobre o desenvolvimento mental e de personalidade da criança.

Nessa perspectiva teórica, segundo Freitas (2016) com base em Andery (2002), o conhecimento é uma produção histórica, resultante da atividade humana, que não se encontra pronto na natureza nem é uma qualidade interna do espírito. O conhecimento surge e desenvolve-se na relação mútua entre sujeito e objeto, ou seja, como uma objetivação da atividade prática humana.

As afirmações de Fiorentini (1995) e Libâneo (2004) vão ao encontro das ideias de Davidov (2019) referentes às tarefas de cunho social que a escola cumpre. Aqui, entretanto, cabe-nos a reflexão de que, dependendo do tipo de sociedade na qual está inserida, a escola pode, ou não, contribuir para um real desenvolvimento dos alunos. Dito de outro modo, ela desenvolve empiricamente ou teoricamente o pensamento dos estudantes.

Por isso nossa preocupação em distinguir o sistema Elkonin-Davidov do que é denominado por Davidov ensino tradicional.

> Com o termo *escola tradicional*, designamos um sistema relativamente único de educação europeia, que, em primeiro lugar, formou-se no período de nascimento e florescimento da produção capitalista e ao qual serviu; em segundo lugar, foi fundamentado nos trabalhos de Y. Komenski, I. Pestalozzi, A. Diesterweg, K. Ushinski, além de outros destacados pedagogos do período; e, em terceiro, conservou até agora seus princípios iniciais como base para a seleção do conteúdo e métodos de ensino na escola atual. (DAVYDOV, 2017, p. 211, grifos no original).

Nesse viés, Davydov (2017) afirma que a escola tradicional não consegue mais responder às exigências da revolução técnico-científica e que, dessa forma, ela deverá ser substituída por uma outra forma de educação escolar. Por isso, ele apresenta alguns argumentos. Um deles é que, durante centenas de anos, a finalidade social principal da educação em massa consistia em proporcionar apenas os conhecimentos e as habilidades essenciais a uma profissão mais ou menos significativa na produção industrial e na vida social. O autor faz referência à tarefa da escola de ensinar a escrever, contar e ler, com conteúdo utilitário-empírico, que proporcionou a formação de métodos de ensino condizentes com tal propósito (DAVYDOV, 2017). O autor ressalta ainda que:

> [...] a função social da escola não só ditava a seleção de conhecimentos e habilidades utilitário-empíricos, como também determinava e projetava a fisionomia espiritual geral, o tipo geral de pensamento dos alunos que por ela passavam. [...] Esse pensamento tem um caráter classificador e catalogador, que garante a orientação da pessoa no sistema de conhecimentos acumulados referentes às particularidades e características externas de objetos e fenômenos, sem relação com a natureza e a sociedade. Tal orientação é indispensável para os afazeres cotidianos [...] mas é absolutamente insuficiente para assimilar o espírito autêntico da ciência contemporânea e os princípios de uma relação criativa, ativa e de profundo conteúdo no que concerne à realidade. (DAVYDOV, 2017, p. 212-213).

O autor considera que a escola tradicional carrega como finalidade a preparação dos alunos com vistas ao desempenho do sistema produtivo, proporcionando-lhes apenas a formação unilateral de seu pensamento. Tal unilateralidade formativa do pensamento não permite aos alunos que recebam, na escola, os meios e procedimentos do pensamento teórico e, dessa forma, o desenvolvimento de suas funções psicológicas superiores.

A partir do pressuposto de que o desenvolvimento do pensamento teórico é essencial para o desenvolvimento das funções psicológicas superiores, cabe-nos, aqui, explicitar as diferenças entre ele e o pensamento empírico. Inicialmente, é importante salientar que o desenvolvimento do pensamento teórico está diretamente relacionado com a assimilação dos conceitos científicos, isto é, com aquilo que mais desenvolvido a ciência produziu. Já o desenvolvimento do pensamento empírico se relaciona com a assimilação dos conceitos empíricos, que se limita às características externas e imediatas. Para Davídov (1988, p. 125), “[...] o pensamento teórico reflete as relações internas e leis do movimento – do objeto de estudo – que são cognoscíveis por meio da elaboração racional dos dados”. Rubtsov (1997), por sua vez, faz a seguinte análise comparativa entre o conhecimento teórico e o conhecimento empírico:

- O conhecimento empírico é elaborado por meio da comparação entre os objetos e suas representações, o que permite a valorização das propriedades comuns dos objetos. O pensamento teórico, por sua vez, analisa o papel e a função da relação existente entre as coisas no interior de um sistema;
- A comparação estabelecida por meio do conhecimento empírico proporciona uma generalização formal das propriedades dos objetos, que permite situar objetos específicos em uma determinada classe formal, independentemente da existência, ou não, de laços entre eles. De modo distinto, a análise realizada por meio do pensamento teórico estabelece uma forma universal de caracterização, tanto de um representante de uma classe, quanto de um objeto particular;
- O conhecimento empírico se fundamenta na observação e reflete as propriedades exteriores dos objetos, tomando como base apenas as representações concretas. De forma diferente, o conhecimento teórico se fundamenta na transformação dos objetos e reflete as relações existentes entre as suas propriedades e ligações internas. Dessa forma, pode-se afirmar que o pensamento teórico supera as representações sensoriais;
- No conhecimento empírico, as propriedades específicas dos objetos são análogas à propriedade formal comum, enquanto no conhecimento teórico há uma relação entre o geral e o particular;
- A concretização do conhecimento empírico se dá na escolha de exemplos relativos a uma determinada classe formal. De outro modo, a concretização do conhecimento teórico exige a transformação do saber em uma teoria estabelecida por meio da dedução e explicitação das manifestações concretas do sistema;
- A forma de expressão do conhecimento empírico se dá por meio de um termo, enquanto que o conhecimento teórico é expresso por diferentes modos de atividade intelectual e diferentes sistemas semióticos.

Ao encontro dos pensamentos de Davídov (1988) e Rubtsov (1997), as afirmações de Kopnin (1978) enfatizam que a forma lógica do pensamento empírico se constitui ponderações feitas de forma isolada, enquanto a forma lógica do pensamento teórico é composta pela universalidade do objeto, ou seja, pelo sistema de abstrações que o explica.

De acordo com Davydov (2017), na escola tradicional, o princípio do caráter científico é compreendido de forma empírica e não em sua significação dialética, a qual é caracterizada como um procedimento especial de reflexo mental da realidade por meio da ascensão do abstrato ao concreto. Essa ascensão está ligada à formação de abstrações e generalizações, cujo conteúdo não é o empírico, mas essencialmente teórico, que requer uma análise da relação substancial e da sua função no sistema estudado.

Davydov (2017, p. 217-218) afirma que "[...] os meios de formação das abstrações, generalizações e dos conceitos teóricos são diferentes daqueles do pensamento empírico. Concomitantemente, o pensamento teórico supera e assimila os momentos positivos daquele".

É nesse contexto de concepção de conhecimento, de assimilação e de superação do teor empírico pelo teórico – em especial de Matemática, expansiva para o seu ensino e aprendizagem – que se apresenta nosso objeto de pesquisa, isto é, em uma perspectiva de educação matemática Histórico-Cultural. Ele está vinculado à pretensão de estudar o modo de organização do ensino em uma perspectiva desenvolvimental, voltado para a especificidade do conceito teórico de equação do primeiro grau. Como questão de pesquisa, temos: **o que caracteriza uma organização do ensino de equação do primeiro grau, fundamentada na perspectiva do sistema Elkonin-Davidov, que se apresenta como promotora de possibilidade para que os estudantes se apropriem teoricamente do referido conceito?**

Inicialmente, cabe justificar o porquê da escolha do objeto, bem como a reafirmação do campo teórico adotado na fundamentação.

Como comentado anteriormente, Fiorentini (1995) destacou em seus estudos que há diferentes modos de conceber a questão da qualidade do ensino de Matemática, que tal conceito é relativo e modifica-se historicamente, sofrendo determinações socioculturais e políticas. Além disso, o modo como o professor ensina se relaciona diretamente com a forma que ele entende o mundo, o homem e a sociedade.

Então, a primeira justificativa tem seu argumento no referido autor ao afirmar que é de suma importância, para a práxis do professor e/ou pesquisador, o conhecimento das tendências pedagógicas, a compreensão de suas diferenças, características e ideologias, bem com analisá-las de forma crítica para assumir a perspectiva com que mais se identifique.

Desse modo, o desenvolvimento do processo que gerou a escolha da temática de estudo, bem como da concepção teórica, foi uma construção que levou em consideração fatores de todo o percurso formativo no ensino básico, mas que se tornaram evidentes no curso de graduação em Matemática – Licenciatura Plena (em algumas disciplinas específicas do curso).

Na Educação Básica, a disciplina de Matemática foi marcada pela aprendizagem de técnicas de resolução de situações-problemas particulares. Por meio da repetição e com base em exemplos parecidos, conseguíamos resolver as tarefas propostas pelos professores com certa facilidade. Entretanto, quando postos à frente de uma situação-problema considerada nova, o êxito não era garantido. Nas disciplinas do curso técnico em Eletrotécnica, não foi diferente. As situações-problemas possuíam todas as mesmas características e, dessa forma, conseguíamos resolvê-las sem dificuldades, pela imitação mecânica com base em um modelo, antes apresentado.

Entretanto, no início do curso de graduação em Engenharia Elétrica, as coisas começaram a mudar. As dificuldades tomaram proporções maiores em algumas disciplinas específicas e, então, começamos a questionar "o quanto sabíamos de Matemática".

Essa generalizada forma de organizar o ensino pode caracterizar um fato comum, mas nos permite pensar questões como as discutidas anteriormente, referentes à qualidade do ensino de Matemática e à relação que esta tem com o modo de ensinar do professor.

Por isso, o posicionamento é por um ponto de vista Histórico-Cultural. Segundo Fiorentini (1995), em tal perspectiva, a aprendizagem efetiva da Matemática não consiste apenas no desenvolvimento de habilidades (como do cálculo ou da resolução de problemas), ou na fixação de alguns conceitos por meio da memorização ou da realização de uma série de exercícios, como entende a pedagogia tradicional ou tecnicista. Ou, ainda, como orienta a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que se centra no desenvolvimento de competências e habilidades (BRASIL, 2017).

Destacamos que a Teoria do Ensino Desenvolvimental não nega o desenvolvimento de habilidades. A questão se volta para o fato de que a Base Nacional Comum Curricular, além de não deixar bem claro quais os conceitos de competência e habilidade, acentua uma instrumentalização tecnicista/pragmática do currículo. Ao invés dos conceitos desenvolvidos em cada disciplina focalizarem na formação integral dos alunos, centram-se em competências e habilidades que, muitas vezes, estão voltadas essencialmente para o mercado de trabalho.

Por sua vez, o ensino em uma tendência com fundamento materialista histórico e dialético concebe que o aluno aprende significativamente matemática ao demonstrar que atribui sentido e significado às ideias matemáticas, pensa sobre elas, estabelece relações, justifica, analisa, discute e cria (FIORENTINI, 1995). Essa ideia também é evidenciada em Davídov (1988) ao afirmar que o papel da escola é proporcionar a apropriação dos conhecimentos científicos, condição para o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes. Ou seja, garantir as condições para que cada estudante se aproprie das máximas experiências desenvolvidas pela humanidade para se constituir como uma das formas (para muitos a principal) de contribuir para o processo de desenvolvimento e humanização das relações sociais.

Ao mudar de curso de graduação – Engenharia Elétrica para Licenciatura em Matemática –, tivemos contato com uma professora em específico desde a primeira fase. O modo como os conceitos eram desenvolvidos em suas aulas se diferenciavam de qualquer experiência que tivemos durante toda a formação. Não era um estudo pragmático dos conceitos matemáticos, mas, sim, um estudo no qual os três campos da Matemática – álgebra, aritmética e geometria – se relacionavam.

Na disciplina de Estágio Obrigatório no Ensino Fundamental, orientados pela professora mencionada anteriormente, começamos a ter os primeiros contatos com a Teoria Histórico-Cultural, seus pressupostos e o modo de organização do ensino dentro dessa perspectiva. Vale ressaltar que a disciplina de estágio é desenvolvida nessa perspectiva teórica, pois os currículos das escolas da rede estadual e também das redes municipais da região indicam adotar os fundamentos da Teoria Histórico-Cultural.

No início da atuação como professora efetivamente em sala de aula, surgiram dúvidas, angústias e incertezas. O distanciamento entre documentos como a Proposta Curricular de Santa Catarina e as condições objetivas encontradas na escola, juntamente com a falta de conhecimento e materiais didáticos fundamentados na Teoria Histórico-Cultural, acentuaram a necessidade de um maior estudo sobre ela.

Segundo a Proposta Curricular do Estado de Santa Catarina (SANTA CATARINA, 2014), é preciso articular o ensino de Matemática à formação integral em atividade de estudo, tendo como percurso a apropriação prática dos saberes. Além disso, a proposta estabelece que o objetivo da escola é a formação do pensamento teórico (abstração, generalização e conceito), que incorpora o movimento concomitante da álgebra, geometria e aritmética.

De forma específica, podemos perceber que, no ensino básico, a introdução ao estudo da álgebra ocorre somente no Ensino Fundamental – Anos Finais –, mais especificamente no sétimo ano, com o estudo do conceito de equação. A característica marcante é que seu enfoque é especificamente algébrico, sem a inter-relação com os campos da geometria e da aritmética. Isso ocorre por consequência do modo tradicional de organização do ensino adotado no Brasil (ROSA, 2012). Observa-se, também, que os estudantes não desenvolvem uma compreensão que consideramos significativa, uma vez que memorizam regras e procedimentos de resolução de equações.

Essas situações se apresentam rotineiramente nas escolas em que estudamos e lecionamos como professora. Na busca por uma possibilidade de outra formação dos alunos, emergiu a necessidade de compreendermos os pressupostos da abordagem Histórico-Cultural. Interessa-nos o entendimento de suas fundamentações e concepções sobre o homem e seu papel na sociedade, extrapolado para as suas relações com o ensino e a aprendizagem da Matemática e sua vinculação com a formação humana.

Dessa forma, a escolha do objeto de estudo, além de levar em consideração todos os fatores comentados anteriormente, considera que ainda há pouco estudo sobre a organização do ensino do conceito teórico de equação do primeiro grau em conformidade com os pressupostos da Teoria Histórico-Cultural.

Tal ausência se explicita no levantamento das pesquisas nas bases de dados – mais especificamente no catálogo de teses e dissertações da CAPES – em que encontramos uma grande quantidade de produções referentes ao ensino de álgebra. Entretanto, como nosso objeto de pesquisa tem base na teoria do ensino desenvolvimental – que, por sua vez, traz Davidov como um dos principais autores –, resolvemos limitar nossa busca pelo nome Davidov e encontramos 73 produções.

Posteriormente, estendemos a busca pelas possíveis grafias do nome do referido autor. São elas: Davidov, Davídov, Davydov e Davýdov. Dessa forma, encontramos 144 produções no intervalo dos anos de 1997 até 2019.

Nesse levantamento, constatamos que, dos 144 trabalhos encontrados, 89 eram referentes a outras áreas do conhecimento, 47 à disciplina de Matemática – de forma geral –, sete ao estudo da álgebra e apenas uma dissertação de mestrado tem como objeto de estudo uma proposta de ensino de equação do primeiro grau fundamentada na perspectiva Histórico-Cultural, mas que não segue as orientações das ações de organização do ensino propostas por Davidov, seus colaboradores e continuadores. Trata-se do estudo de Alves (2016).

Portanto, não há produções, em nível de teses e dissertações, referentes à organização do ensino, mais especificamente do conceito teórico de equação do primeiro grau, dentro dos pressupostos do ensino desenvolvimental e da Teoria da Atividade. A exceção está em um artigo de Silva (2018), que trata do referido conceito manifestado em livros didáticos (1º ao 4º ano), cujos autores não são do grupo de pesquisadores liderado por Davidov. Também fazem referências tangenciais ao conceito em foco, não o tendo como sua centralidade, os estudos de Rosa (2012), Alves (2017), Búrigo (2015), Crestani (2016), Dorigon, Rosa e Damazio (2016) e Freitas (2016). Tal ausência de pesquisas com proximidades ao objeto do presente estudo justifica ainda mais a sua relevância.

Por isso, o que move nossa pesquisa é a necessidade de aprofundarmos os estudos relacionados a um ensino que desenvolva nos estudantes as máximas capacidades humanas, a formação integral do ser humano. O pressuposto é de que, por meio do desenvolvimento do pensamento teórico, o homem toma consciência do seu lugar nas relações sociais e da forma pela qual poderá contribuir para a sociedade.

A compreensão desse pressuposto não trata apenas de satisfazer nossas necessidades pessoais, mas se move pela vontade de contribuir para a educação matemática dos estudantes que encontram na escola o principal espaço para o processo de desenvolvimento e humanização nos patamares daquilo que mais atual se produziu no processo histórico: o conhecimento científico em seu nível teórico.

O exposto é anunciador de uma essencial superação da forma de ensinar e aprender os conceitos matemáticos, não condizente com aquele que proporciona, aos alunos, o desenvolvimento de um conhecimento cujo conteúdo é empírico (DAVÍDOV, 1988). Essa é mais uma razão para compreendermos os pressupostos da Teoria Histórico-Cultural, da Teoria do Ensino Desenvolvimental e, consequentemente, da Teoria da Atividade de Estudo. Esta última, por caracterizar um estágio do desenvolvimento humano, isto é, por ser indicadora de um lugar que o ser humano ocupa perante as relações sociais. Por isso, nessa fase, a conclamação para a formação do pensamento teórico é que subsidiará o desenvolvimento subsequente.

Dessa forma, nosso estudo tem como **objetivo geral:** analisar os componentes que caracterizam a organização do ensino fundamentado na perspectiva desenvolvimental a fim de oportunizar aos estudantes do ensino fundamental a apropriação do conceito teórico de equação do primeiro grau. E, como **objetivos específicos**, foram estabelecidos: 1) estudar as categorias do sistema didático Elkonin-Davidov, fundamentadas no ensino desenvolvimental; 2) destacar e analisar um conjunto de tarefas particulares dos livros didáticos e de orientação ao professor que retratam a organização do ensino do conceito teórico de equação do primeiro grau na perspectiva desenvolvimental.

Nossa vontade de contribuir para a organização do ensino de Matemática, delimitada por uma especificidade conceitual, também se vale da afirmação de Dorigon (2013) de que muitos professores não se sentem seguros e com clareza para fundamentar a docência na teoria Histórico-Cultural. Consequentemente, o livro didático se torna a principal referência para subsidiar o planejamento e a prática pedagógica, o que geralmente não vai ao encontro da perspectiva teórica que fundamenta as Propostas Curriculares e outros documentos oficiais, principalmente municipal e estadual de nossa região.

Ao considerarmos que Davidov (inicialmente com Elkonin) e seus colaboradores elaboraram propostas para o ensino de Matemática sob os princípios da Teoria Histórico-Cultural e que as Propostas Curriculares das escolas públicas do estado de Santa Catarina e do município de Criciúma se embasam metodológica e pedagogicamente nessa teoria, justifica-se a necessidade do estudo.

1.2 ORIENTAÇÕES METODOLÓGICAS

Quanto às orientações metodológicas, nosso estudo se caracteriza como uma pesquisa qualitativa e de caráter bibliográfico, que, segundo Gil (2002, p. 44), “[...] é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos”. Nesse sentido, o objeto de pesquisa se limita à compreensão dos pressupostos para a organização do ensino com base na Teoria do Ensino Desenvolvimental. Mais especificamente, centra-se na análise: das categorias do sistema de ensino Elkonin-Davidov, bem como das manifestações teóricas no ensino do conceito de equação do primeiro grau proposto pela organização do ensino do referido sistema, no âmbito do ensino fundamental.

Isso requereu que recorrêssemos à literatura pertinente aos conceitos e aos pressupostos teóricos do ensino desenvolvimental, com base na perspectiva Histórico-Cultural e em sua matriz teórica, o materialismo histórico e dialético. Trata-se, pois, da explicitação da base teórica da nossa investigação. Essencialmente, centrou-se em três conceitos: ensino desenvolvimental, Teoria da Atividade e sistema Elkonin-Davidov. As referências principais desse momento foram: Davídov (1988), Davidov (1996, 1999, 2019), Davídov, Slobódchikov

(1991), Davídov, Márkova (1987), Davydov (1982, 2017), Elkonin (2019), Fiorentini (1995), Leontiev (1978, 2018), Libâneo (2004, 2010), Puentes (2017, 2019a,b), Vigotski (2009, 2018) e Vygotski (1993).

Também visitamos a literatura pertinente aos fundamentos matemáticos a fim de compreendermos a base teórica dos seus conceitos, mais especificamente daqueles relacionados ao conceito teórico de equação do primeiro grau. As referências foram: Aleksandrov (1988, 1991), Baumgart (1992), Caraça (1951, 2003), Coxford e Shulte (1995), Guelli (1992), Panossian (2014), Ríbnikov (1987), Souza, Panossian e Cedro (2014), Robayna (1996), entre outros.

Da mesma forma, foram importantes as contribuições dos estudos, entre tantos, de Alves (2017), Búrigo (2015), Crestani (2016), Dorigon, Rosa e Damazio (2016), Freitas (2016) e Silva (2018), por se tratarem de análises referentes à organização do ensino desenvolvimental com base em tarefas particulares[2]. Reafirma-se, pois, que a centralidade está para as manifestações do modo de organização do ensino na perspectiva desenvolvimental, tendo como base de análise os livros didáticos e seus respectivos livros de orientação ao professor do sistema Elkonin-Davidov do primeiro ao sexto ano. Cabe salientar que os livros de orientação ao professor têm fundamental importância, pois eles contêm os procedimentos didáticos das tarefas particulares a serem desenvolvidas com os estudantes, assim como informações detalhadas do sistema conceitual em questão.

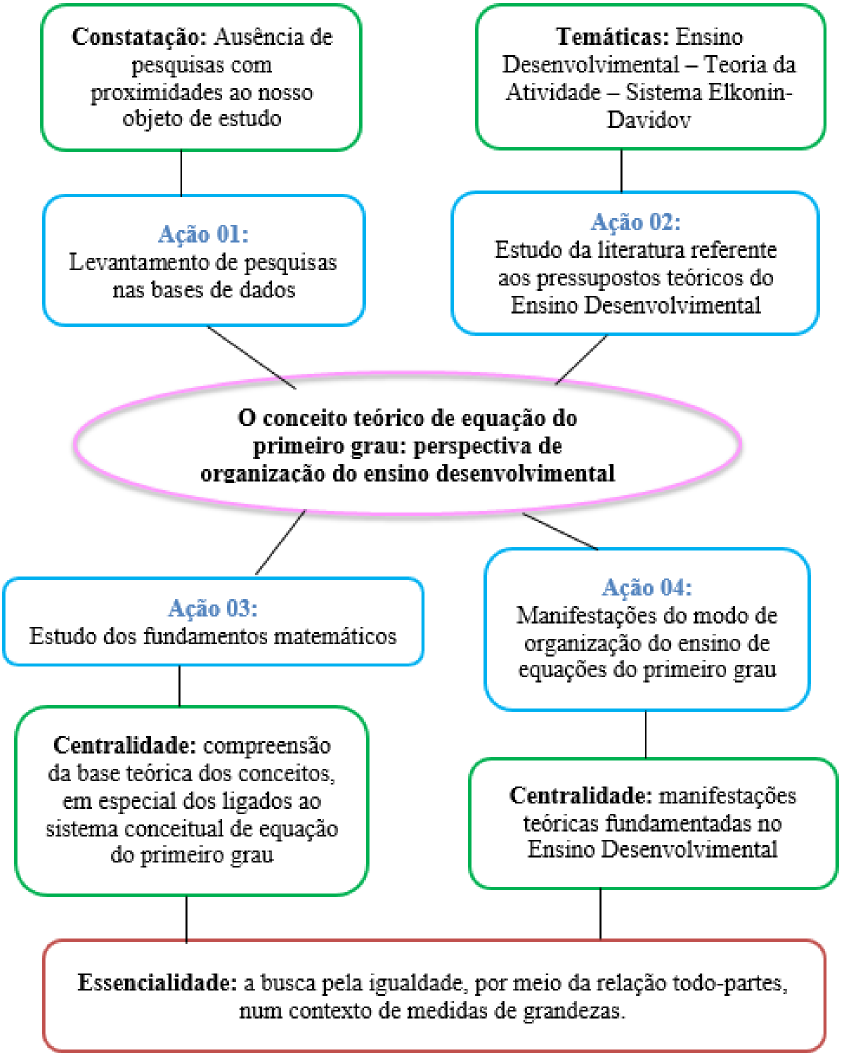
Devido à delimitação do objeto de pesquisa, a análise dos livros didáticos e de orientação aos professores (primeiro ao sexto ano) teve como referência trinta e nove tarefas particulares. A seleção das referidas tarefas se voltou para aquelas que tratam, explícita e/ou implicitamente, do conceito de equação do primeiro grau. Mais explicitamente, a escolha de cada uma foi devido ao potencial de contemplar a essência conceitual em grupo dessas tarefas, como a busca pela igualdade em um contexto de desigualdades, a relação todo-partes, o conceito de número real, entre outros. Ou seja, tarefas que contemplam conceitos envoltos no sistema conceitual referente à equação do primeiro grau.

Sem desmerecer os demais, que subsidiaram a análise, o quarto capítulo é o que traduz as evidências do objeto de pesquisa, pois nele se

[2] A presente pesquisa se limita ao conceito de equação do primeiro grau. Entretanto, ele está envolto em um sistema conceitual, não sendo possível analisar todos os seus conceitos nesta dissertação, por isso consideramos importante destacar que outros estudos dos grupos de pesquisa GPEMAHC e TEDEMAT (como os citados) tratam de alguns deles.

revela a essencialidade do conceito de equação do primeiro grau no modo de organização do ensino desenvolvimental. De modo esquemático, apresentamos, a seguir, o movimento do processo da pesquisa:

Imagem 1: Movimento do Processo da Pesquisa



Fonte: Produção da autora (2021).

No esquema apresentado, são expostos, de modo geral, os componentes fundamentais que movimentaram tanto a investigação quanto a exposição de nossa pesquisa, assim como a centralidade de cada um deles. É importante destacar que a quarta ação é que revela, em seu movimento de constituição, a essencialidade do conceito teórico de equação do primeiro grau.

Finalizadas as apresentações das bases de contextualização do objeto de pesquisa e de suas orientações metodológicas, no capítulo seguinte, serão expostas as teorias que fundamentam o nosso estudo. Elas se constituem como de grande importância para a compreensão de uma organização do ensino do conceito teórico de equação do primeiro grau, cujo conteúdo seja teórico e, por conseguinte, que contribua para o desenvolvimento das máximas capacidades dos estudantes.

2 AS TEORIAS QUE FUNDAMENTAM A PESQUISA

Neste capítulo, discutiremos as teorias que fundamentam a nossa pesquisa, ou seja, as bases do referencial teórico que fundamentam a nossa dissertação. Nesse sentido, o capítulo está dividido em duas seções. A primeira se refere aos pressupostos das Teorias Histórico-Cultural e da Atividade, com especificidade para a Atividade de Estudo. A segunda traz os pressupostos e as orientações do ensino desenvolvimental, particularmente do sistema didático Elkonin-Davidov.

2.1 OS PRESSUPOSTOS DA TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL E DA TEORIA DA ATIVIDADE DE ESTUDO

Em seu trabalho, Fiorentini (1995) elenca oito tendências pedagógicas de ensino da Matemática. São elas: formalista clássica, formalista moderna, tecnicista e suas variações, empírico-ativista, construtivista, socioetnoculturalista, sociointeracionista semântica e histórico-crítica. Damazio e Rosa (2013), por sua vez, apontam que os critérios utilizados para caracterizar as tendências mencionadas anteriormente com tal *status* (tendência) precisam de um novo entendimento.

É no âmbito dessa discussão que os autores argumentam em favor da existência de uma tendência histórico-cultural. A justificativa é de que, sendo classificada ou não uma tendência, a Teoria Histórico-Cultural tem se apresentado como fundamento de pesquisa e estudo por vários grupos no cenário científico brasileiro e mundial. Além disso, a teoria tem contribuído para a reflexão sobre os mesmos objetos e as mesmas temáticas que abordam as tendências citadas.

Nesse sentido, conforme mencionado e justificado no capítulo anterior, salientamos que nossa base teórica é a Histórico-Cultural, cuja matriz se encontra no materialismo histórico e dialético. Ela tem grande importância para a organização do ensino de matemática, principalmente quando a referência é a Teoria do Ensino Desenvolvimental, adotada pelo grupo liderado por Davidov e Elkonin. Tal teoria parte do pressuposto de Vygotski (1993) de que o desenvolvimento do homem, bem como de suas funções psicológicas superiores, ocorre por meio da apropriação do conhecimento científico. De modo mais abrangente, a formação do ser humano é produto do desenvolvimento de relações sociais. Dito em outros termos, nas relações interpessoais, é que nos constituímos homem. Os autores em referência enfatizam que o desenvolvimento do gênero humano resulta dialeticamente das relações históricas, consolidadas pelas múltiplas mediações, sendo a atividade de trabalho o fator preponderante. Damazio e Rosa (2013, p. 50), sintetizam:

> Essa proposição teoriza a igualdade social como ponto de partida e de chegada da vida humana; não dicotomiza teoria-prática, concreto-abstrato, realidade-possibilidade. Também, prima pela formação humana em vez do utilitarismo do conhecimento matemático, isto é, com a prerrogativa eminentemente de utilização no campo profissional, futuro dos estudantes. Além disso, é coerente com os seus fundamentos, ao proceder à releitura constante de posicionamentos internos, sem perder de vista as intenções que a originaram e caracterizam seu desenvolvimento. O importante é que esse processo ocorre num coletivo de estudiosos desde sua gênese: Vygotski, Luria, Leontiev, Zaporózhets, Rubinstein, Galperin, Talyzina, Elkonin, Ananiev, Ilienkóv, Davidov, Rubtsov, Zankov, Kruteskii, Kalmykova e outros. Entre eles, há que se ressaltar, houve estudos relacionados ao desenvolvimento de pensamento conceitual matemático, como também a tradução para o processo educativo escolar.

Para Damazio e Rosa (2013), a teoria histórico-cultural visa explicar a vida social por meio das mudanças qualitativas que ocorrem nas formas especificamente humanas. Portanto, a base ou o ponto de partida da investigação histórica – cujo objetivo é a compreensão do passado dos indivíduos e da sociedade na qual estes estão inseridos – é a prática social, o conhecimento até então apropriado e as funções psicológicas elementares.

Vygotski (1993), em uma de suas pesquisas, tratou do desenvolvimento do pensamento conceitual (espontâneo e científico), considerado uma das funções superiores que coloca o homem em processo de devir. Segundo o autor, o papel da apropriação do conhecimento científico para a promoção do desenvolvimento do homem e de suas funções psicológicas superiores é de extrema importância. Nesse sentido, considera a aprendizagem como uma necessidade universal para que os indivíduos desenvolvam as características humanas não naturais, formadas historicamente. Por isso, Nascimento, Prestes e Tunes (2015) afirmam que o desenvolvimento dos conceitos científicos é uma questão primordial no ensino, pois é na escola que se apresentam as condições para a formação dos processos de generalização e abstração teórica.

Rubinstein (1977), no que diz respeito à relação entre formação e desenvolvimento, afirma que a criança não se desenvolve primeiro e forma-se depois, ou o contrário. O que ocorre é uma relação na qual a criança vai se desenvolvendo à medida que vai se formando e forma-se à medida que vai se desenvolvendo.

De acordo com Vigotski (2009), as relações intrapsíquicas – atividade individual – constituem-se a partir das relações interpsíquicas – atividade coletiva. Dessa forma, a apropriação dos conceitos científicos e das significações, essenciais ao desenvolvimento das funções psicológicas e do homem em si, dá-se por meio da apropriação das experiências sociais, produzidas historicamente pela humanidade. Assim, de acordo com Moura (2010, p. 208), "[...] podemos entender que a aprendizagem não ocorre espontaneamente e apenas a partir das condições biológicas do sujeito, mas mediada culturalmente".

Cabe destacar que Vigotski (2018) não exclui o fato de que há uma relação entre um determinado nível de desenvolvimento e a capacidade potencial de aprendizagem do estudante:

> É uma comprovação empírica, frequentemente verificada e indiscutível, que a aprendizagem deve ser coerente com o nível de desenvolvimento da criança. Não é necessário, absolutamente, proceder a provas e demonstrar que só em determinada idade pode-se começar a ensinar gramática, que só em determinada idade o aluno é capaz de aprender álgebra. [...] Todavia, recentemente, a atenção concentrou-se no fato de que quando se pretende definir a efetiva relação entre processo de desenvolvimento e capacidade potencial de aprendizagem, não podemos limitar-nos a um único nível de desenvolvimento. Tem de se determinar pelo menos *dois níveis de desenvolvimento* de uma criança, já que, se não, não se conseguirá encontrar a relação entre desenvolvimento e capacidade potencial de aprendizagem em cada caso específico. (VIGOTSKI, 2018, p. 111).

O autor considera que a aprendizagem não é, em si mesma, desenvolvimento. Entretanto, sem a aprendizagem, não é possível a ativação de processos que o determinam.

> Tal como um filho de surdos-mudos, que não ouve falar à sua volta, continua mudo apesar de todos os requisitos inatos necessários ao desenvolvimento da linguagem e não desenvolve as funções mentais superiores ligadas à linguagem, assim todo processo de aprendizagem é uma fonte de desenvolvimento que ativa numerosos processos, que não poderiam desenvolver-se por si mesmos sem a aprendizagem. (VIGOTSKI, 2018, p. 115).

De forma sintetizada e, de acordo com a afirmação de Rubinstein (1977), Vigostski (2018) traz que existe uma dependência recíproca, complexa, dinâmica e que não pode ser explicada por uma única fórmula especulativa apriorística, entre o processo de desenvolvimento e a aprendizagem.

Dessa forma, o autor faz uma reflexão acerca do compromisso da educação escolar com a aprendizagem e, simultaneamente, com o desenvolvimento da criança:

> Cada matéria escolar tem uma relação própria com o curso do desenvolvimento da criança, relação que muda com a passagem da criança de uma etapa para outra. Isso obriga a reexaminar todo o problema das disciplinas formais, ou seja, do papel e da importância de cada matéria no posterior desenvolvimento psicointelectual da criança. (VIGOTSKI, 2018, p. 117).

Nessa relação de unidade entre aprendizagem e desenvolvimento, os conceitos científicos apresentam forte ligação com o significado das palavras, além de estarem relacionados com o desenvolvimento de outras funções superiores, como: atenção voluntária, memória lógica, abstração, comparação e distinção. Eles são componentes que se relacionam diretamente com o pensamento teórico, que cabe à instrução escolar desenvolver nos estudantes.

De acordo com Vigotski (2009), na idade escolar, o desenvolvimento dos conceitos científicos tem imensa importância, se não primordial. Assim, a escola assume um papel importante no desenvolvimento da criança, visto que a educação escolar, desde os primeiros anos – com o ensino da leitura, da escrita e do cálculo, que normalmente ocorrem nos dois anos iniciais do ensino fundamental –, permite que ela dê saltos qualitativos em seu desenvolvimento psicológico e cultural e proporciona-lhe a apropriação das produções culturais humanas.

Davídov (1988) destaca, porém, não ser suficiente que o estudante tenha apenas acesso à escola e nela permaneça por um determinado tempo de sua vida. É fundamental que o aluno esteja e sinta-se em atividade de estudo. Segundo Galperin, Zaporózhets e Elkonin (1987, p. 306, tradução nossa)[3], "[...] as tarefas colocadas à escola – elevar a instrução ao nível científico-técnico atual, levar a um nível significativamente superior a qualidade da assimilação – coloca à psicologia um dos problemas mais difíceis: dirigir a assimilação dos novos conhecimentos e habilidades". Para tanto, o método a ser adotado no ensino tem como princípio a prioridade da solução de tarefas cognitivas, que coloquem o estudante em ação investigativa, de modo a assegurar a apropriação da experiência criadora.

A. N. Leontiev, S. L. Rubinstein e diversos grupos compostos por seus colaboradores desenvolveram um importante trabalho teórico no qual se destaca a Teoria da Atividade, por se constituir uma grande contribuição à teoria Histórico-Cultural. A base dessa teoria se encontra na interdependência entre a atividade e o desenvolvimento do homem. Segundo Leontiev (1978), "[...] o homem nasce homem enquanto espécie, pois em seu processo de hominização evoluiu biologicamente e desenvolveu as características que assim o constituem". Porém, ainda segundo o autor, o processo de hominização é que torna – o homem espécie – em homem humano.

Cabe ressaltar que o processo de hominização constitui um movimento dialético de produção-apropriação-objetivação da cultura, uma vez que, ao se apropriar do que a humanidade já produziu, o homem internaliza a cultura e humaniza-se. Do mesmo modo que, ao agir sobre e em determinado contexto, o homem se objetiva culturalmente na realidade, constituindo-a (LEONTIEV, 1978). Segundo Franco e Longarezi (2017, p. 26),

---

[3] Texto original: "[…] las tareas planteadas a la escuela – elevar la instrucción al nível científico-técnico actual, llevar a um nível significativamente superior la calidad de la asimilación – plantea a la psicologia uno de los problemas más difíciles: dirigir la asimilación de los nuevos conocimentos y habilidades".

> [...] a relação entre o homem e o mundo objetivo se dá pela atividade, não de forma mecânica como pura reação, mas de forma ativa: atua sobre o homem e o mundo objetivo transformando não apenas os objetos, mas também a si próprio, numa dupla relação de constituição.

Leontiev (1978) desenvolveu a Teoria da Atividade com base no paradigma da produção material – seguindo a interpretação marxista do desenvolvimento humano – e destaca o papel do trabalho na formação da consciência. Para o autor, as atividades humanas têm como qualidade especial e característica o fato de serem sempre sociais. Assim, tem-se que toda atividade humana surge de acordo com determinadas condições e que elas são resultado das relações que os homens estabelecem entre si ao longo da história.

De acordo com Leontiev (1978), a consciência é dinâmica e passou por várias transformações ao longo do desenvolvimento da espécie humana, influenciadas pelas atividades e suas respectivas relações, as quais as movimentam. Dessa forma, pode-se afirmar que a consciência é constituída socialmente e que o seu estudo se faz necessário.

O autor defende a ideia de que a origem das funções psíquicas humanas ocorre no processo em que a atividade externa é transformada em atividade interna, o que ocorre apenas por meio da atividade do homem nas relações sociais e com a natureza. Além disso, segundo Franco e Longarezi (2017, p. 97), “[...] o que permite ao homem passar da consciência social para a individual é o seu processo de apropriação dos conhecimentos humanos produzidos [...] pelas gerações que o precederam, e que ocorre mediante sua atividade em determinado contexto histórico e social”.

Segundo Damazio e Rosa (2013), a característica ímpar do homem de “ser social” explica a estrutura comum da sua atividade externa, bem como a da sua atividade interna. Ambas são determinadas por *motivos* que levam o homem a se colocar em atividade, por *fins* a serem alcançados. Além disso, elas requerem a integração de determinadas *ações* que são executadas por *operações*.

Essa estrutura da atividade, determinada por Leontiev (1978), recebe de Davydov (1999) outros elementos conceituais: desejos, necessidades, emoções, ações, motivos para as ações, meios usados para as ações, planos (perceptual, mnemônico, pensamento criativo), que se referem tanto à cognição quanto à vontade (DAMAZIO; ROSA, 2013, p. 40).

É preciso destacar que não é qualquer atividade que estabelece o desenvolvimento psíquico do homem. Para isso, Leontiev (1978) aponta o conceito de atividade guia. Esta é a atividade mais importante que o homem realiza em determinado período, dependendo da função social que assume. Portanto, é a atividade guia do seu desenvolvimento, sendo que as outras apresentam um caráter subsidiário em relação à principal. É nesse movimento da atividade humana que ocorre o processo de produção-apropriação-objetivação da cultura e que o homem espécie se transforma em homem humano.

A atividade guia determina as transformações mais importantes nos processos psíquicos e nos traços psicológicos da personalidade do homem, que potencializam o desenvolvimento. Leontiev (1978) destaca três atividades guias que caracterizam o desenvolvimento humano: o jogo, na infância pré-escolar; o estudo, na idade escolar; e o trabalho, na idade adulta.

De acordo com Damazio e Rosa (2013), Elkonin continuou os estudos de Leontiev e estabeleceu como principais estágios de desenvolvimento/atividade guia a comunicação emocional do bebê, a atividade objetal manipulatória, o jogo de papéis, a atividade de estudo, a comunicação íntima pessoal e a atividade profissional.

Davydov (1999), por sua vez, estabelece os tipos de atividades desenvolvidas no curso da história do ser humano: o trabalho – que é tido como o gênero fundamental da atividade –, a atividade artística e a atividade no campo da moral, da lei e da religião. O autor também adota outro princípio básico para estabelecer as atividades que surgem no processo ontogenético ou reprodutivas: manipulatória do objeto, de brincadeira e estudo.

A fim de diferenciar os tipos de atividade que cada indivíduo realiza – dependendo do lugar que ocupa na sociedade e das condições e apropriações que lhe dão características particulares –, trazemos, por exemplo, o fato de que, no âmbito escolar, professores e estudantes ocupam lugares diferenciados nas relações sociais; dessa forma, a atividade guia de cada um também é distinta. Nesse caso, o ensino é a atividade do professor e o estudo caracteriza a atividade do estudante. Entretanto, mesmo com características próprias e componentes que assumem funções diferentes, as duas atividades estão interligadas e dirigem-se ao desenvolvimento de ambos (professor e aluno).

Leontiev (1978) destaca a importância de se compreender que, por meio da atividade, o homem tem domínio não somente de instrumentos materiais, mas, principalmente, de um sistema de significações constituído historicamente. Desse modo, as significações compõem a consciência social que, ao se transformar em consciência pessoal, constitui-se no sentido que o próprio sujeito atribui a elas. Nesse processo, a linguagem, o homem e a atividade social (coletiva) são de suma importância. É por meio da linguagem que o homem se apropria das significações sociais e atribui-lhes um sentido pessoal, associado a seus motivos e às suas necessidades.

Quando, na atividade, o motivo e o objeto coincidem, é nela que o homem atribui sentido pessoal às significações sociais. Por outro lado, se o significado social não coincide com o sentido pessoal, segundo o autor, cria-se uma situação altamente propícia à alienação. Além disso, para que a atividade se constitua de fato, é essencial que ela tenha origem em uma necessidade, que se constitui uma força interna.

> A primeira condição de toda a atividade é uma necessidade. Todavia, em si, a necessidade não pode determinar a orientação concreta de uma atividade, pois é apenas no objeto da atividade que ela encontra sua determinação: deve, por assim dizer, encontrar-se nele. Uma vez que a necessidade encontra a sua determinação no objeto (se "objetiva" nele), o dito objeto torna-se motivo da atividade, aquilo que o estimula. (LEONTIEV, *apud* FRANCO; LONGAREZI, 2017, p. 101).

De acordo com Leontiev (1978), a atividade não é estática. Sua dinamicidade se dá por meio da movimentação de seus componentes estruturais, que podem modificar suas funções. Por exemplo, se uma atividade perder seu motivo, transforma-se em ação; por outro lado, se uma ação ganha motivo, ela se transforma em atividade.

Ao tratar de que forma ocorre a mudança da atividade guia, Leontiev (2018) traz à tona questões referentes à maneira como o motivo caracteriza a diferença entre uma ação e uma atividade. Para o autor, não podemos chamar de atividade todos os processos, mas apenas aqueles que satisfazem uma necessidade especialmente humana nas relações entre o homem e o mundo.

Segundo Leontiev (2018, p. 68), "[...] por atividade, designamos os processos psicologicamente caracterizados por aquilo a que o processo, como um todo, se dirige (seu objeto), coincidindo sempre com o objetivo que estimula o sujeito a executar a atividade, isto é, o motivo".

Para exemplificar, o autor traz a seguinte situação: um estudante, que está se preparando para uma prova, lê um livro de história. Um colega desse estudante lhe diz que o livro não é absolutamente necessário para a avaliação. Dessa forma, pode ocorrer o seguinte: o estudante poderá, imediatamente, parar de ler o livro; ele poderá continuar a leitura; ou ele poderá parar de ler o livro, porém com relutância.

Observa-se que nos dois últimos casos o conteúdo do livro foi o motivo da leitura. Entretanto, na primeira situação descrita, fica evidente que a necessidade de ser aprovado na avaliação é que corresponde ao motivo da leitura, e não o conteúdo do livro em si. Ou seja, “[...] aquilo para o qual sua leitura se dirigia não coincidia com aquilo que o induzia a ler. Neste caso, por conseguinte, a leitura não era propriamente uma atividade. A atividade, neste caso, era a preparação para o exame” (LEONTIEV, 2018, p. 68).

Para o autor, a ação é um processo no qual o motivo e o objetivo não coincidem, mas que reside na atividade da qual faz parte. Além disso:

> Para que a ação surja e seja executada é necessário que seu objetivo apareça para o sujeito, em sua relação com o motivo da atividade da qual ele faz parte. [...] Esta relação também é refletida pelo sujeito de uma forma bastante precisa, a saber, na forma de conhecimento do objeto de ação como um alvo. O objeto de uma ação é, por conseguinte, nada mais que seu alvo direto reconhecido. (LEONTIEV, 2018, p. 69).

No exemplo apresentado anteriormente, considerando-a como uma ação, ou seja, o estudante parou imediatamente de ler o livro, temos que o objetivo (alvo) da leitura é o domínio de seu conteúdo e tem uma relação direta com o motivo da atividade (passar na avaliação).

Leontiev (2018) destaca ainda, como mencionado anteriormente, que há uma relação específica entre atividade e ação. “O motivo da atividade, sendo substituída, pode passar para o objeto (o alvo) da ação, com o resultado de que a ação é transformada em atividade” (LEONTIEV, 2018, p. 69). De acordo com o autor, é dessa forma que surgem todas as atividades e as novas relações com a realidade são estabelecidas. Ele afirma que esse processo de transformação é a base psicológica concreta sobre a qual as mudanças, na atividade guia, ocorrem e, dessa forma, as transições dos estágios de desenvolvimento humano.

A estruturação da atividade e a caracterização daquela considerada guia em um determinado estágio de desenvolvimento têm ligação com o nosso objeto de pesquisa, isto é, o modo de organização do ensino em uma perspectiva desenvolvimental. Essa conexão está justamente na preocupação de vincular a organização do ensino para uma especificidade conceitual da matemática – conceito teórico de equação do primeiro grau – no contexto de uma das atividades guia, em específico: a Atividade de Estudo. Para compreendermos melhor essa atividade e os seus pressupostos para a organização do ensino – com base nessa teoria e em Davidov –, trazemos aqui a afirmação do autor durante um discurso aos membros da Associação de Aprendizagem Desenvolvimental de Letônia em agosto de 1996. Na oportunidade, fez a afirmação: sem entender o que é atividade, no sentido filosófico e psicológico, não é possível entender atividade de estudo. Isso porque existem muitos tipos diferentes de atividade e a atividade de estudo é apenas um deles (DAVIDOV, 2019).

Dessa forma, o autor traz que a teoria da atividade surgiu na antiguidade e que os filósofos medievais contribuíram de forma significativa para o seu desenvolvimento. Entretanto, foram os filósofos alemães Kant, Fichte, Schelling e, principalmente, Hegel que criaram a teoria, no âmbito verdadeiramente filosófico.

Ele afirma que Marx e Engels eram estudiosos de Hegel e que adotaram o conceito de atividade da filosofia hegeliana, cuja origem tem caráter filosófico e lógico. Além disso, desde o início da década de 1930, na União Soviética, psicólogos com uma formação teórica consolidada, como Sergei Leonidovich Rubinstein e Aleksey Nikolaevich Leontiev, começaram a trabalhar com o conceito de atividade e atribuíram à sua compreensão filosófica, sua interpretação psicológica e pedagógica (DAVIDOV, 2019).

Nessa relação inclusiva da concepção filosófica, psicológica e pedagógica, vale destacar algo de extrema importância: a questão de que nem todas as ações realizadas pelas pessoas podem ser consideradas atividade. De acordo com Davidov (2019), uma atividade só pode ser chamada como tal quando está, necessariamente, relacionada com uma transformação substancial, a depender das circunstâncias contextuais, do objeto, da pessoa e da realidade social a qual pertence. Dessa forma, consideramos que há atividade de fato quando há uma transformação significativa da situação, quer do objeto, quer a criação de algo novo.

> Em nossa vida cotidiana, estamos transformando, mudando algo, não apenas alterando-o externamente, mas modificando algo de forma significativa, criando novos objetos, imagens e atos genuinamente criativos; no entanto, concordamos que esta porcentagem é muito pequena na vida humana. Vivemos de acordo com os hábitos

> estabelecidos desde a infância, que recebemos nas novas condições de vida. (DAVIDOV, 2019, p. 250).

Vale o acréscimo do autor de que as relações pertinentes à vida cotidiana e com os hábitos, que não requerem uma transformação do sujeito e da realidade social, não se constituem uma atividade tipicamente humana.

Davidov (2019), ao afirmar o caráter transformativo da atividade, traz a componente tarefa como célula da Atividade de Estudo. Sua conclusão é de que a Atividade de Estudo se caracteriza pela transformação do material didático que, por sua vez, é a solução da tarefa de estudo. Além disso, o autor ressalta a transformação do próprio sujeito como sendo a finalidade dessa atividade guia.

Tal transformação só é possível com a definição de ações objetais, cuja análise e cujo desenvolvimento propiciarão a revelação, por parte dos estudantes, da relação genética essencial do conceito em processo de apropriação (DAVÍDOV, 1988). Isso porque "[...] a compreensão das tarefas de estudo pelo estudante está associada à generalização teórica, sendo o conteúdo da atividade de estudo, as formas elevadas da consciência social – como a ciência, a arte e a ética – ou seja, o conhecimento teórico" (MOURA *et al.*, 2010, p. 209-210).

Nesse sentido, Búrigo (2015), com base em Davídov (1988), salienta que somente a presença do aluno na escola não garante que ele desenvolva a necessidade do conhecimento teórico e, como consequência, encontre-se em atividade de estudo. Davídov (1988) afirma que essa necessidade só se torna emergente por meio de uma organização do ensino constituída pelo cumprimento de tarefas de estudo. Essas, por sua vez, requerem ações de estudo específicas, desenvolvidas por meio de tarefas particulares e operações. "Subjacente a essa estrutura está o conteúdo, isto é, o conhecimento teórico" (BÚRIGO, 2015, p. 50)[4].

Davídov e Slobódchikov (1991) trazem a análise das condições de origem dos conhecimentos e o domínio dos procedimentos generalizados de sua obtenção realizados pelos alunos como uma exigência proporcionada pelas tarefas de estudo para a organização correta dessa atividade guia de estudo.

---

[4]Mais adiante, serão apresentadas as exigências da tarefa de estudo proposta aos estudantes, bem como as seis ações de estudo, por meio das quais as tarefas de estudo são solucionadas.

De acordo com Davýdov (1982), no que se refere à disciplina de Matemática, a tarefa de estudo para o Ensino Fundamental é: possibilitar ao aluno uma compreensão, em nível teórico, do conceito de número e suas operações como uma relação entre grandezas. Nesse âmbito, Davídov (1988, p. 209, tradução nossa) definiu um sistema de quatro tarefas de estudo para os anos iniciais do ensino escolar. São elas:

> 1) Introdução dos alunos na esfera das relações entre grandezas: formação do conceito abstrato de grandeza matemática;
> 2) Demonstração às crianças da relação múltipla das grandezas como forma geral do número: formação do conceito abstrato de número e da compreensão da inter-relação fundamental entre seus componentes (o número deriva da relação múltipla das grandezas);
> 3) Introdução sucessiva dos alunos na área dos diferentes tipos particulares de números (naturais, quebrados, negativos): formação dos conceitos sobre esses números como uma das manifestações da relação múltipla geral das grandezas em determinadas condições concretas;
> 4) Demonstração aos alunos do caráter unívoco da estrutura da operação matemática (se se conhece o valor dos elementos da operação se pode determinar univocamente o valor do terceiro elemento): formação da compreensão sobre a inter-relação dos elementos nas ações aritméticas fundamentais.

Segundo o autor, a primeira tarefa de estudo mencionada anteriormente exige dos alunos a diferenciação, mediante ações objetais específicas, de três relações entre os objetos (igual, maior e menor). Posteriormente, os estudantes utilizam letras para assimilarem essas relações, o que permite o estudo das propriedades das relações de igualdade e desigualdade em sua "forma pura".

O conteúdo da segunda tarefa apresentada, de acordo com Davídov (1988), é fazer com que os alunos assimilem a forma geral de número por meio da definição da relação múltipla das grandezas, na qual uma é a grandeza a ser medida, e a outra, a unidade de medida utilizada.

Para o autor, no planejamento das outras tarefas de estudo, situações que exigem da criança a utilização de uma série de medidas em sucessivo aumento são criadas pelo professor. Dessa forma, espera-se que o aluno desenvolva a necessidade de estabelecer a relação permanente entre a dimensão da próxima medida e a anterior. O registro das medições assume a forma de um número posicional, no qual a dependência do valor da relação permanente das medidas pode ser referida em qualquer sistema de cálculo.

> [...] em algumas situações a medida pode não caber no objeto um número inteiro de vezes. Então é necessário recorrer não ao seu aumento (como foi feito até então), mas à sua diminuição. O resultado das ações de medição que corresponde a essas situações é escrito por meio de um número (racional). A modificação posterior e o enriquecimento da área objetal na qual atuam os alunos (por exemplo, a familiarização com as grandezas vetoriais) permite às crianças, durante o desenvolvimento das ações de medição, denominar seus resultados com ajuda de um número positivo ou negativo [...]. A passagem dos estudantes desse estudo das propriedades gerais da grandeza para a diferenciação de seus tipos particulares, que possuem forma de número (natural, posicional, racional, negativo, etc.), é a linha principal na estrutura de todo o ensino experimental da Matemática. Ao mesmo tempo, dessa linha se desprendem numerosas ramificações ligadas a determinadas propriedades das relações diferenciadas que podem ser a base para construir novos conceitos. (DAVÍDOV, 1988, p. 210-211, tradução nossa).

Nesse sentido, objetivando verificar o modo pelo qual os alunos aprendem na escola e quais as principais características da Atividade de Estudo, Davidov, em colaboração com Daniil Borisovich Elkonin, realizou uma pesquisa no final da década de 1950. A pesquisa ocorreu em escolas consideradas boas e com bons professores e permitiu a elaboração da conclusão de que não havia Atividade de Estudo, uma vez que as crianças não produziam transformações significativas no material didático. Por consequência dessa conclusão, entenderam que deveriam ser construídas as condições especiais para o desenvolvimento da Atividade de Estudo. Por isso, optaram pela criação de instituições educacionais experimentais, como a escola 91ª, em Moscou.

Em tais escolas, segundo Elkonin (2019), os resultados da pesquisa – por decorrência dos estudos experimentais – mostraram que as consequências da reorganização radical da metodologia de aprendizagem foram: o aumento de sua eficácia e do volume do material que pode ser assimilado.

De acordo com Davidov (2019), elementos da Atividade de Estudo existiam desde os antigos ginásios e as universidades medievais, mas seu conceito ainda não. Não havia nenhuma teoria, pois não existia essa demanda. Entretanto, essa teoria se tornou necessária. Isso porque, ainda segundo o autor, ela é essencial para que ocorra um bom desenvolvimento psíquico das crianças nas aulas no ensino fundamental.

Para Elkonin (2019, p. 141), "[...] a Atividade de Estudo é fundamental na idade escolar". O autor faz tal afirmação com base em duas questões: a primeira se refere ao fato de que é por intermédio da Atividade de Estudo que se realizam as relações básicas da criança com a sociedade, e a segunda questão se refere ao entendimento de que, na escola, ocorrem as formações das qualidades fundamentais da personalidade da criança de idade escolar e dos distintos processos psíquicos.

Ainda segundo Elkonin (2019), o estudo é a atividade guia na vida escolar do aluno e, dessa forma, a Atividade de Estudo assume um papel importante no que diz respeito ao desenvolvimento da capacidade intelectual do aluno e na aquisição de novos conhecimentos durante o seu período escolar.

> [...] o ensino e a educação constituem as formas universais do desenvolvimento psíquico das crianças; nelas se expressa a colaboração entre os adultos e as crianças, orientada de modo que elas se apropriem das riquezas da cultura material e espiritual, elaboradas pela humanidade. O ensino e a educação são os meios com que os adultos organizam a atividade das crianças, graças a tal realização elas reproduzem em si as necessidades surgidas historicamente, indispensáveis para a solução exitosa das diversas tarefas da vida produtiva e cívica das pessoas. (DAVÍDOV, 1988, p. 243).

Elkonin (2019) nos apresenta a ideia de que na Atividade de Estudo a criança usa e aplica os conceitos científicos com a orientação do professor, mas não promove qualquer alteração no sistema conceitual. Ou seja, o fato de o aluno interagir com os conceitos científicos não muda a ciência como um todo. O que ocorre na Atividade de Estudo é a transformação do próprio aluno, o seu desenvolvimento.

No geral, pode-se afirmar que as modificações ocasionadas no estudante correspondem à aquisição das novas habilidades e dos conhecimentos. Isso caracteriza uma atividade de autotransformação, na qual o produto são as alterações que acontecem no próprio sujeito durante a sua execução. Entretanto, na Atividade de Estudo, também são produzidos resultados materiais. Por exemplo, se o aluno está escrevendo uma redação, o produto material é o texto escrito (ELKONIN, 2019).

Segundo Davidov (2019), apenas na Atividade de Estudo é que os processos de assimilação intervêm como seu objeto direto e como sua tarefa. Nela, o objetivo principal é a assimilação dos conceitos científicos.

Trazemos aqui algo de extrema importância no que diz respeito à Atividade de Estudo: seu conteúdo e sua estrutura, segundo Davidov. Para autor, o desenvolvimento dos interesses e da dinâmica da atitude dos alunos depende do processo de formação da Atividade de Estudo. Por isso, o problema da sua estruturação e das características dos seus distintos componentes tem importância especial para a psicologia pedagógica.

De acordo com o autor, é importante destacar que a caracterização da Atividade de Estudo como desenvolvimental está no seu conteúdo, o teórico em sua essência. Ele enfatiza, ainda, que se baseia em dois fatos quando fala sobre a conexão interna entre a Atividade de Estudo e o conhecimento teórico. O primeiro fato se refere aos resultados da análise da educação em massa, e o segundo, refere-se às considerações das particularidades de apresentação do conteúdo das formas superiores da consciência social como objeto a ser assimilado pelo indivíduo.

Para Davidov (2019), a Atividade de Estudo dos alunos dos anos iniciais do nível fundamental é desenvolvida de acordo com o método de exposição do conhecimento científico. Esse, por sua vez, ocorre pelo procedimento de ascensão do abstrato ao concreto, no qual as abstrações e generalizações substanciais e os conceitos teóricos são utilizados. Segundo o autor, o pensamento desses alunos não é idêntico ao pensamento dos artistas e cientistas, por exemplo, mesmo que apresente algumas características semelhantes. Isso porque os alunos não criam conceitos, valores e normas de moralidade social, mas, sim, assimilam-nos durante o processo da Atividade de Estudo. Entretanto, eles realizam, nesse processo, ações mentais por meio das quais os produtos da cultura espiritual foram desenvolvidos durante o percurso histórico. “Assim como outros tipos de atividade reprodutiva, a Atividade de Estudo configura uma das vias de realização da unidade do histórico e o lógico no desenvolvimento da cultura humana" (DAVIDOV, 2019, p. 217).

A fim de caracterizar o movimento de ascensão do pensamento abstrato ao concreto por meio da Atividade de Estudo, Davidov (2019) traz como exemplo o início de uma nova disciplina. Nela, os estudantes fazem a análise do conteúdo do material didático, identificam as relações gerais iniciais com o auxílio do professor e descobrem, ao mesmo tempo, que essas relações gerais iniciais se manifestam em várias outras relações particulares presentes no material didático apresentado.

> Ao fixar a relação geral inicial separada, por intermédio dos signos, os estudantes constroem a abstração do conteúdo de uma determinada disciplina. Ao continuarem seus estudos, descobrem a vinculação regular dessa relação inicial com suas diferentes manifestações e obtêm a generalização substancial do objeto. (DAVIDOV, 2019, p. 217).

O autor salienta que, posteriormente e em colaboração com o professor, os alunos usam as abstrações e generalizações do conceito para que possam deduzir outras abstrações consideradas mais específicas e, também, para uni-las ao objeto integral estudado. No momento em que os estudantes utilizam as abstrações e generalizações do conceito para deduzirem essas abstrações mais específicas, eles iniciam o processo de conversão das estruturas mentais iniciais em conceitos que contêm certa "célula" da disciplina. Essa, por sua vez, posteriormente, é utilizada como princípio geral que orienta os alunos durante toda a diversidade do material didático apresentado, assimilado em forma conceitual por meio da ascensão do abstrato ao concreto.

> O caminho da assimilação do conhecimento tem duas características. Em primeiro lugar, o pensamento do aluno se move do geral para o particular (os alunos buscam a "célula" primária do material didático e, em seguida, usa-a como guia, para deduzir as relações particulares da disciplina). Em segundo lugar, a assimilação está orientada para que os alunos revelem as condições de origem dos conceitos por eles assimilados. Os alunos determinam, primeiramente, a relação geral inicial em uma determinada área e, em seguida, constroem

> sobre sua base a generalização substancial e, devido a isso, reconhecem o conteúdo da "célula" da disciplina estudada. No final, esse processo se transforma em meio para deduzir as relações particulares, quer dizer, em conceitos. (DAVIDOV, 2019, p. 218).

Mencionamos anteriormente que na idade escolar a atividade guia, entre as outras também realizadas pela criança, é a Atividade de Estudo e que, durante a sua formação, o aluno desenvolve uma importante neoestrutura psicológica: as bases da consciência e do pensamento teórico, além do desenvolvimento das ações mentais associadas a elas (reflexão, análise e planejamento) (DAVIDOV, 2019). Sendo assim, discorreremos agora sobre cada um dos elementos constituintes dessa importante atividade a fim de explicitarmos a contribuição de cada um durante o desenvolvimento da Atividade de Estudo e, consequentemente, do aluno em si.

De acordo com Davídov e Márkova (1987), a estrutura da Atividade de Estudo foi submetida a uma investigação detalhada durante vários anos. De acordo com Davidov (2019), os componentes que a compõem são: necessidade, motivo, tarefa, ações e operações.

Inicialmente, o destaque é para o componente *necessidade*. Conforme Davidov (2019), a necessidade de estudo no aluno em idade escolar surge, ainda, na criança de idade pré-escolar por meio do processo de desenvolvimento do "jogo de papéis". Nessa atividade anterior à Atividade de Estudo, a imaginação e a função simbólica são intensamente formadas na criança. Além disso, para o cumprimento de determinados papéis pela criança, são necessários "[...] diversos conhecimentos relativos ao mundo circundante, sobre os adultos e, também, a capacidade para orientar-se levando em consideração o seu conteúdo" (DAVIDOV, 2019, p. 219). Acrescenta que:

> O jogo de papéis contribui para o surgimento de interesses cognitivos na criança, mas não os pode satisfazer completamente. Portanto, os alunos das séries iniciais do nível fundamental tendem a satisfazer seus interesses cognitivos comunicando-se com os adultos, observando o mundo ao seu redor, extraindo várias informações de livros, revistas e filmes que estão disponíveis. Gradualmente, os pré-escolares começam a precisar de fontes mais amplas de conhecimento do

> que aquelas oferecidas pela vida diária e pelas brincadeiras. (DAVIDOV, 2019, p. 219-220).

Isso significa que a criança sente a necessidade de assumir um novo lugar nas relações sociais às quais pertence, ou seja, que os limites presentes no período infantil já não satisfazem mais suas necessidades e que, dessa forma, precisa assumir uma nova posição social. A Atividade de Estudo, então, fornece o material que satisfaz seus interesses cognitivos que, segundo Davidov (2019), atuam como premissas psicológicas para que, assim, surja a necessidade de assimilar o conhecimento teórico.

Ainda de acordo com o autor, a criança não experimenta a necessidade do conhecimento teórico como base psicológica da Atividade de Estudo no início da vida escolar. Ela surge durante o processo de assimilação real do conhecimento teórico elementar, com o auxílio do professor, na resolução de problemas das ações de estudo mais simples, dirigidas à solução das tarefas de estudo. Por isso, "[...] o conhecimento teórico, ao se constituir como o conteúdo da Atividade de Estudo é, ao mesmo tempo, sua necessidade" (DAVIDOV, 2019, p. 220).

A concretização da formação da necessidade da Atividade de Estudo nos alunos das séries iniciais do ensino fundamental se encontra nos diversos *motivos* que exigem da criança a realização de ações de estudo. Dessa forma, pode-se dizer que é a necessidade da Atividade de Estudo que induz o aluno a assimilar o conhecimento teórico. Por outra parte, os motivos das ações de estudo incentivam os alunos a assimilarem os modos de reprodução desse conhecimento teórico. Os motivos, segundo Davidov (2019), têm como função assimilar os modos de reprodução dos conhecimentos teóricos por meio das ações de estudo voltadas para a resolução das tarefas de estudo.

A *tarefa de estudo,* por sua vez, é a unidade do objetivo da ação e das condições para a sua realização. Quando os alunos resolvem a tarefa de estudo, eles encontram a origem da "célula" do objeto central que está sendo estudado e a usam para reproduzir mentalmente esse objeto. Isso significa que, ao resolverem a tarefa de estudo, eles realizam um certo tipo de "[...] microciclo de ascensão do abstrato ao concreto como forma de assimilação do conhecimento teórico" (DAVIDOV, 2019, p. 221).

Davidov (2019, p. 221) elencou três critérios pertinentes à tarefa de estudo proposta aos alunos pelo professor:

> 1) A análise do material objetal com o objetivo de descobrir nele alguma relação geral que

> tenha uma conexão com várias manifestações desse material, ou seja, a construção da abstração e da generalização substancial do conteúdo;
> 2) A dedução, sobre a base da abstração e a generalização, das relações particulares do material dado e sua síntese em certo objeto integral, isto é, a identificação de uma "célula" e o objeto mental concreto;
> 3) O domínio, nesse processo analítico-sintético, do modo generalizado de ação do objeto estudado.

Cabe salientar que a tarefa de estudo é diferente, de forma significativa, de outras tarefas particulares. Quando o aluno resolve uma tarefa particular, significa que ele domina apenas os modos particulares dessa resolução. Entretanto, quando o aluno desenvolve a tarefa de estudo, ele aprende o seu modo generalizado de resolução, o que lhe permite dominar o modo generalizado de resolver tarefas particulares também.

Para que os alunos resolvam a tarefa de estudo, eles precisam realizar certas *ações*. Davidov (2019, p. 223) destaca as seis ações de estudo, a saber:

> 1) Transformação das condições da tarefa para detectar a relação universal do objeto de estudo;
> 2) Modelagem da relação diferenciada na forma objetal, gráfica e por intermédio de signos;
> 3) Transformação do modelo da relação para estudar suas propriedades em uma "forma pura";
> 4) A construção de um sistema de tarefas particulares que é resolvido por um modo generalizado;
> 5) Controle sobre a implementação das ações anteriores;
> 6) Avaliação da assimilação do modo generalizado como resultado da solução de determinada tarefa de estudo.

Com efeito, cabe destacar que cada uma das ações apresentadas anteriormente requer *operações* correspondentes. Além disso, dependendo das condições específicas para a solução de uma determinada tarefa de estudo, o conteúdo dessas operações muda. "A ação corresponde com a finalidade da tarefa e as operações com as condições dessa" (DAVIDOV, 2019, p. 224).

A primeira ação de estudo, transformação das condições da tarefa para detectar a relação universal do objeto de estudo, corresponde, de acordo com Davidov (2019), à principal ação entre as citadas anteriormente. Seu objetivo é encontrar alguma relação universal do objeto por meio da transformação das condições da tarefa de estudo, que deve se refletir no conceito teórico em questão.

> A busca de tal relação é o conteúdo da análise mental, que, em sua função de estudo, é o momento inicial do processo de formação do conceito necessário. Ao mesmo tempo, deve-se levar em consideração que a ação de estudo, em cuja base se encontra a análise mental, tem início na forma de transformação dos dados objetais da tarefa de estudo (esta ação mental no começo se realiza de maneira objetal-sensorial). (DAVIDOV, 2019, p. 224).

A segunda ação de estudo, ou seja, a modelagem da relação diferenciada na forma objetal, gráfica e por intermédio de signos, compreende os modelos de estudo. Cabe salientar que, segundo Davidov (2019), os modelos de estudo formam uma relação internamente necessária no que diz respeito ao processo de assimilação dos conhecimentos teóricos e aos modos generalizados de ação. Entretanto, ainda conforme o autor, é importante notar que nem toda representação pode ser considerada um modelo de estudo. Isso porque é necessário que a representação apresente a relação universal de algum objeto integral e garanta a sua análise posterior.

A terceira ação de estudo, a transformação do modelo da relação para estudar suas propriedades, caracteriza a transformação do modelo, a fim de estudar a relação universal do objeto. De acordo com Davidov (2019, p. 225):

> Nas condições da tarefa real essa relação pode estar "oculta" por muitas características particulares [...] no modelo, pelo contrário, essa relação se faz nítida e se pode dizer que aparece de forma "pura". [...] Trabalhar com esse modelo, aparece como o processo pelo qual se estudam as propriedades de abstração substancial da relação universal.

Dessa forma, a relação universal de todo o objeto estudado atua como uma base para a formação, nos estudantes, de um modo generalizado que permita a resolução da tarefa de estudo, ou seja, o conceito é formado por meio da "célula" inicial desse objeto de estudo.

A quarta ação de estudo, para Davidov (2019, p. 225), traduz que "[...] a objetividade da 'célula' em relação ao seu objeto é revelada quando uma variedade de suas manifestações particulares deriva dela". Com isso, a tarefa de estudo, com essa variedade de manifestações particulares derivadas da "célula" do objeto, é caracterizada "[...] por deduzir sobre sua base um sistema de diferentes tarefas particulares, cuja solução permite aos alunos concretizar um modo generalizado encontrado anteriormente e, portanto, especificar o conceito correspondente (célula)" (DAVIDOV, 2019, p. 225).

A quinta e a sexta ações de estudo dizem respeito, respectivamente, à ação de controle e à ação de avaliação. A ação de controle, para Davidov (2019), determina a correspondência de outras ações com as condições e, também, com as condições e exigências determinadas pela tarefa de estudo. Além disso, proporciona ao aluno, por meio da mudança da composição operacional das ações, descobrir sua relação com as características da tarefa de estudo que está resolvendo e, também, do resultado encontrado. Podemos dizer, dessa forma, que a ação de controle proporciona aos alunos a garantia da "escolha" das ações a serem utilizadas, bem como da forma correta de sua execução.

Para Elkonin (2019), o controle é um componente muito importante para a Atividade de Estudo e consiste no acompanhamento da coerência da execução das ações. O autor ainda nos chama a atenção para o controle apenas do resultado final obtido.

> Infelizmente constatamos que, na prática, não há controle na forma descrita anteriormente. Normalmente, observa-se apenas o controle do resultado final. [...] Esse tipo de controle não avalia: se o aluno fez todos os passos para chegar ao resultado final, se esses passos foram feitos de forma completa e na sequência certa. (ELKONIN, 2019, p. 166).

Ainda de acordo com o autor, no que se refere à ação de avaliação, seu principal objetivo é determinar se o aluno assimilou o modo generalizado de ação na resolução da tarefa de estudo e se tem condições de progredir para o próximo nível. Para Davidov (2019, p. 226), além de verificar essa assimilação, a avaliação

> [...] consiste no exame qualitativo substancial do resultado da assimilação (do modo generalizado e do conceito correspondente), em sua comparação com o objetivo. É a avaliação que 'informa' aos alunos se tem resolvido ou não a tarefa de estudo.

Além disso, o autor enfatiza que o cumprimento dessas duas últimas ações de estudo (controle e avaliação) necessita que a atenção dos estudantes esteja voltada para o conteúdo das ações e à análise de seus fundamentos, desde o ponto de vista da correspondência com o resultado que a tarefa de estudo propõe.

Expostas essas bases referentes à Teoria da Atividade, com especificidade para a Teoria da Atividade de Estudo, na seção seguinte, trataremos do sistema de ensino Elkonin-Davidov, cuja fundamentação se encontra nas teorias mencionadas anteriormente. Esse sistema, conforme veremos mais adiante, objetiva o desenvolvimento dos estudantes que, conforme Davidov (2019), deve estar focado na formação, entre os alunos, de uma atitude criativa em relação à Atividade de Estudo, a qual é considerada a finalidade da escola moderna.

2.2 O ENSINO DESENVOLVIMENTAL: SISTEMA ELKONIN-DAVIDOV

A fim de apresentar algumas características importantes do sistema de ensino Elkonin-Davidov, cabe destacar que utilizaremos como referências principais Davidov e trabalhos em coautoria, além de seus textos apresentados na obra de Puentes (2017, 2019a,b) e outros estudiosos brasileiros que se fundamentam nessa perspectiva teórica.

De acordo com Longarezi (2019), a perspectiva do ensino desenvolvimental pode ser caracterizada como um produto de quase 100 anos de trabalhos consolidados, em um contexto complexo, diverso e heterogêneo, e teve início com os primeiros estudos apresentados por Vigotski.

Puentes (2019a) traz que a Teoria do Ensino Desenvolvimental, também representada como Teoria da Aprendizagem Desenvolvimental, teve origem na ex-União Soviética, por volta da segunda metade de 1950, associada à pedagogia, filosofia, fisiologia e, principalmente, à psicologia histórico-cultural da atividade.

Além disso, Puentes (2017) afirma que o ensino desenvolvimental surgiu a partir de diferentes tendências constituídas durante a construção do sistema de ensino e da educação na sociedade socialista da URSS (União das Repúblicas Socialistas Soviéticas). Dessas tendências, decorreram duas concepções de ensino: a didática desenvolvimental da atividade e a didática desenvolvimental da personalidade.

Segundo o autor, é possível afirmar que a didática desenvolvimental da atividade – cuja matriz teórica tem como base as obras de Vigotski, Rubinstein e Leontiev – cresceu e consolidou-se durante décadas por meio de três sistemas didáticos distintos: sistema Galperin-Talízina, sistema Zankoviano e sistema Elkonin-Davidov. Este último, por sua vez, é o sistema mais reconhecido dentro e fora da ex-União Soviética. O fato de uma mesma concepção apresentar três sistemas didáticos diferentes decorre da interpretação distinta dos principais postulados dos autores que compõem a base teórica da didática desenvolvimental da atividade, sobretudo das obras de Vigotski.

Apesar das diferenças, Puentes (2017) salienta que há um ponto de intersecção entre os três sistemas didáticos, caracterizado pelas teses vigotskianas: "[...] o ensino adequado é o aspecto internamente essencial e universal do processo de desenvolvimento das características humanas" (PUENTES, 2017, p. 24) e "[...] a pedagogia não deve orientar-se em direção ao passado, mas na direção do futuro (do amanhã), do desenvolvimento [...]" (VYGOTSKY, 2010 *apud* PUENTES, 2017, p. 24).

O reconhecimento do sistema Elkonin-Davidov, em parte, deve-se às numerosas contribuições concretas que Vigotski efetuou nos planos teórico e prático com a elaboração de teorias como a psicologia da atividade de estudo, da aprendizagem da atividade de estudo, da generalização substantiva, do experimento didático-formativo, da modelagem didático-formativa, do diagnóstico, da formação de professores, da colaboração, entre outras. Além disso, essas teorias foram implementadas em uma ampla rede de escolas experimentais e, também, no sistema oficial de educação primária e média de diferentes países das ex-repúblicas soviéticas (PUENTES, 2019a).

O foco principal desse sistema, segundo o autor, é o desenvolvimento da teoria da Atividade de Estudo, cujo conteúdo principal é a autotransformação do sujeito por meio da formação do pensamento teórico. Este se constitui sobre a base da aprendizagem dos conceitos científicos e das ações mentais. Além disso, para o sistema Elkonin-Davidov, a base da aprendizagem que desenvolve está no conteúdo, do qual derivam os métodos (ou procedimentos) para a organização desse processo.

De acordo com Puentes (2017), D. B. Elkonin e V. V. Davidov – em colaboração com um grande grupo de cientistas e professores das cidades de Moscou, Kharkov, Kiev, Dushanbé, Tula, Ufá, Volgogrado, Tomsk, Togliatti, Taganrog, Riga, Médnoe, entre outras – desenvolveram as teses que são base para o sistema didático, fundamentados nas pesquisas de cunho teórico-experimentais desenvolvidas por mais de cinquenta anos.

Cunha (2019), tomando como base Kudryavtsev (2010), afirma que os pesquisadores que trabalhavam em conjunto com Davidov e Elkonin pesquisavam e buscavam elementos em diferentes cidades a fim de explicitarem a forma que a educação era praticada nas escolas russas. Com a análise feita, os cientistas verificaram que, nas instituições observadas, o ensino se baseava na memorização e aplicação de regras e fórmulas, ou seja, um ensino no qual a promoção do desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos não era possível.

Puentes (2017) elaborou um estudo de sistematização e periodização do sistema didático em questão. De acordo com o autor, pelo menos cinco etapas claramente definidas podem ser identificadas nessa periodização. São elas:

Etapa I (1958-1975): idealização, experimentação e concepção do sistema;

Etapa II (1975-1983): criação das condições para a universalização do sistema;

Etapa III (1983-1986): censura, persecução, dissolução e paralização do processo de implementação do sistema;

Etapa IV (1986-1994): implementação do sistema como alternativa oficial do Ministério de Educação;

Etapa V (1994-atualidade): internacionalização e consolidação do sistema.

Com base na pesquisa desenvolvida pelo autor, abordaremos alguns dos pontos principais de cada uma das etapas descritas anteriormente.

Na primeira etapa, compreendida entre os anos de 1958 e 1975, caracterizada como a etapa de idealização, experimentação e concepção do sistema, temos como referência principal Elkonin.

Cunha (2019), com base em Lazaretti (2011), traz que, em 1958, Elkonin assumiu a direção do Laboratório de Psicologia de Crianças em idade escolar no Instituto Científico de Psicologia Geral e Educacional da URSS da Academia das Ciências Pedagógicas devido à base desenvolvida por meio das experiências como professor dos anos iniciais da educação básica e como pesquisador na área da Psicologia. Além disso, segundo o autor, Elkonin, juntamente com Davidov, desenvolveu pesquisas sobre a Atividade de Estudo com crianças em idade escolar, as quais resultaram no trabalho denominado “Teoria da Atividade de Estudo”, que hoje se materializa no sistema didático Elkonin-Davidov.

De acordo com Puentes (2017), em setembro de 1959, além das pesquisas de laboratório, experimentos formativos passaram a ser aplicados no contexto escolar, sendo a Escola nº 91 (de Moscou) a pioneira na realização desse tipo de estudo. Os resultados iniciais dessas pesquisas foram publicados no decorrer de dois anos, assinados por Elkonin, e tratavam da gênese da teoria psicológica da atividade de estudo: “A experiência de pesquisa psicológica na classe experimental” (1960) e “Questões psicológicas da formação da atividade de estudo na idade escolar – séries iniciais” (1961).

Em 1960, Davidov substituiu Elkonin no cargo de diretor do Laboratório e, em 1963, a Escola nº 91 recebeu da Academia de Ciências Pedagógicas o *status* de instituição de ensino experimental. A partir de então, a proposta teórica avançou para além das fronteiras de Moscou e da própria Rússia, e novos laboratórios e grupos de pesquisa foram criados (PUENTES, 2017). Segundo o autor, nessa fase, o trabalho experimental foi realizado na escola primária – 1ª a 3ª séries – e, em algumas disciplinas específicas – idioma natal e literatura, matemática, física e biologia –, o experimento se estendeu às turmas da 4ª a 8ª séries.

Puentes (2017) afirma que nessa primeira etapa o sistema Elkonin-Davidov foi implementado em quatro repúblicas soviéticas distintas, sendo as escolas nº 91 (Moscou), nº 11 (Tula), nº 17 e nº 4 (Kharkov) a base da proposta elaborada.

O autor, tomando como referência Davidov (1986), traz que os objetivos das pesquisas realizadas nessa primeira etapa almejavam a determinação:

- do conteúdo e da estrutura da atividade de estudo;
- das bases lógico-psicológicas de estruturação das disciplinas escolares;
- das especificidades do desenvolvimento psíquico dos alunos em atividade de estudo;
- das reservas do desenvolvimento psíquico dos estudantes nos diferentes anos escolares;
- das particularidades de organização do experimento formativo.

Com essas determinações, a tese de Vigotski referente ao papel essencial que o ensino desempenha sobre o desenvolvimento psíquico das crianças poderia ser confirmada, além de expostas as leis psicológicas da didática desenvolvimental. “Os resultados validaram a importância da atividade de estudo, na idade escolar inicial, para o desenvolvimento psíquico do sujeito” (PUENTES, 2017, p. 29).

De forma sintetizada, podemos considerar que essa primeira etapa – que durou quase dezessete anos – é caracterizada pelo desenvolvimento de diversas pesquisas pelos grupos, em cinco frentes fundamentais (PUENTES, 2017):

1. Elaboração das bases de uma teoria psicológica de ensino, cuja responsabilidade ficou com D. B. Elkonin e alguns outros membros da equipe de Moscou, da qual Davidov fazia parte;
2. Elaboração de uma teoria da generalização substantiva, cujas premissas fundamentais se encontravam na tese de Davidov, defendida em 1970 e publicada em 1972;
3. Desenho de uma teoria didática de ensino, sob responsabilidade, principalmente, de Davidov, Bodanski – ensino de matemática – e de Repkin e outros membros do grupo de Kharkov, no ensino da língua russa;
4. Desenvolvimento de uma teoria do diagnóstico da atividade de estudo, cuja responsabilidade ficou a cargo de uma equipe liderada por A. Z. Zak;
5. Elaboração de um programa de formação de professores que atuavam nas escolas experimentais, elaborado por diferentes equipes dos diversos centros de pesquisa instalados em várias cidades.

A segunda etapa, compreendida entre os anos de 1975 e 1983, foi marcada pelo nível de apoio científico e didático-metodológico por meio do qual chegaram aos resultados teóricos e práticos do sistema Elkonin-Davidov. Juntamente com o sistema Zankoviano, a expressão em livros e materiais de apoio tornou o sistema uma proposta pedagógica diferente. Além disso, acresceram-se os dados coletados referentes ao desempenho dos alunos de classes experimentais – com ênfase no nível de desenvolvimento do pensamento teórico, da resolução de problemas e da autoaprendizagem – analisados em contraposição ao desenvolvimento expresso pelos alunos das classes convencionais. Para tanto, contou com o envolvimento de especialistas da área e do Ministério de Educação, que contribuíram para o aprimoramento do programa (PUENTES, 2017).

Em sua análise, Puentes (2017) revela que a segunda metade da década de 1970 se caracterizou por uma nova etapa na história do sistema Elkonin-Davidov. Teve início quando Mikhail A. Prokofev (Ministro da Educação da União Soviética e membro do Comitê Central do Partido Comunista) propôs que Davidov elaborasse um sistema de educação básica para o ensino primário, o qual compreendesse a concepção teórica elaborada por ele, Elkonin e o grupo de colaboradores.

A tarefa de elaboração da referida proposta pedagógica, destinada à escola de massa, estendeu-se por quase nove anos sem pausa, até sua interrupção em 1983 por questões políticas e pela morte de Elkonin – idealizador do projeto e incentivador de Davidov – em 1984. “Ao longo dessa década, o sistema Elkonin-Davidov preparou-se para assumir o papel de proposta alternativa de ensino oficial, junto com o sistema Zankoviano, frente ao domínio ainda forte da concepção tradicional” (PUENTES, 2017, p. 36).

Nessa etapa, a preparação de livros didáticos se constituiu na tarefa mais urgente e fundamental atribuída ao sistema. Segundo Puentes (2017), foram elaborados para a escola primária programas experimentais e um novo método de ensino contendo um sistema de tarefas de estudo e manuais metodológicos referentes ao ensino do idioma e de literatura russa, matemática, ciências, artes plásticas e música. Entretanto, a elaboração das orientações metodológicas e dos livros didáticos se sobressaiu nas áreas de matemática e idioma russo. Davidov (juntamente com S. F. Gorbov, G. G. Mikulin e O. V. Saveliev) e Bodanski (com alguns membros da equipe de Kharkov) ficaram responsáveis pelos materiais na área da matemática. Por sua vez, uma equipe de Kharkov – constituída por P. S. Zhedek, E. V. Vostorgova, Y. A. Levin e coordenada por V. V. Repkin – cuidou da preparação do material para o ensino da língua russa (PUENTES, 2017).

> Nos primeiros anos da década de 1980, a elaboração da versão inicial nos textos de apoio (orientações metodológicas e livros didáticos) em sua maior parte estava concluída. As condições para a introdução massiva do sistema de Ensino Desenvolvimental na escola pública estavam criadas, sobretudo, para a primeira, segunda e terceira séries do ensino primário. O conteúdo, a estrutura, e os modos de apresentação desse material respondiam aos princípios fundamentais da tarefa de estudo estabelecidos pela nova teoria. (PUENTES, 2017, p. 37).

Junto com o trabalho de elaboração do material didático e de orientação metodológica, os pesquisadores e membros do sistema continuaram suas pesquisas experimentais e a divulgação dos seus resultados nas diferentes cidades em que atuavam. Cabe destacar que, entre os anos de 1975 e 1982, alguns membros do grupo de Moscou, sob a orientação de Davidov, publicaram três obras importantes: *Психологические проблемы учебной деятельности школьника* (Problemas psicológicos da atividade de estudo dos estudantes, 1977), *Учебная Деятельность Моделирование* (Atividades de estudo e modelagem, 1981) e *Философско-психологические проблемы развивающего образования* (Problemas filosóficos-psicológicos do ensino desenvolvimental, 1981). Este último livro rapidamente provocou um movimento em torno dos representantes do sistema, principalmente em relação a Davidov. Tal movimento se dividia em duas direções. De um lado, aqueles que elogiavam a obra e viam nela a contribuição teórica para a educação. Contrariamente, estavam os opositores com o julgamento de que as fundamentações filosófica e psicológica do ensino desenvolvimental configuravam um desvio de conduta política e ideológica. “Venceu o grupo dos que faziam críticas demolidoras, acusações e geravam intrigas” (PUENTES, 2017, p. 39). Como consequência,

> [...] em 1982, os experimentos da escola primária nº 91 de Moscou foram proibidos e os professores passaram a trabalhar na ilegalidade. No ano de 1983, V. V. Davidov foi expulso do Instituto de Psicologia e do Partido Comunista e, em outubro de 1984, morre D. B. Elkonin. Devido a esse conjunto de acontecimentos negativos, o processo de implementação do sistema foi interrompido na escola de massa. Entretanto, o sistema estava pronto e aguardando uma oportunidade melhor. (PUENTES, 2017, p. 39).

A terceira etapa, compreendida entre os anos de 1982 e 1986, caracterizava-se como um período de perseguição, censura, dissolução e paralisação da implementação do sistema. As desavenças e suas decorrências, mencionadas anteriormente, marcaram um momento no qual o trabalho experimental realizado em Moscou foi interrompido quase que por completo. Além disso, o grupo de pesquisa foi dissolvido, o que também ocorreu nas cidades de Kharkov, Kiev, Tula, entre outras (PUENTES, 2017). As reações contrárias e os ataques destinados ao sistema de ensino desenvolvido por Elkonin, Davidov e colaboradores, conforme o autor em referência, perduraram por aproximadamente cinco anos. Eles eram oriundos de um número significativo de pessoas que se encontravam em órgãos governamentais, círculos científicos e até mesmo entre professores.

> Nenhum dos dois representantes principais do sistema, D. B. Elkonin e V. V. Davidov, parece ter publicado muito na União Soviética sobre a concepção de atividade de estudo no período entre 1982 e 1986. Os quatro trabalhos de Elkonin, escritos entre 1982 e 1984, abordam questões relacionadas à obra de A. N. Leontiev e L. S. Vigotski. Quanto a Davidov, conhecem-se apenas três textos publicados sobre a teoria desenvolvimental nesse período. (PUENTES, 2017, p. 41).

Entretanto, Davidov (1996) afirma que a escola primária nº 91 deu continuidade aos experimentos e que o grupo continuou a produzir textos teóricos, mesmo nessas condições envoltas em risco e censura, cujos resultados seriam publicados futuramente.

Libâneo e Freitas (2015) explicam que, no ano de 1986, o Partido Comunista reconheceu o erro cometido em relação a Davidov e o integrou novamente ao partido, à direção do Instituto de Psicologia e, também, às pesquisas experimentais. Com isso, o período marcado pela censura, pela perseguição, pela crítica e pelo trabalho na ilegalidade teve fim e marcou o começo de um novo momento. Iniciou a quarta etapa, caracterizada como a implementação de um sistema alternativo oficial do Ministério de Educação, que compreendeu o período entre os anos de 1986 e 1994. Seu objetivo, de acordo com Puentes (2017), era resolver os problemas de qualidade indesejada que o sistema tradicional de educação nacional apresentava.

O livro de Davidov *"Проблемы развивающего обучения: Опыт теоретического и экспериментального психологического исследования*" (Problemas do ensino desenvolvimental: pesquisa psicológica teórica e experimental, 1986) representou o fim de uma época de censura e crítica ideológica. Por extensão, deu início a uma nova era na história do ensino desenvolvimental e da teoria da atividade de estudo. Nessa nova etapa, o sistema Elkonin-Davidov passou a ter um maior reconhecimento na União Soviética e no exterior, principalmente na América, com a divulgação da obra em inglês e espanhol (PUENTES, 2017).

Segundo o autor, na quarta etapa houve um aumento significativo de professores interessados no ensino desenvolvimental. Esse aumento do interesse coincidiu com a definição de uma nova política de qualificação do ensino escolar determinada pelo Ministério da Educação, na qual o sistema Elkonin-Davidov cumpria com todos os requisitos exigidos. Além disso, o sistema também necessitava de auxílio financeiro e político do governo para constituir, ampliar e consolidar a teoria desenvolvida durante muitos anos.

> Os fundamentos do ensino desenvolvimental são a referência na organização do processo educativo em diferentes escolas: Escola nº 91 de Moscou, Escola nº 17 de Kharkov, Escola nº 11 de Tula, Escola nº 106 de Krasnoirsk, entre outras. De acordo com um relatório de pesquisa publicado por V. V. Davidov (1995), o sistema Elkonin-Davidov propôs novos programas para as disciplinas básicas do ensino primário. Também foram elaborados e propostos, nesta etapa, novos instrumentos diagnósticos, além daqueles elaborados na etapa anterior, com o objetivo de verificar o efeito do desenvolvimento do sistema Elkonin-Davidov nos estudantes da educação primária. Além desses materiais didáticos e de avaliação, foram redigidos outros livros e manuais pedagógicos. Criaram-se, ao mesmo tempo, diferentes centros de formação de professores em diferentes cidades, mas sabe-se muito pouco em relação à implementação dos programas de desenvolvimento profissional de professores. (PUENTES, 2017, p. 46).

Entretanto, a desintegração do socialismo na Europa, em 1989, e, posteriormente, da União Soviética, em 1991, ocasionou a paralisação parcial do sistema de ensino, além de cortes nos recursos humanos e financeiros. Isso ocorreu por consequência de um novo rumo político assumido, contrário ao que estava implantado desde a década de 1920. Puentes (2017) elenca três desafios principais que o sistema Elkonin-Davidov precisou enfrentar nesse período:

1) A desvinculação dos grupos de pesquisa, que tinham base fora da República, do Instituto de Inovação Pedagógica;

2) O fim da parceria com grupos e centros de pesquisa da Ucrânia, Letônia, etc., e a redução do auxílio institucional e financeiro dos grupos de pesquisa russos;

3) A necessidade de continuar com os programas de formação de professores do sistema e, também, com a elaboração dos materiais de instrução e metodologia.

Em relação ao primeiro desafio, Puentes (2017), com base em Repkin (1998), afirma não haver muito o que se fazer, pois os investimentos em educação foram reduzidos drasticamente. Além disso, a desintegração da União Soviética determinou novas bases para os vínculos entre os grupos. No que diz respeito à formação de professores, uma estratégia nomeada “atualização de envolvidos” foi desenvolvida. Nesse sentido, uma breve formação preliminar foi realizada e, em seguida, os professores começaram o trabalho em sala, de acordo com os programas do sistema Elkonin-Davidov.

No que se refere à elaboração dos materiais instrucionais-metodológicos, Puentes (2017) afirma que foram utilizados os textos produzidos na etapa anterior, fundamentados na experiência das escolas experimentais, sendo possível proceder com as correções de alguns problemas identificados. Além disso, novos textos didáticos e orientações metodológicas para professores foram elaborados. Contudo, nesse período,

> Redigiram-se programas para o ensino desenvolvimental do idioma russo e matemática para os quatro primeiros anos da educação. Aperfeiçoaram-se livros didáticos de russo e matemática, como também foram elaborados os novos. No total foram redigidos mais de 100 títulos entre programas, orientações metodológicas, livros didáticos, teste de treinamento e diagnóstico, etc. Esse número aumenta para, aproximadamente, 150 títulos ao se somar com o material produzido para o ensino de língua russa e matemática com o objetivo de dar continuidade aos estudos nos graus médios (5ª a 8ª séries). (PUENTES; CARDOSO; AMORIM, 2016 *apud* PUENTES, 2017, p. 47-48).

A quinta etapa (1994 – atualidade) foi/é marcada pela consolidação e internacionalização do sistema Elkonin-Davidov. Nela, os materiais produzidos anteriormente passaram a fazer parte do conjunto de manuais das escolas federais da Rússia e da Ucrânia.

De acordo com Puentes (2017), Davidov – em parceria com V. V. Repkin e V. A. Lvovsky – fundou a Associação Internacional de Ensino Desenvolvimental do Sistema Elkonin-Davidov. Tinha como objetivo unir pesquisadores, professores, formadores, gestores escolares, faculdades de formação de professores e universidades da antiga União Soviética, bem como continuar os trabalhos sob as novas condições políticas, econômicas e sociais impostas. Em um congresso, ocorrido em dezembro de 1994, Davidov foi o primeiro presidente do conselho da referida Associação e Repkin o vice-presidente. A Escola nº 1133, de Moscou, foi eleita a sede da Associação.

A Associação, na certa, contribuiu para que o sistema Elkonin-Davidov experimentasse

> [...] uma conquista importante com a decisão simultânea dos ministérios de educação da Rússia e da Ucrânia de torná-lo, 1996, junto com o Zankoviano e com o tradicional, um dos três sistemas estatais de ensino primário. A partir de então, o sistema viveu uma etapa de consolidação e reconhecimento nacional e internacional que perdurou até o final do século XX. (PUENTES, 2017, p. 49).

Na segunda metade da década de 1990, segundo Puentes (2017), o sistema iniciou os estudos teóricos referentes aos problemas associados ao ensino desenvolvimental na escola de nível médio para alunos na idade da adolescência. Assim, além da consolidação e do reconhecimento, muitas obras importantes de Davidov foram publicadas entre os anos de 1995 e 1998. Contudo, em março de 1998, aos 68 anos, o autor faleceu e A. B. Vorontsov assumiu seu lugar no cargo de presidente do comitê da Associação.

No início do século XXI, o sistema estava presente em 2500 escolas e contava com uma grande equipe de trabalho, composta por cerca de 1800 membros, em 72 regiões da Rússia, da Ucrânia, da Letônia, do Cazaquistão e de Belarus. Kharkov, na Ucrânia, representava o centro mais importante de implementação do sistema nas escolas de massa da rede pública. Puentes (2017) elencou alguns dos propósitos do sistema nessas novas condições:

1) Realizar pesquisas com o objetivo de desenvolver o conceito holístico de atividade de estudo em escolas e universidades. Acresce-se o desenvolvimento de cursos de formação, livros didáticos e materiais pedagógicos para os professores e ferramentas que possibilitem avaliar os resultados do ensino desenvolvimental;

2) Elaborar métodos e maneiras de organizar o exame de aulas, escolas e universidades que atuam com os pressupostos do ensino desenvolvimental;

3) Elaborar um sistema de formação e capacitação para os profissionais que adotam o ensino desenvolvimental;

4) Oferecer suporte escolar e escolas-piloto;

5) Criar um espaço de informação comum para os membros da Associação Internacional de Ensino Desenvolvimental do Sistema Elkonin-Davidov;

6) Desenvolver o programa intitulado "Crianças da Associação", objetivando um vínculo permanente entre os estudantes do sistema.

Cabe salientar que, por meio das reformas políticas e econômicas implementadas durante o governo de Vladimir V. Putin, na Rússia, o sistema nacional de educação foi afetado e os sistemas didáticos alternativos foram comprometidos. O sistema Elkonin-Davidov sobrevive na atualidade com a colaboração de pesquisadores. As escolas que o adotam, convivem com outros sistemas (CUNHA, 2019). Cunha (2019) destaca o comprometimento presente nas instituições que seguem o sistema Elkonin-Davidov, tanto em relação à formação e à capacitação dos profissionais quanto ao amplo debate realizado, visando à garantia da qualidade do ensino na Federação Russa.

Observa-se que o ensino desenvolvimental, pela nossa exposição até o momento, trouxe contribuição para a sua própria teorização e da atividade de estudo. Os seus pressupostos apresentados durante estas três seções fundamentam nossa pesquisa e são referenciais para as análises realizadas nos próximos capítulos.

Assim, ao pensarmos que a formação do pensamento teórico, por meio da apropriação dos conceitos científicos, é o objetivo da escola, no capítulo seguinte, trataremos das manifestações teóricas relacionadas ao conceito de equação do primeiro grau e como elas se refletem na aprendizagem e no desenvolvimento dos alunos. Além disso, faremos a análise do modo de organização do ensino do conceito teórico de equação do primeiro grau, fundamentado nos pressupostos da Teoria do Ensino Desenvolvimental. Vale lembrar que o presente estudo visa contribuir para se repensar o ensino de Matemática nas escolas brasileiras a fim de possibilitar um ensino que desenvolva nos estudantes as máximas capacidades humanas e sua formação integral.

3 O MOVIMENTO HISTÓRICO DO CONCEITO DE EQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU E SUAS MANIFESTAÇÕES TEÓRICAS NA LITERATURA

O presente capítulo é dedicado à busca, na literatura, dos fundamentos conceituais da equação do primeiro grau que, articuladamente com os fundamentos do capítulo anterior, subsidiarão a leitura analítica das tarefas que trarão evidências do nosso objeto de estudo. Para tanto, o capítulo está dividido em duas seções. Na primeira, trazemos alguns componentes essenciais do referido conceito que se apresentaram no seu movimento histórico. Na segunda seção, a referência é o estudo de pesquisas que tratam do conceito matemático em pauta na perspectiva da Teoria do Ensino Desenvolvimental, mais especificamente o sistema Elkonin-Davidov.

3.1 MOVIMENTO HISTÓRICO DO CONCEITO DE EQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU

A seção se constitui no espaço de explicitar determinadas características conceituais, produzidas historicamente, da equação do primeiro grau. Para tanto, recorremos a autores da história da Matemática e a alguns comentadores.

Na sua constante procura pelo controle da natureza, o homem sente necessidade de organização e criação de modos de ação sobre a realidade objetiva. Por consequência, desenvolve novos conhecimentos e acumula experiências. Isso significa que é correto afirmar que os conceitos assimilados na escola, pelos estudantes, são produtos dos conhecimentos produzidos historicamente pela humanidade (SOUZA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014).

SegundoRíbnikov (1987), toda ordem lógica, estrutura e inter-relação e todos os ramos independentes de qualquer ciência não se caracterizam como algo imutável, mas como um processo em constante estado de devir, peculiaridade humana. O próprio "[...] desenvolvimento lógico de ideias sobre uma ciência nada mais é do que a reflexão do processo histórico de forma consciente, abstrata e teórica" (RÍBNIKOV, 1987, p. 18, tradução nossa).

Por consequência, implícita ou explicitamente, a organização do ensino de um conceito, em sua integralidade, contempla o seu movimento histórico-lógico. Por histórico "[...] subentende-se o processo de mudança do objeto, as etapas de seu surgimento e desenvolvimento" (KOPNIN, 1978, p. 183). O lógico é "[...] a reprodução da essência do objeto e da história do seu desenvolvimento no sistema de abstrações" (KOPNIN, 1978, p. 183-184).

Nesse sentido, Davydov (1975, p. 97) alerta:

> Na história empírica, a sequência da mudança nos cálculos foi "número" para "operações". A disciplina acadêmica também é configurada para seguir diretamente essa sequência. A tese – e está correto – sobre a necessidade de iniciar o curso com as fontes de conhecimento, acaba por significar a subordinação do esboço do tema acadêmico à história externa e empírica da disciplina. Esse tipo de "historicismo" se transforma em cronologismo externo. Em outras palavras, quando o problema da relação entre os aspectos históricos e lógicos do sujeito acadêmico está sendo resolvido, a preferência é dada ao histórico, que frequentemente é tomado em sua forma empírica concreta.

Portanto, ao pensarmos no movimento histórico-lógico de um conceito, no processo de organização do seu ensino, é importante a atenção não somente às mudanças ocorridas desde a sua gênese e por todo o seu desenvolvimento. Também se torna imprescindível a reprodução da essência do objeto e da história do seu desenvolvimento no sistema de abstrações (DAVYDOV, 1975). Porém, vale destacar que esse movimento não é linear. Nesse sentido, cabe a contribuição deRíbnikov (1987) de que o desenvolvimento da Matemática não é um processo harmonioso, contínuo e gradual, mas uma grande luta do novo contra o antigo, na qual vence o mais atual.

São esses pressupostos que orientam o recorte para nosso objeto de estudo: equação do primeiro grau. Por isso, nesta seção, analisaremos o seu movimento histórico-lógico que, segundo Caraça (2003), é caracterizado como o mais simples dentre todos os tipos de equações algébricas. O objetivo é a compreensão do movimento de construção do conceito até sua forma mais desenvolvida da atualidade. Para tanto, apresentaremos, inicialmente, a sua definição e resolução com base em Caraça (2003) e, posteriormente, analisaremos o movimento de construção do conceito até chegarmos ao modo de resolução atual apresentado pelo autor.

Caraça (2003) define equação algébrica como toda igualdade da forma

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

O valor de n é um número inteiro e positivo e indica o grau da equação; os números $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são os coeficientes da equação; e x se chama incógnita. Além disso, temos que a raiz da equação é todo número α, tal que:

$$a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n \equiv 0.$$

Conforme o autor, historicamente, o problema fundamental da teoria das equações algébricas é a resolução da equação, ou seja, determinar as suas raízes. Entretanto, analisar se a equação tem raízes, quantas são elas e como fazer para determiná-las caracterizam o processo do seu desenvolvimento que, por muito tempo, permaneceu envolto em muito mistério.

Para Caraça (2003), por decorrência da definição genérica, anteriormente apresentada, uma equação algébrica do primeiro grau é da forma

$$ax + b = 0, \qquad a \neq 0,$$

e é possível resolvê-la de forma bem simples:

> Com efeito, da 1ª propriedade da adição[5] resulta que, se somarmos a ambos os membros da igualdade o número –*b*, ela não se altera; a equação equivale, portanto a esta ax + b – b = 0 – b, ou seja, aplicando propriedades bem conhecidas ax = -b. Da 1ª propriedade da multiplicação[6] resulta agora que, sem alterar a igualdade, se podem multiplicar ambos os membros por $\frac{1}{a}$[7], logo tem-se $a.\frac{1}{a} = -b.\frac{1}{a}$ ou seja, por ser $a.\frac{1}{a} = 1$, $x = -\frac{b}{a}$. (CARAÇA, 2003, p. 145).

[5] a = a', b = b' →a + b = a' + b'.
[6] a = a', b = b' →a . b = a' . b'.
[7] Visto que se supôs expressamente a ≠ 0; caso contrário, a operação não seria permitida, porque 1/0 não é número.

O valor $-\frac{b}{a}$, quando colocado no lugar de x na equação ax + b = 0, transforma-a em uma identidade e, dessa forma, caracteriza a raiz da equação. Conforme as operações realizadas, há uma equivalência entre as igualdades "$ax + b = 0$" e "$x = -\frac{b}{a}$" e, dessa forma, não há mais nenhuma raiz para a equação em análise (CARAÇA, 2003). Portanto, toda equação do primeiro grau ax + b = 0 tem apenas uma raiz, da forma:

$$\boldsymbol{\alpha = -\frac{b}{a}}.$$

Atualmente, a notação, a definição e a resolução de equações do primeiro grau apresentadas por Caraça (2003) nos são comuns. Entretanto, como mencionado anteriormente, ambas as equações são produto de um longo processo histórico e lógico de construção e desenvolvimento.

Píbnikov (1987) destaca que a Matemática surgiu da atividade produtiva e, como tal, caracteriza uma das formas de consciência social dos homens. Ele afirma que

> [...] os conhecimentos matemáticos foram adquiridos pelos homens nas primeiras etapas do desenvolvimento, mesmo na mais imperfeita atividade produtiva. Conforme esta atividade se tornava mais complexa, o conjunto de fatores que influenciava o desenvolvimento da Matemática mudou e cresceu. (RÍBNIKOV, 1987, p. 12, tradução nossa).

Panossian (2014) acrescenta que as equações eram, inicialmente, um instrumento da álgebra utilizado na resolução de situações-problemas cotidianas e que em seu processo de estudo, caracterização e desenvolvimento elas ganharam destaque no campo da ciência matemática e contribuem para que se atinja o nível de sistematização atual. Segundo a autora, os registros históricos – desde os povos babilônicos (600 a.C. a 300 d.C.) – mostram que a necessidade de resolver situações-problemas do cotidiano envolvendo quantidades era solucionada com a criação de métodos de resolução, cujo objetivo era determinar valores desconhecidos.

Para Baumgart (1992), a álgebra possivelmente se originou na Babilônia e, mesmo sem o uso de símbolos, mas sim da escrita cuneiforme, mostrava um certo grau de sofisticação. Entretanto, Robayna (1996) afirma que os registros babilônicos davam maior ênfase à resolução de sistemas de equações lineares, assim como à resolução de equações de segundo grau, mas não traziam evidências para o processo resolutivo das equações de grau 1, objeto de nosso estudo.

Os registros egípcios, por sua vez, apresentam de forma mais clara o modo de resolução de equações do primeiro grau. De acordo com Baumgart (1992), Guelli (1992) e Robayna (1996), registros importantes feitos em papiros – como os de Rhind (1650 a.C.) e de Moscou (1850 a.C.) – apresentavam a resolução, de forma retórica[8], de situações-problemas relacionadas ao cotidiano do povo.

Díbnikov (1987) afirma que, nesses documentos, frequentemente se encontra a operação "montão", que corresponde à resolução de uma equação do primeiro grau do tipo:

$$ax + bx + \cdots + cx = \alpha.$$

Um exemplo dessa operação é apresentado por Robayna (1996, p. 46):

$$Um\ montão\ e\ um\ sétimo\ do\ mesmo\ \text{é}\ igual\ a\ 24.$$

Na notação atual, a equação correspondente seria:

$$x + \frac{1}{7}x = 24$$

"Para equações lineares, os egípcios usavam um método de resolução consistindo em uma estimativa inicial seguida de uma correção final – um método ao qual os europeus posteriormente deram o nome um tanto abstruso de 'regra da falsa posição'" (BAUMGART, 1992, p. 6).

Utilizando o exemplo apresentado anteriormente, Robayna (1996) mostra como a referida equação particular poderia ser resolvida pelo método da falsa posição:

"Supondo que a solução é 7, ao substituir no lugar do x nos daria $7 + \frac{1}{7}.7 = 8$, e como a solução é 24, ou seja, 3.8, a solução é 21 = 3.7, já

[8] Totalmente na escrita cuneiforme, sem o uso de "símbolos".

que $3\left(7+\frac{1}{7}.7\right)=24$" (ROBAYNA, 1996, p. 46-47, tradução nossa). O autor destaca que, geralmente, o cálculo da solução correta não era tão simples como o exemplo realizado e implicava várias operações envolvendo frações unitárias, que eram de domínio peculiar dos egípcios.

Contudo, concretizavam-se as relações genéticas da equação do primeiro grau: a igualdade que deve ser mantida no processo de determinação do valor desconhecido, o que requer procedimentos que expandem para a adoção de conceitos peculiares à adição e à multiplicação. Portanto, a igualdade e a incógnita se constituem elementos conceituais da relação essencial, que colocam em movimento o pensamento humano em busca de um modo de ação geral da solução dos problemas e, por extensão, da equação.

Documentos datados do século III d.C. registram que o método da falsa posição também era utilizado pelo povo hindu. Os problemas, cujas soluções ocorriam por meio da resolução desse tipo de equações, geralmente tinham relação com situações práticas do cotidiano, principalmente tratavam de construções.

Conforme mencionado anteriormente, os registros algébricos até aquele momento eram representados de forma retórica. Um avanço significativo, nesse sentido, foi a introdução do modo sincopado[9] de escrever equações. Segundo Robayna (1996), o matemático grego Diofanto (250 d. C.) foi o responsável por essa forma de escrita e, consequentemente, por um impulso à álgebra da época. Trata-se, pois, de um segundo estágio da história de caracterização do que hoje se denominam incógnita e simbolismo algébrico pertinente à equação.

Em sua contribuição, de acordo com Guelli (1992), está: a representação da incógnita por um símbolo muito semelhante à letra “x”; a não adoção do sinal da soma; o uso do símbolo “M” para a subtração e “u” (abreviação de unidade) para os termos independentes; a igualdade era traduzida pela expressão “é igual a”; o número 1, ao lado da incógnita x, indicava que a unidade era o seu coeficiente; um outro número acompanhado da incógnita tinha como simbolização “xx”. Guelli (1992, p. 24) destaca alguns exemplos com a utilização do sistema de numeração decimal e do nosso alfabeto:

Representação sincopada	**Representação atual**
x1 u3 é igual a u18	x + 3 = 18
x1 M u2 é igual a u12	x – 2 = 12

[9] Algumas expressões são escritas em palavras e outras de forma abreviada.

x1 u3 é igual a u12 M x1	x + 3 = 12 – x
x1 M u9 é igual a u7 M x1	x – 9 = 7 – x
xx4 u12 é igual a x1 u36	4x + 12 = x + 36
xx10 M xx2 é igual a u4	10x – 2x = 4

Mas esse estágio de desenvolvimento do simbolismo e de ideias conceituais matemáticas, segundo Guelli (1992), ficou estagnado com a queda do império. Novos avanços ocorreram somente por volta do ano 650, sobretudo com contribuições dos árabes.

A notação sincopada também é uma característica do desenvolvimento da escrita e da resolução das equações, pelos hindus, no século VII, que aparece nos registros do matemático Brahmagupta. A incógnita era representada por “ya” e as operações pela primeira sílaba das palavras (ROBAYNA, 1996).

A fim de ilustrar o modo sincopado de escrita de Brahmagupta, Baumgart (1992) apresenta o seguinte exemplo:

$$\begin{array}{c} ya\ ka\ 7\ bha\ k(a)12\ ru\ \dot{8} \\ \text{ya v(a) 3 ya 10} \end{array}$$

Na notação atual, a expressão corresponde a:

$$7xy + \sqrt{12} - 8 = 3x^2 + 10x$$

Podemos perceber que a igualdade é representada com a escrita do primeiro membro da equação sobre o segundo. Além disso, traz as seguintes representações: “ya” para primeira incógnita; “ka” para a segunda incógnita; “bha” para o produto; “k(a)” para o número irracional ou a raiz; o ponto sobre o número indica que ele é negativo; “ru” é um número “comum”; por fim, “v(a)” representa um número elevado à segunda potência.

Uma nova característica, com similaridade procedimental ao método da falsa posição de resolução de uma equação do primeiro grau, apresenta-se para o tipo ax + b = cx + d. A resolução adotava a divisão da diferença entre os termos conhecidos pela diferença entre os coeficientes do termo desconhecido, a incógnita. Observa-se que na resolução da referida equação – além das propriedades aditivas e multiplicativas comentadas anteriormente no método da falsa posição –, implicitamente, aparece outra ideia matemática (que se pode traduzir como algébrica, aritmética e geometricamente): a fatoração com a colocação do fator comum em evidência respaldada pela propriedade distributiva da multiplicação em relação à soma algébrica.

De forma sistematizada, a raiz da equação era dada por:

$$x = \frac{d-b}{a-c}$$

Apesar das diferenças da representação escrita (retórica e sincopada) e do método de resolução (falsa posição e o apresentado anteriormente), o objetivo de encontrar o valor desconhecido (incógnita) – que torne a sentença verdadeira, isto é, que conserve a igualdade – permanece em ambas as formas de solução da equação. Essa constância de ambos os elementos dá indícios que possibilitam a indicação da essencialidade do conceito de equação do primeiro grau.

Percebe-se, também, que o método de resolução apresentado anteriormente se assemelha ao cálculo da raiz apresentado por Caraça (2003), que caracteriza a forma mais desenvolvida de resolução de equações algébricas do primeiro grau.

De acordo com Robayna (1996), o método de Brahmagupta chegou aos árabes que, por sua vez, divulgaram em toda a Europa. Segundo Caraça (2003), no início do século IX, o bibliotecário de Califa, Mohammed ibn Mûsâ al-Khowârizmi, que viajava pelo Império, escreveu um tratado intitulado *Al-jebr w'al mûqâbalah*. Tal feito inspirou todos os tratados posteriores até o início do período renascentista. Ele representa um

> [...] traço de ligação entre a matemática hindu (e, através dela, dos restos de matemática grega que tinham chegado à Índia) e a Europa [...] e se ocupava da resolução de equações do 1º e 2º graus e das regras a que obedecia essa resolução; da maneira de fazer certas operações; e da resolução de alguns problemas. (CARAÇA, 2003, p. 146-147).

Aleksandrov (1988) e Caraça (2003) traduzem o termo "jebr w'al mûqâbalah" com o significado de "transposição e eliminação" que se refere à operação "de **ax + b = 0**" para "**ax = -b**". Além disso, os autores mencionam que a influência exercida pelo tratado foi tão grande e a aplicação da regra mencionada tão frequente, que o termo "Al-jebr" referia-se a tudo o que diz respeito às equações e passou às línguas europeias com algumas modificações como álgebra, algèbre, etc.

Vale reafirmar que o movimento histórico-lógico dos conceitos não é linear. Nesse sentido, cabe referência à afirmação de Boyer (2001) em relação à obra de al-Khowârizmi de que ela apresentava uma limitação referente à forma de escrita das sentenças algébricas (a representação retórica era a utilizada no tratado). Não havia, ainda, o uso de uma notação simbólica que a substituísse. Segundo o autor, os árabes nunca deram esse passo, exceto substituir as palavras (números) por sinais.

De acordo com Aleksandrov (1988), foi apenas no século XVI que a ciência europeia superou os conhecimentos de seus antecessores e muitos matemáticos contribuíram para o desenvolvimento da álgebra. Nesse período, os símbolos algébricos atuais foram criados e, em particular Viète, no ano de 1591, utilizou símbolos literais não apenas para quantidades desconhecidas, mas também para as quantidades dadas.

Para melhor ilustrar o modo de resolução de equações do primeiro grau, vale apresentar aqui uma análise/comparação entre o método hindu, a operação "transposição e eliminação" apresentada no tratado "al-jebr w'al mûqâbalah" e o método atual de resolução apresentado por Caraça (2003).

Sabe-se que o método mais desenvolvido para o cálculo da raiz de uma equação de grau um do tipo "ax + b = 0" é dado por:

$$x = \frac{-b}{a}$$

Caraça (2003) afirma que, para se chegar à sistematização do cálculo da raiz, duas passagens fundamentais, consequências diretas das leis elementares da Aritmética, são efetuadas: "de ax + b = 0 para ax = -b e de ax = -b para x = -b/a" (CARAÇA, 2003, p. 145). Nesse sentido, podemos perceber que a primeira passagem mencionada pelo autor se refere justamente à operação do tratado "al-jebr w'al mûqâbalah".

Por sua vez, o método de resolução hindu de uma equação do primeiro grau do tipo "ax + b = cx + d é dado por:

$$x = \frac{d - b}{a - c}$$

Utilizando a primeira propriedade da adição (unicidade), mencionada pela definição de Caraça (2003) na página 82 deste texto, em ax + b = cx + d, temos:

$$ax - cx = d - b$$

A diferença entre os termos conhecidos “d e b” é equivalente ao termo “-b” na sistematização definida por Caraça (2003). Por sua vez, a diferença entre os coeficientes da incógnita, ou seja, “a - c”, é igual ao termo “a” da referida sistematização, uma vez que ela equivale ao próprio coeficiente de x.

Essa comparação permite verificar que, no desenvolvimento do método de cálculo da raiz de uma equação do primeiro grau, ocorre a superação de procedimentos matemáticos com suas propriedades e ideias conceituais por incorporação. Isso significa dizer que as ideias que caracterizaram as suas origens não são totalmente descartadas, mas ressignificadas por novos elementos conceituais. Parafraseando Davidov (1988), seu processo de resolução atual é consequência de um movimento que conflui componentes lógicos e históricos. O histórico como sendo as mudanças ocorridas desde a gênese e por todo o processo de desenvolvimento, o lógico considerado a reprodução da essência do objeto e da história do seu desenvolvimento no sistema de abstrações (KOPNIN, 1978).

Esse processo é revelado na definição atual de Caraça (2003) e traz implicitamente as inter-relações do referido conceito, entre as quais se destacam:

a) Igualdade, envolvendo uma incógnita de primeiro grau, que se anula para um único valor dessa incógnita;
b) A busca por esse único valor (resolução da equação) não ocorre de modo aleatório como ocorreu na gênese do processo histórico por meio do método da falsa posição, mas de um modo lógico, mediado por propriedades abstratas;
c) Sistematização do cálculo.

O exposto nesta seção, o movimento histórico do conceito de equação do primeiro grau até sua forma mais desenvolvida, constitui-se referência para a análise que ocorrerá no capítulo seguinte. No entanto, será acrescida por elementos teóricos extraídos da literatura referentes a estudos similares, que exporemos na sequência.

3.2. O CONCEITO DE EQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU: MANIFESTAÇÕES TEÓRICAS EM ESTUDOS SOBRE O SISTEMA ELKONIN-DAVIDOV

A referência, nesta seção, são os estudos que tratam ou anunciam bases do conceito de equação do primeiro grau no sistema de ensino desenvolvimental. Para tanto, a literatura adotada são algumas dissertações e artigos.

Ao assumirmos o posicionamento teórico apontado no decorrer dos capítulos anteriores, admitimos que são muito diferentes os modos pelos quais são organizados o ensino do sistema conceitual de equação do primeiro grau na escola tradicional brasileira e na perspectiva do sistema didático Elkonin-Davidov. Conforme já mencionado, nas escolas brasileiras, os conceitos são apresentados de maneira direta ou por meio de situações particulares – não há um movimento do pensamento conceitual em nível teórico – e sem estabelecer uma relação entre aritmética, álgebra e geometria. Além disso, a centralidade do ensino do conceito de equação do primeiro grau está na sua definição e na resolução de situações particulares por meio de técnicas extremamente mecânicas (ROSA, 2012).

Essa concepção tradicional é evidenciada, em nível internacional, nos estudos de Schmittau (2005) e Schmittau e Morris (2004), que apontam a diferença entre esse posicionamento com a organização do ensino desenvolvimental, particularmente no sistema didático Elkonin-Davidov, em que os conceitos não são apresentados diretamente ao aluno. Eles abrangem um conjunto de ações de estudo que requer a resolução de tarefas particulares presentes os livros didáticos. Conforme Silva (2018), ao professor cabe o papel de articulador em sala de aula, com a proposição de questões do tipo: “como vocês pensam?”, “analisem”, “comparem”, “terminem a explicação”, “estabeleçam a conclusão”. Também é necessário que, a cada aula, sejam realizadas tarefas, cujo objetivo seja um tipo de aprendizagem que possibilite, ao aluno, no processo de estudo do material didático: fazer comparações, análises, sínteses, classificações, conduzir discussões lógicas e fazer generalizações possíveis.

De forma específica, o estudo do conceito de equação do primeiro grau ocorre desde os anos iniciais, por meio da análise de algumas relações como: relação entre grandezas – ideia de número real –, medição de grandezas, relações de desigualdade e igualdade e relação todo-parte (ALVES, 2017).

De acordo com Silva (2018), os primeiros passos na álgebra são dados no primeiro ano do ensino fundamental. É nele que são construídas as bases para o desenvolvimento intelectual do aluno e os pressupostos das possibilidades, na disciplina de Matemática, “[...] tanto na formação de métodos para o desenvolvimento do pensamento infantil (lógico, algoritmo) quanto na aprendizagem da linguagem universal de descrição dos eventos do mundo exterior” (SILVA, 2018, p. 234).

A autora estudou o modo pelo qual são apresentadas as equações nos primeiros anos do ensino fundamental em livros didáticos russos. Vale esclarecer que a coleção analisada pela autora supracitada não é a desenvolvida por Davidov e seus colaboradores, como a que será nossa referência, no entanto, Silva (2018, p. 249) considera que ela “[...] traz indícios de que as autoras conhecem os fundamentos do ensino desenvolvimental”. A obra intitulada *Matemática* [Математика] compõe a lista de materiais didáticos do Ministério da Educação da Rússia para os anos de 2014 e 2015. Apesar de não compor os materiais didáticos do sistema Elkonin-Davidov, traz algumas aproximações como: a introdução ao estudo da álgebra ocorre nos anos iniciais do ensino fundamental – passagem do primeiro para o segundo ano – com o desenvolvimento dos conceitos de igualdade e desigualdade e a introdução à simbologia com letras; comparação entre grandezas; uso de medidas de segmentos e arcos em tarefas propostas e análise da relação parte-todo (SILVA, 2018).

A autora sintetizou a apresentação dos conceitos algébricos na obra analisada em cada um dos quatro anos iniciais do ensino fundamental. Ela deu ênfase aos conceitos caracterizados como implícitos, mas que estão relacionados à elaboração do conceito de equação.

Silva (2018) afirma que Moro *et al.* (2010-2012) – autores russos dos livros analisados – desenvolvem em suas obras um movimento que possibilita aos alunos, desde os primeiros anos do ensino fundamental, uma introdução aos conceitos algébricos na perspectiva desenvolvimental. Ainda segundo a autora, nesse processo de formalização do conceito teórico de equação, os conceitos de igualdade e incógnita, da mesma forma que a utilização de letras, são de fundamental importância.

Apresentamos uma síntese dos resultados obtidos por Silva (2018) na análise que fez sobre os livros da coleção *Matemática* [Математика], mencionada anteriormente, cuja autoria é de Moro *et al.* (2010-2011).

Quadro 1: Considerações referentes ao ensino do conceito de equação do primeiro grau na obra *Matemática* [Математика] nos quatro primeiros anos do ensino fundamental

Ano	**Considerações**
Primeiro	- Há uma preparação para o desenvolvimento do conceito de equação;

	- São muito comuns tarefas com o uso de balanças com o objetivo de proporcionar aos alunos a comparação entre números e grandezas. Também ocasiona a apropriação dos conceitos de igualdade e desigualdade, assim como a obtenção de um valor desconhecido; - Observação: os alunos aprendem a numeração de 1 a 20.
Segundo	- É realizado um trabalho construtivo com igualdades, objetivando o conceito teórico de equação, no qual o valor desconhecido de um número será substituído por uma letra; - Além das tarefas com balanças, outras envolvem a medida de segmentos; - Apresentação, aos alunos, da definição de equação, bem como de resolução de uma equação; - Nas recomendações metodológicas, as autoras sugerem tarefas nas quais: os alunos verificam, por meio da substituição, se a solução da equação está correta; há mais de uma solução; as equações são formadas por meio de perguntas; - Incentivo à integração da álgebra e geometria; - Importância ao saber resolver equações à explicação do que está sendo feito durante a resolução; - Observação: os alunos aprendem a numeração de 1 a 100.
Terceiro	- São comuns tarefas com tabelas, nas quais os alunos calculam o valor numérico da expressão; - A resolução de equações aparece de forma mais detalhada e passos são sugeridos. Diferente do que ocorre muitas vezes no ensino tradicional brasileiro, em nenhum momento é sugerido aos alunos trocar de sinal, na equação, dos valores ao mudar de membro; - De forma generalizada, é mostrado que o número um é o elemento neutro da operação de multiplicação; - Observação: os alunos aprendem a numeração de 1 a 1000.
Quarto	- Tarefas que tenham como objetivo não apenas encontrar um valor desconhecido, mas proporcionar a comparação entre números e grandezas; - Tarefas com jogos de quebra-cabeças nas quais os alunos precisam encontrar o valor de símbolos são recorrentes,

	assim como questões que envolvem o conceito de velocidade; - Observação: os alunos aprendem a numeração de 1 a 1000000.

Fonte: Produção nossa com base em Silva (2018).

Lembramos que a coleção analisada não faz parte dos materiais elaborados por Davidov e seus colaboradores. Porém, de acordo com Silva (2018), como já mencionado, ela apresenta características de um ensino fundamentado na perspectiva desenvolvimental. Além disso, segundo a autora, o sistema de tarefas proposto na obra permite que o professor as desenvolva para um grande número de alunos. Isso é um fator importante e que, talvez, tenha influência para que sua adoção no sistema de ensino russo ocorra há anos.

Como nosso estudo se fundamenta no ensino desenvolvimental proposto pelo sistema Elkonin-Davidov, vale referenciar a pesquisa de Alves (2017), pois ela adotou como base de análise os livros didáticos e de orientação aos professores produzidos pelo próprio Davidov e colaboradores. A autora, ao estudar o modo davydoviano de organização do ensino, centrou-se na análise do sistema conceitual de adição e subtração. No entanto, ela mostra que é justamente na relação essencial dos referidos conceitos que está a gênese do conceito teórico de equação. Esse achado da autora contribui para atingirmos o objetivo que tem como centralidade a apresentação da construção do movimento que permite, aos alunos, desenvolver o conceito teórico de equação do primeiro grau.

Alves (2017) chegou ao resultado de que a proposição davydoviana está organizada de um modo tal, que as tarefas particulares das seis ações de estudos estão articuladas para colocar os estudantes em um movimento de pensamento. Nesse processo, os estudantes se apropriam da essencialidade do sistema conceitual de adição e subtração, a relação todo-partes, compreendida no contexto do conceito teórico de número que, por sua vez, está entendido na relação entre grandezas.

De acordo com a autora, esse mesmo movimento permite que as tarefas propostas aos alunos gerem necessidades de apropriações de conceitos articulados às significações algébrica, aritmética e geométrica no sistema conceitual em questão.

> Isso ocorre pela possibilidade de a relação essencial, dada objetalmente, se transformar em diferentes tipos de representações: gestual, que passa à gráfica (segmento de retas, esquema e reta

> numérica), e literal (modelo e equação). Esses elementos se tornam mediadores e se apresentam no próprio enunciado das tarefas. Sendo assim, a relação essencial todo-partes é a base fundamental da vinculação da unidade conceitual adição/subtração e, por extensão, a iminência de ideias referentes à equação, meio essencial de resolução de problemas. (ALVES, 2017, p. 11).

Na análise de cinquenta e nove tarefas particulares presentes no livro didático do primeiro ano, que compõe os materiais didáticos presentes no sistema Elkonin-Davidov, Alves (2017) obteve como um dos resultados que o conceito de equação está intimamente ligado aos conceitos de adição e subtração. E que, dessa forma, constituem um sistema conceitual no qual a relação universal todo-partes é explicitada.

Destacamos que as tarefas particulares presentes nos livros didáticos do sistema Elkonin-Davidov não serão especificadas no presente capítulo, mas sim no capítulo seguinte.

Em seus estudos, Dorigon, Damazio e Rosa (2016) também analisaram tarefas particulares presentes no livro didático do primeiro ano elaborado por Davidov e colaboradores. Segundo os autores (2016, p. 93),

> [...] o movimento interno da relação universal (todo-partes), ao ser concretizado, permite a generalização do conceito de equação, no que se refere à operação a ser realizada para resolvê-la. Se as duas partes são conhecidas, para determinar o todo basta adicioná-las. Por outro lado, se o todo e uma das partes são conhecidos, para determinar a outra parte, faz-se necessário subtrair a parte conhecida do todo. Em síntese, o valor numérico de cada termo da equação pode ser determinado a partir do valor numérico dos outros termos.

Percebemos na afirmação anterior de Alves (2017) que os conceitos de adição, subtração e equação estão em unidade, fundamentados pela relação essencial todo-partes. Dorigon, Damazio e Rosa (2016) acrescentam que o conceito de equação no modo davydoviano de organização do ensino é introduzido com base no movimento do geral (representado no modelo geometricamente e algebricamente) para o singular (caracterizado pelas significações aritméticas) e mediado pelas particularidades, ou seja, por problemas texto. Segundo os autores, o que conduz esse movimento é a relação universal entre o todo e as partes.

Portanto, os estudos de Alves (2017), Dorigon, Rosa e Damazio (2016) trazem contribuições para o entendimento das relações essenciais ao desenvolvimento do conceito de equação em contexto, no qual seus nexos transitam pela **relação entre grandezas** (número real), que leva à **relação todo-parte** (adição e subtração) e, por consequência, da **desigualdade** produz a necessidade de **igualdade** (equação). Vale observar que os estudos de Alves (2017), Dorigon, Rosa, Damazio (2016) e Silva (2018) são unânimes em afirmar que o conceito de equação é focado desde o primeiro ano escolar, de modo articulado, pelas significações aritméticas, geométricas e algébricas.

Ao fazer um comparativo entre as proposições do ensino tradicional predominantes atualmente e o modo davydoviano de organização do ensino, observamos que aquele tem centralidade nos procedimentos de resolução de situações particulares. Por sua vez, o segundo se centra no movimento dialético da relação todo-partes, compreendido na relação entre grandezas e, por conseguinte, na concepção de número real.

Essas questões essenciais serão a base para a nossa análise posterior, além de ultrapassarmos as fronteiras dos primeiros anos escolares, como foi o foco dos estudos mencionados. Para tanto, somos movidos pela ciência de que a proposição davydoviana, fundamentada na teoria do Ensino Desenvolvimental, pode contribuir para repensarmos o ensino de matemática. Nesse sentido, a análise toma como referência os elementos conceituais da relação essencial dos estudos realizados referentes à introdução do conceito de equação, no âmbito do sistema conceitual número-adição-subtração-equação (DORIGON; ROSA; DAMAZIO, 2016; ALVES, 2017). Além disso, expande para outros elementos conceituais, uma vez que a equação – como relação de igualdade – não se limita ao número, à adição e à subtração, mas se insere em um sistema integral. À tal expansão se agrupam os achados nos estudos de Freitas (2016) e Crestani (2016), que apontam – em relação ao modo davydoviano de organização de ensino – para a necessidade de um novo processo de medição com a adoção de uma unidade intermediária geradora dos conceitos de multiplicação/divisão/fração. Por sua vez, Búrigo (2015) revela a necessidade de um modo de medição que supere, por incorporação, a adoção de grandezas escalares por segmento orientado (com sentido e direção), que abrangerão todos os tipos de números (positivos e negativos). Isso nos coloca diante do pressuposto de que a equação inserir-se-á em um sistema de conceitos mais amplo, que se constituirá no objeto de análise do próximo capítulo.

4 MODO DE ORGANIZAÇÃO DO ENSINO DO CONCEITO TEÓRICO DE EQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU

No presente capítulo, o objetivo se volta à análise do desenvolvimento do conceito teórico de equação do primeiro grau no sistema de ensino Elkonin-Davidov, com base em tarefas extraídas dos livros didáticos e de orientação ao professor (primeiro ao sexto anos) elaborados por Davidov e colaboradores. Trata, pois, de um esboço do modo geral de organização do ensino para o referido conceito no transcorrer do ensino fundamental.

De início, vale esclarecer que, conforme Vigostski (2009), um conceito não é somente a soma de determinados vínculos associativos desenvolvidos pela memória, ou simplesmente um hábito mental. Mais que isso, um conceito é “[...] um ato real e complexo de pensamento que não pode ser aprendido por meio de simples memorização, só podendo ser realizado quando o próprio desenvolvimento mental da criança já houver atingido o seu nível mais elevado” (VIGOSTSKI, 2009, p. 246).

Nesse sentido, Горбов, Микулина e Савельева (2008) afirmam que o modo de organização do ensino, por meio de problemas e tarefas, proporciona aos alunos o desenvolvimento da capacidade de agir de forma independente, livre de modelos prontos. Proporciona-lhes a busca por novos caminhos e a invenção de seus próprios modos de ação a fim de que atinjam os objetivos da aprendizagem e desenvolvam-se. Além disso, visa à formação dos conceitos matemáticos nos alunos, ao invés de simplesmente desenvolver o saber prático, como prevalece no ensino tradicional da disciplina de Matemática.

Destacamos que analisar o sistema de ensino proposto por Elkonin e Davidov requer que a análise se faça no âmbito do desenvolvimento humano, cuja atividade principal é o estudo. Conforme Puentes (2019a), foi nessa confluência que ocorreu um processo investigativo experimental o qual possibilitou uma extrema teorização tanto do sistema de ensino quanto da atividade de estudo. Por decorrência dessa investigação, Davidov (1988) considera que só é possível a apropriação de um conceito por parte do estudante, quando há nele uma necessidade interna que o coloque em atividade. Por isso, o sistema de tarefas apresentado a seguir foi elaborado e organizado com o objetivo de gerar tais necessidades e possibilitar que aluno entre em atividade de estudo. Para tanto, segundo Davidov e Slobódchikov (1991), inicialmente, as tarefas requerem a transformação experimental do material de estudo, que requisita um caráter ativo por parte dos estudantes na apropriação dos conhecimentos relativos ao objeto em análise.

Além disso, as tarefas objetivam que os estudantes se apropriem de um modo geral de ação, produzido historicamente. Portanto, elas são elaboradas pelos organizadores do ensino de modo que contemplem o movimento de gênese e o desenvolvimento, isto é, suas relações essenciais, que levam ao desenvolvimento do pensamento teórico (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

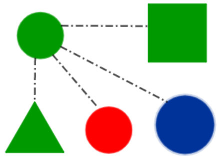
Para trazer evidências desses pressupostos e das afirmações dos parágrafos anteriores, exporemos, a seguir, algumas dessas tarefas voltadas à particularidade do nosso objeto de estudo: equação do primeiro grau. Cada qual é – de certo modo – representativa do teor do conteúdo conceitual, do seu contexto, da finalidade e do movimento que pode empreender no processo de apropriação e consequente desenvolvimento do pensamento teórico quando propostos aos estudantes em situação escolar. Porém, vale reafirmar o esclarecimento de que as análises que empreenderemos têm por base o que propõem as obras já especificadas: livro didático do estudante e o de orientação ao professor. Portanto, não há participação direta de um grupo de estudantes.

Com a finalidade de organizarmos melhor a análise, na sequência seguem os respectivos anos correspondentes a cada uma das tarefas selecionadas:

- Primeira à décima terceira tarefa: livros didático e de orientação ao professor do primeiro ano;
- Décima quarta à décima nona tarefa: livros didático e de orientação ao professor do segundo ano;
- Vigésima à vigésima quarta tarefa: livros didático e de orientação ao professor do terceiro ano;
- Vigésima quinta à trigésima segunda tarefa: livros didático e de orientação ao professor do quarto ano;
- Trigésima terceira à trigésima sexta tarefa: livros didático e de orientação ao professor do quinto ano;
- Trigésima sétima à trigésima nona tarefa: livros didático e de orientação ao professor do sexto ano.

A **primeira tarefa** tem como base a imagem 2 e estabelece que o aluno relacione com uma figura pré-estabelecida – superfície circular de cor verde –, inicialmente, outra de mesma forma e, posteriormente, de mesma cor.

Imagem 2: Referência para execução da primeira tarefa



Fonte: Adaptação de Горбов e Микулина *et al*. (2001).

Essa tarefa expressa, implicitamente, a gênese do conceito de equação, caracterizada pela necessidade de relacionar e, consequentemente, a necessidade de igualar. Em outras palavras, para que a igualdade seja estabelecida, é necessário que haja uma relação. Especificamente, essa tarefa postula que o estudante estabeleça a relação entre as figuras e verifique a compatibilidade entre ambas por certa característica (analisar o que é igual e o que é diferente). Isso é prenúncio para a possibilidade de assimilação de um certo modo de ação para comparar objetos.

Em um paralelo com o desenvolvimento histórico do conceito de equação – também de todo conhecimento matemático –, a tarefa vislumbra a revelação das abstrações de igualdade e desigualdade, as quais geraram no homem a *necessidade* de criação de modos de ação que lhe possibilitem dizer onde há ou não igualdade, que o colocaram em atividade intelectual, cujo suporte era a prática social por ele exercida naquele momento, ou seja, a sua atividade objetal (DAVÍDOV, 1988). Como afirma Leontiev (1978), o que coloca o ser humano em um estado de devir e possibilita-lhe sair da primitividade é a necessidade. Dito com suas palavras, "[...] toda atividade do organismo está dirigida a satisfazer as necessidades daquilo que é indispensável para prolongar e desenvolver sua vida" (LEONTIEV, 1978, p. 341). O autor elenca quatro traços das necessidades: a existência de um objetivo; a obtenção de um conteúdo concreto (aquele que de mais complexo o homem domina em um determinado momento histórico) de acordo com as condições e o modo de satisfazê-las; a tendência de se repetir; as necessidades se desenvolvem de acordo com a ampliação do círculo de objetos e dos modos de ação para satisfazê-las.

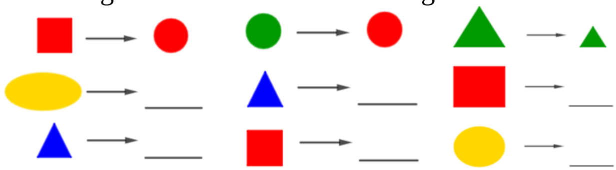
Dessa forma, a necessidade coloca o homem em movimento dialético e permite que ele se desenvolva à medida que forma suas funções psicológicas superiores. Estas, segundo Vigotski (2018), são especificamente humanas e desenvolvem-se no decorrer da história do gênero humano. O autor afirma que todas as funções psicológicas superiores aparecem duas vezes no decorrer do desenvolvimento das crianças: inicialmente, nas atividades coletivas, sociais (funções interpsíquicas) e, posteriormente, nas atividades individuais, e caracterizam as propriedades internas do pensamento (funções intrapsíquicas). Como exemplo, Vigotski (2018) cita o desenvolvimento da linguagem, que tem origem social (comunicação entre a criança e as pessoas com quem convive) e, posteriormente, é convertido em uma linguagem interna (proporciona os meios essenciais para o pensamento).

Portanto, na perspectiva histórico-cultural, o modo de organização do ensino traz o compromisso de criar as condições para o surgimento da necessidade, nos estudantes, para uma participação ativa a fim de promover o seu desenvolvimento. Como diz Davydov (1982), as crianças entram na escola sem conhecimento da atividade de estudo, pois essa é uma das funções da educação e do ensino. Por isso, em nossas análises, procuraremos explicitar que o sistema Elkonin-Davidov contribui para o surgimento de novas necessidades entre os alunos à medida que os problemas e as tarefas lhes são propostos. Consequentemente, ocorre a apropriação dos conceitos científicos estudados e, com isso, o desenvolvimento dos estudantes.

Na base do processo histórico de estabelecer relações – movidas pelas abstrações de igualdade e desigualdade –, o homem não ficou exclusivamente na comparação de uma característica entre um e outro objeto. As circunstâncias de vida o coloca diante da necessidade de expandir essa paridade para uma maior abrangência. Por exemplo, não fica na comparação fundamentada na relação de igualdade e desigualdade só por uma caraterística específica (cor, ou forma, ou tamanho, ou espessura, ou posição, entre outras). Em vez disso, expande para a multiplicidade delas.

É com esse teor que se apresenta a **segunda tarefa** escolhida, a qual tem como base a imagem 3. Ela propõe que os estudantes modifiquem uma única característica da figura em um contexto de três possibilidades (forma, cor e tamanho).

Imagem 3: Base de análise da segunda tarefa



Fonte: Adaptação de Горбов e Микулина *et al*. (2001).

Nela, os estudantes precisam considerar a característica pela qual acontece a modificação do objeto, assim como aquelas que não foram alteradas. Ou seja, há a necessidade do desenvolvimento de modos de ação que lhe permitam estabelecer o que é igual e desigual. No terceiro caso, por exemplo, o tamanho do objeto foi modificado, entretanto, a forma e a cor permaneceram iguais. Na subjacência dessas inter-relações de estabelecer relações simultâneas envolvendo diferentes características estão as ideias de interdependência e fluência que, segundo Caraça (2003), são duas características do mundo que a inteligência do homem, constantemente, esforça-se para compreender. A interdependência se encontra no fato de que "[...] todas as coisas estão relacionadas umas com as outras; o Mundo, toda essa Realidade em que estamos mergulhados, é um organismo vivo, uno, cujos compartimentos comunicam e participam, todos, da vida um dos outros" (CARAÇA, 2003, p. 103).

Em meio a essas relações de interdependência e de forma permanente, o Mundo evolui e complexifica-se. Portanto, "[...] todas as coisas, a todo momento, se transformam, tudo flui, tudo devém" (CARAÇA, 2003, p. 103). Essa afirmação foi feita por Heráclito de Éfeso, contrapondo-se ao pensamento de que o mundo era imutável e que todas as coisas já estavam prontas e determinadas. Fazendo um paralelo com o sistema de tarefas proposto, observa-se que ele exige do aluno o desenvolvimento de modos de ação, similarmente à busca do homem pela compreensão da realidade. O movimento de evolução e complexificação constante exige do homem a criação de métodos e procedimentos. Um exemplo de metodização, cuja gênese se encontra na atividade objetal, é o "método da falsa posição" (apresentado na seção anterior). Ele foi um dos primeiros procedimentos utilizados para a resolução de situações-problemas práticas modeladas por equações do primeiro grau e indiciava que a igualdade e a incógnita constituíam elementos essenciais do referido conceito. De acordo com Davidov (2019, p. 230): "[...] é necessário que as crianças, no processo de assimilação de um novo modo de ação, conheçam os problemas surgidos quando o homem procurou resolver pela primeira vez tarefas similares".

As próximas duas tarefas dão uma ideia do método da falsa posição, pois, inicialmente, os estudantes determinam suas soluções por meio de tentativas. E, pelas interações e mediações coletivas, conforme orientação de Горбов, Микулина e Савельева (2008), torna-se possível, além de encontrar a solução correta para a tarefa proposta, desenvolver a capacidade de elaboração de perguntas.

A **tarefa três**, intitulada "adivinhe a figura", tem como objetivo fazer uma introdução à forma "pergunta-resposta", cuja resposta é obtida depois de uma sequência de perguntas. Nessa interação, emerge entre os estudantes a necessidade de elaboração de perguntas que lhes permitam solucionar o problema proposto. Para tanto, é disponibilizado um kit com várias figuras para que um dos participantes (inicialmente o professor) pense em uma delas. Aos alunos é proposto que adivinhem qual a figura escolhida, com a condição de que retornem ao professor o menor número de perguntas possível. Em um primeiro momento, cinco figuras de mesma cor e de formas diferentes são colocadas no quadro. O professor pensa em uma delas e os alunos procuram adivinhar a escolhida por meio de qualquer pergunta. É provável que eles "chutarão", de forma recorrente, uma figura e depois outra (círculo, quadrado, etc.).

É importante a insistência do professor para que sejam feitas apenas perguntas do tipo "*É o círculo*?", "*É o quadrado*?" etc. e, com a menor quantidade delas, solucionem a situação. Além disso, questionar se os estudantes conseguem elaborar uma só pergunta para que descubram a figura de forma imediata. Também cabe ao professor atrair a atenção dos alunos para observarem que não faz sentido perguntas do tipo "*Como é esta figura*?" ou *"De que cor é esta figura*?", pois elas são de papel e têm a mesma cor. É conveniente, ainda, questionar sobre aquilo que as difere. Nessa situação, a pergunta ideal seria: "*Que forma essa figura tem*?" (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

A **quarta tarefa** determina outro momento nesse contexto de adivinhação, no qual há figuras diferentes em relação à cor, à forma e ao tamanho ("grandes" e "pequenas"). Assim como a tarefa anterior, requer a indicação da figura que o professor pensou por consequência da menor quantidade de perguntas. Nesse momento, as crianças já sabem fazer perguntas diretas, o que lhes possibilita a preferência pela cor e pela forma da figura escolhida (exemplo: qual a cor da figura? Qual a forma da figura?).

Entretanto, restarão duas figuras de mesma forma e de mesma cor, o que impossibilita a elaboração de apenas duas perguntas. É possível que ocorra a seguinte interlocução peculiar ao conteúdo conceitual da tarefa:

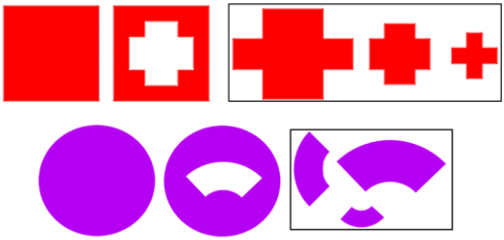
> - Professor: Agora sabem, qual foi a figura que eu pensei?
> - Aluno: Não.
> - Professor: Mas eu estou falando que cor e que forma ela tem. É um círculo vermelho.
> - Aluno: Mas aqui estão dois círculos vermelhos e não sabemos qual deles você pensou.
> - Professor: É verdade, estas figuras são iguais pela cor e pela forma, por isso é preciso fazer mais uma pergunta. Que pergunta é essa? Qual a diferença entre elas?
> Aluno: Se ela é grande ou pequena?
> Professor: Certo. Essas figuras são diferentes pelo tamanho – uma é grande, outra pequena. A minha é grande. Agora vocês sabem que figura é essa?
> Aluno: Sim, é o círculo vermelho grande.
> Professor: Está certo. Quais foram as perguntas que ajudaram vocês a adivinhar?
> Aluno: Qual é a forma? Qual é a cor? Qual é o tamanho? (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008, p. 7).

As tarefas três e quatro apresentam de modo mais intenso significações geradoras de alguns sentidos (LEONTIEV, 1978). O sentido social dá subsídios para o sentido pessoal. Isso porque uma das significações é propor ao aluno se colocar em movimento de pensamento, ou seja, em estado de devir, o que ocorre pela possibilidade de ele se apropriar de uma ação humana desenvolvida historicamente, a investigativa – também uma peculiaridade da atividade de estudo –, que requisita a elaboração de perguntas, questão essencial da ciência na atualidade (DAVÍDOV, 1988). Observa-se que o pensamento conceitual se movimenta com base na relação de igualdade, em um contexto de desigualdades (ALVES, 2017). Trata-se, pois, da resolução de um problema com teor de uma equação, porém sem o envolvimento de uma solução numérica, como ocorreu nos primórdios do desenvolvimento do conhecimento matemático.

Em especial, a quarta tarefa traz implicitamente a necessidade de medição e, consequentemente, de assimilação do conceito de grandeza. Foi tal necessidade que permitiu ao homem desenvolver o conceito teórico de número real (ROSA, 2012). Isso é propulsor da geração da necessidade pedagógica de colocar o estudante diante de diversos tipos de grandezas e suas peculiares medições. As próximas quatro tarefas exemplificam o modo como esse contato pode se efetivar.

A **quinta tarefa** é apresentada pelo seguinte enunciado: Como fazer para que as áreas das figuras sejam iguais? Escolha a parte que falta no conjunto (ГОРБОВ; МИКУЛИНА *et al*., 2001).

Imagem 4: Base de análise da quinta tarefa



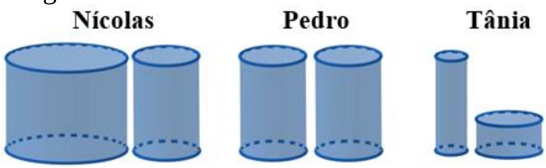
Fonte: Adaptação de Горбов e Микулина *et al*. (2001).

Nessa tarefa, o previsto é o movimento de busca pela relação de igualdade, uma vez que está explícito no enunciado da questão, cuja mediação no processo de apropriação conceitual é feita pela grandeza área. Ao aluno compete determinar a figura que completa, respectivamente, a superfície quadrada (primeira situação) e circular (segunda situação) e, consequentemente, estabelecer uma relação de igualdade entre as respectivas figuras em cada situação. No entanto, a requisição da igualdade se apresenta em um contexto de desigualdade. Assim como na tarefa anterior, os elementos essenciais do conceito teórico de equação do primeiro grau – igualdade e incógnita – são representados nessa tarefa sem o uso de símbolos, números e/ou letras, mas apenas pelas características dadas objetalmente. Dito em outros termos, a resolução da situação-problema tem o teor de uma equação sem uma solução numérica. Trata-se de um conceito em via de desenvolvimento, um preconceito que, como tal, apresenta-se em uma relação de universalidade, singularidade e particularidade. Conforme Vygotski (1996, p. 78), no entendimento da lógica dialética, conceito "[...] não inclui unicamente o geral, mas também o singular e o particular".

Tarefas como essa – propostas por Горбов e Микулина *et al*. (2001), algumas apresentadas a seguir – objetivam reafirmar as ideias sobre o tamanho dos objetos, iniciando nas tarefas relativas à grandeza comprimento. Da mesma forma, buscam a confirmação das ideias sobre as abstrações igualdade e desigualdade que, na tarefa seguinte, serão representadas de forma gráfica, com o auxílio de desenhos (retângulos). Mais adiante, as relações de igualdade e desigualdade serão modeladas graficamente por segmentos de reta para, só depois, serem representadas na forma literal por expressões do tipo A = B, A > B ou B < A.

Na **tarefa seis,** os estudantes precisam determinar quem representou os volumes por meio das tiras vermelhas e das tiras azuis, além de identificar a "pegadinha" presente na tarefa. Seu enunciado é: as crianças estavam colocando a água e medindo o volume dos recipientes.

Imagem 5: Base de análise da sexta tarefa



Fonte: Adaptação de Горбов e Микулина *et al*. (2001).

Quem representou os volumes por meio das tiras vermelhas? E por meio das tiras azuis? Onde está a pegadinha?

Imagem 6: Tiras utilizadas para a comparação dos volumes dos recipientes

Fonte: Adaptação de Горбов e Микулина *et al*. (2001).

As tarefas mediadas pela grandeza volume, como a número seis, detalham a ideia de tamanho. Além disso, permitem aos alunos fixarem relações de valor com o auxílio de tiras e substituírem a relação de volume pela relação de comprimento. Essa forma de analisar as grandezas prenuncia o movimento que permite ao aluno atingir o conceito abstrato de valor (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

> Esse movimento direciona, de acordo com Davídov (1988, p. 185), para a finalidade do ensino fundamental de formação, nos estudantes, de uma concepção autêntica de número com base no

> conceito de grandeza. Isso começa com a introdução desse conceito, determinado pelas relações de "igual", "maior", "menor", de modo tal que a criança compare de um modo diferente as grandezas apresentadas objetalmente. (ALVES, 2018, p. 152).

Como mencionado em seu enunciado, a sexta tarefa apresenta uma “pegadinha”. Nos livros didáticos do sistema Elkonin-Davidov, há muitas tarefas que contêm tal tipo de ludíbrio, o qual exige a atenção dos estudantes para que não se dispersem em relação ao conteúdo do conceito em foco. Elas são marcadas por um símbolo especial na margem do livro (seta). À primeira vista, elas até parecem ser simples; no entanto, é possível que: não tenham solução, permitam várias soluções ou exijam mais detalhes para que se chegue à solução coerente. Trata-se de algo proposital, pois se insere entre aquelas pertinentes à *quinta ação de estudo* do modo de organização do ensino do sistema Elkonin-Davídov, o *controle*. Tarefas com tais características e finalidade, segundo Repkin (2019, p. 230), são representativas de uma forma ou de um nível de controle, por “[...] ser realizado ao comparar a ação realmente executada com algum tipo de padrão. [...] envolve o conteúdo do que chamamos atenção voluntária”. A atenção é, de fato, um controle sobre o desempenho de uma ação, sobre se o desenvolvimento real da ação correspondeu ao padrão. Ou, como afirmam Горбов, Микулина e Савельева (2008), esse tipo de tarefa tem como objetivo o desenvolvimento da atenção dos alunos e do autocontrole, bem como o entendimento completo de execução de determinada operação.

Na sexta tarefa, a indicação é para que os alunos sejam colocados diante de uma situação de estabelecer relações de igualdade e desigualdade, mediados pelas grandezas volume e comprimento, tendo como referência superfícies retangulares azuis e vermelhas. Fica evidente que os comprimentos das larguras dos retângulos de superfície vermelha são equivalentes; por sua vez, os dos retângulos azuis não são. Dessa forma, os volumes iguais são representados pelas tiras vermelhas e os diferentes pelas tiras azuis. Entretanto, a pegadinha se apresenta na impossibilidade de afirmar qual dos alunos utilizou as tiras azuis para identificar a relação de desigualdade entre o volume dos recipientes. A medição poderia ser efetuada por Nícolas ou por Tânia. Essa é uma das tarefas em que os alunos necessitam de mais detalhes para solucioná-la de forma correta. Apenas estabelecer a relação entre a imagem dos recipientes e as tiras que representam a comparação entre seus volumes não é o suficiente para determinar qual aluno representou os volumes utilizando as tiras azuis.

Diferente da anterior, na sexta tarefa, apenas a visualização e a comparação das imagens não são suficientes para que os alunos determinem a solução. Esse tipo de situação gera novas necessidades nos estudantes, que os colocam em um movimento de busca por novos modos de ação. No ensino desenvolvimental, o pressuposto é de que a análise das condições – função recíproca do professor e do estudante – em que se estabelece uma tarefa direciona para a necessidade de um novo modo de ação (REPKIN, 2019; DAVÍDOV, 1988). Isso se manifesta em situações-problemas ou tarefas particulares, como é o caso desta em análise. No entanto, Puentes (2019c, p. 87-88), fazendo referência a Repkin (1976), alerta:

> Entretanto, ainda que a situação-problema é capaz de atualizar a necessidade de dominar o novo modo de ação, é completamente indiferente ao seu conteúdo e origem. Enquanto que a tarefa de estudo em sentido estrito envolve não só o conhecimento de como a ação pode ser realizada, mas também uma compreensão da justificativa objetiva de um modo particular de ação. Sendo assim, ficou comprovado que a tarefa não é só a resposta à questão de "como fazer", mas também do porquê isso é feito desse modo.

Para dar conta dessa abrangência da tarefa de estudo é que se estabelecem as tarefas particulares. Elas se organizam para que os modos de ação pertinentes aos conceitos se apresentem e sejam apropriados pelos estudantes. Nesse sentido, é importante destacar que as medições de diferentes grandezas – entre as quais aquelas que estamos analisando – são de grande importância, pois não ficam apenas no aspecto objetal/visual. A busca pelos modos de ação, impulsionados pelas necessidades geradas, precisa de mediações dos conhecimentos já produzidos pela humanidade. Tais conhecimentos dizem respeito à Geometria, à Álgebra e à Aritmética, inter-relacionados pelo objeto central: relação entre as grandezas.

O contato com as grandezas e os modos de estabelecer as suas relações é uma orientação do ensino desenvolvimental. Para Galperin, Zaporózhets e Elkonim (1987, p. 311),

> O problema central, que se deve resolver na estruturação do programa de matemática para os graus primários da escola, é o problema de as crianças descobrirem a grandeza com propriedade dos parâmetros físicos dos objetos materiais e a passagem aos tipos de relações possíveis entre as grandezas e suas determinações quantitativas, isto é, o trânsito para as principais relações matemáticas.

A tarefa seis apresenta uma novidade em relação às anteriores no que diz respeito ao/à registro/representação das relações de igualdade e desigualdade entre as grandezas por meio de cartões de superfícies retangulares. Nela, as tiras retangulares com o comprimento da largura iguais são formas de indicar as grandezas de igual valor, enquanto aquelas cujos comprimentos da largura são diferentes representam grandezas de valores distintos.

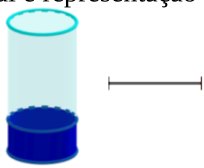
A fim de complexificar o processo de modelação e atingir um novo modo de ação, as próximas tarefas, referentes às abstrações igualdade e desigualdade, adotarão segmentos de reta e, posteriormente, de arcos para representarem o processo de medição. Nesse sentido, é importante salientar que nos capítulos anteriores do livro didático os alunos já realizaram tarefas relativas aos conceitos de ponto, reta, segmento e linha (reta, curva, segmentada).

O segmento de reta é de extrema importância, pois se constitui elemento mediador na *modelagem gráfica* das relações de igualdade e desigualdade entre grandezas. O sistema de tarefas, que apresentaremos a seguir, proporciona aos estudantes a assimilação de que: quando se comparam objetos apenas pela cor e forma, trata-se apenas da diferença entre eles, ou seja, de uma relação de desigualdade. Nesses casos, a relação entre os objetos e as suas representações por meio de segmentos não tem relevância. Entretanto, quando comparamos grandezas como comprimento, área, volume e massa, a relação de desigualdade pode ser caracterizada com uma maior precisão (um objeto é maior ou menor que o outro). Assim, o objeto maior é representado pelo segmento mais comprido e o objeto menor pelo segmento mais curto. Nesse momento, o professor informará aos estudantes que a característica pela qual o objeto é maior ou menor que o outro é chamada *valor* (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Vale observar que para chegar a esse nível de compreensão conceitual a solução das situações ou tarefas particulares levou os estudantes a assimilarem algo “comum” antes de dominar suas manifestações particulares. Enfim, o que move as especificidades das tarefas particulares é algo geral, relação entre grandezas. Estas são indicadoras dos elementos constitutivos do modelo representativo da relação essencial do conceito. Nesse sentido, vale dizer que os símbolos ou os signos, ou a combinação deles, constituem-se elementos mediadores da modelação que, segundo Davýdov (1982, p. 313, tradução nossa), é “[...] um aspecto especial da idealização simbólico-sinalizadora na ciência”. Por consequência, postula a elaboração de modelos visuais, com uma estrutura do objeto real em estudo, em que reproduzem de forma “[...] aproximada, simplificadora e esquematizadora” (DAVÝDOV, 1982, p. 314, tradução nossa).

Nesse âmbito é que se apresenta a **tarefa sete**, em que há sobre a mesa do professor um recipiente que não está completamente cheio de líquido. Os estudantes serão convidados a desenhar no caderno o segmento de reta que representa o volume do líquido (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008). Na execução da tarefa, apresentam-se dois modos de representação: *objetal* (recipiente com um volume de líquido) e *gráfica* (imagem 7).

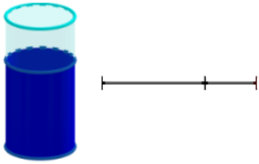
Imagem 7: Ação objetal e representação gráfica da sétima tarefa



Fonte: Adaptação de Горбов, Микулина e Савельева, 2008.

Após a finalização dos registros, o professor adiciona líquido ao recipiente e propõe aos estudantes que representem no segmento de reta construído anteriormente a ação realizada por ele (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008). O segmento da imagem 8 representa essa nova representação.

Imagem 8: Nova ação objetal e sua representação gráfica



Fonte: Adaptação de Горбов, Микулина e Савельева, 2008.

É importante os estudantes identificarem que, devido à quantidade de líquido ter aumentado, o segmento de reta também precisa ficar maior.

Vale mencionar que o uso do segmento pelas crianças, a partir desse momento, é consequência de tarefas que as colocaram em apropriação de diversos tipos de linhas (reta, curva, fechada, aberta, segmentada). As crianças aprenderam a diferença entre reta e segmento, o ponto como intersecção de duas linhas, as noções de infinito, entre outras. A princípio, é possível que alguém considere algo muito superior às capacidades dos estudantes do primeiro ano. No entanto, Aleksandrov[10] (1991, p. 31) entende que isso é possível, pois,

> a criança aprende prontamente a desenhar uma linha reta porque está rodeada de objetos com bordas retas que são o resultado de uma manufatura, e só por esta razão, em nossa infância, já formamos uma ideia clara da linha reta. Exatamente do mesmo modo a noção de grandezas geométricas de comprimento, área e volume, surge das atividades da vida diária.

Nesse sentido é que, em um segundo momento da tarefa sete, o professor distribuirá uma tira de papel para cada aluno e desenhará no quadro um segmento de reta que represente o seu comprimento da largura, conforme apresentado na imagem 9, que segue (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

---

[10] Esse autor é um dos matemáticos tido como referência do grupo de Davidov para fundamentar a organização do ensino de matemática a partir de seu objeto, isto é, a relação entre grandezas.

Imagem 9: Ação realizada pelo professor no segundo momento da tarefa sete

Fonte: Adaptação de Горбов, Микулина e Савельева, 2008.

Aqui ficam evidentes as repetidas afirmações anteriores sobre a importância de o estudante ter contato com diferentes grandezas e apropriar-se de diferentes modos de ação de medição delas e de modelos. É observável que em uma mesma tarefa são realizadas ações objetais e a respectiva modelação gráfica tanto com a grandeza volume quanto com a grandeza comprimento.

Nesse segundo momento, o professor ainda risca uma parte do segmento de reta construído no quadro e pede que os alunos façam o mesmo procedimento em suas tiras. De forma contrária ao que foi sugerido com as modificações no líquido do recipiente (o professor fez a ação objetal e os alunos a representação gráfica), agora, a representação gráfica efetuada pelo professor gera a necessidade de que os alunos retirem uma parte de suas tiras, conforme representado na figura 9 (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008). É conveniente relembrar que o conceito de equação no sistema de ensino desenvolvimental – cujo estudo científico no decorrer de muitos anos foi liderado por Elkonin Davidov e muitos outros pesquisadores de diversas áreas – insere-se em todo esse movimento, não se restringindo apenas ao procedimento de isolar a incógnita em uma igualdade, como ocorreu em nossa trajetória escolar.

Imagem 10: Ação realizada pelos alunos no segundo momento da tarefa sete

Fonte: Adaptação de Горбов, Микулина e Савельева, 2008.

Percebe-se que, apesar das diferenças, em ambos os momentos da tarefa, há o apontar para a relação universal todo-partes, peculiar ao sistema conceitual de número, adição e subtração que, por sua vez, complexifica as ideias da equação do primeiro grau, como explicitaremos mais adiante. O todo é caracterizado como um valor composto por outros valores, ou seja, pelas partes. No primeiro momento da tarefa, por exemplo, o todo é equivalente à quantidade final de líquido colocado no recipiente, enquanto as partes são representadas pela quantidade inicial de líquido e pela quantidade que o professor adicionou posteriormente. Já no segundo momento, o todo é caracterizado pela tira de papel entregue aos estudantes, enquanto as partes são equivalentes à tira retirada por eles, assim como a sua quantidade restante. Além disso, a relação todo-partes pode ser observada nas representações gráficas finais elaboradas pelos alunos e pelo professor, respectivamente.

Sendo assim, a relação todo-partes, que se anuncia nessas tarefas, configura-se como um elemento essencial no conceito teórico de equação, assim como nos conceitos de adição e subtração (ALVES, 2017). Nela, são estabelecidas relações de igualdade, uma vez que o todo é equivalente à soma das partes e, da mesma forma, que uma parte é equivalente à diferença entre o todo e a outra parte.

A autora afirma que tarefas similares a essa introduzem as relações internas dos conceitos de adição e subtração e, consequentemente, a relação de ideias referentes ao conceito de equação. De acordo com ela, no desenvolvimento dessas tarefas, surge nas crianças a necessidade de determinar a diferença entre as grandezas analisadas. Essa diferença se refere tanto à adição quanto à subtração, e "[...] é ela que gera o movimento caracterizador da relação de igualdade e desigualdade que, na proposição davydoviana, proclama a relação todo-partes" (ALVES, 2017, p. 84).

Em outras palavras, o desenvolvimento das tarefas propostas coloca o estudante em um processo que, em determinado momento, ele estará diante de uma desigualdade a qual, conceitualmente, demandará um movimento que a leve à igualdade. Nesse movimento, encontra-se a gênese do conceito teórico de equação em articulação com a relação essencial todo-partes.

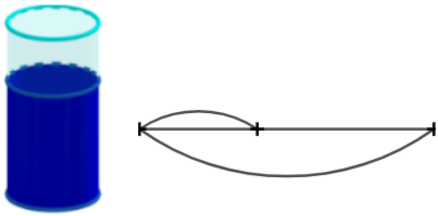
Na tarefa oito, a seguir, a inserção de dois novos elementos na representação gráfica, o arco e as letras, permitirá que a relação todo-partes fique mais evidente. Além disso, esses novos elementos permitirão a representação da situação-problema por meio de um novo modelo: o literal. Para tanto,

> [...] os arcos constituirão uma importante ferramenta no processo de elaboração do esquema

> geral de resolução de problemas de adição e subtração. Além disso, subsidiarão a introdução de um novo tipo de representação das relações entre grandezas, a representação literal que, por sua vez, possibilitará a expressão das relações entre grandezas em sua forma abstrata. (ROSA, 2012, p. 122).

A **tarefa oito** também envolve, para a análise, a grandeza volume em um recipiente com líquido que está sobre a mesa do professor em relação com um desenho (esquema) no quadro, como mostra a imagem 11.

Imagem 11: Base de análise da oitava tarefa

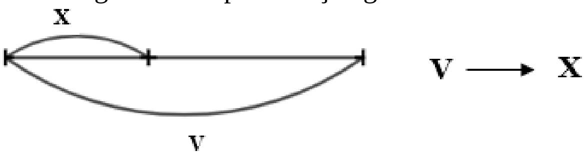


Fonte: Adaptação de Горбов, Микулина e Савельева, 2008.

O professor informa ao grupo presente na sala de aula que os estudantes de outra turma mudaram o volume do líquido presente no recipiente e que demonstraram o movimento efetuado por meio do desenho que está quadro. Ele pergunta qual foi o procedimento efetuado. Горбов, Микулина e Савельева (2008) prenunciam a probabilidade de discussões entre os estudantes por consequência das intervenções do professor.

Diante das discussões, os estudantes verificam que o modo pelo qual o desenho foi apresentado não permite que eles determinem se o volume inicial do líquido foi aumentado ou diminuído. Isso porque o desenho não dá elementos suficientes que indiquem, respectivamente, o volume inicial e o final do recipiente. Como o professor sabe o procedimento utilizado pela outra turma, ele auxilia os estudantes para descobri-lo por meio de letras. Em cada arco ele coloca uma letra (X e V) e acrescenta no registro uma seta com as mesmas letras na origem e na extremidade, respectivamente (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008). A imagem 12 ilustra essa situação.

Imagem 12: Representação gráfica e literal



Fonte: Adaptação de Горбов, Микулина e Савельева, 2008.

O novo registro, com um sentido dado pela flecha, possibilita a identificação de que o volume maior é representado pela letra V e, consequentemente, o volume menor pela letra X. Trata-se, portanto, de uma tarefa típica de segunda ação de estudo – modelação de uma relação essencial referente a um sistema de conceito – que, no caso, retrata a síntese dos três níveis de modelo: objetal, gráfica e literal. A especificidade da presente tarefa requer que o professor faça o seguinte comentário: na Matemática, geralmente os valores são representados por letras e, nesse caso em específico, o registro da seta indica que as letras V e X expressam o volume inicial e final, respectivamente, do movimento realizado pelos alunos da outra turma. Ou seja, o volume inicial era maior que o volume final, cuja visualização é beneficiada pelos arcos (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ao perceber que os estudantes se apropriaram desse novo modo de ação, o professor solicita que um aluno vá até a sua mesa e realize com o líquido o procedimento determinado pelo desenho, ou seja, pela representação literal. Além disso, o professor menciona que a escolha pelas letras utilizadas no registro literal tem um caráter livre (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008), como, por exemplo, ilustra a imagem 13.

Imagem 13: Diferentes formas da representação literal

$$C \longrightarrow T$$

$$A \longrightarrow H$$

$$R \longrightarrow S$$

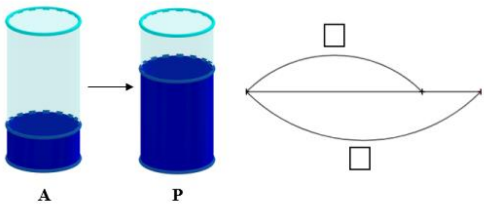
Fonte: Adaptação de Горбов, Микулина e Савельева, 2008.

Destacamos que na tarefa, além de os arcos auxiliarem para a definição do todo e das partes – movimento essencial do conceito teórico de equação do primeiro grau –, eles constituem um esquema que, segundo

Alves (2017), mediará a definição simultânea das operações de adição e subtração. Além disso, traz a representação literal (uma base algébrica) e o uso da seta – indicadora do ponto de partida e do ponto de chegada –, fundamentais para a realização da ação objetal por parte dos alunos. Nesse estágio do desenvolvimento do pensamento conceitual, o modelo (esquemas e desenhos) é algo necessário, mas reflete "[...] apenas com um objetivo bem determinado certos aspectos de coisas reais" (DAVÝDOV, 1982, p. 190, tradução nossa). Mesmo assim, "[...] é essencial ter uma especial relação cognitiva com esquemas e projetos, métodos únicos de 'leitura', para saber perceber neles as 'abstrações' representadas, os símbolos de conceitos" (DAVÝDOV, 1982, p. 190, tradução nossa). Acrescenta que muitas "[...] particularidades são importantes para uma coisa real além de operar com ela na prática, mas podem perder seu valor ao representar tal coisa e efetuar operações cognoscitivas com a mesma" (DAVÝDOV, 1982, p. 190, tradução nossa).

Na **tarefa nove,** a orientação é para que os alunos marquem no desenho, imagem 14, os valores A e P nos quadradinhos correspondentes aos arcos. Existe uma confluência que coloca em cena a inter-relação entre os modelos objetal, gráfico e literal. Porém, de modo tal que, embora a análise ocorra por mediações visuais, na sua essência, existem componentes abstratos peculiares ao pensamento algébrico, entre os quais está estabelecer relações entre grandezas com recorrência à ideia de incógnita que, por sua vez, move-se por generalizações.

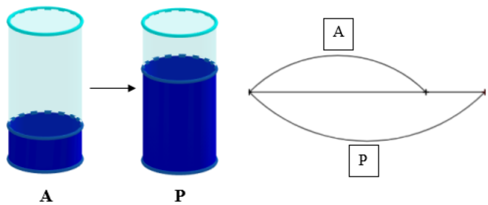
Imagem 14: Base de análise da nona tarefa



Fonte: Adaptação de Горбов e Микулина *et al*. (2001).

Pela observação do desenho, é possível a identificação de que o volume de líquido presente no recipiente foi aumentado. Nesse sentido, ao discutir o desenho, os estudantes descobrem que A indica o volume inicial e P o final. Com essa apreensão é possível orientar os estudantes para que registrem no caderno individual e no quadro as respectivas letras que completam a tarefa (imagem 15).

Imagem 15: Resolução da nona tarefa

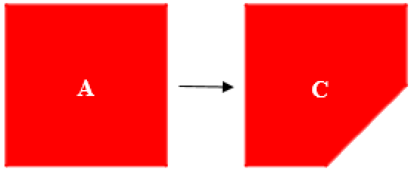


Fonte: Adaptação de Горбов e Микулина *et al*. (2001).

Com o auxílio dos arcos e das letras é possível determinar que o todo é representado pela medida “P” e uma das partes é representada pela medida “A”. O uso das letras para indicar uma medição dá um caráter generalizador algébrico, que supera o teor eminentemente aritmético de quando se atribui um valor específico como o resultado de quantas vezes a unidade de medida cabe na grandeza de mesma espécie a ser mensurada. Esse aspecto de generalização se constitui um processo formativo que, no entendimento de Vygotski (1996), é procedimento singular de reflexo da realidade na consciência do homem. As operações e representações proporcionadas por essas tarefas particulares se alicerçam nos traços conceituais relação de comparação e medição, que implicam em abstrações (igualdade e desigualdade). É na interface desse processo que se apresenta o caráter da generalização que incorpora o significado da palavra de um determinado conceito (VYGOTSKI, 1996). Nesse sentido, vale o esclarecimento de Davýdov (1982, p. 364-365) de que a teoria materialista dialética da generalização e do conceito supera o entendimento sensualista da lógica formal, pois na subjacência do pensamento teórico está uma atividade: “[...] a sensorial-objetiva, que reproduz e transforma o mundo circundante do homem”.

A mesma preocupação se reflete na **tarefa dez**, intitulada “permanência de grandezas”. Ela traz de forma implícita o conceito de equação ao mostrar a permanência da igualdade apesar de transformações internas no todo. O professor mostra aos estudantes uma peça de cartolina de forma quadrangular e escolhe a letra A para representar a medida da área de sua superfície. Posteriormente, retira uma parte da peça e a reserva. Com uma parte retirada, a área A sofreu uma mudança, cujo resultado foi denominado pela letra C (imagem 16). Além disso, o professor anota no quadro a representação literal da ação objetal executada da seguinte forma: A → C (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

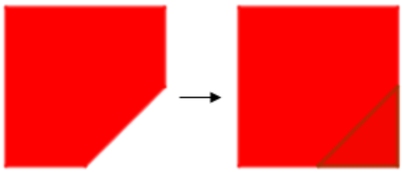
Imagem 16: Áreas A e C



Fonte: Adaptação de Горбов, Микулина e Савельева, 2008.

Depois, o professor coloca a parte que foi retirada em seu local de origem. Esse movimento determina que a área C sofreu uma alteração, cujo resultado é equivalente à área inicial A, pois a mesma parte que havia sido retirada foi adicionada novamente. Com esse último movimento, uma nova representação literal é necessária, a qual pode ser escrita da forma: A → C → A (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008), ilustrada na figura 16.

Imagem 17: Movimento de alteração da área C



Fonte: Adaptação de Горбов, Микулина e Савельева, 2008.

Em seguida, outra mudança é realizada: o professor pega a parte recortada, coloca em um outro local da peça (imagem 18) e pergunta aos estudantes qual a área resultante. Горбов, Микулина e Савельева (2008) afirmam que é possível alguns alunos ficarem confusos. Se isso ocorrer, é necessária a interferência do professor a fim de fazê-los observar que o movimento efetuado altera apenas a forma da peça, mas a área continua igual à inicial (área A), uma vez que foi adicionada a mesma parte retirada anteriormente.

Imagem 18: Novo movimento de alteração da área C

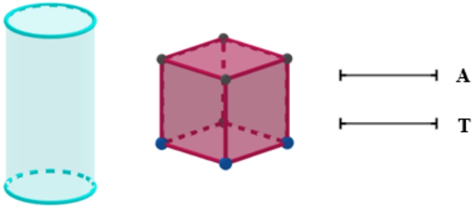
Fonte: Adaptação de Горбов, Микулина e Савельева, 2008.

O conceito de equação está implícito na presente tarefa, uma vez que traz a ideia da igualdade mediada pela grandeza área, apesar de ocorrerem transformações internas no todo. Consequentemente, a relação essencial do conceito de equação, assim como das operações de adição e subtração, também está presente nessa tarefa. Além disso, as representações objetal, gráfica e literal são componentes que permanecem durante a resolução das tarefas, mas também geram a necessidade de outros elementos. Nessa tarefa em específico, Alves (2017) ressalta que a necessidade gerada por meio das representações mencionadas é caracterizada pela prova de que recortes com formas distintas podem apresentar a mesma medida de área da superfície sem que seja necessário expressar o movimento por meio números abstratos.

As próximas duas tarefas tratam do registro de resultados referentes à comparação de grandezas considerando as abstrações igualdade e diferença. Nesse momento, são utilizadas letras para a representação das relações entre as grandezas, pelas fórmulas (modelos literais) $A = B$, $A < B$ e $A > B$, o que permitirá um “[...] estudo das propriedades entre relações de igualdade e desigualdade das grandezas” (ROSA, 2012, p. 128).

A **tarefa onze** é elaborada para que seja realizada em duplas. Os alunos recebem dois objetos de mesma massa, mas de cor e forma diferentes. As propriedades dos objetos, cuja comparação seja possível, são discutidas e a grandeza massa é então escolhida. Um aluno de cada dupla determina as letras escolhidas para a representação da massa dos objetos em análise. Um registro é realizado no quadro como exemplo (imagem 19), e o professor sugere que uma balança de dois pratos seja utilizada para efetuar a comparação e, posteriormente, o registro do resultado obtido (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Imagem 19: Exemplificação da representação da tarefa onze

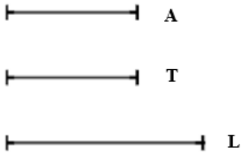


Fonte: Adaptação de Горбов, Микулина e Савельева, 2008.

Nesse momento, o professor comentará que, geralmente, em Matemática, utilizam-se letras e símbolos especiais para que o resultado da comparação entre grandezas seja registrado. Então ele escreve no quadro "A = T" e, ao mesmo tempo, fala: "*A massa A é igual à massa T*".

Posteriormente, o outro aluno da dupla recebe um terceiro objeto para que seja comparado em relação à massa de um dos outros dois objetos. Ele escolhe L ou uma outra letra para representar a massa. Como elas são diferentes, o registro da desigualdade é feito da forma "A ≠ L", que significa: "a massa A não é igual à massa L". É importante que, no momento da leitura, os alunos especifiquem a grandeza, a fim de evitar que entendam simplesmente como "letra A não é igual à letra L". Agora, o professor incentiva para que os estudantes adivinhem o resultado da comparação entre T e L, e a confirmação é efetuada por meio da balança. O registro é feito na forma "T ≠ L", e os alunos leem: "*A massa T não é igual à massa ele*". Por fim, o esquema representado na imagem 20 é finalizado.

Imagem 20: Esquema referente à comparação das massas A, T e L



Fonte: Adaptação de Горбов, Микулина e Савельева, 2008.

De acordo com Rosa (2012), os resultados abstratos "A = T, A ≠ L e T ≠ L" se originaram no mundo real por meio da comparação entre os objetos. Entretanto,

> [...] como não se trata de uma abstração empírica, pode ser generalizada para estabelecer relações

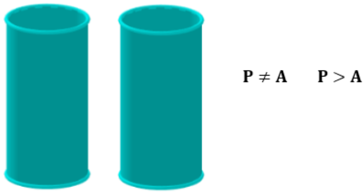
> entre quaisquer objetos e, ainda, entre quaisquer grandezas (comprimentos, áreas, volumes, etc.), independentemente da propriedade numérica singular, pois T, A e L representam valores universais. Em outras palavras, por meio da abstração geneticamente inicial (teórica), as relações entre grandezas foram reduzidas a sua forma universal. (ROSA, 2012, p. 129).

Segundo Davydov (1982), torna-se mais fácil para a criança compreender as manifestações particulares, assim como sua importância nas aplicações, o quanto antes ela se apropriar do aspecto geral do conceito. Dessa forma, é importante não apenas mostrar às crianças a essência abstrata da Matemática como também incentivá-las a fazer abstrações.

Outra característica dessa última situação da tarefa 11 é certa aparência com a propriedade transitiva, uma significação necessária do conceito de equação. Tal propriedade diz respeito à relação que se estabelece entre três elementos de um mesmo conjunto em que: se o primeiro tem relação com o segundo e este com um terceiro, então o primeiro mantém a mesma relação com o terceiro. No caso em análise, tem-se: $A = T$, $A \neq L$ e $T \neq L$. Vale dizer que na relação de diferente ($\neq$) inclui maior (>) e menor (<).

É nesse contexto que se apresenta a **tarefa doze**, que centra no desdobramento da ideia de diferente ($\neq$) para a de maior (>) e menor (<). A situação que se apresenta é: há dois recipientes opacos de mesma forma e o registro no quadro da relação entre os volumes de líquido “$P \neq A$”. Então o professor pergunta aos estudantes: o que pode ser feito para que o segundo recipiente tenha o mesmo volume de líquido que o primeiro? E, também, faz um novo registro para esclarecer a situação “$P > A$”. Além disso, comenta: os adultos entenderiam de forma imediata o que teriam de fazer, uma vez que sabem ler o novo sinal, denominado “maior que” (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Imagem 21: Base de análise da décima segunda tarefa



Fonte: Adaptação de Горбов, Микулина e Савельева, 2008.

Após os alunos definirem o modo de ação que permita igualar os dois volumes de líquido, o professor indaga: existe ou não um sinal “menor que”? Ele chama a atenção para a semelhança entre os sinais “maior que (>)” e “menor que (<)”, que se diferem apenas por se voltarem para lados opostos, isto é, a parte aberta (mais alta) apontar o maior.

Observa-se que as tarefas apresentadas até o momento apresentam o movimento dos registros referentes às relações entre grandezas, mediadas simbolicamente desde a sua forma objetal até a forma literal. Esse movimento, de acordo com Davídov (1988), possibilita aos estudantes a reestruturação e o desenvolvimento do pensamento teórico, assim como de suas ações mentais. Elas traduzem o movimento histórico-lógico do conceito de equação no âmbito do conceito teórico de número como manifestação da relação entre grandezas. No desenvolvimento dessas tarefas, ocorre a complexificação pela criação e pelo uso de símbolos, de modo que sua forma de representação, inicialmente retórica, tornou-se totalmente simbólica.

> Os sistemas simbólicos são meios para estabelecer os padrões na relação entre grandezas e na passagem destes para o plano mental. A revelação e a expressão em símbolos das relações essenciais entre grandezas permitirão, mais tarde, sua reprodução teórica por meio do modelo geral (lei). Ou seja, uma abstração produzida com a ajuda das fórmulas literais. Quanto mais as tarefas adentram na essência das relações entre grandezas, mais abstratas são as formas de expressão de tais relações e, consequentemente, mais concretas e plenas de conteúdo teórico. (ROSA, 2012, p. 132).

A tarefa seguinte, **treze,** dá subsídios para o desenvolvimento do conceito teórico de número real, cuja modelação se constitui uma expressão própria de equação do primeiro grau. Por meio dela, será possível desenvolver o modelo geral do conceito de número, que caracteriza um nível mais complexo e teórico do conceito de igualdade. Segundo Rosa (2012), o método de comparação direta entre duas grandezas possibilita a criação de novas situações nas quais há a necessidade de uma terceira grandeza para que a comparação seja, de fato, realizada.

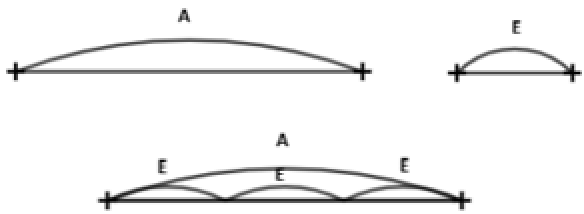
A tarefa em análise se apresenta com o objetivo de proporcionar que os estudantes se coloquem em movimento de pensamento para a discussão provocada pela pergunta: o comprimento do segmento A é igual ao comprimento do segmento E (imagem 22)? (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Imagem 22: Segmentos de reta A e E

Fonte: Adaptação de Горбов, Микулина e Савельева, 2008.

Горбов, Микулина e Савельева (2008) inferem que, ao se observar os segmentos de reta, fica evidente que eles não possuem a mesma medida do comprimento. Então é conveniente uma nova pergunta: o comprimento A é equivalente a quantas vezes o comprimento E? Para que essa questão seja respondida de forma correta, o aspecto quantitativo do número, equivalente ao resultado da medição, será a sua referência. Por sua vez, a medição será realizada sobrepondo-se o segmento E em A, conforme a imagem 23.

Imagem 23: Comparação dos segmentos de reta A e E



Fonte: Adaptação de Горбов, Микулина e Савельева (2008).

A sobreposição mostra que a medida A é igual a três vezes a medida E, que, literalmente, representa-se pela igualdade: A = 3E. Aqui, A é a grandeza a ser medida, enquanto E é a unidade de medida. Isso implica em uma relação de multiplicidade entre as duas grandezas que, genericamente, é representada pelo modelo A = nE. Tal igualdade algébrica, de acordo com Rosa (2012), expressa a relação essencial do conceito teórico de número que materializa a modelação, peculiar à segunda ação de estudo (DAVÍDOV, 1988). No caso específico da tarefa treze, o n, número da medida, assume o valor 3. O referido modelo pode ser transformado com base nas suas próprias propriedades – terceira ação de estudo, pertinente ao conceito de número –, o que pode ser movido pela pergunta: quantas partes serão no total se a grandeza A for dividida em partes iguais à grandeza E? Agora, a fórmula geral que caracteriza essa relação é: $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{E}} = \mathrm{n}$. Observa-se que no caso específico da tarefa treze n continua sendo três, isto é, A é dividido em três partes equivalentes a E. Rosa (2012, p. 157-158) afirma que os dois modelos revelam que:

> [...] o conceito de número se apresenta num contexto de inter-relação das significações geométricas, aritméticas e algébricas. Na tarefa anterior, a unidade de medida estava posta, sem necessidade de sua escolha. O processo de aplicar a unidade de medida E sobre o comprimento A é de caráter geométrico, por se tratar de segmento. A conclusão de que cabem 3 medidas E no comprimento A traduz o teor aritmético que surge a partir do modelo algébrico *n* e A = *n*E.

Ambas as fórmulas “A = nE” e “$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{E}} = \mathrm{n}$" se interdependem e complementam-se, bem como representam o modelo abstrato do conceito de número real. Esses modelos abstratos do conceito de número refletem um componente de equação e mostram o movimento do pensamento da resolução de uma equação do primeiro grau. Nesse caso, a resolução não é efetuada nem pelo “[...] passar um termo para o outro lado da igualdade, trocando o sinal”, nem pelo processo de equivalência, ou por tentativa, conforme o método da falsa posição. O que move a resolução da equação é a igualdade, que requer o necessário e único valor de uma das incógnitas, mediada pela relação entre grandezas.

Segundo Rosa (2012), as proposições davydovianas se diferenciam epistemologicamente do ensino tradicional brasileiro, por exemplo, uma vez que a relação entre o conceito de número e o objeto é mediada pela unidade de medida nas relações de multiplicidade e divisibilidade. Isso significa que o conceito teórico de número é contemplado em um sistema conceitual no qual assume o lugar do resultado de um processo de medida na relação entre grandezas.

> Importa reafirmar que não existe número sem a relação entre grandezas, sejam elas discretas ou contínuas. Em outras palavras, sem ela não se pode compreender teoricamente o conceito de número, por outro lado, é possível compreender a relação entre grandezas sem conhecer o número. Enfim, as relações entre grandezas são a abstração inicial, que reflete a essência, a causa do conceito de número. A partir dela, o referido conceito surge e se desenvolve, com todos os seus elementos e características, tais como: maior, menor, igual, sequência, classe, série, correspondência, unidade, medida (a contagem é uma forma de medir), subdivisão da unidade, adição, subtração, entre muitos. (ROSA, 2012, p. 116).

A citação de Rosa apresenta elementos argumentativos para reafirmarmos que o conceito de equação do primeiro grau também tem sua base no âmbito do desenvolvimento do conceito teórico de número (real) na relação entre medidas (grandezas), mas indica a necessidade de complexificação com novas propriedades e elementos conceituais. Por exemplo, se considerarmos as equações do primeiro grau mais complexas que são propostas nas aulas de Matemática da atualidade, a transformação do modelo A = nE em $\frac{A}{E} = $ n corresponde a um dos últimos procedimentos da resolução de uma equação. Dito de outro modo, é o momento da resolução em que se agruparam todos os termos com incógnita em um dos membros da igualdade e os termos independentes no outro. É nesse estágio de resolução que se isola a incógnita ao dividir os dois membros pelo valor do seu coeficiente. Observa-se, pois, que o referido modelo é realmente *essencial*, uma vez que é o revelador do valor (número) de uma incógnita.

No entanto, desde os árabes, egípcios, gregos, hindus, chineses – que se preocuparam com um modo geral de solução –, as equações não se apresentam somente nessa relação final de multiplicidade e divisibilidade, isto é, no estágio final de indicar o valor da incógnita. Em vez disso, elas se complexificaram com acréscimo de mais termos (tanto envolvendo incógnita com termos independentes), dadas as necessidades sociais prementes no desenvolvimento da humanidade. Nesse sentido é que se apresentarão as tarefas subsequentes, que acrescem o componente conceitual que podemos chamar de *soma algébrica* (que envolve a adição e a subtração), a qual traz à tona a relação todo-partes.

Isso ocorre mais enfaticamente nas tarefas particulares do segundo ano do Ensino Fundamental. Agora, a elaboração e a resolução de equações se tornam mais explícitas e recorrentes nas tarefas do livro didático e de orientação ao professor. É importante destacar que os conceitos e modos de representação desenvolvidos no primeiro ano são fundamentais nesse processo de apropriação do novo conceito. A relação todo-partes e sua representação gráfica, por exemplo, são utilizadas de forma recorrente nas novas tarefas propostas.

A **décima quarta tarefa** tem como objetivo preparar os alunos para a elaboração e a resolução de equações de modo que ocorra a compreensão de como são encontrados o todo e as partes (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2009). Nesse sentido, são apresentadas as quatro relações de igualdade (imagem 24) para que os estudantes determinem qual o todo e quais as partes. Além disso, orienta para que verifiquem suas respostas com o auxílio do esquema (representação gráfica).

Imagem 24: Relações de igualdade apresentadas na tarefa quatorze

$c = a + b$	$b - a = c$
$n + e = m$	$p = k - u$

Fonte: Adaptação de Горбов, Микулина e Савельева (2009).

Para solucionar essa tarefa, é importante que os alunos detectem primeiro qual componente da igualdade é o todo para que subsidie a elaboração de um esquema que represente cada situação. Uma condição para tal é a determinação – e com certa facilidade – dos componentes da adição e da subtração, assim como quais deles são as partes e a qual inteiro (todo) pertencem (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2009). Inicialmente, a representação gráfica, por meio do esquema, caracteriza essa classificação do todo e das suas partes.

Galperin, Zaporózhets e Elkonin (1987, p. 312) afirmam que:

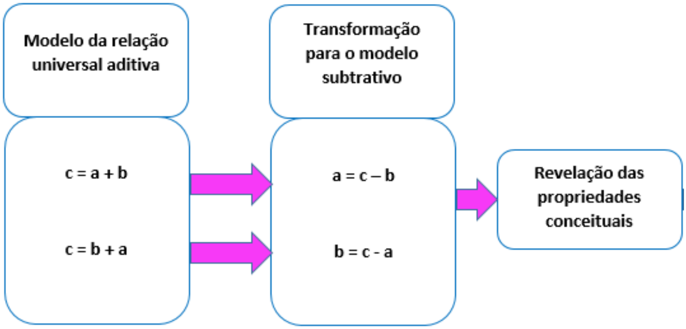
> A investigação experimental mostrou que tal modelação das relações entre as grandezas é completamente acessível às crianças desde o começo da aprendizagem escolar. Esta introdução da criança no objeto da matemática possibilita a mudança das estruturas das relações e aclara suas passagens mútuas (igualdade em desigualdade e a inversa). Aqui, a soma e a diferença atuam somente

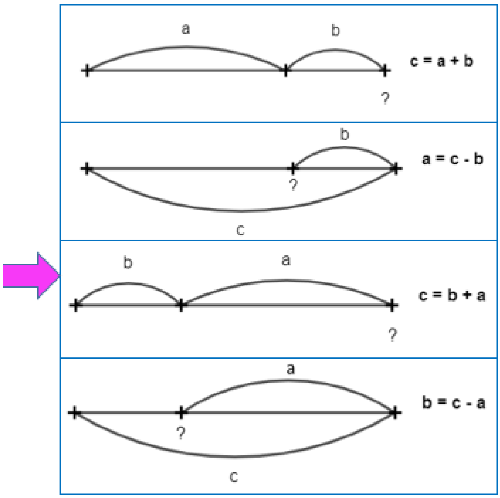
> como operações de mudança das estruturas de relações.

Alves (2017, p. 182), com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008) e Давыдов *et al.* (2012), elaborou uma síntese (imagem 25) do movimento conceitual desenvolvido desde o primeiro ano que, no segundo, “[...] atinge o modelo da relação universal todo-partes no sistema conceitual adição/subtração/equação que dá base para a resolução de problemas”.

Esse modelo, apresentado na referida síntese (imagem 25), torna-se referência para que os estudantes resolvam a tarefa em análise, assim como outros problemas referentes ao sistema conceitual mencionado. Os efeitos das discussões entre os estudantes, orientados pelo professor, são que: 1) em c = a + b, c é o todo, a e b são as partes; 2) em b – a = c, b é o todo, a e c são as partes; 3) em n + e = m, as partes são n e e, enquanto o todo é m; 4) em p = k – u, k é o todo e p e u são as partes.

Imagem 25: Síntese modelo da relação universal todo-partes no sistema conceitual adição/subtração/equação



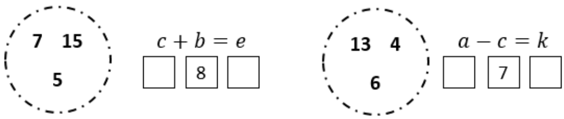


Fonte: Produção nossa com base em Alves (2017).

Por meio dos modelos (literais e gráficos), torna-se possível a seguinte síntese: o todo equivale à soma das partes e, dessa forma, quando ele for a incógnita, a adição é a operação que o indicará. Por sua vez, para determinar uma das partes, é necessário subtrair a outra do todo (ROSA, 2012). Tal síntese se torna um procedimento, um modo geral de ação, para resolver uma equação com as características do referido modelo da relação partes/todo. Entretanto, o termo “equação” ainda não é apresentado aos estudantes, o que ocorrerá apenas na tarefa dezesseis.

Isso se revela na **décima quinta tarefa**, em que os estudantes estarão diante da escolha entre os valores dados, números, que tornam verdadeira a igualdade preestabelecida. A imagem 26 representa a situação proposta aos estudantes.

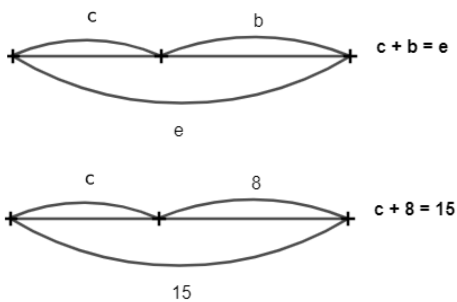
Imagem 26: Base de análise da tarefa quinze



Fonte: Adaptação de Давыдов *et al*. (2012).

Na primeira situação, o professor sugere que os estudantes escolham, inicialmente, o número correspondente à letra “e”. De acordo com Горбов, Микулина e Савельева (2009), é provável que eles selecionem o número quinze. Isso porque, com o desenvolvimento das tarefas no primeiro ano, já têm a compreensão de que o oito é uma das partes e a letra “e” representa o número que caracteriza o todo. Assim, entre as opções de escolha, o número quinze é o único que pode assumir esse lugar, uma vez que o todo é maior que as partes. O professor sugere, então, que os estudantes representem graficamente a situação, marcando a parte e o todo. A imagem 27 representa a modelação gráfica sugerida aos alunos.

Imagem 27: Representação gráfica da igualdade “c + b = e”



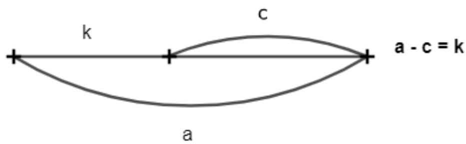
Fonte: Produção nossa com base em Горбов, Микулина e Савельева (2009) e Давыдов *et al*. (2012).

O registro gráfico auxilia os estudantes na resolução da equação obtida “c + 8 = 15”. Apesar de os dois números restantes para a escolha serem menores que o todo, apenas o número sete torna a igualdade verdadeira, ou seja, é a outra parte do todo e, consequentemente, a solução da equação construída.

No segundo caso dessa tarefa, Горбов, Микулина e Савельева (2009) orientam para que os estudantes, primeiramente, escolham o valor correspondente ao todo e, depois, identifiquem as partes. Em seguida, a representação gráfica é registrada para que a equação seja solucionada.

De acordo com os modelos apresentados na imagem 25, podemos perceber que, nessa relação de igualdade, o todo é representado pela letra “a”, enquanto as partes são representadas pelas letras “c” e “k”. A imagem 28 explicita o registro gráfico dessa situação.

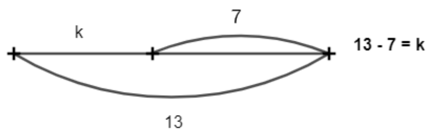
Imagem 28: Representação gráfica da igualdade “a - c = k”



Fonte: Produção nossa com base em Горбов, Микулина e Савельева (2009) e Давыдов et al. (2012).

Nesse caso, o número sete é uma das partes, representado pela letra c. Dessa forma, o todo precisa ser um número maior e entre as opções de escolha, sendo o treze o único valor que satisfaz essa condição. Por decorrência, o todo é treze e uma das partes é sete, conforme imagem 29:

Imagem 29: Representação gráfica da igualdade “a - c = k” com os valores escolhidos

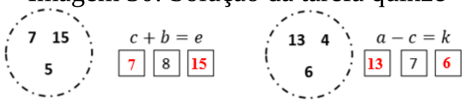


Fonte: Produção nossa com base em Горбов, Микулина e Савельева (2009) e Давыдов *et al.* (2012).

Como no caso anterior, os dois valores restantes para escolha são menores que o todo, entretanto, o único que torna a igualdade verdadeira é o número seis, que é a solução da equação. A imagem 30 expressa a solução final da décima quinta tarefa, que coloca o pensamento dos estudantes para resolver equações com princípios aditivos e subtrativos.

Nota-se que as características centrais desse movimento de apropriação conceitual são: 1) a base de análise é uma igualdade genérica; 2) atribuição de um valor para uma das letras; 3) exposição de três valores, dentre os quais dois deles correspondem às outras duas letras; 4) identificação de quem é o todo e quem são as partes; 5) escolha, entre o valores propostos, aquele provável para uma das outra letras ainda desconhecidas; 6) determinação, dentre os dois valores restantes, o que representa a solução final da equação. Tais características imprimem um dinamismo à sua solução, que vai do geral para o particular, permeado por situações singulares. Os três valores (na região circular), acrescidos da atribuição de um valor para uma das letras, impõem um processo de elaborações conceituais e apropriação de um modo geral de ação para a montagem e a solução de equação. Epistemologicamente, eles contemplam a ideia do movimento da matemática moderna de que a solução de uma equação se constitui no âmbito de um determinado conjunto universo (DAMAZIO, 2006). Vale esclarecer que o modo de organização do ensino em foco não segue os ditames da matemática moderna. Em vez disso, supera-os por incorporação, pois, afinal, trata-se de uma concepção que se apresentou no processo histórico de desenvolvimento da Matemática.

Imagem 30: Solução da tarefa quinze



Fonte: Produção nossa com base em Горбов, Микулина e Савельева (2009) e Давыдов *et al.* (2012).

A **tarefa dezesseis** é iniciada sem a consulta no livro didático. O professor faz o seguinte registro no quadro: "**k + b = c**". A representação gráfica é a operação a ser feita pelos estudantes. Depois disso, uma "história", de acordo com o esquema, pode ser inventada pelo professor, por exemplo: "há "c" lápis na caixinha, entre eles "k" são vermelhos e "b" são azuis". Em seguida, a história é transformada no enunciado de um problema no qual um dos dados do esquema – b, por exemplo – é substituído pelo sinal de interrogação. Como a história mudou de forma, o esquema também deve ser mudado, assim como o registro da igualdade. A forma mais fácil para tais mudanças seria a substituição da letra "b" pelo sinal de interrogação. Entretanto, o professor informa que o sinal de interrogação, geralmente, não é usado em fórmulas, mas sim a letra “x”. Consequentemente, o registro da igualdade fica: “**k + x = c**”. Os estudantes são informados de que as igualdades com a incógnita – nesse caso representada pela letra x – são chamadas **equações** (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2009).

É importante destacar que, de acordo com Горбов, Микулина e Савельева (2009), a equação se caracteriza, inicialmente, pela descrição do problema de encontrar um certo número e, apenas depois, um certo tipo de registro. Ou seja, a equação se refere a um formato de representação do problema com o seu esquema. Dessa forma, a incógnita (letra x) faz mais o papel do sinal de interrogação. Torna-se essencial evidenciar o significado de “x” como o número a ser encontrado.

A resolução do problema da presente tarefa segue o modo de ação adotado anteriormente. As diferenças em relação à tarefa 15 estão na apresentação da nomenclatura, equação, e na criação de um enredo: história, enunciado de um problema. Nesse sentido, é sugerido que os estudantes resolvam o problema com o uso de números. O professor escreve o número quinze embaixo da letra “c”, que representa o todo na equação. O valor de “k” é sugerido pelos alunos. Uma das variantes sugeridas é escrita embaixo da letra “k”. Sob “x” não há nada escrito, ele representa o número a ser encontrado. Então a equação é reescrita com os números no lugar das letras e os alunos encontram o valor de x, ou seja, resolvem a equação. Nesse momento, não se discute, ainda, o “caminho percorrido” para encontrar o valor da incógnita (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2009).

Depois, os estudantes consultam o livro e deparam-se com a seguinte tarefa:

Lembrar:
14 – 8 = 6 – esta **igualdade**
8 + x = 15 – esta **equação**
A letra x substitui o número a ser encontrado.
x = 7
(Adaptação de ДАВЫДОВ *et al.*, 2012).

Давыдов *et al.* (2012) afirmam que essa tarefa serve de referência aos alunos para a necessidade de construir o esquema a partir da equação “k + x = c”. Nesse caso, “k” é substituído por 8 e “c” por 15.

Nesse mesmo sentido e objetivando proporcionar aos estudantes o surgimento da necessidade de construção de equações do primeiro grau e de suas respectivas resoluções é que se apresenta a **décima sétima tarefa**. Ela atribui aos estudantes a reescrita das equações (imagem 31), utilizando os números 13 e 6.

Imagem 31: Base de análise da tarefa dezessete

$x - k = p$	$a + x = c$
$x - \square = \square$	$\square + x = \square$
$x = \square$	$x = \square$

Fonte: Adaptação de Давыдов *et al*. (2012).

A presente tarefa explicita a possibilidade aos estudantes de desenvolvimento de modos de ação para a formação e resolução de equações do primeiro grau – no contexto do sistema conceitual adição/subtração/equação –, tendo como base a relação essencial todo-partes. Os registros literais apresentados caracterizam uma subtração e uma adição. Entretanto, descobre-se que eles também representam equações nas quais a letra “x”, já destacada nas igualdades, caracteriza a incógnita. As equações são reescritas e com a adoção dos números estabelecidos (13 e 6) os valores das incógnitas são determinados.

Cabe uma discussão referente ao porquê da obtenção de números diferentes para x, se os valores usados nas duas equações (13 e 6) são iguais. Aqui, novamente, a relação essencial todo-partes é fundamental. Isso porque, na primeira equação, a incógnita assume o lugar do todo, enquanto na segunda representa uma das partes. Uma explicação escrita da solução, identificando-se em cada caso as partes e o todo, é realizada pelos alunos (ГОРБОВ; МИКУЛИНА Е САВЕЛЬЕВА, 2009).

Alves (2017, p. 190) afirma que, nesse movimento, está a manifestação de que a relação universal, no sistema conceitual adição, subtração e equação:

> 1) Ocorre no âmbito do processo de conhecimento das grandezas; 2) Se dá na relação de desigualdade, o que implica a ideia de diferença maior/menor; 3) Apresenta-se com o objetivo de transformar a desigualdade em uma igualdade; 4) A produção de sentenças aditiva e subtrativa, com foco para os significados da relação todo-partes, isto é, o todo é composto por partes, já a parte emerge da relação do todo com uma de suas partes; 5) A compreensão da relação todo-partes com o sistema conceitual de adição e subtração, ou seja, a escolha correta pela

> operação de acordo com a situação. Para tanto, explicita-se que o todo está relacionado à operação de adição, e as partes, à de subtração. Vale destacar que esses estágios sempre colocam em evidência a relação todo-partes no âmbito da relação entre grandezas, caracterizadora do desenvolvimento do conceito teórico referente ao sistema de adição e subtração que no próprio processo inclui o conceito de equação e inequação.

A **tarefa dezoito** retoma a busca pela igualdade, em um contexto de desigualdade, com base na escolha correta da operação (adição ou subtração), que possibilitará procedimentos para a solução do problema, isto é, da equação, como pode ser observada na imagem 32. Essa tarefa também se insere na ação de controle, pois pode ter uma "pegadinha".

Assim como na tarefa anterior, de início, ela passa a ser analisada sem que os estudantes consultem o livro didático. Entretanto, a peculiaridade da presente tarefa está no fato de que ela faz com que emerja nos estudantes a necessidade de compreensão de quais operações aritméticas permitirão encontrar o valor de "x" (ГОРБОВ; МИКУЛИНА Е САВЕЛЬЕВА, 2009).

O professor apresenta a equação "x – 27 = 46" aos alunos e interage com eles por meio do diálogo:

"– *Será que isso é uma equação*?"

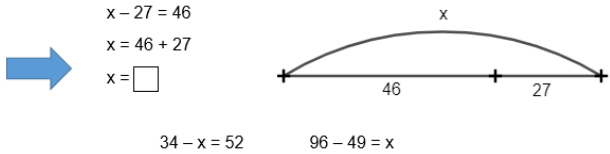
"– *É*!"

"– *Os números selecionados estão nos locais corretos*?"

"– *Sim*!"

Como os estudantes estão no segundo ano, eles podem utilizar a calculadora para encontrar o valor de "x". O professor pergunta: o que é necessário fazer com os números dados para encontrar a solução da equação? As respostas devem ser argumentadas e, necessariamente, haver a representação gráfica para auxiliar na verificação da solução encontrada. Após fazer o esquema, coloca-se na equação as partes e o todo e registra-se a sua solução nos esquemas (ГОРБОВ; МИКУЛИНА Е САВЕЛЬЕВА, 2009). A imagem 32 exemplifica o registro do esquema (representação gráfica) e da operação realizada para se encontrar o valor da incógnita, além de propor as outras duas equações para análise e resolução.

Imagem 32: Base de análise da tarefa dezoito



Fonte: Adaptação de Давыдов *et al*. (2012).

Durante o processo de solução das equações, a determinação do todo e das partes é considerada uma explicação necessária. Por exemplo: a incógnita é o inteiro (ou uma das partes) e para descobrir o seu valor precisamos... Portanto, difere do modo tradicional de ensino em que a ênfase é: “passar o termo para o outro lado da igualdade trocando o seu sinal”. Contrariamente, no ensino desenvolvimental proposto por Davídov (1988), os estudantes encontram a solução da equação do primeiro grau por meio de um processo movido pela relação todo-partes, no âmbito da relação entre grandezas.

Ao analisar o registro “34 – x = 52” (pegadinha) – tarefa da ação de controle –, os estudantes identificam-no como sendo uma equação, mas que os números foram escolhidos de forma incorreta (o todo “34” é menor que uma das partes “52”). É importante destacar que, aqui, os estudantes ainda não têm conhecimento dos números negativos, por isso tal afirmação é feita. Nesse sentido, o professor pergunta o que pode ser feito para corrigir a equação. Uma das possibilidades é substituir o operador “menos” pelo “mais”, já outra possibilidade é substituir os próprios números, 34 por 84, por exemplo. Assim, o esquema é construído e a solução da equação é registrada (ГОРБОВ; МИКУЛИНА Е САВЕЛЬЕВА, 2009).

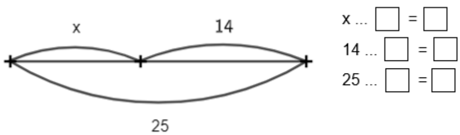
Uma outra questão a ser levantada pelo professor é que em ambas as equações (x – 27 = 46 e 84 – x = 52, por exemplo) há o operador “menos”. Entretanto, para se obter o valor da incógnita, operações diferentes são realizadas. Assim, o professor pergunta aos estudantes onde está o erro, ou seja, na solução da primeira ou da segunda equação. O objetivo da tarefa é que os alunos cheguem à conclusão de que não há erro algum. O que aconteceu é que, na primeira equação, a incógnita estava no primeiro lugar do registro da subtração, ou seja, equivalia ao todo. Por sua vez, na segunda equação, ela ocupava o segundo lugar no registro, ou seja, caracterizava uma das partes (ГОРБОВ; МИКУЛИНА Е САВЕЛЬЕВА, 2009).

A terceira equação “96 – 49 = x” não apresenta problemas no que se refere à seleção dos números e, dessa forma, basta que os estudantes determinem, por meio da representação gráfica, o todo e as partes e registrem a solução da equação. Fica evidente que a solução da equação coincide com seu próprio registro, ou seja, a equação já determina a forma pela qual deve ser resolvida: basta estabelecer a diferença entre 96 e 49.

Importa destacar que, ao resolver a equação, os nomes dos componentes podem ser utilizados. Na equação “x – 27 = 46”, por exemplo, “x” é o diminuendo, 27 o subtraendo e 46 a diferença. Não é necessário que os alunos saibam formular novas regras, mas sim que eles correlacionem de forma correta os nomes dos componentes com as categorias todo e partes (ГОРБОВ; МИКУЛИНА E САВЕЛЬЕВА, 2009).

Na **tarefa dezenove,** os estudantes têm que compor três equações e resolvê-las, de acordo com o esquema apresentado (imagem 33).

Imagem 33: Base de análise da tarefa dezenove



Fonte: Adaptação de Давыдов *et al*. (2012).

Em ambos os casos, há o primeiro componente da equação. Para o registro dos outros componentes, assim como dos operadores “mais” ou “menos”, é fundamental analisar o esquema apresentado. Nele, é possível identificar que o número 25 corresponde ao todo, enquanto o número 14 e a incógnita “x” correspondem às partes. Ao finalizar as resoluções, a comparação das soluções deve ser feita. Descobre-se, então, que elas são completamente iguais. Nesse momento, o professor deve questionar o porquê desse fato, já que as equações eram todas diferentes. O objetivo da tarefa é fazer com que os estudantes compreendam que, mesmo com registros distintos, essas equações são equivalentes, uma vez que foram construídas a partir do mesmo esquema, com os mesmos números e a mesma incógnita (ГОРБОВ; МИКУЛИНА E САВЕЛЬЕВА, 2009).

De acordo com Davídov (1988, p. 211), o sistema de tarefas,

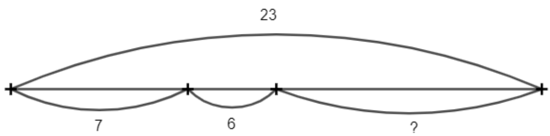
> [...] para a introdução ao conceito de equação, permite construir, sobre a base da igualdade dada, vários tipos de equações (os estudantes concluem que a quantidade de tais equações é igual à

> quantidade de elementos incluídos na igualdade: x + a = c, c – x = a, c – a = x. De acordo com estas equações, as crianças transformam qualquer situação inicial na quantidade correspondente dos chamados problemas texto.

Nesse sentido, Dorigon, Damazio e Rosa (2016) contribuem com a afirmação de que o conceito de equação, no sistema Elkonin-Davidov, é introduzido de forma mais explícita no segundo ano do ensino fundamental com base no movimento do geral para o singular. O geral, representado pelos modelos geométricos e algébricos, e o singular, caracterizado pelas significações aritméticas. Esse movimento é mediado por problemas texto, ou seja, por particularidades. Além disso, os autores enfatizam que a relação universal todo-partes atua como o seu fio condutor, diferente do que ocorre nas proposições de ensino que predominam atualmente, nas quais a resolução de situações particulares e singulares não dá atenção ao movimento interno da relação entre o todo e as partes.

A **vigésima tarefa** (imagem 34) tem como objetivo fazer com que os estudantes cheguem a dois modos de resolução da equação representada graficamente, bem como avaliem o método mais fácil para o cálculo. Давыдов *et al*. (2009) preveem a possibilidade de que os alunos considerem ambos equivalentes.

Imagem 34: Base de análise da vigésima tarefa



Fonte: Adaptação de Давыдов *et al.* (2009).

Diferente das tarefas anteriores, o esquema mostra que o todo (número 23) é composto por três partes e não apenas duas (número 7, número 6, valor desconhecido). Entretanto, o esquema permite chegar ao valor desconhecido, uma vez que tem o todo e duas das três partes. Percebe-se, então, que mesmo em casos como esse, a relação universal todo-partes é fundamental para a resolução da equação. Substituindo o sinal de interrogação pela incógnita “x”, é possível apresentar a situação por meio da seguinte equação do primeiro grau: 7 + 6 + x = 23. Assim, os dois modos possíveis de resolução da equação são: “x = 23 – 7 – 6” e “x = 23 – (7 + 6) (ГОРБОВ; МИКУЛИНА Е САВЕЛЬЕВА, 2009).

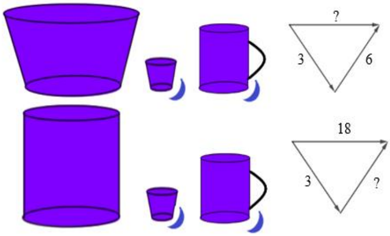
É conveniente dizer que, a partir da tarefa 14, o conceito de equação é apresentado com os componentes conceituais na definição de Caraça (2003) – $ax + b = 0$. No caso da última tarefa, o b representa a diferença entre a soma das partes, 7 e 6, e o todo, 23 ($7 + 6 + x = 23 \rightarrow 13 + x = 23 \rightarrow 13 - 23 + x = 0$). Já o a tem valor 1, pois ele é o coeficiente da incógnita x. Isso significa dizer que o valor 10, solução da equação, nasce da relação essencial de número: $\frac{x}{1} = 10$ ou $x = 1 \cdot 10$, $x = 10$.

A fim de complexificar o sistema de tarefas e, consequentemente, as equações do primeiro grau analisadas, retomamos a afirmação já mencionada de que as relações de multiplicidade e divisibilidade fazem parte do sistema conceitual no qual o conceito teórico de número está inserido e, por consequência, o conceito teórico de equação do primeiro grau.

Para tanto, inicialmente, destacamos a investigação referente ao modo de organização do ensino do conceito teórico de divisão, realizada por Rosa, Damazio e Crestani (2014). Os autores observaram a sua inter-relação com o conceito teórico de multiplicação. Além disso, constataram que, durante a resolução de um sistema de tarefas particulares, os estudantes elaboram o modelo abstrato de ambas as operações, que lhes permitem analisar o movimento conceitual existente. Assim como o modelo apresentado na pesquisa de Alves (2017) para o sistema conceitual adição/subtração/equação, o modelo abstrato para as operações de multiplicação e divisão tem grande importância para o nosso objeto de estudo. As tarefas a seguir exemplificam o modo como o referido modelo é desenvolvido com os estudantes e de que forma ele auxilia na resolução de equações do primeiro grau mais complexas.

Na **tarefa vinte e um** (imagem 35), os estudantes são requisitados a determinar o valor desconhecido em cada caso com base na relação entre as imagens e seus respectivos esquemas (modelação gráfica) (ГОРБОВ; МИКУЛИНА Е САВЕЛЬЕВА, 2008).

Imagem 35: Base de análise da vigésima primeira tarefa



Fonte: Adaptação de Давыдов *et al.* (2009).

A primeira situação foi elaborada de modo tal que, no processo de análise e para a sua resolução, as crianças identifiquem que, para medir o volume de água, foram usadas duas medidas: a básica (copinho) e a intermediária (xícara). Vale informar que os estudantes já solucionaram outras tarefas utilizando esse tipo de representação gráfica, isto é, que envolviam os dois tipos de unidade de medida. Por meio do esquema com as três setas – algo apropriado pelos estudantes por consequência do desenvolvimento de várias tarefas –, verifica-se que o volume total é equivalente a seis xícaras e que a medida de cada uma delas é igual a três copinhos. Para determinar quantas medidas básicas cabem no volume total, os alunos efetuarão a multiplicação $3 \cdot 6$, com o devido registro (ГОРБОВ; МИКУЛИНА Е САВЕЛЬЕВА, 2008).

Na segunda situação, há uma alteração na pergunta, pois o previsto é que os estudantes identifiquem a quantidade de medidas intermediárias que constitui o volume total. É provável que os alunos percebam que os volumes são iguais em ambas as situações e que não tenham dificuldades para resolver o problema. Entretanto, o professor deverá questioná-los sobre o fato de que se não houvesse a primeira situação, como o número desconhecido poderia ser encontrado. Nesse caso, a divisão $\frac{18}{6}$ precisará ser registrada (ГОРБОВ; МИКУЛИНА Е САВЕЛЬЕВА, 2008).

Apesar de não estar explícito, ambas as situações podem ser representadas por meio de equações do primeiro grau. No primeiro caso, a incógnita – caracterizada pelo sinal de interrogação – determina a quantidade de unidades de medida básica que cabe no todo. Substituindo o sinal de interrogação por “x”, podemos representar a situação por: “$x = 3 \cdot 6$”. A troca da interrogação pela letra x não é uma indicação do enunciado da tarefa, mas se trata de ideia emergente no nosso processo de análise, guiada, nesse momento, pela reflexão de Ponte, Branco e Matos (2009). Esses autores contribuem ao afirmar que o valor desconhecido pode ser representado de distintos modos, o que, nesse caso, permite incluir o próprio sinal de interrogação. Eles dizem que o usual normalmente é a designação das incógnitas por x quando se refere a valores reais, e n se natural. No entanto, chamam a atenção de que o

> [...] uso exclusivo das letras x e n pode criar nos alunos a dificuldade em lidar com outras letras no papel de variáveis e incógnitas, enquanto que uma grande variação de símbolos pode criar grande confusão nos alunos. Neste aspecto, como em muitos outros, o bom senso do professor é essencial. (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 94).

No segundo caso, a incógnita – também caracterizada pelo sinal de interrogação – determina a quantidade de unidades intermediárias que cabe no volume total. Também substituiremos o sinal de interrogação pela letra “x”, que permite a representação da equação "$18 = 3 \cdot x$". Diferente da situação anterior – em que o valor desconhecido caracterizava o produto –, agora, a busca é pelo multiplicador da operação de multiplicação, que postula a seguinte divisão: $x = \frac{18}{6}$. Tal procedimento indicador de quando ocorre a multiplicação ou a divisão será apresentado em tarefas posteriores, cuja síntese é apresentada na imagem 43.

Percebe-se que ambas as situações, para a sua resolução, requerem modos de ação conceitual de equações do primeiro grau mediadas pelas operações de multiplicação e divisão. Dependendo dos valores determinados e do significado da incógnita, ela é calculada de formas distintas. Porém, não perde a essência da relação todo-parte sem descaracterizar o conceito de igualdade. A fim de explicitar o movimento conceitual existente entre as operações mencionadas e como ele se relaciona com o conceito teórico de equação do primeiro grau, apresentamos a próxima tarefa.

A **vigésima segunda tarefa** é composta por três situações que revelam a relação universal existente entre as unidades de medidas básica e intermediária. Em cada caso, a incógnita se refere a um elemento dessa relação e permite a visualização do movimento existente que possibilita encontrar o seu valor.

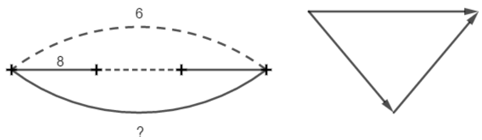
A primeira situação possui como base de análise a imagem 36. Nela, traz a orientação para que o professor sugira aos alunos que completem o esquema de setas e encontrem o valor desconhecido, representado pelo sinal de interrogação. Antes de continuarmos a análise, vale esclarecer que as orientações – não só para essa tarefa particular, mas para todas aquelas propostas – aqui tratadas não trazem o perigo de a discussão for cortada por uma resposta autoritária do professor. Pelo contrário, segundo Davídov e Slobódchikov (1991, p. 119), a proposição de ensino desenvolvimental se orienta pelo pensamento de uma pedagogia da colaboração, que:

> Em primeiro lugar, esse pensamento requer uma organização de um ensino tal que, por uma parte, está orientada a formar nos jovens uma personalidade criativa e, de outra, está dirigida a uma individualidade de cada um deles, levando em conta plenamente a sua vontade e aspirações vitais. A criança deve ser o sujeito livre…

Levar em consideração essa intencionalidade nos permite expressar que, no desenvolvimento da tarefa, a orientação dada possibilita o entendimento de que o sinal de interrogação continua sendo o modo de representar a incógnita, isto é, um número a ser identificado, cuja determinação se apresenta no âmbito da relação de igualdade, mas que está em contradição com a desigualdade. A tarefa reflete, pois, mais um momento do processo de desenvolvimento do conceito de equação assim sintetizada por Otte (1993, p. 55-56, grifo do autor):

> Na antologia matemática se atribui um *estatuto* similar a grandezas e a relações entre grandezas, embora, evidentemente, os dois pertençam a níveis de objeto distintos. Assim, surge uma simetria na concepção da equação como unidade e diferença.

Imagem 36: Base de análise da vigésima segunda tarefa – situação 1

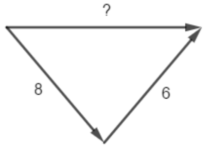


Fonte: Adaptação de Давыдов *et al.* (2009).

Pelo esquema da imagem 36, o número oito corresponde à medida intermediária e o número seis à quantidade de vezes que o oito se repete. Portanto, a incógnita – representada pela interrogação – caracteriza o total de unidades de medida básicas, o todo. Para determiná-la, assim como na primeira situação da tarefa anterior, os alunos recorrem à operação de multiplicação (ГОРБОВ; МИКУЛИНА Е САВЕЛЬЕВА, 2008).

Aqui se explicita uma transformação do modelo, terceira ação de estudo (DAVÍDOV, 1988), em que o modelo da adição e subtração (esquema da esquerda da imagem 36) é substituído pelo modelo multiplicativo (esquema da direita da imagem 36). No entanto, a relação essencial – partes-todo – da adição/subtração continua a ser referência para indicar o valor da incógnita, que requer um modo de ação peculiar à multiplicação, conforme o esquema da imagem 37.

Imagem 37: Esquema que representa o cálculo da incógnita

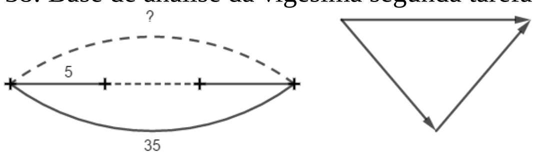


Fonte: Elaboração dos autores (2021).

Substituindo o sinal de interrogação pela letra “x”, podemos representar a situação dada pela equação $x = 8 \cdot 6$. Isso significa que o total de unidades de medida básicas que compõem o todo é 48.

A segunda situação (imagem 38) é apresentada aos alunos na sequência. Assim como no caso anterior, eles precisam completar o esquema de setas e determinar o valor desconhecido, ou seja, a incógnita (ГОРБОВ; МИКУЛИНА Е САВЕЛЬЕВА, 2008).

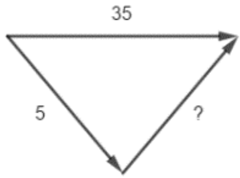
Imagem 38: Base de análise da vigésima segunda tarefa – item 2



Fonte: Adaptação de Давыдов *et al*. (2009).

Entretanto, diferente do primeiro item, agora os estudantes conhecem a unidade de medida intermediária (cinco) e o total de unidades de medida básica que compõe o todo (trinta e cinco). A incógnita corresponde, então, à quantidade de vezes que a unidade de medida intermediária cabe no todo. Na figura 38, há a representação da transformação do esquema da adição/subtração para o da multiplicação/divisão. A relação todo-partes (DAVÍDOV, 1988) é incorporada à relação unidade básica-unidade intermediária, que permite encontrar o valor desconhecido.

Imagem 39: Esquema que representa o cálculo da incógnita

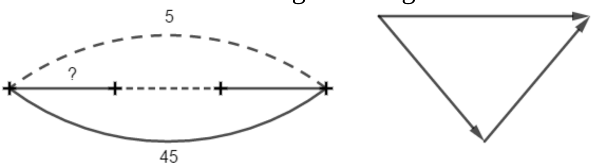


Fonte: Elaboração dos autores (2021).

Substituindo o sinal de interrogação por “x”, é possível a reescrita da situação pela equação $35 = 5 \cdot x$. A operação que possibilita encontrar o valor da incógnita é a divisão. Isso porque temos o produto (35) e um dos fatores (5). Dessa forma, para encontrar o outro fator, divide-se o dividendo pelo fator conhecido: $x = \frac{35}{5}$, ou seja, $x = 7$. Isso significa que a unidade de medida intermediária cabe 7 vezes no todo.

A terceira situação (imagem 40) é similar às anteriores. Entretanto, nela são dados o todo (total de unidades de medidas básicas) e a quantidade de vezes que a unidade de medida intermediária cabe no todo. Assim, a incógnita representa a unidade de medida intermediária.

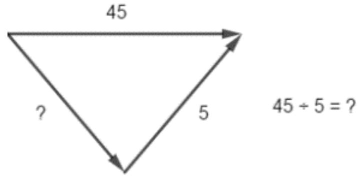
Imagem 40: Base de análise da vigésima segunda tarefa – situação 3



Fonte: Adaptação de Давыдов *et al*. (2009).

Conforme a situação anterior, temos o produto e precisamos encontrar um dos fatores. Nesse caso, então, o valor da incógnita pode ser determinado por meio da resolução da seguinte equação (substituindo o valor do sinal de interrogação pela letra x): $45 = x \cdot 5$. A imagem 41 representa, graficamente, a operação que possibilita a resolução dessa equação.

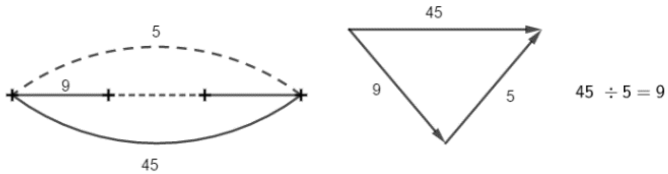
Imagem 41: Esquema que representa o cálculo da incógnita



Fonte: Elaboração dos autores (2021).

Como o valor que se busca não é o produto (determinado pela operação de multiplicação), pois a incógnita se apresenta na relação entre unidade intermediária e o número de vezes que ela se repete, então a operação a recorrer é a divisão, isto é, $x = 45 \div 9$, logo, o valor de x é 9, ou seja, a unidade de medida intermediária é igual a 9 (imagem 42).

Imagem 42: Esquema que representa o cálculo da incógnita

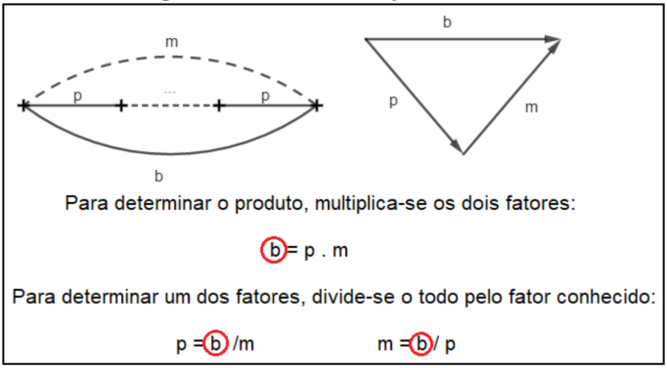


Fonte: Elaboração da autora (2021).

A tarefa como um todo apresenta um complexo sistema de conceito (VIGOTSKI, 2009) em que entram em cena, de modo mais focado e evidente, as bases essenciais da adição/subtração e multiplicação/divisão. O nexo que se estabelece é de teor transformativo da relação todo-partes (adição/subtração) para a relação unidade básica-unidade intermediária (multiplicação/divisão). As partes, agora, passam a ter outro significado: número de unidades básicas que constitui a unidade intermediária ou a quantidade de vezes que a unidade intermediária se repete. Da mesma forma, o todo – antes obtido pela soma das partes – passa a ser o produto, isto é, obtido pela multiplicação das partes. Assim também as partes, que eram determinadas pela operação de subtração, são encontradas pelo procedimento da divisão. Nesse processo de elaboração conceitual, há a incorporação no conceito de equação do primeiro grau da ideia de equivalência com a vinculação transformativa adição-multiplicação e subtração-divisão. A equivalência, aqui, não diz respeito às propriedades peculiares de resolução de uma equação de que adicionar ou subtrair em ambos os termos não altera a igualdade. Em vez disso, trata de um movimento dialético do pensamento conceitual de superação por incorporação da essência aditiva/subtrativa pela multiplicativa/divisibilidade e vice-versa. Isso traduz a afirmação de Otte (1993, p. 60-61) de que na interpretação “[...] clássica, a matemática é, portanto, a teoria de grandezas”. Com o seu desenvolvimento, ela, “[...] por exemplo, substitui equações por equivalência e se transformou assim de uma teoria de grandezas em teoria de estruturas” (OTTE, 1993, p. 60-61).

Conforme mencionado, em cada um dos três casos apresentados, a incógnita representa um elemento diferente na relação universal entre as unidades de medida básica e intermediária. No primeiro, ela se refere ao total de unidades básicas; no segundo caso, ao total de unidades intermediárias; e, no terceiro caso, o valor desconhecido representa a unidade de medida intermediária. A imagem 43 apresenta os três modelos gerados a partir da relação universal mencionada, que generalizam as propriedades dos conceitos de multiplicação e divisão utilizados na resolução de equações do primeiro grau como as apresentadas na presente tarefa.

Imagem 43: Transformação do modelo



Fonte: Adaptação de Давыдов *et al.* (2009).

As generalizações desenvolvidas por meio das transformações da relação essencial entre as unidades de medida básica e intermediária são fundamentais para a resolução de equações do primeiro grau que, conforme já mencionado, está diretamente relacionada com o conceito teórico de número.

Na primeira situação da tarefa em análise, o valor da incógnita da equação $x = 8 \cdot 6$ determina que o todo é composto por quarenta e oito unidades de medida básica; na segunda, por sua vez, a solução da equação $35 = 5 \cdot x$ indica que a unidade de medida intermediária cabe sete vezes no todo; já na situação três o valor de x na equação $45 = x \cdot 5$ determina que a medida intermediaria é igual a nove, ou seja, a unidade de medida intermediária é equivalente à nove unidades de medida básicas.

Nesse sentido, é importante destacar que as equações não são resolvidas simplesmente “passando um termo para o outo lado da igualdade”. As generalizações são desenvolvidas durante o processo de resolução de tarefas particulares (objetal, gráfica e literalmente), que permitem aos estudantes se colocarem em atividade de estudo e compreenderem o movimento que determina tais generalizações. As equações, como as apresentadas nessa tarefa, são resolvidas com base nos conceitos teóricos de multiplicação e divisão, mediados pela relação entre grandezas e, dessa forma, pela relação essencial entre as unidades de medida básica e intermediária. Consequentemente, também são mediadas pelo conceito teórico de número, mas no âmbito da relação aditiva/subtrativa partes-todo.

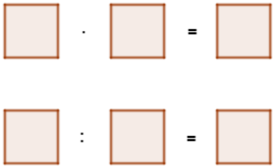
O entrelaçamento dessas complexas relações e transformações das ideias conceituais atende ao pressuposto de que

> A formação, desde o começo do processo de ensino, da correta base orientadora das ações da criança na esfera da realidade matemática possibilita estruturar o curso sistemático das matemáticas, isto é, da álgebra como ciência sobre as estruturas matemáticas fundamentais, suas transformações e relações funcionais dentro destas estruturas. As operações aritméticas com números inteiros ou fracionários aparecem como caso particular e concreto de tais estruturas matemáticas gerais. (GALPERIN; ZAPORÓZHETS; ELKONIN, 1987, p. 312).

Com esse envolvimento conceitual, são propostas aos alunos tarefas com equações nas quais a incógnita assume o lugar de diferentes elementos nas operações de multiplicação e divisão.

A tarefa **vinte e três**, por exemplo, convida os estudantes a analisarem os elementos do modelo de multiplicação e divisão que, aos poucos, foram se apresentando em tarefas anteriormente desenvolvidas. Nela, são dados dois valores em cada uma das três situações para que eles estabeleçam duas relações de igualdade com os valores dados, como propõe a imagem 44.

Imagem 44: Base de análise da tarefa vinte e três



Fonte: Adaptação de Давыдов *et al.* (2009).

Para tanto, a tarefa estipula os valores 6 e 3 para que se efetivem possibilidades de igualdades. Com esses valores, os alunos podem apresentar várias combinações como:
$a)\ \mathbf{6 \cdot 3} = 18; b)\ \mathbf{3 \cdot 6} = 18; c)\ \mathbf{3} \cdot 2 = \mathbf{6}; d)\ 2 \cdot \mathbf{3} = \mathbf{6}; e)\ \mathbf{6} \div \mathbf{3} = 2;\ f)\ \mathbf{6} \div 2 = \mathbf{3};\ g)\ 18 \div \mathbf{3} = \mathbf{6}$ e $h)\ 18 \div \mathbf{6} = \mathbf{3}$.

É importante reafirmar que, como os alunos estão no terceiro ano e conhecem apenas os números positivos inteiros (naturais), o seis (6), na multiplicação, pode ser escrito como fator ou como produto, enquanto o número três (3) pode ser representado apenas como fator. Consequentemente, na divisão, o seis pode ser o dividendo, o divisor ou o quociente, enquanto o número três pode ser escrito apenas como divisor e quociente.

Essa análise pode ser orientada pelas relações genéricas desenvolvidas anteriormente, que se expressaram em $b = p \cdot m, p = \frac{b}{m}\, e\ m = \frac{b}{p}$, com *m* e *p* diferentes de zero. Na multiplicação, o *b* assume o lugar do produto, enquanto na divisão é escrito como dividendo. Já os fatores *p* e *m*, na divisão, podem representar tanto o quociente quanto o divisor.

Além de exigir dos alunos o domínio do pensamento conceitual das operações de multiplicação e divisão, a tarefa propõe que eles resolvam equações do primeiro grau para determinar o terceiro valor e estabelecer a igualdade. Nas duas primeiras igualdades, itens *a* e *b*, a incógnita caracteriza o produto e tem como solução 18. Da mesma forma, as igualdades *c* e *d* têm como fatores dois e três em situação de comutatividade que dão à incógnita (produto) o valor 6. Em *e* e *f* , 6 (todo) é o dividendo dos divisores 3 e 2 (partes das respectivas situações). A incógnita representa um dos fatores (parte) e a solução os quocientes, o dois e três, obtido por meio das respectivas divisões $\frac{6}{3}$ e $\frac{6}{2}$. De modo similar, em *g* e *h*, dezoito é dividendo (todo) de 3 e 6, que possibilitam a solução das igualdades com os valores 6 e 3.

A tarefa também tem um caráter prenunciativo para a ideia de divisão não exata. Nesse sentido, vale recorrer a Caraça (2003) ao afirmar que a operação de divisão $a \div b = c$ é possível se o dividendo for múltiplo do divisor. Caso contrário, não há um número inteiro que satisfaça a igualdade $c \cdot b = a$. Por exemplo, na divisão 7 ÷ 5 não há um número inteiro, ou seja, um quociente que multiplicado por 5 e resulte em 7. Segundo o autor, nesses casos, existe um quarto número r < b, denominado resto, tal que a igualdade $a = b \cdot c + r$ torna-se válida. No exemplo, temos 7 = $5 \cdot 1 + 2$.

As divisões não exatas (com resto) são a centralidade conceitual da **vigésima quarta** tarefa, mas que também trazem ideias próprias da equação no momento das resoluções, isto é, na determinação do resto por se conhecer o dividendo, o divisor e o quociente (imagem 45). A incógnita representa o resto de cada uma das divisões e cabe aos estudantes determinar o seu valor. Essa é uma tarefa de controle (uma das ações do modo davydoviano de organização do ensino), pois, propositalmente, alguns dos quocientes não satisfazem a igualdade. Aos alunos, cumpre determinarem os erros e corrigi-los. O professor sugere que a tarefa seja solucionada com auxílio da régua e propõe que eles expliquem, ao fim da solução, a razão pela qual o resto deve ser sempre menor que o divisor (ГОРБОВ; МИКУЛИНА Е САВЕЛЬЕВА, 2008).

Imagem 45: Base de análise da tarefa vinte e quatro

$8 \div 3 = 2\ (resto = \boxed{})$ $\quad$ $11 \div 2 = 5\ (resto = \boxed{})$

$11 \div 4 = 2\ (resto = \boxed{})$ $\quad$ $25 \div 6 = 3\ (resto = \boxed{})$

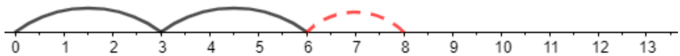
$15 \div 2 = 6\ (resto = \boxed{})$ $\quad$ $18 \div 4 = 4\ (resto = \boxed{})$

Fonte: Adaptação de Давыдов *et al.* (2009).

Com base na definição de Caraça (2003), apresentada anteriormente a respeito das divisões não exatas, a solução da tarefa traz implicitamente o movimento de pensamento conceitual que requer um modo de ação pertinente às equações da forma $a = b \cdot c + r$, em que a incógnita corresponde ao resto (r). O enunciado da tarefa menciona o modo de ação para a sua solução: com auxílio da régua. Ou seja, a solução das equações – resto – será determinada por meio da análise geométrica das divisões, articuladamente com a operação aritmética.

A primeira divisão proposta é $8 \div 3 = 2\ resto\ (\quad)$. Pelo modelo geral da multiplicação e divisão (imagem 43): “para determinar o produto/todo, multiplicam-se os fatores; para encontrar um dos fatores, divide-se o produto pelo fator conhecido”. O 8 é o todo, então 3 e 2 são os fatores. Observa-se que tal síntese conceitual torna possível reescrever a situação por meio da equação do primeiro grau $8 = 3 \cdot 2 + r$, que traduz uma singularidade de $a = b \cdot c + r$ (CARAÇA, 2003). Desse modo, na situação em estudo, o resto é a incógnita. Agora, a análise da equação permite a identificação de que a unidade de medida intermediária (3) cabe 2 (duas) vezes no todo (8) e sobram *r* unidades de medida básica. Por consequência, é possível adotar o modo de ação proposto no enunciado (uso da régua para a construção da reta numérica) e verificar, por mediação geométrica (imagem 46), que sobram duas unidades de medida básica para “completar” o todo, ou seja, o resto é dois (r = 2). E, se considerarmos a equação $8 = 3 \cdot 2 + r$, então 8 é o todo, 3.2 e *r* são as partes. Como se conhece o todo e uma das partes, a outra é obtida pela operação subtração, isto é, r = 8 – 3.2, r = 8 – 6, r = 2. Assim, a igualdade $8 = 3 \cdot 2 + 2$ se torna válida.

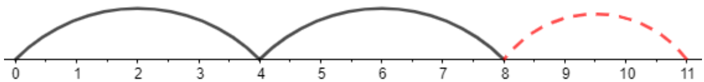
Imagem 46: Representação geométrica da divisão 8 ÷ 3



Fonte: Elaborada pela autora (2021).

O mesmo processo é desenvolvido na segunda situação, $11 \div 4 = 2\ resto\ (\quad)$, que se transforma na equação 11= $4 \cdot 2 + r$. A imagem 47 possibilita a análise geométrica da divisão.

Imagem 47: Representação geométrica da divisão 11 ÷ 4



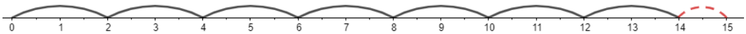
Fonte: Elaborada pela autora (2021).

Temos que a unidade de medida intermediária (4) cabe duas vezes no todo (11) e que restam três unidades de medida básica. Isso significa que o resto da divisão, que também é a solução da equação, é igual a 3 (r = 3) e torna válida a igualdade 11= $4 \cdot 2 + 3$.

As situações $11 \div 2 = 5\ resto\ (\quad)$ e $18 \div 4 = 4\ resto\ (\quad)$ são desenvolvidas de modo similar ao adotado para os dois primeiros itens.

A terceira situação, diferente das anteriores, apresenta um erro no quociente determinado. A divisão proposta é $15 \div 2 = 6\ resto\ (\quad)$. Por meio da representação geométrica, expressa na imagem 48, é possível verificar o erro e, consequentemente, corrigi-lo.

Imagem 48: Representação geométrica da divisão 15÷ 2



Fonte: Elaborada pela autora (2021).

Podemos perceber que a medida intermediária (2) cabe sete vezes no todo (15) e não seis vezes, como apresentado na divisão. Assim, a forma correta de representa-la é $15 \div 2 = 7\, resto\, (\quad),$ e uma equação que a define pode ser escrita de modo: $15 = 2 \cdot 7 + r$. Nesse sentido, podemos observar na representação geométrica que resta apenas uma unidade de medida básica, ou seja, o resto é um (r = 1), e a igualdade $15 = 2 \cdot 7 + 1$ se torna válida. Com o quociente igual a seis, o resto seria três, ou seja, sobrariam três unidades de medida básica e, dessa forma, o resto seria maior que o divisor (3 > 2). Isso não é correto, pois as unidades de medida básica restantes poderiam ser subdivididas mais uma vez na medida intermediaria.

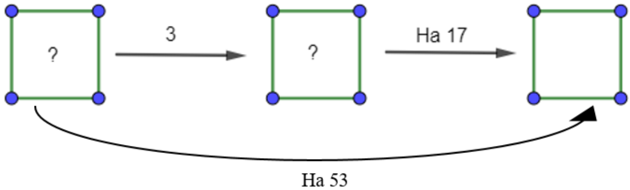
A situação $25 \div 6 = 3\, resto,$ da mesma forma que a anterior, apresenta um erro quanto ao valor do quociente, que precisa ser corrigido pelos estudantes.

Anteriormente, mencionamos que, no ensino desenvolvimental, os conceitos são desenvolvidos em um movimento dialético e não de forma linear. Essa dialeticidade se manifesta no movimento que as tarefas imprimem na superação por incorporação de um conceito matemático no âmbito de um sistema (VIGOTSKI, 2009) em que o entrelaçamento álgebra/geometria/aritmética é uma constante. As últimas tarefas explicitam de modo intensivo essa regularidade, pois, por exemplo, elas dão condições para que os estudantes transformem situações aparentemente aritméticas e as desenvolvam por meio de equações do primeiro grau e vice-versa. A título de ilustração, vale reportar à igualdade pertinente à divisão (CARAÇA. 2003), $a = b \cdot c + r$, que permite a adoção de um modo de ação em que a ênfase não é dar significado à letra por meio da transposição da equação dada, mas como um número na sequência de operações da equação” (KIERAN, 1994).

Nessa perspectiva de análise do nosso objeto de estudo, e com a intenção de continuar a destacar as múltiplas e complexas relações do desenvolvimento do conceito equação do primeiro grau na organização do ensino desenvolvimental, apresentamos a **vigésima quinta** tarefa, extraída do livro didático do quarto ano. Ela traz uma situação-problema na forma de texto e de um esquema. Em sua resolução, manifestam-se as idas e vindas do movimento de incorporações e superações de bases conceituais, pois retoma a operação de subtração e, consequentemente, a relação todo-partes. Além disso, de acordo com Горбов e Микулина (2004), permite a resolução de problemas em forma de textos que objetivam, principalmente, o desenvolvimento de modos de ação pelos estudantes para a sua análise e modelação, incidentes no conceito de equação.

O esquema (imagem 49) corresponde ao enunciado da seguinte tarefa: No primeiro cesto havia __ vezes mais peras que no segundo. Depois que foram colocadas no primeiro cesto mais peras, ficou nele __ peras a mais que no segundo. Quantas peras havia originalmente em cada cesto? (ДАВЫДОВ *et al.*, 2009).

Imagem 49: Esquema para o texto da tarefa vinte e cinco



Fonte: Adaptação de Давыдов, Горбов e Микулина (2011).

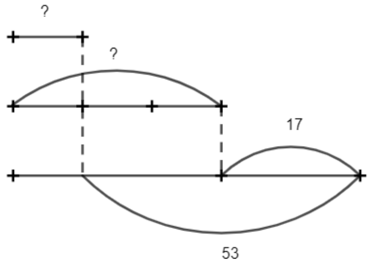
Observa-se que os dados numéricos da tarefa não aparecem no texto, como convencionalmente encontramos nos livros didáticos. Em vez disso, estimulam que os estudantes os busquem no esquema, o qual se constitui em elemento matemático mediador no processo de análise e resolução. O esquema é anunciativo de que, na resolução de um problema, há modos de ação nos quais os modelos são um de seus estágios.

Na resolução da tarefa, a atenção dos estudantes é dirigida pela vinculação entre dois focos de análise: a leitura do texto e o esquema. A duplicidade de objetos de análise dessa tarefa – como a maioria das demais – permite que nos apoiemos em Vigotski (2009) ao conceber que o desenvolvimento das funções psicológicas superiores requer procedimentos de análise de “dupla estimulação”, isto é, não pode ficar à mercê da observação imediata, regida somente pelos órgãos dos sentidos. Não se trata, pois, de fazer o estudante “prestar atenção na aula”, no sentido passivo proclamado pelo ensino tradicional (DAVÍDOV, 1988). Dito de outro modo, estar voltado para a palavra do professor (tendência formalista clássica) ou para um material didático ou concreto (respectivamente, na perspectiva empírico-ativista e construtivista). A atenção para Vigotski (2009) é uma função psicológica superior, concebida como a direção da consciência, o estado de concentração da atividade mental sobre determinado objeto. Em seu desenvolvimento, transforma-se de automática e involuntária em dirigida e voluntária, orientada intencionalmente com estreita vinculação com o pensamento. Sendo assim, é orientada sob influência dos símbolos e instrumentos do meio cultural, portanto, uma ação da atividade intelectual. Por isso, no contexto escolar – na atividade de estudo –, a necessária dupla estimulação para o estabelecimento de processos mediadores.

A ação de dupla estimulação propiciada pela tarefa permite que os estudantes preencham as lacunas presentes no texto com dados do esquema orientativo. No primeiro cesto, havia **3** vezes mais peras que no segundo. Depois que foram colocadas no primeiro cesto mais **17** peras, ficaram nele **53** peras a mais que no segundo. A questão orientadora da ação, agora, é: Quantas peras havia originalmente em cada cesto?

Uma possibilidade é a equação do primeiro grau que, de acordo com o esquema, pode ser composta para solucionar a tarefa. Entretanto, esse tipo de resolução, segundo Горбов e Микулина (2004), será aprofundada no quinto ano. No quarto, a resolução aritmética é a utilizada com maior frequência. No entanto, vale observar que apenas o esquema não permite encontrar o valor das incógnitas (quantidades iniciais de peras no primeiro e no segundo cestos). Aritmeticamente, seria possível pela recorrência ao método da falsa posição, o que requereria muito caso os valores estipulados fossem distantes dos reais resultados. Assim, a saída algébrica de equação seria mediada pela construção de um desenho (imagem 50), como forma de auxiliar na resolução da tarefa.

Imagem 50: Desenho relativo ao esquema apresentado na tarefa vinte e cinco



Fonte: Adaptação de Горбов e Микулина (2004).

No desenho (esquema), o primeiro segmento corresponde à quantidade inicial de peras no segundo cesto. O segundo segmento, composto por três medidas iguais à primeira, corresponde à quantidade inicial de peras no primeiro cesto. Por fim, o terceiro segmento corresponde à quantidade final de peras no primeiro cesto. A análise dessa representação (imagem 50) pelos estudantes, com as intervenções de orientação do professor, constitui-se meio para a percepção de que uma das incógnitas (interrogação) se apresenta na diferença entre a quantidade inicial de peras no primeiro cesto e a quantidade de peras no segundo cesto, que é duas vezes. Esse valor pode ser encontrado por meio da subtração 53 – 17 = 36. Ou seja, 36 é equivalente a duas vezes a quantidade de peras no cesto dois. Isso permite o cálculo $\frac{36}{2} = 18$, quantidade de peras naquele cesto. Por fim, o enunciado afirma que no cesto um havia 3 vezes mais peras que no dois. Consequentemente, o valor inicial de peras no primeiro cesto é $18 \cdot 3 = 54$.

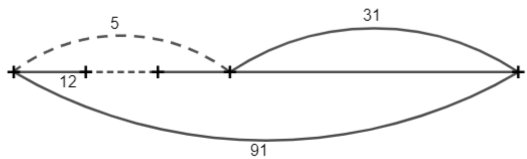
Todos os procedimentos aritméticos podem ser transferidos e incorporados a modos operativos algébricos de uma equação, cuja representação escrita é da forma $3x + 17 = x + 53$. Nela, a incógnita x (parte) representa a quantidade de peras no segundo cesto. Inicialmente, havia o triplo de peras no primeiro cesto em relação ao segundo, essa quantidade é representada por “3x”. Por fim, o enunciado afirma que, ao serem colocadas no primeiro cesto mais 17 peras, ficaram nele 53 peras a mais que no segundo. Daí a igualdade estabelecida. Ao simplificar a equação pelas operações, a igualdade se torna $2x = 36$. Consequentemente, obtém-se $x = 18$. O procedimento para a resolução da equação é equivalente à sequência de operações realizada anteriormente com base no desenho construído.

Resolver uma equação por procedimento em interface com a geometria – reta – caracteriza uma etapa de seu desenvolvimento lógico e histórico. Diferente do método da falsa posição dos egípcios, a contribuição dos gregos, entre os anos 500 e 200 a.C., foi a álgebra geométrica, por consequência das suas dificuldades lógicas “[...] com números irracionais e mesmo fracionários e suas dificuldades práticas com os numerais gregos” (BAUMGART,1992, p. 68).

Ao compararmos o procedimento algébrico/geométrico grego com aquele modo proposto pelo grupo liderado por Davidov, detectamos diferenças significativas, das quais duas se destacam. Uma delas é o não uso, pelos gregos, da notação de incógnita com letras ou outro símbolo como, por exemplo, a interrogação (?). A outra é o movimento de resolução na relação todo-partes, que se apresenta vinculado às operações de adição e subtração e que se complexifica com a incorporação da relação essencial – unidade intermediária e básica – do conceito de multiplicação e divisão.

A inter-relação pautada em dupla estimulação e entre componentes geométricos-aritméticos-algébricos também é conteúdo movente da **vigésima sexta** tarefa. Ela se centra, similarmente à anterior, em um desenho (imagem 51) e, a partir dele, os estudantes são orientados a criarem diferentes problemas e a escreverem suas respectivas soluções (ГОРБОВ; МИКУЛИНА, 2004).

Imagem 51: Base de análise da tarefa vinte e seis



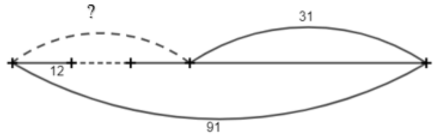
Fonte: Adaptação de Горбов e Микулина (2004).

O desenho mostra que há um todo composto por cinco unidades intermediárias iguais a 12, as quais representam uma das partes de um outro todo (91), ou seja $12 \cdot 5 + 31 = 91$. Assim, diferentes problemas e, consequentemente, diferentes equações podem ser construídos à medida que se exclui um dos valores dados no desenho e ele seja considerado uma incógnita. Os alunos poderão propor quatro problemas a partir da imagem apresentada (ГОРБОВ; МИКУЛИНА, 2004). São eles:

1) Considerar como incógnita o número de vezes que a

unidade de medida intermediária cabe na primeira parte do todo (imagem 52) e representá-la por x, no que se traduzirá na seguinte equação: $12x + 31 = 91$.

Imagem 52: Representação geométrica da equação $12 \cdot x + 31 = 91$

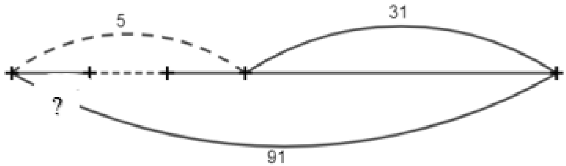


Fonte: Adaptação de Горбов e Микулина (2004).

Com o auxílio do desenho, é possível perceber que o resultado da expressão $(91 - 31) \div 12$ corresponde ao valor desconhecido. Ou seja, $12 \cdot x + 31 = 91 \rightarrow x = \frac{91-31}{12} \rightarrow x = 5$.

2) Adotar como incógnita o valor da unidade de medida intermediária da primeira parte do todo (imagem 53). Se ela for representada por x, então a equação será $x \cdot 5 + 31 = 91$.

Imagem 53: Representação geométrica da equação $x \cdot 5 + 31 = 91$

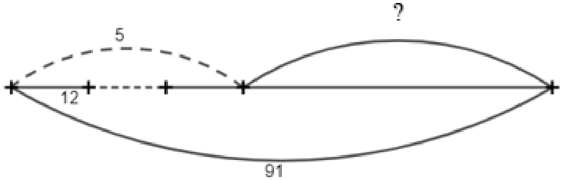


Fonte: Adaptação de Горбов e Микулина (2004).

Assim como na situação anterior, a análise da figura dá subsídios para o cálculo do valor da expressão $(91 - 31) \div 5$. Isso significa que $x \cdot 5 + 31 = 91 \rightarrow x = \frac{91-31}{5} \rightarrow x = 12$.

3) O terceiro problema considera a incógnita como o valor da segunda parte do todo (imagem 54). Ao representá-la por x, obtém-se a equação: $12 \cdot 5 + x = 91$.

Imagem 54: Representação geométrica da equação $12 \cdot 5 + x = 91$

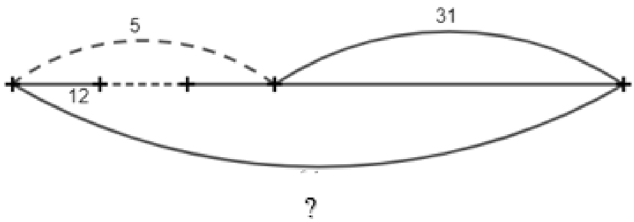


Fonte: Adaptação de Горбов e Микулина (2004).

O desenho nos permite verificar que o valor desconhecido corresponde ao resultado da expressão $91 - (12 \cdot 5)$. Isso significa que $12 \cdot 5 + x = 91 \rightarrow x = 91 - (12 \cdot 5) \rightarrow x = 31$.

4) Por fim, o problema possível é considerar como incógnita o todo, que é composto pelas duas partes – $12 \cdot 5 \ e \ 31$ –, conforme exposto na imagem 55. Se representarmos o valor desconhecido por x, obteremos a seguinte equação: $12 \cdot 5 + 31 = x$.

Imagem 55: Representação geométrica da equação $12 \cdot 5 + 31 = x$



Fonte: Adaptação de Горбов e Микулина (2004).

Esta última equação, $12 \cdot 5 + 31 = x$, é solucionada por meio da resolução da expressão $12 \cdot 5 + 31$, ou seja, $x = 91$.

Todo o processo de resolução, embora não mencionado, ocorre movido pela relação todo-partes (essência da adição e subtração) em articulação com as bases da multiplicação e divisão, unidade básica/intermediária. Nas três primeiras, a incógnita se refere às partes, o que, no processo resolutivo, coloca em evidência a recorrência às operações de subtração e divisão. Esta última quando a incógnita tem um coeficiente diferente de um e de zero. Por exemplo, em $12 \cdot x + 31 = 91$, o valor de x é obtido pelas duas referidas operações $x = \frac{91-31}{5}$, que produzem x = 12. Na quarta equação, a incógnita se configura como o todo, então a adição de duas parcelas (a primeira sendo o produto de 12.5 e a segunda 31) é que vai proporcionar a determinação do seu valor, x =

91. A busca do valor de uma das partes, nesse caso, apoia-se em uma certa regularidade de ação na qual, implicitamente, está a propriedade distributiva da divisão. Essa propriedade, segundo Ponte, Branco e Matos (2009, p. 28), "De um modo geral, sendo $a = x + y$, temos que: $a \div b = (x + y) \div b = x \div b + y \div b = \frac{x}{b} + \frac{y}{b}$". Os autores consideram que a distributividade permite a decomposição do dividendo, "[...] para determinar mais facilmente o quociente" (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 28). Acrescentam que essa "[...] situação particular pode ser bastante útil na realização de cálculo mental envolvendo divisões" (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 28).

Com raciocínio similar ao das situações anteriores, a tarefa **vinte e sete** propõe que os estudantes solucionem duas equações do primeiro grau (ГОРБОВ; МИКУЛИНА, 2004). Entretanto, ambas envolverão apenas as operações de adição e subtração. As partes e os todos (as expressões aparecem entre os parênteses) são formados por "subdivisões", ou seja, por outras partes e outros todos.

A primeira equação é a seguinte: (46 + 35) – x = (74 – 36).

Em sua análise, os estudantes identificarão que a expressão (46 + 35) equivale ao todo, enquanto as partes são representadas pela incógnita x e pela expressão (74-36). Dessa forma, para resolver a equação, é necessário subtrair do todo a parte conhecida, ou seja:

$$x = (46 + 35) - (74 - 36)$$
$$x = 81 - 38$$
$$x = 43$$

Na segunda equação, também são dados o todo e uma das partes. Consequentemente, a incógnita é a outra parte: $x + (82 - 28) = (37 + 36)$.

Dadas as suas apropriações ocorridas até então, os estudantes, em situação de análise, notarão que: x e a expressão (82 – 28) são as partes, bem como o todo é representado por (37 + 36). Essa identificação conduz ao cálculo do valor da incógnita, o que requer a subtração do todo pela parte conhecida:

$$x = (37 + 36) - (82 - 28)$$

Eliminando os parênteses pela adição e subtração, respectivamente, e em seguida subtraindo os dois resultados, é possível indicar o valor da incógnita:

$$x = 73 - 54$$
$$x = 19$$

A **vigésima oitava** tarefa, com duas situações, apresenta similaridade com aquela recém-analisada. A aproximação entre elas se caracteriza pela presença de termos constituídos por operações entre parênteses. Entretanto, nessas duas novas situações está presente a multiplicação, além das operações de adição e subtração. Trata-se de um cuidado para que os estudantes, no processo de generalização teórica, verifiquem que as expressões entre parênteses não se restringem apenas à adição e à subtração, ou seja, são válidas para outras operações. Revela-se, aí, a atenção ao pressuposto de Davídov (1988) de que o conteúdo da atividade de estudo é o conhecimento teórico em que se combinam de modo unificado a abstração substancial, acrescida da generalização e de conceitos teóricos. Essa particularidade só contribui para a generalização teórica porque os estudantes se apropriam e convivem no processo de desenvolvimento do pensamento conceitual das relações essenciais (entre grandezas, partes-todo, unidade básica-unidade intermediária). Como afirma Davídov (1988, p. 96),

> [...] os estudantes, primeiramente, descobrem a relação geral principal em certa área, constroem sobre sua base a generalização substantiva e, graças a ela, determinam o conteúdo do "núcleo" da matéria estudada, convertendo-a em meio para deduzir relações mais particulares, isto é, um conceito.

A sutil diferença entre uma e outra tarefa é peculiaridade planejada da organização de ensino proposta pelo ensino desenvolvimental na perspectiva davydoviana (ROSA, 2012; BÚRIGO, 2015). Nesse sentido, vale explicitar a síntese de Búrigo (2015, p. 131) referente à proposição de Davýdov:

> [...] Cada tarefa particular é cuidadosamente elaborada para que se articule com as antecedentes e, concomitantemente, gere dupla necessidade: do surgimento da precedente que, por sua vez, aponta para outro conceito ou significação pertinente ao sistema [...]. Essa duplicidade se constitui em credencial para outra afirmação: o modo davydoviano de organização [...] imprime um

> movimento dialético pedagógico e, como tal, em permanente estado de devir. Isso significa que a articulação entre as tarefas particulares é marcada, não por rompimento de uma com a outra, mas de superação caracterizada por: 1) permanências conceituais e de elementos estruturais da própria organização das tarefas; 2) acréscimos de algo novo que complexifica o sistema conceitual e seu processo de elaboração, por parte dos estudantes.

É com esses cuidados, portanto, que é proposta a vigésima oitava tarefa, em que os estudantes, inicialmente, resolverão as operações dos parênteses para, em seguida, encontrar o valor da incógnita (ГОРБОВ; МИКУЛИНА, 2004). A primeira equação é: $(15 \cdot 3) + x = (92 - 16)$.

Analisando-a, os estudantes perceberão que a expressão $(15 \cdot 3)$ e a incógnita x representam as partes do todo caracterizado pela expressão $(92 - 16)$. Dessa forma, para encontrar a solução da equação, é necessário subtrair a parte conhecida do todo, ou seja:

$$x = (92 - 16) - (15 \cdot 3)$$

Removendo os parênteses, temos:

$$x = 76 - 45$$

O valor da incógnita é:

$$x = 31$$

A segunda situação da tarefa é a seguinte equação:

$$(34 - 16) \cdot x = (58 + 32)$$

Diferente da situação anterior e da tarefa vinte e sete, nessa equação a operação de multiplicação tem como fatores o coeficiente (34 – 16) e a incógnita x, enquanto o produto é representado pela expressão (58 + 32). A solução pode ser obtida pelas generalizações desenvolvidas anteriormente (página 138), qual seja: dividindo o produto pelo fator conhecido:

$$x = \frac{(58 + 32)}{(34 - 16)}$$

Eliminando os parênteses (resolvendo a adição do numerador e a subtração do denominador) e efetuando a divisão, encontra-se o valor de x:

$$x = \frac{90}{18}$$

$$x = 5$$

Uma outra forma de desenvolver a resolução dessa equação é eliminar os parênteses antes de escrever a divisão. Nesse sentido, temos que $(34 - 16) \cdot x = (58 + 32)$ é equivalente a $18 \cdot x = 90$. Agora, de forma similar à da resolução anterior, temos que:

$$x = \frac{90}{18}$$

$$x = 5$$

Assim como analisamos na vigésima sexta tarefa, com base em Ponte, Branco e Matos (2009), os estudantes podem, ainda, aplicar a propriedade distributiva da multiplicação como uma outra forma de resolver a equação proposta. De acordo com Caraça (2003), para uma multiplicação da forma $a \cdot (b - c)$, a igualdade é válida, ou seja, $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$. Isso significa que a equação, inicialmente apresentada como $(34 - 16) \cdot x = (58 + 32)$, pode ser reescrita da forma $34 \cdot x - 16 \cdot x = 90$. Cabe destacar que os estudantes assimilam essa propriedade durante o terceiro ano e que, assim, a equivalência das expressões $34 \cdot x - 16 \cdot x$ como sendo $18 \cdot x$ não é algo “novo” para eles. Agora, como nos casos anteriores, basta dividir o produto pelo fator conhecido para encontrar o valor da incógnita:

$$x = \frac{90}{18}$$

$$x = 5$$

A tarefa seguinte, **vinte e nove**, é similar à anterior. Entretanto, na sua peculiar sutileza, como argumentamos antes com base em Búrigo (2015), os estudantes necessitam colocar parênteses "extras" nas equações a fim de encontrarem as suas soluções (ГОРБОВ; МИКУЛИНА, 2004). As duas equações propostas são: $(43 - 17) = x - 82 - 19$ e $x - (72 - 58) = 62 - 34$. No quarto ano, os estudantes ainda não estudaram o conceito de número negativo. Dessa forma, na primeira situação proposta, para que a equação seja solucionada, eles – em interlocução com o professor – colocarão parênteses na expressão (82 – 19) e a equação ficará na forma $(43 - 17) = x - (82 - 19)$. Analisando-a, verificarão que a incógnita x é o todo, enquanto as partes são as expressões (43 – 17) e (82 – 19). Dessa maneira, para encontrar o valor de x, ou seja, resolver a equação, basta que os alunos efetuem a soma das duas partes:

$$(43 - 17) = x - (82 - 19)$$
$$x = (43 - 17) + (82 - 19)$$
$$x = 26 + 63$$
$$x = 89$$

Na segunda equação, os parênteses podem ser colocados na expressão (62 - 34), fazendo com que ela represente uma das partes do todo, caracterizado pela incógnita x. A outra parte do todo se refere à expressão (72 – 58). Assim, basta somar a ela a outra parte para que a equação seja resolvida:

$$x - (72 - 58) = (62 - 34)$$
$$x = (72 - 58) + (62 - 34)$$
$$x = 14 + 28$$
$$x = 42$$

O envolvimento de elemento neutro da adição e da multiplicação, assim como a adição, a subtração e a multiplicação por zero é o que move a **trigésima tarefa**, bem como caracteriza a sua sutilidade, que a diferencia das anteriores. Para tanto, ela é elaborada de modo que os estudantes determinem o valor faltante que torna a igualdade válida (ГОРБОВ; МИКУЛИНА, 2004). Para isso, são apresentadas as três igualdades:

$$(635 - 635) \cdot 35 = 153 \cdot [\quad]$$
$$704 \div 704 \cdot 56 = 56 + [\quad]$$

$$167 \cdot 38 \cdot 0 = 75 - [\quad]$$

Em todos os casos, o valor desconhecido não é representado por uma letra, mas sim por uma lacuna a ser preenchida. Entretanto, todas as igualdades representam equações nas quais as lacunas caracterizam as suas incógnitas. Na primeira situação, há duas multiplicações, sendo que cada uma se encontra em membro distinto da igualdade: $(635 - 635) \cdot 35 = 153 \cdot [\ \ ]$.

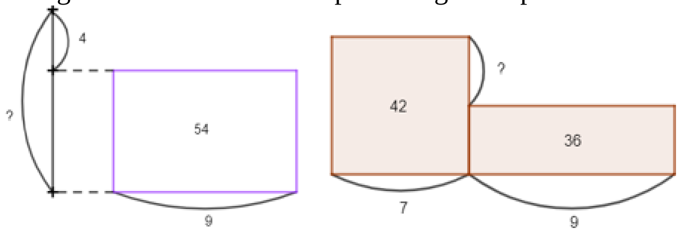
Verificamos que o produto resultante da multiplicação do lado esquerdo da igualdade é zero: $(635 - 635) \cdot 35 = 0 \cdot 35 = 0$. Dessa forma, podemos reescrever a equação do seguinte modo: $0 = 153 \cdot [\ \ ]$. A chegada nesse estágio da resolução, com um componente conceitual teórico requer análise e interação professor-aluno para a apropriação de uma nova significação matemática. Surge, então, uma necessidade de respaldo teórico suprida na sistematização de Caraça (2003) de que sendo "a" um número real, temos $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$, isto é, a propriedade da multiplicação denominada anulamento. A partir dela, é possível indicar que o valor a ser colocado na lacuna, da igualdade em análise, é o 0, uma vez que $153 \cdot 0 = 0$, o que torna a igualdade válida. Ou seja, a solução da equação é zero.

A segunda situação, $704 \div 704 \cdot 56 = 56 + [\ ]$, é própria para que, inicialmente, os estudantes determinem o quociente 1 da divisão $704 : 704$. Posteriormente, multiplicam esse resultado pelo 56. O número um 1 é apresentado como elemento neutro da multiplicação. Ou seja, para uma multiplicação do tipo $a \cdot b$ "[...] no caso em que $b = 1$ põe-se, por definição, $a \cdot 1 = a$" (CARAÇA, 2003, p. 18). Assim, a equação inicial pode ser reescrita da seguinte maneira: $56 = 56 + [\ ]$. De forma similar à da situação anterior, o número que preencherá a lacuna e tornará a igualdade válida é o zero (elemento neutro da adição): $56 = 56 + 0 \rightarrow 56 = 56$.

Por fim, semelhante ao que ocorreu na primeira situação, na terceira, $167 \cdot 38 \cdot 0 = 75 - [\,]$, o produto das multiplicações, no lado esquerdo da igualdade, é nulo. Por extensão, a equação pode ser reescrita na forma $0 = 75 - [\,]$. A solução da equação é 75, pois é ele que torna a igualdade válida: $0 = 75 - 75 \rightarrow 0 = 0$.

Diferente das analisadas até o momento, a **trigésima primeira** tarefa apresenta dois desenhos (imagem 56). Para cada um deles, os estudantes são orientados a criar uma tarefa e a resolvê-la. Além disso, tabelas com os dados apresentados no desenho podem ser construídas com a finalidade de auxiliar as soluções ГОРБОВ; МИКУЛИНА, 2004).

Imagem 56: Base de análise para a trigésima primeira tarefa



Fonte: Adaptação de Горбов e Микулина (2004).

No primeiro desenho, o número 54 equivale à medida da área do retângulo e o 9 representa a medida do comprimento da sua largura. Não há, explicitamente, o valor do comprimento da altura do retângulo no desenho. Esse valor desconhecido, adicionado com as quatro unidades de comprimento, conforme a figura, representa o valor correspondente ao sinal de interrogação, a incógnita. Encontrar o seu valor se constitui a tarefa a ser criada pelos estudantes. A eles é proposta a organização de tabelas, como aquelas a seguir, com os dados apresentados no desenho. Nelas, o valor do comprimento da altura do retângulo, ainda desconhecido, é representado pela letra h:

Comprimento da largura do retângulo	Comprimento da altura do retângulo	Área do retângulo
9	h	54

Parte	Parte	Todo
4	h	?

A proposição para que elaborem as tabelas é possível porque os alunos já estudaram o conceito e o cálculo da área de retângulos. Portanto, assimilaram que, para encontrar a medida do comprimento da altura, a equação $9 \cdot h = 54$ precisa ser resolvida. A incógnita h é calculada por meio da divisão do produto pelo fator conhecido, ou seja: $h = \frac{54}{9} \rightarrow h = 6$.

Agora, temos as duas partes que compõem o todo, representado no desenho pelo sinal de interrogação. Então o valor desconhecido (?) é obtido pela soma das duas partes, ou seja:

$$? = 6 + 4$$
$$? = 10$$

O segundo desenho, os estudantes observarão que é composto por dois retângulos. Também perceberão que o valor desconhecido – a ser calculado e representado pelo sinal de interrogação – corresponde a uma parte da medida do comprimento da altura do retângulo, cuja medida da área é igual a 42 unidades. Todos esses dados, indicados no desenho, foram organizados nas tabelas abaixo:

Comprimento da largura do retângulo 2	Comprimento da altura do retângulo 2	Área do retângulo 2
9	h	36

Comprimento da largura do retângulo 1	Comprimento da altura do retângulo 1	Área do retângulo 1
7	h + ?	42

Para que a tarefa seja solucionada, é necessário encontrar, inicialmente, a medida do comprimento da altura do retângulo denominado 2. Isso pode ser feito por meio da resolução da seguinte equação: $9 \cdot h = 36$. Logo, $h = \frac{36}{9} \rightarrow h = 4$. Dessa forma, o comprimento da altura do retângulo 1 é equivalente a "4 + ?", correspondente à altura do retângulo. Para encontrar o valor desconhecido e solucionar a tarefa, recorre-se à fórmula do cálculo da área do retângulo, $A = b \cdot h$, que forma a seguinte equação a ser resolvida:

$$7 \cdot (4+?) = 42$$

A expressão "4 + ?" representa um fator da multiplicação. Isso significa que ela é equivalente à divisão do produto (42) pelo outro fator conhecido (7). Assim:

$$4+? = \frac{42}{7}$$

$$4+? = 6$$

Da equação resultante, temos que 6 é o todo e o 4 e a incógnita são as partes. Assim:

$$? = 6 - 4$$
$$? = 2$$

Pode ocorrer que alguns estudantes resolvam a equação $7 \cdot (4 + ?) = 42$ pelo emprego da propriedade distributiva, isto é, $7 \cdot 4 + 7 \cdot\cdot ? = 42$. Como a $7 \cdot ?$ corresponde a uma das partes, é necessário subtrair do todo 42 a outra parte, $7 \cdot 4$. Por consequência, a equação se transforma em:

$$7 \cdot ? = 42 - 7 \cdot 4 \rightarrow 7 \cdot ? = 42 - 28 \rightarrow 7 \cdot ? = 14 \rightarrow ? = \frac{14}{7} \rightarrow ? = 2$$

O trânsito por esses dois modos de resolver a mesma equação revela que os estudantes ganharam experiência no decorrer das resoluções de tarefas desde o primeiro ano escolar. Ao adotar a propriedade distributiva, demonstram maturidade em relação ao desenvolvimento algébrico, pois, de acordo com Demana e Leitzel (1994, p. 75):

> Embora os alunos possam se sair bem com a aritmética sem entender a propriedade distributiva, em álgebra é essencial que a entendam. Precisam ser capazes de representar expressões tanto na forma fatorada como na forma expandida a fim de simplificá-las.

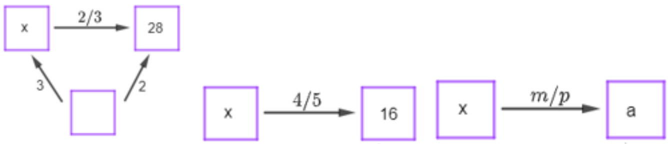
Para tanto, nesse estágio de desenvolvimento do pensamento algébrico, torna-se premente oportunizar aos estudantes a aquisição dessa prática em situação-problema como a proposta nessas últimas tarefas analisadas.

A presença de conceitos geométricos, aritméticos e algébricos fica evidente no desenvolvimento da resolução da trigésima primeira tarefa. Mais que isso, a compreensão da relação entre eles possibilita aos estudantes resolverem o problema construído, sem a necessidade de decorarem “passos” ou regras de resolução. De acordo com Demana e Leitzel (1994), a construção das tabelas permite que os estudantes percebam as informações necessárias tanto para a construção da equação quanto da sua solução. Além disso, motivam-se para simplificar as expressões. Isso proporciona que,

> [...] com o tempo, a tendência dos alunos é não mais construir tabelas para resolver equações lineares no caso de um dos membros da equação ser uma constante. Eles “desembaraçam” a variável usando sua experiência computacional em inverter operações. Com isso podem escrever a solução. (DEMANA; LEITZEL, 1994, p. 76).

Assim, também, a **trigésima segunda** tarefa é apresentada, cuja equação do primeiro grau possui termos ou coeficientes fracionários. Três esquemas (imagem 57) são as referências para os estudantes determinarem o valor da incógnita x (ГОРБОВ; МИКУЛИНА, 2004), cada qual com alguma especificidade.

Imagem 57: Esquemas base de análise para a tarefa trinta e dois



Fonte: Adaptação de Горбов e Микулина (2004).

A especificada do primeiro esquema é que se apresenta no modelo geral da multiplicação e divisão. Embora defina apenas uma incógnita x (quantidade de unidade básica), dá elementos para que os estudantes percebam que, para o cálculo do seu valor, inicialmente, será necessário encontrar outro valor desconhecido: o total de unidade básica correspondente à unidade intermediária. Isso será possível se multiplicarem tal valor por dois, que resulta em 28 (produto final/todo). Representando-o pela letra y, gerará a equação e seu processo resolutivo: $y \cdot 2 = 28 \rightarrow y = \frac{28}{2} \rightarrow y = 14$ (total de unidade básica da unidade intermediária). Consequentemente, será possível determinar x pela formação da equação: $14 \cdot 3 = x$, ou seja, $x = 42$.

Isso significa dizer que na relação direta $x \xrightarrow{\frac{2}{3}} 28$, primeiro dividimos 28 (produto/todo) pelo numerador da fração, 2 (quantidade de vez que a unidade básica se repete), e, depois, multiplicamos o quociente pelo denominador da fração, 3 (quantidade de vez que a unidade básica se repete para constituir a unidade intermediária). Esse movimento dá subsídios para que os dois próximos esquemas sejam solucionados. Isso porque, de acordo com Горбов e Микулина (2004), para encontrar o valor de x por meio de sua fração (genericamente vamos representá-la pelo número “a”), é necessário dividir a pelo numerador da fração e, posteriormente, multiplicar o resultado pelo denominador. No primeiro caso, a é o número 28. Com isso, poderemos resolver as respectivas equações dos dois esquemas que faltam:

$$x = \frac{16}{4} \cdot 5 \rightarrow x = 4 \cdot 5 \rightarrow x = 20 \text{ e } x = \frac{a}{m} \cdot p$$

Analisando o terceiro item, verifica-se que ele equivale à representação genérica do movimento expresso nos dois casos anteriores para o cálculo da incógnita x. Trata-se de uma manifestação atenta e constante dos organizadores do sistema de ensino das bases da lógica dialética, que afirmam: “Analisar uma realidade complexa e atingir seus elementos reais é o mesmo que descobrir seus momentos. A análise deve ser operada e situada no movimento, no processo criador (LEFEBVRE, 1995, p. 119-120).

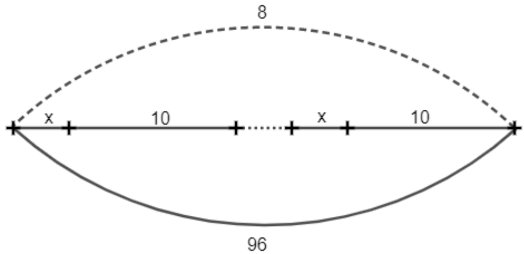
No caso em análise, a generalização não ocorre somente com “[...] a comparação das propriedades gerais e aparentemente iguais, de alguma variedade dos objetos com a seguinte orientação da pessoa para essas propriedades” (DAVIDOV, 2019, p. 172), isto é, generalização empírica. Pelo contrário, trata-se de uma generalização teórica, pois

> [...] envolve a análise das condições de origem de algum sistema de objetos mediante sua transformação real ou psíquica. Essa análise destaca a relação geneticamente inicial ou universal, que constitui a base das manifestações particulares do sistema. (DAVIDOV, 2019, p. 172).

Essa preocupação foi revelada na análise de diversas tarefas. Na sequência, essa constância também acontece, ou seja, as situações propostas generalizam o movimento de resolução dos itens anteriores, movidas pelas relações essenciais que foram explicitando desde o primeiro ano escolar. Isso com tal esmero, que a tarefa seguinte, **trinta e três**, estabelecerá que os estudantes resolvam as equações propostas e desenhem um esquema para cada uma delas (ГОРБОВ *et al.*, 2015).

A primeira equação proposta é $(x + 10) \cdot 8 = 96$, bem como o esquema referente de sua representação (imagem 58).

Imagem 58: Esquema da equação $(x + 10) \cdot 8 = 96$.



Fonte: Elaboração dos autores.

A análise da equação e do respectivo esquema leva os estudantes a destacarem que "$x + 10$" e 8 são fatores da multiplicação e que 96 é o produto. Ou seja, a expressão "$x + 10$" é repetida 8 vezes, compondo um todo equivalente a 96 unidades. Dessa forma, $x + 10$ (parte) – a incógnita está em uma das partes acrescida de 10 – corresponde à divisão do produto pelo fator conhecido:

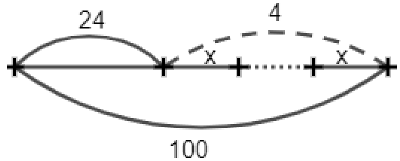
$$(x + 10) \cdot 8 = 96 \rightarrow x + 10 = \frac{96}{8} \rightarrow x + 10 = 12$$

O desenvolvimento da equação, até o momento, e a análise do esquema subsidiam que os estudantes percebam que o todo, caracterizado pelo 96, é composto por 8 partes equivalentes a 12. Além disso, observarão que em cada uma dessas partes o 12 passa a ser o todo. Por sua vez, a incógnita x e o 10 são as partes. Assim, para encontrar o valor da incógnita, é necessário finalizar a resolução da equação:

$$x + 10 = 12 \rightarrow x = 12 - 10 \rightarrow x = 2$$

A segunda equação proposta é: $100 - x \cdot 4 = 24$. O esquema referente a ela é o seguinte:

Imagem 59: Esquema da equação $100 - x \cdot 4 = 24$.



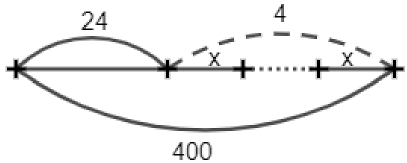
Fonte: Elaboração dos autores.

Com base na análise da equação e do esquema, os estudantes verificarão que o todo corresponde a 100 e que as partes correspondem a 24 e “$x \cdot 4$”. Sendo assim, a equação se transforma em $100 - 24 = x \cdot 4 \rightarrow 76 = x \cdot 4$, ou seja, a diferença entre o todo e a parte conhecida é igual a outra parte. Eles perceberão, também, que a parte $x \cdot 4$ é composta por quatro outras partes equivalentes à incógnita x. Portanto, 76 é equivalente a essa parte específica. Nesse caso, encontrar o valor da incógnita x só é possível pela divisão de 76 por 4, que é a continuidade da resolução da equação:

$$76 = x \cdot 4 \rightarrow \frac{76}{4} = x \rightarrow 19 = x$$

A terceira equação proposta aos estudantes, com o seu esquema exposto na imagem 60, é a seguinte: $(100 - x) \cdot 4 = 24$. Diferente do caso anterior, a expressão entre parênteses, na equação, muda completamente a análise a ser realizada, pois, agora, o quatro não multiplica apenas a incógnita, mas também o 100, que, no item anterior, representava o todo. A fim de compreender o esquema que representa a equação, é válido que os estudantes recorram à propriedade distributiva da multiplicação, que ali se apresenta, e que, ao aplicá-la, obtenham: $400 - x \cdot 4 = 24$.

Imagem 60: Esquema da equação $(100 - x) \cdot 4 = 24$.



Fonte: Elaboração dos autores.

Analisando a nova forma de representar a equação e também o esquema construído, os estudantes verificarão que, diferente do segundo caso, o todo é 400, enquanto as partes que o compõem são as mesmas: 24 e "$x \cdot 4$". Tal compreensão orientará a continuidade da resolução da equação:

$$(100 - x) \cdot 4 = 24 \rightarrow 400 - x \cdot 4 = 24 \rightarrow 400 - 24 = x \cdot 4 \rightarrow$$

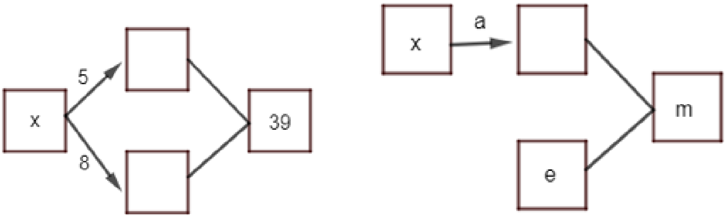
$$376 = x \cdot 4 \rightarrow \frac{376}{4} = x \rightarrow 94 = x$$

Há uma questão que merece destaque na análise das três equações dessa tarefa. Trata-se da aparente similaridade entre elas ao par de suas complexas especificidades, que põem os estudantes a colocar em ação o pensamento da relação essencial para resolvê-las, com articulação entre o que elas têm de igual e diferente. Nesse processo, ocorre o que Kieran (1994) denomina "procedimento de supergeneralização", porém, eminentemente, conteúdo teórico. Além disso, existe uma certa relatividade na ideia de transposição de termos de um membro para outro das equações, pois a resolução é centrada no lugar que a incógnita ocupa na relação essencial (todo/partes), o que leva à construção/resolução de equações dentro daquelas propostas, principalmente quando requer a propriedade distributiva. Tudo isso joga por terra a preocupação de Kieran (1994, p. 108), com teor de alerta para o seguinte procedimento de resolução de uma equação:

> É importante notar que o procedimento supergeneralizado de começar com número final do segundo membro e então caminhar do segundo para o primeiro membro, tomando as operações inversas à medida que elas se sucedem, evidentemente atribui bem pouco significado ao papel do sinal de igualdade no processo de resolução de equações. A existência dessa abordagem levanta algumas questões sérias com respeito ao grau da ênfase que se deveria dar, na escola elementar, à utilização da transposição como procedimento para a resolução de sentenças abertas.

Na **trigésima quarta** tarefa, o movimento de resolução é diferente daquele imprimido anteriormente. Nesta, o esquema está dado e os estudantes precisam escrever uma equação que o represente, além de resolvê-la (ГОРБОВ *et al.*, 2015). Os dois esquemas propostos estão na imagem 61:

Imagem 61: Base de análise da tarefa trinta e quatro.



Fonte: Adaptação de Горбов *et al.* (2015).

No primeiro esquema, os estudantes debruçar-se-ão na análise movida pela percepção de que a incógnita x é multiplicada tanto por 5 quanto por 8 e que a soma desses dois produtos (partes) resulta em 39 (todo). Tais percepções e compreensões levam à representação exposta no esquema em uma equação, qual seja: $5x + 8x = 39$. Reafirma-se que “5x” e “8x” representam as partes que compõem o todo “39”. Dessa forma, a soma dessas partes corresponde ao valor do todo, o que leva ao movimento de resolução da equação:

$$5x + 8x = 39 \rightarrow 13x = 39 \rightarrow x = \frac{39}{13} \rightarrow x = 3$$

No segundo esquema, a incógnita é multiplicada apenas por “a” (representa uma das partes), e o produto dessa multiplicação, adicionado ao valor representado por “e” (a outra parte), resulta em “m” (todo). Com base no procedimento geral de ação apropriado em todo o processo – com acréscimos conceituais da resolução da situação anterior –, os estudantes reescreverão essa situação por meio da equação $ax + e = m$. Semelhante ao que ocorreu anteriormente, as partes são representadas por “ax” e “e”, e o todo por “m”. Como a tarefa é determinar uma das partes, a operação indicada é a subtração da parte do todo, ou seja: $ax = m - e$, isto é, a diferença entre o todo e a parte conhecida resulta na outra parte. Esta, por sua vez, é composta por uma multiplicação em que um dos fatores é a incógnita. O valor desconhecido é:

$$x = \frac{m - e}{a}$$

Diferente da primeira equação, essa tem uma relação genérica, composta apenas por letras, e sua expressão final permite aos alunos a manifestação de todo o movimento realizado para a sua solução. O mesmo ocorre no último item da tarefa que segue. Mas, no conjunto delas, há uma característica importante da proposição, isto é, do que Davydov (1982, p. 436) considera uma peculiaridade do seu

> [...] novo enfoque da estruturação dos programas de estudo. Agora, já se perfilam também as vantagens práticas do mesmo, em particular a possibilidade de superar totalmente ou diminuir de modo considerável o divórcio existente entre a "aritmética" e "álgebra", característica dos cursos escolares tradicionais. Ele permitirá reduzir o tempo que as crianças gastam na assimilação do material de estudo.

O mesmo cuidado, com algumas complexificações, caracteriza a **trigésima quinta** tarefa, que propõe diferentes equações para que os alunos resolvam (ГОРБОВ *et al*., 2015), divididas em três grupos:

1) $15 \cdot x = 225$
$$15 \cdot (643 - x) = 225$$
$$15 \cdot (643 - x \div 2) = 225$$

2) $7958 \div x = 346$
$$7958 \div (823 - x) = 346$$
$$7958 \div (823 - 20 \cdot x) = 346$$

3) $a + x = c$
$$a + x \div t = c$$
$$a + (x + p) \div m = c$$

Notemos que, em cada grupo, ocorrem algumas mudanças nas equações propostas. Vamos iniciar a análise pelas equações do primeiro grupo, na ordem em que aparecem. No grupo um, os estudantes identificarão que todas as equações são compostas por multiplicações nas quais o produto e um dos fatores, além de conhecidos, são sempre os mesmos: 225 e 15, respectivamente. A resolução de todas elas inicia da mesma forma, ou seja, dividindo-se o produto pelo fator conhecido. As diferenças na resolução das três equações aparecerão após esse primeiro procedimento ou modo de ação, peculiar à resolução de uma equação. Vejamos:

Resolução da equação 01:

$$15 \cdot x = 225 \rightarrow x = \frac{225}{15} \rightarrow x = 15$$

Observa-se que o valor da incógnita já é determinado por meio da divisão. Isso não ocorre nos outros dois casos, que veremos na sequência, pois o fator em que está a incógnita é uma expressão algébrica, isto é, está envolto com adição ou subtração.

Resolução da equação 02:

$$15 \cdot (643 - x) = 225 \rightarrow 643 - x = \frac{225}{15} \rightarrow 643 - x = 15$$

Nessa equação, o fator desconhecido é composto por uma subtração. Analisando-a separadamente, verifica-se que o todo equivale a 643, enquanto as partes são representadas pelo 15 e pela incógnita. Portanto, o cálculo do valor de x é dado pela diferença entre o todo e a parte conhecida, ou seja:

$$643 - x = 15 \rightarrow x = 643 - 15 \rightarrow x = 628$$

Resolução da equação 03:

$$15 \cdot (643 - x \div 2) = 225 \rightarrow 643 - x \div 2 = \frac{225}{15} \rightarrow$$

$$643 - x \div 2 = 15$$

Analisando a equação a resolver, $643 - x \div 2 = 15$, as apropriações já elaboradas pelos estudantes dão condições para a identificação de que o todo equivale a 623, enquanto as partes são o 15 e a expressão “x:2”. De modo similar à equação dois, para encontrar a parte desconhecida, é necessário subtrairmos do todo a parte, cujo valor está dado:

$$643 - x \div 2 = 15 \rightarrow x \div 2 = 643 - 15 \rightarrow x \div 2 = 628$$

Na continuidade, a observação necessária é que a parte desconhecida, $x: 2$ (ou a metade da parte desconhecida), é igual a 628. Dito de outro modo, a parte desconhecida é o valor do quociente da divisão cujo dividendo é a incógnita e o divisor é o número 2. Com base no conceito de divisão e das generalizações estabelecidas anteriormente (página 138), temos que o valor de x pode ser calculado da forma:

$$x \div 2 = 628 \rightarrow x = 628 \cdot 2 \rightarrow x = 1256$$

As equações do grupo dois, por sua vez, são compostas por divisões nas quais o dividendo e o quociente não mudam. As alterações aparecem apenas no divisor. Cabe destacar que, assim como na resolução da equação anterior, as resoluções que seguem utilizaram as generalizações já estabelecidas referentes ao conceito de divisão.

Resolução da equação 01:

$$7958 \div x = 346 \rightarrow \frac{7958}{346} = x \rightarrow 23 = x$$

Resolução da equação 02:

$$7958: (823 - x) = 346 \rightarrow \frac{7958}{346} = 823 - x \rightarrow 23 = 823 - x$$

Em $23 = 823 - x$, o divisor é composto por uma subtração. Para continuar a resolução da equação, é importante analisar que, na equação equivalente encontrada, 823 corresponde ao todo enquanto o 23 e a incógnita representam as partes. Nesse caso, para determinar o valor de x, é necessário calcular a diferença entre o todo e a parte conhecida, ou seja:

$$23 = 823 - x \rightarrow 823 - 23 = x \rightarrow 800 = x$$

Resolução da equação 03:

$$7958 \div (823 - 20 \cdot x) = 346 \rightarrow \frac{7958}{346} = 823 - 20x \rightarrow$$

$$23 = 823 - 20x$$

Similar à resolução da questão anterior, nesta o 823 também representa o todo e o 23 uma das partes. A outra parte é composta por uma multiplicação em que um dos fatores é a incógnita. Assim:

$$23 = 823 - 20x \rightarrow 823 - 23 = 20x \rightarrow 800 = 20x \rightarrow \frac{800}{20} = x \rightarrow 40 = x$$

Por fim, as equações do terceiro grupo são todas genéricas, compostas apenas por letras ao invés de números específicos. Além disso, todas apresentam uma adição e, nessa relação, o todo é sempre representado pela letra c e uma das partes pela letra a. As orientações e os diálogos entre si ou com o professor são importantes para que os estudantes adotem modos de ação como os apresentados a seguir:

Resolução da equação 01:

$$a + x = c$$

Trata-se da equação mais simples. Nela, conforme mencionado, o todo é representado pela letra c e uma das partes pela letra *a*. A incógnita x representa a outra parte, assim:

$$x = c - a$$

Resolução da equação 02:

$$a + x \div t = c \rightarrow x \div t = c - a$$

O desenvolvimento da resolução desta equação começa pelo conhecimento já adquirido pelos estudantes de que *a* e a expressão “x: t” são as partes e c o todo, bem como a incógnita é o dividendo. Por isso, os respectivos procedimentos:

1) subtrair uma parte do todo: $x \div t = c - a$

2) multiplicar o dividendo pela diferença do segundo membro da equação: $x = (c - a) \cdot t$

Resolução da equação 03:

Como dito na apresentação da tarefa, as equações apresentavam as mesmas características: “a” e a expressão com a variável *x*, constituíam as partes, e “*c*” o todo. Isso significa que a primeira ação conceitual dos estudantes nas resoluções é adotar a subtração *c* - *a*.

$$(x+p) \div m = c - a \rightarrow x + p = (c-a) \cdot m$$

Assim como na equação anterior, a parte desconhecida é composta por uma divisão. A diferença se encontra no fato de o dividendo ser uma adição, ou seja, é mais complexa. Entretanto, a continuação da resolução é similar:

$$(x+p) \div m = c - a \rightarrow x + p = (c-a) \cdot m$$

Analisando de forma isolada a equação equivalente apresentada, percebe-se que a incógnita passa a ser uma das partes, assim como "p". Dessa forma, para encontrar o seu valor, basta efetuarmos a subtração:

$$x + p = (c-a) \cdot m \rightarrow x = (c-a) \cdot m - p$$

É importante destacar que em nenhuma das resoluções foram utilizados "passos meramente mecânicos", desde as equações mais simples até as mais complexas. Todas as análises foram feitas para que as resoluções fossem efetuadas com base nos conceitos teóricos e nas generalizações desenvolvidas até o momento. Todo esse movimento é algo detalhadamente organizado, pois "[...] no transcurso de quatro anos os escolares resolvem todos os problemas textuais só mediante a formação de equações, isto é, sem recorrer a nenhum caso ao procedimento aritmético" (DAVÝDOV, 1982, p. 437). O autor acrescenta que, no "[...] sistema formativo do método algébrico de solução de problemas nos graus primários [...]" (DAVÝDOV, 1982, p. 437), há uma preocupação com sua fundamentação psicológica.

A seguinte tarefa, entretanto, apresenta um conceito ainda não mencionado na presente pesquisa, mas já assimilado pelos estudantes no momento em que ela é proposta. Refere-se ao conceito de proporção direta. Assim, na tarefa **trinta e seis**, são colocadas duas equações para que os estudantes resolvam (ГОРБОВ *et al.*, 2015). São elas:

1) $\frac{x+29}{258} = \frac{187}{102}$
2) $\frac{18}{x-5} = \frac{63}{35}$

Nesse momento, os alunos já sabem que, quando há uma igualdade do tipo "$a \div b = c \div d$", a seguinte relação é estabelecida: "$a \cdot d = b \cdot c$" (ГОРБОВ *et al.*, 2015; CARAÇA, 2003). Dessa forma, para resolver ambas as equações propostas, a referida relação é adotada:

$$\frac{x+29}{258}=\frac{187}{102}\rightarrow(x+29)\cdot102=258\cdot187\rightarrow$$

$$(x+29)\cdot102=48246$$

A forma da equação resultante já é conhecida. Nesse sentido, basta continuarmos a resolução para encontrarmos o valor da incógnita que torna a igualdade verdadeira:

$$(x+29)\cdot102=48246\rightarrow x+29=\frac{48246}{102}\rightarrow x+29=473\rightarrow$$

$$x=473-29\rightarrow x=444$$

Nessa equação, chama-nos a atenção a presença de valores altos, o que leva à divisão $\frac{48246}{102}$, algo não comum nos livros didáticos brasileiros que conhecemos, mesmo de anos escolares mais avançados. A segunda equação é solucionada de forma semelhante:

$$\frac{18}{x-5}=\frac{63}{35}\rightarrow18\cdot35=(x-5)\cdot63\rightarrow630=(x-5)\cdot63\rightarrow$$

$$\frac{630}{63}=x-5\rightarrow10=x-5\rightarrow10+5=x\rightarrow15=x$$

O conceito de proporção é considerado por muitos autores como de suma importância para o desenvolvimento do pensamento matemático. Nesse sentido, por exemplo, Post, Behr e Lesh (1994, p. 90, grifos no original) afirmam:

> O raciocínio com proporções tem aspectos tanto matemáticos como psicológicos. Matematicamente, toda a relação proporcional pode ser representada pela função *y* = *mx*, o tipo mais fundamental da equação linear. Essa equação representa uma relação simples, de natureza multiplicativa, entre os termos dos pares ordenados (*x*,*y*), de números. Tradicionalmente, as situações proporcionais têm sido inseridas em problemas de valor ausente. (*a*/*b* = *c*/*x*, em que geralmente *a*, *b*,

> *c*, são valores dados. A tarefa consiste em achar o valor de *x*; a posição de *x* pode variar.

Da citação é possível afirmar que, no modo davydoviano de organização do ensino, a equação representativa da proporcionalidade $y = mx$ é apropriada já no primeiro ano escolar, pois é o modelo multiplicativo da relação essencial do conceito de número (ROSA, 2012). Além disso, ele é tratado em todos os anos escolares e vinculado a outros modelos pertinentes às operações (adição/subtração, multiplicação/divisão, números fracionários e negativos). Por isso, não se constitui uma novidade, como ocorre no contexto escolar brasileiro, que só vai ser apresentado formalmente no sétimo ano escolar (BRASIL, 2017). Portanto, o desenvolvimento do pensamento proporcional inicia no primeiro ano e expande-se pelos demais, com atendimento a todas as suas características. Conforme prescrição de Post, Behr e Lesh (1994, p. 90, grifos no original):

> O raciocínio com proporções é uma forma de raciocínio matemático. Ele envolve um senso de covariação, comparações múltiplas e a capacidade de armazenar e processar mentalmente vária informações. O raciocínio com proporções está muito ligado à inferência e à predição e envolve métodos de pensamento qualitativos e quantitativos. O fato de muitos aspectos de nosso mundo funcionarem de acordo com regras de proporcionalidade faz com que a faculdade de raciocinar com proporções seja exatamente útil na interpretação dos fenômenos do mundo real.

Na continuidade da exposição das tarefas que dão mostra do movimento do pensamento conceitual de equação do primeiro grau, vale mencionar que, ao fim do quinto ano, os estudantes necessitam aplicar os conhecimentos relativos à diferença, multiplicação, igualdade, "parte e todo" e proporção direta na análise e solução de problemas. Além do mais, precisam estar aptos a construir modelos que reflitam a estrutura matemática de problemas textuais (desenhos, diagramas de setas e tabelas). Também, resolver equações por meio da conexão existente da relação entre valores e a correspondente operação aritmética (ГОРБОВ *et al.*, 2006).

Com tal atenção e conforme observado na análise das tarefas até o momento, os conceitos não são desenvolvidos de forma linear. Há um movimento de idas e voltas conectadas pelos conceitos desenvolvidos. Tudo isso pode ser observado na análise das tarefas presentes no livro didático do sexto ano. A tarefa **trinta e sete**, por exemplo, propõe aos estudantes a resolução das quatro equações que seguem (ГОРБОВ *et al*., 2016).

1) $x - 5{,}24 = 8{,}092$
2) $10{,}02 - y = 7{,}877$
3) $k + 3{,}843 = 4{,}021$
4) $8{,}321 + t = 11{,}2$

Apesar de serem compostas por números decimais (nesse momento os alunos já sabem resolver expressões com esse tipo de número), o modo de resolução de todas as equações propostas é similar ao de outras equações já resolvidas, com base na relação todo-partes. Isso porque, segundo Davydov (1982, p. 441), há todo um processo de organização colocado à prova em situação experimental, cuja síntese transcrevemos:

> De conformidade com estes dados, o ensino experimental organizado de certo modo influi positivamente na formação do pensamento teórico dos escolares primários. Este fato permite referir-se com esperança a hipótese sobre a perspectiva fundamental de desenvolvimento do pensamento dos escolares, perspectiva que consiste em formar nas crianças, já desde as classes primárias as bases do pensamento teórico.

E, com teor de crítica às proposições – das quais entendemos que sejam as Tendências Empírico-Ativista e Construtivista (FIORENTINI, 1995) –, que superestimam o concretismo no ensino de matemática, acrescenta:

> Baseando-se nos novos dados psicológicos, cabe indicar a possibilidade de superar o critério de que o pensamento dos escolares primários lhes é necessário e próprio de modo inevitável - segundo denominam – o chamado "concretismo". De fato, em determinadas condições do ensino e com um certo conteúdo, cabe formar neles conceitos, operando com os quais os alunos primários

> revelam um nível bastante alto de generalização e abstração, e de capacidade para dominar os conhecimentos de carácter teórico. (DAVÝDOV, 1988, p. 441).

Vejamos:

Na equação $x - 5{,}24 = 8{,}092$, o todo é representado pela incógnita, enquanto as partes por 8,092 e 5,24. Assim: $x = 8{,}092 + 5{,}24 \rightarrow x = 13{,}332$. A equação $10{,}02 - y = 7{,}877$ tem como todo 10,02 e como partes a incógnita y e 7,877. Dessa forma: $y = 10{,}02 - 7{,}877 \rightarrow y = 2{,}143$. Na terceira equação proposta, $k + 3{,}843 = 4{,}021$, a incógnita k e 3,843 são as partes, enquanto 4,021 é o todo. Para encontrar o valor de k, basta efetuar a subtração: $k = 4{,}021 - 3{,}843 \rightarrow k = 0{,}178$. De forma similar à equação anterior, na qual a incógnita representa uma parte do todo, a solução da quarta equação, pelos estudantes, pode ser efetuada da seguinte maneira: $8{,}321 + t = 11{,}2 \rightarrow t = 11{,}2 - 8{,}321 \rightarrow t = 2{,}879$.

Nessas quatro equações, a relação essencial todo-partes é base orientadora para determinar o valor das respectivas incógnitas. Trata-se, pois, da mesma relação que se apresentou na resolução de equações propostas em tarefas do primeiro e segundo anos com número naturais. Observa-se que, com o passar dos anos escolares, muda as singularidades numéricas (natural, fracionário, negativo), mas a base de resolução das equações do primeiro grau continua a mesma. As ampliações se caracterizam, além do tipo de número, pelo fato de que as partes se constituem de operações.

Na próxima tarefa, por sua vez, apesar da resolução das equações do primeiro grau se fundamentarem nos conceitos desenvolvidos até o momento, ela envolve operações com números negativos. Na **trigésima oitava** tarefa, oito equações são apresentadas aos estudantes e, a partir delas, alguns questionamentos são abordados com a finalidade de que os alunos compreendam a "regra" da transferência de termos de um lado da equação para o outro:

a) Divida as seguintes equações em grupos de modo que em cada um deles todas as equações tenham as mesmas raízes.

1) $2 - 3x = 5x + 8$
2) $2 - 3x - 5x = 8$
3) $(x + 5) \div x + 6 = x - 2$
4) $2 = 5x + 8 - 3x$
5) $(x + 5) \div x + 6 - x = -2$
6) $2 - 3x - 8 = 5x$

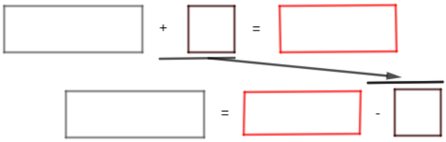
7) $(x+5) \div x = x - 2 - 6$
8) $-3x - 5x = 8 - 2$

b) Resolva as equações que você já sabe como resolver.

c) Como as equações em cada grupo diferem umas das outras? Formule a regra para a transferência de termos de um lado da equação para outro.

O princípio que rege a tarefa é que as raízes da equação não mudarão se o termo de um membro for transferido para o outro com o sinal oposto, conforme esquema (imagem 62) relacionado às operações de adição e subtração (ГОРБОВ *et al.*, 2016, tradução nossa).

Imagem 62: Transferência de termos de um membro da equação para o outro



Fonte: Adaptação de Горбов *et al.* (2016)

No item (a), os estudantes analisarão as características das equações e farão seu agrupamento da seguinte forma:

Grupo 01:

$$2 - 3x = 5x + 8;$$
$$2 - 3x - 5x = 8;$$
$$2 - 3x - 8 = 5x;$$
$$-3x - 5x = 8 - 2$$

Grupo 02:

$$(x+5) \div x + 6 = x - 2;$$
$$(x+5) \div x + 6 - x = -2;$$
$$(x+5) \div x = x - 2 - 6$$

Grupo 03:

$$2 = 5x + 8 - 3x$$

No item (b), os estudantes resolverão as equações que sabem. Nesse sentido, o provável é que eles resolvam as equações dos grupos 01 e 03, uma vez que no grupo 02 as equações são quadráticas.

Os estudantes, ao resolverem as equações do primeiro grupo, confirmarão que encontraram o mesmo valor para a incógnita em todas elas. Afinal, são todas equivalentes. O modo e o momento (depois que os alunos já sabem resolver as equações pela relação essencial) cumprem uma orientação considerada por Bernard e Cohen (1994, p. 126) imprescindível:

> A matemática deveria ser ensinada segundo uma abordagem de compreensão relacional. Isso inclui resolução de equações e, em particular, o método de resolução de equações por equivalência de equações. Reconhecemos e respeitamos a necessidade dos alunos de compreender o que estão aprendendo e sugerimos que lhes sejam dadas oportunidades e a assistência necessárias para construir seus novos conhecimentos e de desenvolver suas novas capacidades como extensões significativas do que já sabem e conseguem fazer.

Além disso, no processo de resolução delas, assim como no da equação do terceiro grupo, o conceito de número negativo está presente. Nesse sentido, é importante destacar que, nesse momento, os alunos já estão desenvolvendo tal conceito e sua aplicação na resolução de tarefas.

Búrigo (2014, p. 126), ao realizar sua pesquisa referente à introdução dos números negativos, com base em Davýdov, afirma que:

> [...] é questão de referência a uma singularidade numérica, uma vez que desde o primeiro ano escolar tem-se o número real como básico, que advém da relação entre grandezas, até então escalares, com certa suficiência para significar os positivos. O diferencial que se apresenta no sexto ano escolar é que uma nova grandeza, a vetorial, se constitui em necessidade essencial para que se apresentem os negativos, mas também com abrangência aos positivos. Do mesmo modo, no que faz menção a representação, ambos (positivo e negativo), ao se tratar da especificidade de ser inteiro e racional, são somente pontos particulares na reta numérica real. O movimento que produz essa dinamicidade emerge das necessidades que, concomitantemente, criam as condições para o surgimento de outras delas. Por consequência, elaboram-se novas tarefas particulares, que explicitam novos conceitos e significações

> conceituais que aprofundam e qualificam a ideias essenciais de números negativos em relação com os positivos.

Após analisarem todas as equações e solucionarem algumas delas, no item (c) é pedido que os estudantes determinem as diferenças entre elas, em cada grupo. Nesse momento, é importante que eles verifiquem que as diferenças se encontram na forma como determinados termos estão escritos quando presentes no lado direito da igualdade e quando presentes no lado esquerdo. Por exemplo, ao comparar as equações “$2 - 3x = 5x + 8$” e “$-3x - 5x = 8 - 2$”, o termo “$5x$” do lado direito da igualdade está sendo somado, enquanto do lado esquerdo ele é subtraído. O mesmo ocorre com o número 2: do lado esquerdo é somado e do lado direito é subtraído. Após perceberem essa relação, no que se refere à transferência de um termo de um lado da igualdade para o outro, os alunos registrarão a formulação dessa regra. A imagem 62, apresentada anteriormente, representa, esquematicamente, a ideia.

Na sua essência, essa regra a ser formulada pelos estudantes atende a uma característica do conceito de equação, ao que Aleksandrov (1988) e Caraça (2003) traduzem pelo termo “transposição e eliminação”, oriundo da expressão “jebr w’al mûqâbalah” (mencionado na seção anterior), que se refere à operação “de $\boldsymbol{ax + b = 0}$” para “$\boldsymbol{ax = -b}$”, fundamental na resolução de equações do primeiro grau. É interessante que somente agora a regra da transferência seja mencionada. Como analisado, desde o primeiro ano, os estudantes iniciam o estudo das equações, mas fundamentados nos conceitos teóricos das operações aritméticas estudadas, cuja essência se encontra na relação todo-partes. Assim, esse modo de organização do ensino possibilita que o estudante compreenda, de fato, e teoricamente, o conceito estudado. Para tanto, as tarefas sempre trazem um componente que leva o estudante à percepção e compreensão de que algo novo é necessário e estar por vir. Enfim, proporciona a constituição da zona de desenvolvimento proximal (VIGOTSKI, 2009), em que há algo nas tarefas que consegue resolver sozinho, outras com a ajuda oriunda do processo de análise orientado pelo professor. Por consequência, o estudante se desenvolve em um estágio no qual o estudo é sua principal atividade (LEONTIEV, 1978; DAVÍDOV, 1988).

Por fim, trazemos a última tarefa para análise, **tarefa trinta e nove**, por trazer como caraterística diferente das demais termos com valores fracionários, o que requer operações peculiares com números racionais. É proposto aos alunos que solucionem as três equações que seguem (ГОРБОВ *et al*., 2016):

1) $\frac{1}{3}x - 2 = \frac{1}{2} + \frac{5}{6}x$
2) $\frac{2}{3}x + 2 - \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}x - 3$
3) $4{,}2 - 0{,}2x = 2{,}7 - 0{,}7x$

No momento em que essa tarefa é proposta aos estudantes, eles já passaram pelo processo de apropriação do conceito de fração e de suas operações. A resolução das três situações propostas pela tarefa envolve termos e coeficientes fracionários, o que não descaracteriza a ideia de igualdade peculiar à equação do primeiro grau. Sendo assim, a sua peculiaridade é o envolvimento de operações com números racionais, entre elas, conforme Горбов *et al*. (2016), frações equivalentes.

Nesse sentido, a tarefa se apresenta no contexto conceitual que Caraça (2003) assim define: dois números racionais ($r = m \cdot n$ e $s = p \cdot q$) podem ser chamados de iguais quando representam a medida de um mesmo segmento com a mesma unidade inicial. Por sua vez, Freitas (2016), com base em Горбов *et al*. (2016), afirma que essas relações de igualdade – $r = m \cdot n$ e $s = p \cdot q$ – caracterizam entre si um fator de multiplicidade ou divisibilidade, que é expresso por um valor qualquer (k). Além disso, estabelece uma relação com o numerador e o denominador da fração. Dessa forma, a fração $\frac{m}{n}$ pode ser representada por $\frac{m \cdot k}{n \cdot k}$.

Além dos conceitos relacionados às operações com números fracionários, essa tarefa possibilita que os estudantes utilizem o modo de ação mencionado anteriormente e apresentado na imagem 62. Isso significa que, nesse momento, os estudantes têm conhecimentos suficientes (desenvolvidos desde o primeiro ano escolar) para solucionar equações do primeiro grau da forma apresentada por Caraça (2003), isto é, a forma mais desenvolvida – até o presente momento – no âmbito da matemática.

Assim, as resoluções das três equações propostas podem ser desenvolvidas da seguinte forma:

Equação 01:

$$\frac{1}{3}x - 2 = \frac{1}{2} + \frac{5}{6}x$$

Adotando o modo de ação de transpor os termos de um membro da igualdade para o outro, com o sinal oposto, os estudantes chegarão à equação:

$$\frac{1}{3}x - \frac{5}{6}x = \frac{1}{2} + 2$$

A equivalência de frações é a referência para a continuidade na busca pelo valor da incógnita. Para encontrar frações equivalentes de denominador seis nos coeficientes da incógnita, é necessário que se multiplique por dois o numerador e o denominador do primeiro coeficiente. Do mesmo modo, para somar os termos independentes, é necessária a multiplicação por dois (tanto do denominador, quanto do numerador) do segundo coeficiente.

$$\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2}x - \frac{5}{6}x = \frac{1}{2} + \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 2}$$

Isso resulta em:

$$\frac{2}{6}x - \frac{5}{6}x = \frac{1}{2} + \frac{4}{2}$$

Com a resolução das operações em cada termo, a equação torna-se:

$$-\frac{3}{6}x = \frac{5}{2}$$

Para a determinação da incógnita x, os estudantes podem adotar dois procedimentos operatórios estudados:

1) Pela proporção direta, conforme tarefa 36, em que se multiplicam, respectivamente, extremos e meios entre si:

$-3x \cdot 2 = 6 \cdot 5$, obtendo-se:

$$-6x = 30$$

Nesse caso, fica explícito que 30 é o todo e -6 e x as partes, no contexto da multiplicação e divisão. Para encontrar o valor da parte x, divide-se o 30 por -6:

$$x = \frac{30}{-6} \rightarrow x = -5$$

2) Pela relação todo-partes:

$$-\frac{3}{6}x = \frac{5}{2}$$

Para determinar o valor de x – uma das partes –, divide-se o todo pela parte conhecida:

$$x = \frac{5}{2} \div \left(-\frac{3}{6}\right) \rightarrow$$

$$x = \frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{6}{3}\right) \rightarrow$$

$$x = -\frac{30}{6} \rightarrow x = \ -5$$

A segunda equação pode ser solucionada da mesma forma que a anterior.

Equação 02:

$$\frac{2}{3}x + 2 - \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}x - 3 \rightarrow$$

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x = -3 - 2 \rightarrow$$

$$\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4}x - \frac{1 \cdot 6}{2 \cdot 6}x - \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3}x = -5 \rightarrow$$

$$\frac{8}{12}x - \frac{6}{12}x - \frac{3}{12}x = -5 \rightarrow$$

$$-\frac{1}{12}x = -5 \rightarrow$$

$$-1x = -5 \cdot 12 \rightarrow$$

$$-1x = -60 \rightarrow$$

$$x = -\frac{60}{-1} \rightarrow x = 60$$

Equação 03:

$$4{,}2 - 0{,}2x = 2{,}7 - 0{,}7x$$

Para resolver essa equação, os estudantes podem recorrer a vários modos de ação. Por exemplo: 1) realizar a transformação dos coeficientes decimais em fração e, posteriormente, adotar a proporção direta ou a relação todo-partes; 2) deixar os coeficientes na forma decimal, o que levaria ao procedimento da relação todo-parte, após a realização das operações dos coeficientes da incógnita e dos termos independentes, conforme segue:

$$-0{,}2x + 0{,}7x = 2{,}7 - 4{,}2 \rightarrow$$

$$0{,}5x = -1{,}5 \rightarrow$$

$$x = -\frac{1{,}5}{0{,}5} \rightarrow x = -3$$

A resolução da trigésima nona tarefa traz vários conceitos presentes em tarefas analisadas anteriormente. Isso significa que, nesse momento, os estudantes já assimilaram diferentes modos de ação que lhes possibilitam, cada vez, mais solucionar tarefas mais complexas.

Além disso, ela permite a reflexão de que o movimento conceitual desenvolvido desde o primeiro ano escolar – com particularidade para o conceito de equação do primeiro grau – sintetiza-se na sua solução por meio da apropriação de modos de ação que possibilitaram aos estudantes assimilar a forma mais atual da resolução desse tipo de equação. Mais que isso, o movimento expresso nas tarefas analisadas nos permite compreender que a apropriação do conceito teórico de equação do primeiro grau é possível com uma organização do ensino que coloque o estudante em atividade de estudo. Cada uma das tarefas se caracteriza por satisfazer uma necessidade conceitual e, concomitantemente, gerar outra necessidade, fazendo com que a equação do primeiro grau se insira em um sistema conceitual, porém sem perder de vista as suas relações essenciais. O movimento proposto – necessidade em processo de satisfação ↔ necessidade em emergência – pelas tarefas proporciona uma complexificação conceitual que, segundo Davidov (2019), não gera dificuldades para o estudante, pois não se perde de vista a análise das condições de origem do sistema de objetos conceituais – no caso, equação do primeiro grau – pela sua transformação real ou psíquica. Além disso, as tarefas transitam pela criação das “[...] premissas necessárias para a formação da atividade propriamente de estudo com o conteúdo e a estrutura correspondentes" (DAVIDOV, 2019, p. 173).

Por consequência, as tarefas permitem a resolução da equação do primeiro grau com assimilação do movimento histórico-lógico do referido conceito em nível teórico.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Aqui, mesmo com a ciência de muitas possibilidades de aprofundamentos, cabe-nos a explicitação do movimento realizado durante a pesquisa por meio de algumas de suas sínteses. De início, vale evidenciar que nossas análises e reflexões, referentes às bases empíricas do objeto de estudo, centram-se em algumas tarefas específicas do primeiro ao sexto ano escolar, extraídas dos livros didáticos e de orientação ao professor, elaborados por Davidov e seus colaboradores.

Durante toda a exposição, esforçamo-nos para não perder de vista a pergunta que deu movimento à nossa investigação: *o que caracteriza uma organização do ensino de equação do primeiro grau, fundamentada na perspectiva desenvolvimental, que se apresenta como promotora de possibilidade para que os estudantes se apropriem teoricamente do referido conceito?*

Tais análises, articuladas às bases teóricas, possibilitaram-nos a compreensão de que o movimento conceitual da equação do primeiro grau, desde a sua gênese até a sua forma mais atual de resolução, em caráter teórico, é possível no modo de organização do ensino desenvolvimental. Isso porque, no sistema de ensino Elkonin-Davidov, o referido conceito se apresenta desde o primeiro ano escolar por meio da apropriação das múltiplas relações conceituais e do modo de ação que colocam os estudantes em atividade de estudo.

Tal apropriação – como demonstraram a resolução e as respectivas análises – é decorrente do modo como as tarefas particulares são elaboradas e propostas aos estudantes. O desenvolvimento (resolução) dessas tarefas imprime um movimento de pensamento conceitual, pois cada uma delas apresenta como objetivo a satisfação de uma necessidade que lhe é particular, mas movida por uma necessidade de característica geral, isto é, oriunda da própria relação essencial do objeto da matemática (relação entre grandezas) incorporada na especificidade conceitual, no caso, equação do primeiro grau (relação todo-partes).

Em cada uma das tarefas particulares, ao mesmo tempo que satisfaz a sua necessidade, gera uma nova necessidade para a elaboração de outra com novos componentes conceituais e modos de ação. A forma como elas são organizadas e propostas revela permanências e superações.

Portanto, o que caracteriza uma organização do ensino de equação do primeiro grau, fundamentada na perspectiva desenvolvimental – levantada na pergunta de pesquisa –, é o seu movimento de ordem *conceitual* e *pedagógica*.

a) Conceitual porque o referido conceito se complexifica no âmbito de um sistema. Isso se manifesta desde a primeira tarefa, na qual as crianças são envolvidas em apreender os modos de ação de medição das grandezas por meio das relações objetais. Nela, foi possível estabelecer um paralelo com os primórdios do desenvolvimento histórico do conceito de equação – como também de toda a base da matemática –, pois lança uma luz, ainda que tênue, para a revelação das abstrações de igualdade e desigualdade. Tais abstrações geraram, no homem, a necessidade de busca por modos de ação que expressassem se havia ou não igualdade. Essas relações – igualdade e desigualdade – ultrapassam o seu teor objetal pela sua modelação por segmentos de reta e atingem a representação, modelo, na forma literal do tipo A = B, A > B (o que implica B < A) ou A < B (então, B > A).

Depois de desenvolver um conjunto dessas tarefas particulares, as crianças, após descobrirem a grandeza com propriedade dos parâmetros físicos dos objetos materiais, superam-nas por incorporação das relações possíveis entre as grandezas e suas determinações quantitativas. Isso caracteriza o trânsito para as principais relações matemáticas, entre as quais as de equação do primeiro grau. Isso só é possível, segundo Davídov (1988), pelo contato dos estudantes proporcionado pelas tarefas particulares com as diferentes grandezas. Por consequência, apropriam-se dos diferentes modos de ação de medição delas, que os levam à produção dos diferentes modelos (gráficos e literais), tendo por base a medição das grandezas (comprimento, área, volume e massa). Essas relações e seus modelos trazem explícita e implicitamente o conceito de equação, uma vez que emerge a ideia da igualdade, apesar de ocorrerem transformações internas. É no âmbito desse movimento, conforme Davídov (1988), que os estudantes reestruturam o desenvolvimento do pensamento teórico e as consequentes ações mentais. Em termos conceituais, elas traduzem o movimento histórico-lógico do conceito de equação, agora, no âmbito do conceito teórico de número como manifestação da relação entre grandezas. Tal relação tem a expressão de multiplicidade e divisibilidade entre duas grandezas, cujo modelo literal e suas respectivas transformações são: $\frac{A}{E} = n$, $A = nE$ e $\frac{A}{n} = E$ (com A, a grandeza a medir; E, a grandeza de mesma espécie de A caracterizada como a unidade; n, o resultado da medição, isto é, o número de vez que E cabe em A).

O movimento proporcionado pelas tarefas particulares atinge outro patamar de complexidade conceitual teórica ao se revelar a relação essencial de adição e subtração – todo-partes – pelo modelo $c = b + a$ e suas transformações: $c - a = b$ e $c - b = a$ (sendo c o todo, a e b as partes). Isso significa, conforme Galperin, Zaporózhets e Elkonin (1987), que os estudantes que se inserem no modo davydoviano de organização do ensino no contexto da atividade de estudo, conseguem modelar. Por decorrência, eles são introduzidos no objeto da matemática, que permite a transformação das estruturas das relações. Também elucida movimentos mútuos entre igualdade e desigualdade que, ao atingir o nível dos conceitos de adição e subtração, tal transformação se constitui apenas operações de mudança das estruturas de relações. É aqui que a equação do primeiro grau encontra uma relação que direciona o seu modo de ação – a relação todo-partes – para a sua resolução.

Nesse estágio de apropriação, as tarefas produzem um movimento de pensamento – em relação à solução de uma equação do primeiro grau – que transita do geral para o particular, permeado por singularidades. Suas características centrais são: 1) uma igualdade genérica, como a base de análise; 2) as letras como representantes de um ou mais valor; 3) identificação e a distinção do todo e das partes; 4) determinação do valor que representa a solução da equação. Todo aparato conceitual está fortemente vinculado à resolução de problemas, tanto contextualizado quanto puramente internalista à matemática.

No processo, a complexificação conceitual se caracteriza pela inclusão das propriedades da multiplicação e divisão na relação essencial todo-partes. Desse modo, à resolução de uma equação do primeiro grau é incorporada outra relação geral traduzida pelo modelo multiplicativo e suas transformações: $b = p.m$, $\frac{b}{m} = p$, $\frac{b}{p} = m$ (b é quantidade total de unidades de medida, p a unidade intermediária e m a quantidade de repetição da unidade intermediária).

Com isso, a solução da equação passa a se fundamentar em conexão com a relação essencial singular da multiplicação e divisão, que, por sua vez, está inter-relacionada a dois tipos de unidades de medida: a básica e a intermediária. Isso significa que não perde o seu alicerce na relação entre grandezas, bem como no conceito teórico de número. Uma característica nesse estágio de desenvolvimento do pensamento conceitual – pertinente ao modo geral de resolver a equação do primeiro grau – é que o componente todo-parte (aditiva/subtrativa) que o movimenta incorpora a multiplicação e a divisão. Ou seja, o todo é o produto e as partes o multiplicando. Por consequência, se a busca é pelo todo, a operação necessária é a multiplicação; caso o que se procura é uma das partes, então a divisão é a operação indicada.

A partir desse estágio, as complexificações conceituais, no modo de ação de resolução de uma equação, dizem respeito ao acréscimo de números de termos e às singularidades numéricas dos coeficientes e dos termos independentes. Em relação a estes últimos, eles também passam a ser números racionais.

Há, pois, um entrelaçamento das complexas relações e transformações que constituem a especificidade das ideias do conceito teórico da equação do primeiro grau e do seu modo geral de resolução. Em momentos diversos, ocorre o agrupamento de outra relação conceitual. Isso, parafraseando Galperin, Zaporózhets e Elkonin (1987), atende ao pressuposto de que, desde as primeiras tarefas – propostas aos estudantes no primeiro ano escolar –, forma a correta base orientadora das ações dos estudantes no campo da realidade matemática referente à equação do primeiro grau. O pensamento conceitual se arma em um curso sistemático da álgebra como ciência que repousa sobre as estruturas matemáticas fundamentais, dentro das quais ocorrem transformações e relações funcionais. É nesse domínio que as operações aritméticas, tanto de números inteiros como fracionários, surgem como caso particular e concreto das referidas estruturas matemáticas gerais.

Com o passar dos anos escolares, muda as singularidades numéricas (natural, fracionário, negativo) dos coeficientes e a quantidade de termos. No entanto, a base de resolução das equações é a mesma. Consequentemente, o conceito de incógnita se apresenta com o significado de forma dependente do singular campo numérico.

As considerações expostas até o momento parecem ser subsidiadoras de uma síntese que responda à questão: Afinal, o que é uma equação do primeiro grau? Talvez, ainda não consigamos expressar em sua abrangência máxima, mas recorreremos ao movimento desenhado pela nossa pesquisa, com base em um modo de organização do ensino do sistema Elkonin-Davidov. Para tanto, expressaremos por meio do modelo algébrico, isto é, a máxima complexificação atingida no sexto ano, em sua forma simplificada: $ax + b = cx + d$ ou, $ax + bx + \cdots + cx = \alpha$ (como anuncia Ríbnikov (1987) ao se referir às operações “montão” contidas no papiro de Rhind), em que os coeficientes das incógnitas a, b, c, d e o termo independente α assumem valores na particularidade do campo dos números reais, mas expressos em sua singularidade no campo dos racionais (inteiros e fracionários).

A origem desse modelo está no primeiro ano escolar, com o modelo da relação geral entre grandezas do conceito de número: $\frac{A}{E} = n$. Ele é referência para atingir a sustentação de que a relação todo-partes é a base das operações de adição e subtração ($x = a + b; a = b - x,\ b = x - a$). Isso leva à definição de Caraça (2003) de que $ax + b = 0$, que, com sua resolução, chega ao modelo similar ao da relação geral de número $x = \frac{b}{a}$, ou seja, confirma que o valor da incógnita é um número. O movimento regressivo exposto (do modelo geral que se atinge no sexto ano à definição de Caraça, que leva a incógnita ao modelo de número) mostra que, nesse interim, coloca-se em movimento a particularidade equação do primeiro grau no contexto universal das relações entre grandezas e permite-se as transformações dos seus coeficientes e da solução no campo das singularidades numéricas: de natural para inteiro, desta para os racionais. Todo esse aparato conceitual nos leva a refletir que, para atingir outros níveis de máxima complexificação, ainda aparecerão condições pedagógicas para que surjam soluções, coeficientes e termos independentes da equação em outros campos numéricos. Por exemplo, ainda não se apresentaram os números irracionais. Portanto, está em processo a emergência de uma necessidade para a continuidade da pesquisa.

b) *Pedagógico* porque todo esse processo de apropriação conceitual só acontece em um contexto de organização de ensino, marcadamente pela definição: de uma *tarefa de estudo*, que proclama por *ações de estudo*, as quais, para a execução de cada uma delas, carecem de elaboração e desenvolvimento de *tarefas particulares*. Estas, constituíram-se referência de análise na presente pesquisa.

Não se pode perder de vista, também, que as referências de análise da pesquisa foram elaboradas em um sistema de ensino de perspectiva desenvolvimental, emergente de um rigoroso processo de sistematização com bases científicas que articulou: dados experimentais, fundamentos teóricos, compromisso social definido e teorização da própria atividade de estudo. Foi nesse processo que Davidov liderou um grupo empenhado – orientados pela fidelidade às bases teóricas materialista, histórica e dialética da atividade e da psicologia pedagógica – em construir um modo de organizar o ensino de Matemática que coloca os estudantes em processo de aprendizagem, promotor do desenvolvimento em atividade de estudo.

O apego às bases teóricas – cuja orientação está em suas inúmeras produções individual e em coautoria, por exemplo, Davídov (1988) – e também a coerência em relação a elas são o grande argumento para justificar a afirmação referente à impossibilidade de isolamento do conceito de equação em sua máxima abrangência. O pressuposto do materialismo histórico e dialético de que a prática social é que coloca em movimento – marcadamente por contradições – o homem para o desenvolvimento de modos de pensamento, necessariamente, diz que as ações humanas externas e internas não se elaboram nem se objetivam isoladamente.

Ainda, recorremos à Psicologia Histórico-Cultural, com seu pressuposto de que, no processo de formação e apropriação conceitual – e aqui interessa o conceito científico – não há como trazer o conceito de equação do primeiro grau sem a inter-relação com uma série de outros conceitos, ou seja, em um sistema conceitual (VIGOSTSKI, 2001). Também encontramos argumento na Psicologia Pedagógica, em sua afirmação máxima: a aprendizagem, ao ser considerada a base para o desenvolvimento humano, requer um ensino organizado de modo tal, que promova a formação, nos estudantes, das máximas capacidades elaboradas em toda a história da humanidade.

Por consequência desse aparato de compreensão teórica, Davidov e demais pesquisadores de seu grupo, com acréscimo de estudos em teóricos da Matemática – Aleksandrov, por exemplo –, estabelecem que as relações entre as grandezas se constituem a base do conceito teórico de número e, por extensão, dos demais conceitos.

É esse entendimento que torna possível reafirmarmos que o conceito teórico de equação do primeiro grau está envolto em um sistema de conceitos matemáticos, ou seja, não está amparado em uma linha reta de movimento e desenvolvimento lógico e histórico. Por isso, podemos dizer, no âmbito de delimitação da pesquisa, que, no modo davydoviano de organização de ensino, o referido conceito se manifesta desde o primeiro ano escolar. As crianças são colocadas frente a frente com tarefas particulares, com a pretensão de que se apropriem e revelem as propriedades da realidade conceitual. O estudo constitui o conteúdo de cada especificidade concreta do conhecimento, isto é, de formação da base orientadora das ações que, no caso aqui específico, objetiva-se em um modo geral de resolução da equação do primeiro grau. É nessa complexificação conceitual que nos apoiamos em Rosa (2012) para reafirmar que o sistema de ensino desenvolvido pela liderança de Davidov leva em consideração a não tricotomização das significações aritméticas, algébricas e geométricas.

Em Matemática, essa apropriação necessária – base orientadora de ação –, diz respeito às grandezas e suas relações, ou seja, ao conceito teórico de número. A partir dela, as tarefas particulares imprimem um movimento na realidade do conceito de equação do primeiro grau. De acordo com Silva (2018), no primeiro ano, há uma preparação para o desenvolvimento do conceito por meio de tarefas envolvendo a comparação entre grandezas, que proporcionam a assimilação dos conceitos de igualdade, desigualdade e valor desconhecido. No segundo, aos alunos são apresentados a definição de equação e o procedimento de resolução, com tarefas envolvendo diferentes grandezas, bem como maior evidência da integração entre álgebra, aritmética e geometria. Os estudantes explicam o modo de ação utilizado na resolução das tarefas. No terceiro ano, são comuns tarefas com tabelas. A resolução de equações requer mais detalhes e sistematização. No quarto ano, as tarefas exigem dos estudantes que determinem tanto o valor desconhecido quanto comparar e relacionar grandezas. E, em nossa pesquisa, evidenciamos a expansão até o sexto ano.

O dito até o momento nos respalda para dizer que, de certo modo, perseguimos o nosso primeiro objetivo específico de estudar as categorias do sistema didático Elkonin-Davidov, fundamentadas no ensino desenvolvimental. Isso se traduziu no segundo e quarto capítulos. Também pensamos que demos conta – mesmo com as limitações apontadas – de nos envolvermos no segundo objetivo específico: destacar e analisar um conjunto de tarefas particulares dos livros didáticos e de orientação ao professor que retratam a organização do ensino de equação do primeiro grau na perspectiva desenvolvimental.

Ao finalizarmos as considerações do presente estudo, manifestamos o sentimento de incompletude e da necessidade de busca constante pela superação. Contudo, consideramos que um primeiro passo foi dado em busca da reflexão referente aos vários questionamentos apontados durante nossa investigação e exposição. Mas sabemos também que todas aquelas perguntas, cujas respostas ainda não encontramos, colocam-nos em movimento para o desenvolvimento de novos estudos.

REFERÊNCIAS

ALEKSANDROV, A. D. Visión General de la Matemática. *In*: ALEKSANDROV, A. D. *et al*. **La Matemática:** su contenido, métodos y significado. 1. ed. 2. reimpresión. Madrid: Alianza Universidad, 1988, p. 17-91.

ALEKSANDROV, A. D. Visión general de la matemática. *In*: ALEKSANDROV, A. D. *et al*. **La matemática:** su contenido, métodos y significado. Madrid: Alianza, 1991, p. 17-89.

ALVES, B. A. S. **A Álgebra na Perspectiva Histórico-Cultural:** Uma Proposta de Ensino para o Conceito de Equação do Primeiro Grau. 2016. 160 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2016.

ALVES, E. S. B. **O modo davydoviano de organização do ensino para o sistema conceitual de adição e subtração.** 2017. 202 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2017.

BAUMGART, J. K. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula:** álgebra. Trad. de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

BERNARD, J. E.; COHEN, M. P. Uma integração dos métodos de resolução de equações numa sequência evolutiva de aprendizado. *In*: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1994, p. 111-126.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Bencher Ltda, 2001.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Comum Curricular**: Educação é a Base. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2017. Disponível em:

BÚRIGO, L. S. M. **Necessidades Emergentes na Organização do Ensino Davydoviano para o Número Negativo.** 2015. 153 f.

Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2015.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 1. ed. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 5. ed. Lisboa: Gráfica Manuel Barbosa & Filhos, 2003.

COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As Ideias da Álgebra.** 1. ed. São Paulo: Atual, 1995.

CRESTANI, S. **Organização do Ensino de Matemática na Perspectiva do Desenvolvimento do Pensamento Teórico:** uma reflexão a partir do conceito de divisão. 2016. 126 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2016.

CUNHA, A. L. A. **Conteúdos e Metodologias no Ensino de Matemáticas nos Anos Iniciais do Processo de Escolarização no Brasil e na Rússia.** 2019. 304 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia, 2019.

DAMAZIO, A. A prática docente do professor de matemática: marcas das concepções do livro didático. *In*: **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 1.2, p.14-25, 2006.

DAMAZIO, A.; ROSA, J. E. Educação matemática: possibilidades de uma tendência histórico-cultural. *In*: **Revista Espaço Pedagógico**, Passo Fundo, v. 20, p. 33-53, jan. 2013. Disponível em: http://seer.upf.br/index.php/rep/article/view/3506/2291. Acesso em: 20 out. 2019.

DAVIDOV, V. V. Atividade de estudo e aprendizagem desenvolvimental. *In*: AMORIM, P. A. P.; CARDOSO, C. G. C.; PUENTES, R. V. (Orgs.). **Teoria da atividade de estudo:** contribuições de D. B. Elkonin, V. V. Davidov e V. V. Repkin – Livro I. Curitiba, PR: CRV; Uberlândia, MG: EDUFU, 2019, p. 249-266.

DAVÍDOV, V. V. **La enseñanza escolar y el desarrollo psiquico**. Moscou: Progresso, 1988.

DAVIDOV, V. V. O conteúdo e estrutura da atividade de estudo. *In*: AMORIM, P. A. P.; CARDOSO, C. G. C.; PUENTES, R. V. (Orgs.). **Teoria da atividade de estudo:** contribuições de D. B. Elkonin, V. V. Davidov e V. V. Repkin – Livro I. Curitiba, PR: CRV; Uberlândia, MG: EDUFU, 2019, p. 215-233.

DAVIDOV, V. V. Os problemas psicológicos do processo de aprendizagem dos estudantes. *In*: AMORIM, P. A. P.; CARDOSO, C. G. C.; PUENTES, R. V. (Orgs.). **Teoria da atividade de estudo:** contribuições de D. B. Elkonin, V. V. Davidov e V. V. Repkin – Livro I. Curitiba, PR: CRV; Uberlândia, MG: EDUFU, 2019.

DAVIDOV, V. V. Problemas de pesquisa da Atividade de Estudo. *In*: DAVIDOV, V. V. **Teoria da aprendizagem desenvolvimental**. Moscou: Educação, 1996.

DAVIDOV, V. V. Uma nova abordagem para a interpretação da estrutura e do conteúdo da atividade. *In*: HEDEGARD, M.; JENSEN, U. J. **Activity theory and social pratice:** cultural-historical approvaches. Tradução de José Carlos Libâneo. Aarhus-Dinamarca: Aarhus Universety Press, 1999.

DAVÍDOV, V. V.; SLOBÓDCHIKOV, V. I. La enseñanza que desarrolla en la escuela del desarrollo. *In*: LA EDUCACIÓN y la enseñanza: una mirada al futuro. Moscú: Editorial Progreso, 1991, p. 118-144.

DAVÍDOV, V.; MÁRKOVA, A. La concepción de la actividad de estudio de los escolares. *In*: SHUARE, M. (Org.). **La Psicología Evolutiva y Pedagógica e la URSS**: Antología. Moscú: Editorial Progreso, 1987, p. 316-337.

DAVYDOV, V. V. Análise dos princípios didáticos da escola tradicional e dos possíveis princípios do ensino em um futuro próximo. *In*: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (Orgs.). **Ensino desenvolvimental:** Antologia – Livro 1. Tradução de Josélia Euzébio da Rosa e Ademir Damazio. Uberlândia, 2017, p. 211-223.

DAVYDOV, V. V. Logical and psychological problems of elementary mathematics as an academic subject. *In:* STEFFE, L. P. (Ed.). **Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics:**

Children's capacity for learning mathematics. Vol. 7. United States of America: University of Chicago: 1975, p. 55-107.

DAVYDOV, V. V. Tipos de generalización en la enseñanza. 3. ed. Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1982. 485 p.

DEMANA, F.; LEITZEL, J. Estabelecendo conceitos fundamentais através da resolução de problemas aritméticos. *In*: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1994, p. 70-78.

DORIGON, J. C. G. **Proposições de Davydov para introdução ao conceito de equação.** 2013. 92 f. Monografia (Pós-Graduação em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2013.

DORIGON, J. C. G.; DAMAZIO, A.; ROSA, J. E. Proposição de Davýdov e colaboradores para introdução ao ensino do conceito de equação. *In*: **Revista Iberoamericana de Educacion Matemática-UNIÓN**, Madri, v. 45, p. 76-95, mar. 2016. Disponível em: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2016/45/45_articulo04.pdf. Acesso em: 08 ago. 2020.

DUSAVITSKII, A. K. Educação Desenvolvente e a Sociedade Aberta. *In*: **Ensino em Re-Vista**, Uberlândia, v. 21, p. 77-84, jan./jul. 2014. Disponível em: http://www.seer.ufu.br/index.php/emrevista/article/view/25053/13890. Acesso em: 24 maio 2021.

ELKONIN, D. B. Atividade de Estudo: sua estrutura e formação. *In*: AMORIM, P. A. P.; CARDOSO, C. G. C.; PUENTES, R. V. (Orgs.). **Teoria da atividade de estudo:** contribuições de D. B. Elkonin, V. V. Davidov e V. V. Repkin – Livro I. Curitiba, PR: CRV; Uberlândia, MG: EDUFU, 2019, p. 159-168.

ELKONIN, D. B. Estrutura da atividade de estudo. *In*: AMORIM, P. A. P.; CARDOSO, C. G. C.; PUENTES, R. V. (Orgs.). **Teoria da atividade de estudo:** contribuições de D. B. Elkonin, V. V. Davidov e V. V. Repkin – Livro I. Curitiba, PR: CRV; Uberlândia, MG: EDUFU, 2019, p. 149-158.

ELKONIN, D. B. Questões psicológicas relativas à formação da atividade de estudo. *In*: AMORIM, P. A. P.; CARDOSO, C. G. C.; PUENTES, R. V. (Orgs.). **Teoria da atividade de estudo:** contribuições de D. B. Elkonin, V. V. Davidov e V. V. Repkin – Livro I. Curitiba, PR: CRV; Uberlândia, MG: EDUFU, 2019, p. 141-143.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil. *In*: **Revista Zetetiké**, ano 3, n. 4, p. 1-38, 1995.

FRANCO, P. L. J.; LONGAREZI, A. M. A. N. Leontiev: a vida e obra do psicólogo da atividade. *In*: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. **Ensino desenvolvimental:** vida, pensamento e obra dos principais representantes russos – Livro 1. 3. ed. Uberlândia, 2017, p. 81-123.

FREITAS, D. **O Movimento do Pensamento Expresso nas Tarefas Particulares Proposta por Davydov e Colaboradores para a Apropriação do Sistema Conceitual de Fração.** 2016. 167 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2016.

GALPERIN, P.; ZAPORÓZHETS, A.; ELKONIN, D. Los problemas de la formación de conocimientos y capacidades en los escolares y los nuevos métodos de enseñanza en la escuela. *In*: SHUARE, M. (Comp.). **La psicologia evolutiva y pedagógica en la URSS.** Moscú: Progreso, 1987, p. 300-315.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GUELLI, O. **Contando a História da Matemática.** Equação: o idioma da Álgebra. São Paulo: Editora Ática, 1992.

http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 19 nov. 2019.

KIERAN, C. Duas abordagens diferentes entre os principiantes em álgebra. *In*: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1994, p. 104-110.

KOPNIN, P. V. A. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento.** Rio de Janeiro: Editora Civilização Brasileira, 1978.

LEE, J. E. An analysis of difficulties encountered in teaching Davydov’s mathematics curriculum to students in a U.S. setting and measures found to be effective in addressing them. 2002. Dissertation (Doctor of Education in Educational Theory and Practice) – Graduate School of Binghamton University, State University of New York, 2002.

LEFEBVRE, H. **Lógica formal/lógica dialética**. Tradução de Carlos Nelson Coutinho. 6. ed. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1995. 301 p.

LEONTIEV, A. N. **O desenvolvimento do psiquismo**. São Paulo: Moraes, 1978.

LEONTIEV, A. N. Uma contribuição ao desenvolvimento da psique infantil. *In*: LEONTIEV, A. N.; LURIA, A. R.; VIGOTSKI, L. S. **Linguagem, Desenvolvimento e Aprendizagem.** Tradução de Maria da Pena Villalobos. 16. ed. São Paulo: Ícone, 2018, p. 85-102.

LIBÂNEO, J. C. A aprendizagem escolar e a formação de professores na perspectiva da psicologia histórico-cultural e da teoria da atividade. *In*: **Revista Educar**, Curitiba, n. 24, p. 113-147, 2004. Disponível em: https://www.scielo.br/j/er/a/hd8NXbRPrMqkY6JLMW3frDP/?lang=pt &format=pdf. Acesso em: 24 maio 2021.

LIBÂNEO, J. C. A didática e a aprendizagem do pensar e do aprender: a Teoria Histórico-Cultural da Atividade e a Contribuição de Vasili Davydov. *In*: **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 10, p. 205-229, jan./abr. 2010. Disponível em: file:///C:/Users/User/Downloads/3094-5083-1-SM.pdf. Acesso em: 10 jul. 2020.

LIBÂNEO, J. C.; FREITAS, R. A. M. M. Vasily Vasilyevich Davydov: a escola e a formação do pensamento teórico-científico. *In*: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (Orgs.). **Ensino desenvolvimental:** vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. Vol. 1. 1 ed. Uberlândia: Editora UFU, 2015, p. 315-350.

LOCHHEAD, J.; MESTRE, J. P. Das palavras à álgebra: corrigindo concepções erradas. *In*: COXFORD, F. A.; SHULTE, A. P. **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1994, p. 144-154.

LONGAREZI, A. Prefácio. *In*: AMORIM, P. A. P.; CARDOSO, C. G.

C.; PUENTES, R. V. (Orgs.). **Teoria da atividade de estudo:** contribuições de D. B. Elkonin, V. V. Davidov e V. V. Repkin – Livro I. Curitiba, PR: CRV; Uberlândia, MG: EDUFU, 2019, p. 19-28.

MOURA, M. O. *et al*. Atividade Orientadora de Ensino: unidade entre ensino e aprendizagem. *In*: **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 10, p. 205-229, jan./abr. 2010. Disponível em: file:///C:/Users/User/Downloads/3094-5083-1-SM.pdf. Acesso em: 10 jul. 2020.

NASCIMENTO, R.; PRESTES, Z.; TUNES, E. Lev Semionovitch Vigotski: um estudo da vida e da obra do criador da psicologia histórico-cultural. *In*: LONGAREZI, A. M; PUENTES, R. V. (Orgs.). **Ensino Desenvolvimental:** vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. Vol. 1. 1 ed. Uberlândia: Editora UFU, 2015, p. 59-79.

OTTE, M. **O formal, o social e o subjetivo.** São Paulo: Editora UNESP, 1993.

PANOSSIAN, M. L. **O Movimento Histórico e Lógico dos Conceitos Algébricos como Princípio para Constituição do Objeto de Ensino da Álgebra.** 2014. 317 f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no Ensino Básico**. Lisboa: Ministério da Educação e Cultura, Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular-DGIDC, 2009.

POST, T. R.; BEHER, M. J.; LESH, R. A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções pré-álgebra. *In*: COXFORD, F. A.; SHULTE, A. P. **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1994, p. 89-103.

PUENTES, R. V. Didática desenvolvimental da atividade: o sistema Elkonin-Davidov (1958-2015). *In*: **Revista Obutchénie**, Uberlândia, v. 1, p. 20-58, jan./abr. 2017. Disponível em: http://www.seer.ufu.br/index.php/Obutchenie/article/view/38113/2156. Acesso em: 10 jul. 2020.

PUENTES, R. V. Didática desenvolvimental da atividade: o sistema Elkonin-Davidov-Repkin no contexto da didática desenvolvimental da atividade (1958-2015). *In*: AMORIM, P. A. P.; CARDOSO, C. G. C.; PUENTES, R. V. (Orgs.). **Teoria da atividade de estudo:** contribuições de D. B. Elkonin, V. V. Davidov e V. V. Repkin – Livro I. Curitiba, PR: CRV; Uberlândia, MG: EDUFU, 2019a, p. 55-81.

PUENTES, R. V. **Ensino desenvolvimental:** vida, pensamento e obra dos principais representantes russos – Livro 1. 3. ed. Uberlândia, 2017, p. 59-79.

PUENTES, R. V. Uma nova abordagem da teoria da aprendizagem desenvolvimental. *In*: AMORIM, P. A. P.; CARDOSO, C. G. C.; PUENTES, R. V. (Orgs.). **Teoria da atividade de estudo:** contribuições de D. B. Elkonin, V. V. Davidov e V. V. Repkin – Livro I. Curitiba, PR: CRV; Uberlândia, MG: EDUFU, 2019b, p. 31-53.

PUENTES, R. V. Teoria da Atividade de Estudo: estado da arte das pesquisas russas e ucranianas (1958-2018). *In*: AMORIM, P. A. P.; CARDOSO, C. G. C.; PUENTES, R. V. (Orgs.). **Teoria da atividade de estudo:** contribuições de D. B. Elkonin, V. V. Davidov e V. V. Repkin – Livro I. Curitiba, PR: CRV; Uberlândia, MG: EDUFU, 2019c, p. 83-137.

REPKIN, V. V. Ensino desenvolvente e atividade de estudo. *In*: PUENTES, R. V.; MELO, S. A. (Org.). **Teoria da atividade de estudo:** livro II: contribuições de pesquisadores brasileiros e estrangeiros. Vol. 8. Uberlândia: EDUFU, 2019, p. 211-238. (Biblioteca Psicopedagógica e Didática. Série Ensino Desenvolvimental).

RÍBNIKOV, K. **Historia de las matemáticas.** Moscú: Editorial Mir, 1987.

ROBAYNA, M. M. S. **Iniciación al álgebra.** Madrid: Editorial Síntesis, S.A., 1996.

ROSA, J. E. **Proposições de Davydov para o ensino de Matemática no primeiro ano escolar:** inter-relações dos sistemas de significações numéricas. 2012. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

ROSA, J.E.; DAMAZIO, A.; CRESTANI, S. Os conceitos de divisão e multiplicação nas proposições de ensino elaboradas por Davydov e seus colaboradores. *In*: **EMP – Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 16, p.167-187, 2014.

RUBINSTEIN, S. L. **Princípios de Psicologia Geral**. Lisboa: Estampa, 1977.

RUBTSOV, V. A atividade de aprendizado e os problemas referentes à formação do pensamento teórico dos escolares. *In*: GARNIER, C. *et al*. **Após Piaget e Vygotsky**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

SANTA CATARINA. Secretaria de Estado da Educação Ciência e Tecnologia. **Proposta curricular de Santa Catarina**: formação integral na educação básica. Florianópolis: SEECT, 2014.

SCHMITTAU, J. The development of algebraic thinking: a Vygotskian perspective. **Zentralblatt Fuer Didaktik Der Mathematik International Review of Mathematics Education**, [*s.l.*], v. 37, n. 1, p. 16-22, 2005. Disponível em: http://www.emis.de/journals/ZDM/zdm051i.html. Acesso em: 23 set. 2020.

SCHMITTAU, J.; MORRIS, A. **The development of algebra in Davydov's elementary curriculum, the mathematics educator**. 2004. Disponível em: math.nie.edu.sg/ame/matheduc/tme/tmeV8_1/Schmittau.pdf. Acesso em: 23 set. 2020.

SERCONEK, G. C. **Teoria do Ensino Desenvolvimental e Aprendizagem:** um experimento com conceitos de área e de perímetro. 2018. 191 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2018.

SILVA, C. M. S. Equações nos Primeiros Anos do Ensino Fundamental em Livros Didáticos Russos. *In*: **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, PR, v. 7, n. 13, p. 226-251, jan.-jun. 2018.

SOUZA, M. C.; PANOSSIAN, M. L.; CEDRO, W. L. **Do Movimento Histórico Lógico à Organização do Ensino:** o percurso dos conceitos algébricos. Campinas, SP: Mercado das Letras, 2014.

VIGOTSKI, L. S. Aprendizagem e desenvolvimento intelectual na idade escolar. *In*: LEONTIEV, A. N.; LURIA, A. R.; VIGOTSKI, L. S. **Linguagem, Desenvolvimento e Aprendizagem.** Tradução de Maria da Pena Villalobos. 16. ed. São Paulo: Ícone, 2018, p. 103-117.

VIGOTSKI, L. S. **A Construção do Pensamento e da Linguagem**. Tradução de Paulo Bezerra. 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2009.

VYGOTSKI, L. S. **Obras escogidas II:** incluye pensamento y lenguaje, conferecias sobre psicología. Madrid: Visor Distribuciones, 1993.

VYGOTSKI, L. S. **Obras escogidas.** Vol. 4. Madrid: Visor, 1996.

ГОРБОВ С. Ф. *et al*. **математике.** 5 класс. М.:МОСКВА 2015. 108 p.

ГОРБОВ С. Ф. *et al.* **математике.** 6 класс. М.:МОСКВА 2016. 80 p.

ГОРБОВ С. Ф.; I Г. Г. *et al*. [GORBOV, S.F.; MIKULINA, G.G. *et al*.] **Matemática.** Livro didático para os estudantes da primeira série. Sistema D. B. Elkonin-V.V. Davidov. 13. ed. НИТА-ПРЕСС, 2001.

ГОРБОВ С. Ф.; МИКУЛИНА Г. Г. **Обучение математике.** 3 класс: Пособие для учителей начальной школы (Система Д.Б. Эльконина – В.В. Давыдова). М.:ВИТА-ПРЕССб 2008. 128 p.

ГОРБОВ С. Ф.; МИКУЛИНА Г. Г. **Обучение математике.** 4 класс: Пособие для учителей начальной школы (Система Д.Б. Эльконина – В.В. Давыдова). М.:ВИТА-ПРЕССб 2004. 176 p.

ГОРБОВ С. Ф.; МИКУЛИНА Г. Г.; САВЕЛЬЕВА О. В. **Обучение математике.** 1 класс: Пособие для учителей начальной школы (Система Д.Б. Эльконина – В.В. Давыдова). 2-е ида, перераб. М.:ВИТА-ПРЕССб 2008. 128 p.

ГОРБОВ С. Ф.; МИКУЛИНА Г. Г.; САВЕЛЬЕВА О. В. **Обучение математике.** 2 класс: Пособие для учителей начальной школы (Система Д.Б. Эльконина – В.В. Давыдова). 3-е ида, перераб. - М.:ВИТА-ПРЕССб 2009. 112 p.

ДАВЫДОВ В. В.; ГОРБОВ С. Ф.; МИКУЛИНА Г. Г. **математике.** 4 класс. М.:ВИТА-ПРЕССб 2011. 144 p.

ДАВЫДОВ В.В.; ГОРБОВ С. Ф.; МИКУЛИНА Г. Г.; САВЕЛЬЕВА О. В. **математике.** 2 класс. М.:ВИТА-ПРЕССб 2012. 112p.

ДАВЫДОВ В.В.; ГОРБОВ С. Ф.; МИКУЛИНА Г. Г.; САВЕЛЬЕВА О. В. **математике.** 3 класс. М.:ВИТА-ПРЕССб 2009. 112 p.