UNIVERSIDADE DO EXTREMO SUL CATARINENSE – UNESC
UNIDADE ACADÊMICA DE HUMANIDADES, CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO – UNAHCE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO – PPGE
MESTRADO EM EDUCAÇÃO

ESTER DE SOUZA BITENCOURT ALVES

“O MODO DAVYDOVIANO DE ORGANIZAÇÃO DO ENSINO PARA O SISTEMA CONCEITUAL DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO”

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade do Extremo Sul Catarinense como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação.

Orientador: Prof. Dr. Ademir Damazio

CRICIÚMA, 2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

A474m Alves, Ester de Souza Bitencourt.
"O modo davydoviano de organização do ensino para o sistema conceitual de adição e subtração" / Ester de Souza Bitencourt Alves ; orientador : Ademir Damázio. – Criciúma, SC : Ed. do Autor, 2017.
202 p. : il. ; 21 cm.

Dissertação (Mestrado) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Programa de Pós-Graduação em Educação, Criciúma, 2017.

1. Proposição davydoviana. 2. Sistema conceitual. 3. Adição. 4. Subtração. 5. Relação todo-partes. I. Título.

CDD. 22. ed. 513.21

Bibliotecária Eliziane de Lucca Alosilla – CRB 14/1101
Biblioteca Central Prof. Eurico Back - UNESC

ESTER DE SOUZA BITENCOURT ALVES

“O MODO DAVYDOVIANO DE ORGANIZAÇÃO DO ENSINO PARA O SISTEMA CONCEITUAL DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO”

Esta dissertação foi julgada e aprovada para obtenção do Grau de Mestre em Educação no Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade do Extremo Sul Catarinense.

Criciúma, 20 de fevereiro de 2017.

BANCA EXAMINADORA

Maria Lucia Panossian

Prof. Dr. Ademir Damazio
(Orientador - UNESC)

Profa. Dra. Maria Lucia Panossian
(Membro – UTFPR)

Josélia E. da Rosa

Profa. Dra. Josélia Euzébio da Rosa
(Membro – UNISUL)

Prof. Dr. Vidalcir Ortigara
(Suplente – UNESC)

Prof. Dr. Vidalcir Ortigara
Coordenador do PPGE-UNESC

Ester de Souza Bitencourt Alves
Mestranda

Para Robson, prof. Ademir
e prof.ª Josélia

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que estiveram, de forma direta ou indireta, presentes durante este momento difícil, mas extremamente importante em minha vida: a concretização do presente trabalho.

Ao Prof. Dr. Ademir Damazio, por sua profunda dedicação, comprometimento e ética. Somente palavras não expressam o carinho e respeito que sinto pelo senhor, como profissional e, principalmente, como ser humano. Muito obrigada!

Aos integrantes do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: uma Abordagem Histórico-Cultural, em especial Bruno, Cris, Mila e Sandra.

À minha amiga Day, por sua presença e contribuições significativas, principalmente nos momentos de dúvidas e angústias.

Ao Grupo de Pesquisa Teoria do Ensino Desenvolvimental na Educação Matemática.

Às professoras que participaram da banca de qualificação e de defesa, Prof.ª Dra. Josélia Euzébio da Rosa e Prof.ª Dra. Maria Lúcia Panossian, pelas profundas contribuições e reflexões teóricas.

À Prof.ª Eloir, por suas profundas contribuições durante o estágio docência, realizado na disciplina Processos Pedagógicos da Matemática no curso de Pedagogia.

Ao meu esposo, Robson, pelo apoio incondicional e companheirismo.

Aos meus pais, Luiz e Mirian, e aos meus sogros, Ademir e Antônia, bem como aos demais familiares que, de forma indireta, contribuíram para a realização deste estudo.

Aos professores e colegas (em especial, Wagner) do Programa de Pós-Graduação em Educação – PPGE/UNESC, pelas contribuições e discussões nas disciplinas cursadas.

Ao PPGE/PROPEX/UNESC, pelo apoio financeiro concedido para a realização desta pesquisa.

“O saber que não vem da experiência não é realmente saber.”

Lev Vygotsky

RESUMO

A presente pesquisa investiga o modo de organização de ensino – que tem como finalidade o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes –, com delimitação para os componentes do sistema de conceitos que envolvem adição/subtração. Direciona-se pelo seguinte problema: No modo davydoviano de organização do ensino referente ao sistema de conceito (adição e subtração) – que se volta para o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes – quais os componentes conceituais que se apresentam, permanecem e se superam no primeiro ano escolar? Por se tratar de um estudo voltado para os componentes conceituais durante o processo de apreensão do movimento conceitual – adição e subtração – no âmbito de uma organização de ensino, a pesquisa se define na modalidade bibliográfica e apresenta como fonte de análise dois livros: didático e de orientação ao professor do primeiro ano escolar, produzidos pelo grupo de pesquisadores liderados por Davýdov, psicólogo que se fundamenta na Teoria Histórico-Cultural. Por isso, tornou-se imprescindível anunciar a literatura no âmbito de uma concepção materialista histórica e dialética da própria produção teórica do referido autor, bem com algumas articulações com a literatura pertinente aos fundamentos da Matemática. Centramo-nos no movimento de permanência e de surgimento referente às características conceituais do sistema constituído pela adição e subtração. Por decorrência, o estudo revela que a proposição davydoviana se organiza por tarefas particulares, no que diz respeito ao referido sistema conceitual, que imprimem um movimento de pensamento, nos estudantes, fundamentado pela relação essencial todo-partes, no contexto do conceito teórico de número, entendido na relação entre grandezas. Nesse movimento, as tarefas dão conta de gerar necessidades de apropriações articuladas das significações algébrica, aritmética e geométrica do referido sistema conceitual. Isso ocorre pela possibilidade de a relação essencial, dada objetalmente, se transformar em diferentes tipos de representações: gestual, que passa à gráfica (segmento de retas, esquema e reta numérica), e literal (modelo e equação). Esses elementos se tornam mediadores e se apresentam no próprio enunciado das tarefas. Sendo assim, a relação essencial todo-partes é a base fundamental da vinculação da unidade conceitual adição/subtração e, por extensão, a iminência de ideias referentes à equação, meio essencial de resolução de problemas.

Palavras-chave: Educação Matemática. Proposição davydoviana. Sistema conceitual adição/subtração. Movimento de permanência e de surgimento. Relação todo-partes.

ABSTRACT

The present research investigates a way of organizing teaching – that has as purpose the development of theoretical thought of the students –, with delimitation for components of the system of concepts that involves addition/subtraction. It is directed at the following problem: In the Davydovian mode of teaching organization regarding the concept system (addition and subtraction) – which focuses on the development of students' theoretical thinking – which conceptual components present themselves, remain and are overcome in First school year? Since it is a study focused on the conceptual components during the process of apprehending the conceptual movement – addition and subtraction – within a teaching organization, the research is defined in the bibliographic modality and presents as a source of analysis two books: didactic and of orientation to the teacher of the first school year, produced by the group of researchers led by Davýdov, Psychologist who is based on the Historical-Cultural theory. For this reason, it has become essential to announce literature within a historical and dialectical materialist conception of the author's own theoretical production, as well as some articulations with the literature pertinent to the foundations of Mathematics. As a strategy of concentration in the object of study, we define the following unit of analysis: the movement of permanence and of appearance referring to the conceptual characteristics of the system constituted by addition and subtraction. As a consequence, the study reveals that the davydoviana proposition is organized by particular tasks, with respect to the said conceptual system, that impresses a movement of thought, in the students, based on the essential relation all-parts, in the context of the theoretical concept of number , Understood in the relation between greatness. In this movement, the tasks account for generating needs of articulated appropriations of the algebraic, arithmetic and geometric meanings of said system. This is due to the possibility of the essential relation given objectively, to transform into different types of representations: gestural, which becomes the graph (segment of straight lines, schema and numerical line), and literal (model and equation). These elements become mediators and present themselves in the task statement itself. Thus, the essential all-parts relation is the fundamental basis of the linkage of the conceptual unit addition/subtraction/equation/number/problem solving and its properties and derived principles, which begins with the relation of equality and inequality, which, by its instead, it generates a transformation movement in equality.

Keywords: Davydoviana proposition. Conceptual system addition/subtraction. Movement of permanence and appearance. All-parts ratio.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

GPEMAHC	Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: uma Abordagem Histórico-Cultural
PROESDE	Programa de Educação Superior para o Desenvolvimento Regional
TEDMAT	Grupo de Pesquisa Teoria do Ensino Desenvolvimental na Educação Matemática
UNESC	Universidade do Extremo Sul Catarinense

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Concluir a graduação de Licenciatura em Matemática, em seguida cursar uma pós-graduação *lato sensu* em Educação Matemática e, na sequência, ingressar no Programa de Pós-Graduação em Educação, para nós, reflete – de acordo com a Teoria Histórico-Cultural e da Atividade – o lugar social do qual fazemos parte. Acima de tudo, conforme Leontiev (2004), manifesta o envolvimento com uma atividade principal: a de ensino. Mas, qual conteúdo dessa atividade é a nossa referência? Sinceramente, às vezes, temos receio de expô-lo por incertezas que nos incomodam devido ao seu caráter novo, o que nos faz estremecer, ainda mais, nas inserções em cursos de formação continuada de professores das redes estudais e municipais. A dúvida provoca uma tendência à sua consolidação, pois até mesmo os professores mais experientes manifestam a impossibilidade desse propósito se constituir em uma finalidade para o ensino de Matemática, principalmente ao se tratar do primeiro ano escolar. Mas incertezas requerem uma decisão que, nessas circunstâncias, fica entre duas possibilidades. Uma delas, acatar a "opinião" dos docentes da educação básica que vivenciam um estágio eminentemente preliminar de informações a respeito de um modo de organização do ensino de Matemática. A outra é a continuidade do estudo, respaldado pela própria história da produção da proposta em questão, por mais de três décadas, em situação de investigação – inicialmente, em escolas experimentais e, posteriormente, respaldado pela adoção como um dos sistemas de ensino, na Rússia e em outros países – portanto, com bases científicas. Por isso, mesmo diante de todas as contrariedades, a pergunta requer uma resposta condizente ao que estabelece Davýdov (1982): o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes em atividade de estudo.

No entanto, a dificuldade se apresentou nas delimitações do objeto de estudo da presente investigação, em relação ao que tratamos na monografia do Curso de Pós-Graduação *Lato Sensu*. Afinal, nesse intervalo de tempo, nossa participação nas reuniões do GPEMAHC (Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: uma Abordagem Histórico-Cultural) nos colocaram diante, no mínimo, de três possibilidades. A primeira é dar continuidade ao estudo do ensino dos conceitos de adição e subtração no terceiro, quarto e quinto anos escolares, uma vez que na investigação anterior focamos somente no segundo ano do ensino fundamental. A segunda é fazer um estudo comparativo entre o ensino dos referidos conceitos na proposição davydoviana e aqueles propostos pelas diversas tendências da Educação

Matemática. A terceira, a que adotamos, volta-se ao primeiro ano escolar, uma vez que aumentou o anseio pela compreensão do movimento subjacente à proposta de ensino de matemática desenvolvida sob a coordenação de Davýdov e de colaboradores na relação entre o conhecimento matemático e a organização do ensino. Para tanto, foi imprescindível o estudo da filosofia materialista histórica e dialética, bem como as leituras referentes aos fundamentos da Matemática, com base em Caraça (1951), Aleksandrov (1976), Costa (1866) e Bezout (1791).

É no âmbito do modo de organização do ensino davydoviano que se delimitaram o conteúdo e o objeto de estudo desta dissertação, os quais discutem elementos revelados no movimento do pensamento para a apropriação do sistema conceitual de adição e subtração que se apresenta, permanece e se supera no primeiro ano escolar. Isso requereu a análise das tarefas constantes no livro didático a serem desenvolvidas pelas crianças e, também, no caderno de orientação aos professores, produzidos pelo grupo de investigadores liderado por Davýdov.

Para dar conta de tal intento, a pesquisa foi organizada em três capítulos. O primeiro explicita o movimento de constituição do objeto, a delimitação do problema de pesquisa e seus objetivos e expõe as questões metodológicas do processo investigativo. O segundo capítulo trata das compreensões quanto aos fundamentos pedagógicos/psicológicos referentes às peculiaridades do modo de organização do ensino davydoviano. Além disso, discute a real função da escola: o desenvolvimento do pensamento conceitual. O terceiro capítulo trata da análise das tarefas particulares referentes ao sistema conceitual de adição e subtração, que se orientam para o processo de análise voltado ao movimento revelador das intenções e essências conceituais, com ênfase para as suas permanências, superações e surgimento no âmbito da universalidade todo-partes, com base no conceito de número, na relação entre grandezas. Finalmente, tecemos as considerações finais, nas quais elaboramos algumas sínteses e reflexões propiciadas pelo estudo.

Aproveitamos este espaço para alguns esclarecimentos. Um deles é que as traduções das citações e paráfrases da língua espanhola para o português são de nossa autoria, por isso assumimos a responsabilidade. Inicialmente, pensamos em colocar o texto original em nota de rodapé, mas desistimos, pois aumentaria ainda mais o número de páginas da dissertação. Caso o leitor – estudioso dessa perspectiva teórica – encontre possíveis equívocos teóricos, ficaremos imensamente agradecidos pela explicitação quanto a eles.

Outra informação diz respeito à grafia do nome dos autores, pois mantivemos aquela constante na obra citada. Citam-se, por exemplo, Davýdov e Davídov, bem como Vigotski e Vygotski. Quando aparece Davýdov sem especificação de data, significa que é nossa referência a ele.

1 PROBLEMATIZAÇÃO E QUESTÕES METODOLÓGICAS

O presente capítulo se destina ao desenvolvimento do processo de contextualização referente à produção do objeto e do problema de estudo, bem como das orientações metodológicas.

1.1 PROBLEMATIZAÇÃO

O interesse pelo presente estudo decorreu da necessidade de continuarmos o caminho percorrido na graduação e, principalmente, na especialização. Partimos do pressuposto de que o processo de produção do conhecimento nunca se esgota, pois são atingidos níveis de complexidade que sempre o colocam em estado de devir. Naqueles momentos de nossa formação docente, deixamos em aberto uma série de questões, com vista à continuidade – que ocorreu com o curso de mestrado –, as quais foram decisivas para a constituição de motivos para este estudo. Entre tantos, o aprofundamento de temáticas para a investigação que nos traz mais inspiração – tanto de ordem teórica quanto meio de contribuição social para a educação – é o estudo do modo de organização do ensino escolar com fundamentos na Teoria Histórico-Cultural. Nesse âmbito, a opção foi pela proposta de Davýdov e de seus colaboradores para o ensino de matemática. Isso ocorre por duas razões. A primeira, pela necessidade de aprofundamento dos estudos realizados na monografia do curso de Pós-Graduação em nível *lato sensu.* A segunda, por consequência de nossa vinculação com a rede estadual de ensino de Santa Catarina, cuja Proposta Curricular, desde 1991, tem como fundamentos a Teoria Histórico-Cultural (ROSA, 2006; BRUNELLI, 2012).

Durante a graduação, Licenciatura em Matemática, estudamos alguns elementos da referida teoria. Com o ingresso no Curso de Especialização em Educação Matemática e a participação nas reuniões do GPEMAHC (Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: uma Abordagem Histórico-Cultural), tivemos a oportunidade de ter os primeiros contatos com a proposta davydoviana e com as pesquisas realizadas pelo GPEMAHC. Cabe destacar que Davýdov elaborou uma proposição para o ensino de Matemática, a qual foi publicada em coautoria com os seus colaboradores: Gorbov (Горбов), Mikulina (Микулина) e Savieliev (Савельева). Atualmente, sua proposta se constitui em um dos sistemas de ensino adotado em escolas da Rússia. Em decorrência, objetiva-se em dois tipos de livros: os didáticos

(ДАВЫДОВ et al., 2012) e os de orientações metodológicas ao professor (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Esse contato com a teoria e com os referidos livros, ainda que preliminar, aumentou o anseio por compreender o movimento subjacente à proposta de ensino de matemática desenvolvida sob a coordenação de Davýdov. Para tanto, foram imprescindíveis outras leituras referentes aos fundamentos da Matemática, com base em Caraça (1951), Aleksandrov (1976), Costa (1866) e Bezout (1791). Porém a articulação com as produções de Davýdov e de seus colaboradores foi imprescindível. Nosso movimento teve como referência de base teórica o pressuposto davydoviano de que o principal objetivo da educação escolar é o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes por meio da apropriação dos conceitos científicos.

Tal premissa nos remete à atividade do professor de matemática, cuja atuação, nos tempos atuais, não é fácil, dada a complexidade das suas diversas determinações. Dentre tantas, destacaremos uma de ordem pedagógica, oriunda do processo de formação continuada de professores, desencadeado pela Secretaria Estadual de Educação. Em seus cursos, a orientação é que o ensino dos conceitos matemáticos deve se pautar pelo uso de "material concreto", "partir da realidade do aluno", "mostrar a aplicabilidade prática do conceito matemático no cotidiano do aluno". Nossa participação nesses cursos subsidia a elaboração da suposição de que o objetivo dessas indicações metodológicas é "amenizar" os problemas da não aprendizagem dos alunos e/ou da rejeição pela disciplina de matemática. Vale elucidar que a proposição davydoviana não nega tal prática, todavia o modo como ela é desenvolvida não se volta ao desenvolvimento dos estudantes nem tampouco corrobora com os fundamentos davydovianos aos quais somos adeptos. Nesse sentido, questionamos: as orientações que são transmitidas na formação continuada dos professores são necessárias para o desenvolvimento do pensamento teórico do estudante e suficientes para a apropriação dos conceitos científicos?

Nossos anseios e questionamentos encontram respaldo em Madeira (2012), ao afirmar que

> [...] nos últimos anos, os desafios de ensinar Matemática se complexificam no cotidiano escolar, uma vez que somos inquiridos, tanto pelos órgãos administrativos quanto pelos alunos, para que explicitemos um sentido prático para cada conceito matemático. Nessa conclamação

> está muito mais a preocupação com a dinâmica da aula do que uma vontade de aprender Matemática. (MADEIRA, 2012, p. 28).

Com base em Madeira (2012), e no nosso envolvimento em cursos de formação continuada e na própria atividade de ensino, fica explícito, por parte dos órgãos administrativos e dos estudantes, a necessidade do "ensino por meio da prática". Além disso, "o ensino como meio de desenvolvimento teórico" não é incitado. Entendemos, em concordância com Davýdov (1982), que ensinar por meio da prática é importante, mas com a finalidade de proporcionar aos estudantes o conhecimento teórico, isto é, ir além das aparências externas do objeto. Segundo Rosa (2012, p. 50), na "[...] base do conhecimento empírico, encontra-se a observação, que reflete só as propriedades externas dos objetos e, por isso, se apoia totalmente nas representações visuais". Cabe destacar que Davýdov (1982) inicia o desenvolvimento dos conceitos a partir de situações objetais, todavia seu modo de organização do ensino possibilita que avance para o nível teórico. Nesse sentido, Davídov (1998, p. 59) afirma que

> O conteúdo e os métodos do ensino primário vigentes se orientam predominantemente à formação, nos escolares dos primeiros graus, das bases da consciência e do pensamento empíricos, caminho importante, mas não o mais efetivo na atualidade, para o desenvolvimento psíquico das crianças.

Do mesmo modo, Madeira (2012, p. 43), apoiada em Davýdov (1982), diz que

> Ao defender a prioridade dos conceitos científicos e o consequente desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes, expressa que o pensamento empírico, que se desenvolve por via da apropriação dos conceitos cotidianos, aparece obstaculizando o processo de elaboração do pensamento conceitual teórico.

A vivência com essa discussão sobre a preferência pela ênfase para um tipo de conhecimento em detrimento do outro foi decisiva para nossa definição do **objeto de estudo**: a manifestação de um modo de organização do ensino para um sistema de conceitos matemáticos que visa ao desenvolvimento do pensamento teórico sem a dicotomização entre a apropriação do conceito e a sua aplicação no cotidiano dos estudantes. As preocupações anunciadas anteriormente, e o nosso interesse em dar continuidade e aprofundamento aos estudos iniciados no curso de Especialização, proporcionaram subsídios para algumas delimitações do objeto de investigação. Uma delas diz respeito ao sistema conceitual, que estabelecemos como sendo constituído pelos seguintes conceitos: adição e subtração. Para tanto, nós nos respaldamos em Vigotski (2000) ao afirmarmos que um conceito está sempre vinculado a outros, constituindo um sistema conceitual.

Outra delimitação se refere à determinação de um modo de organização de ensino, com opção pela proposição de Davýdov e de seus colaboradores, o qual tem como finalidade o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes.

Nesse contexto de ordem teórica, acrescido do compromisso social, definimos o seguinte **problema de pesquisa**: No modo davydoviano de organização do ensino referente ao sistema de conceito (adição e subtração), que se volta para o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes, quais os componentes conceituais que se apresentam, permanecem e são superados no primeiro ano escolar?

Essa questão nos leva à literatura pertinente, por trazer os elementos que dão os fundamentos iniciais para o desenvolvimento do estudo, isto é, o ponto de partida e de chegada da sua análise (DORIGON; DAMAZIO; ROSA, 2016). Nessa referência, é Davídov (1988, p. 209) quem, em sua proposição, indica a base matemática a ser contemplada no ensino desenvolvimental, que se traduz ao estabelecer, para os anos iniciais de escolarização, a seguinte “tarefa de estudo”: “Introdução dos alunos na esfera das relações entre grandezas: formação do conceito abstrato de grandeza matemática”. Em nossos estudos anteriores (ROSA; DAMAZIO; ALVES, 2013), concluímos que, na proposição davydoviana, o ponto de partida para o ensino de todos os conceitos matemáticos na educação escolar básica é a relação entre grandezas. Em consequência, nós a admitidos como referência essencial para o ensino do sistema de conceito de adição e subtração. Em síntese, a relação entre grandezas é a base geral de todos os conceitos matemáticos.

Dessas apreensões, desdobra-se uma primeira questão auxiliar em relação ao problema de pesquisa:

1) Que elementos a relação entre grandezas traz para o referido sistema conceitual?

Estudos e conclusões de Rosa (2012), Madeira (2012) e Matos (2013) nos dão subsídios para uma nova questão auxiliar para o desenvolvimento do problema de pesquisa. Eles revelam que a relação todo-partes e as significações aritméticas, algébricas e geométricas são referências na constituição do referido sistema conceitual (adição e subtração). Segundo Matos (2013, p. 43), “[...] todas as tarefas davydovianas possibilitam a reflexão sobre a relação todo-partes [...]”. Do mesmo modo, Madeira (2012) conclui que é a partir do campo de número real que se desencadeiam os vários conceitos matemáticos de tal forma articulados, que contemplam as significações aritméticas, algébricas e geométricas. As investigações de Rosa (2012), Rosa, Damazio e Alves (2013) indicam que o sistema adição/subtração e seu fundamento na relação todo/parte se apresentam no interior do desenvolvimento do conceito teórico de número. Nesse âmbito, apresentamos outro questionamento auxiliar:

2) Além dessas especificidades (relação todo/partes e significações aritméticas/algébricas/geométricas) peculiares ao sistema conceitual, existe peculiaridades de cada um dos conceitos?

Davýdov tem por base a Teoria Histórico-Cultural, cujo alicerce é o materialismo histórico e dialético, com o pressuposto de que a apropriação dos conceitos científicos promove o desenvolvimento do pensamento teórico. Portanto, a finalidade da articulação entre o sistema do conceito é o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes que, segundo Davídov (1988), ocorre pelas vias dos fundamentos do materialismo histórico e dialético, ou seja, pela redução do concreto ao abstrato edo abstrato ao concreto. Nesse sentido, emerge a nossa terceira questão auxiliar:

3) O que caracteriza o teor do pensamento teórico referente a cada conceito do sistema referência do presente estudo?

Como decorrência do problema de pesquisa e das consequentes questões auxiliares, estabelecemos como **objetivo geral:** investigar o modo davydoviano de organização do ensino – que tem como finalidade o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes – e os componentes conceituais do sistema adição/subtração, os quais se apresentam, permanecem e são superados no primeiro ano escolar. E como objetivos específicos: 1) analisar os elementos novos que possibilitam a relação entre as grandezas no referido sistema conceitual; 2) estudar as peculiaridades de cada um dos conceitos constituintes do sistema em estudo; 3) investigar as características do teor do pensamento teórico referentes a cada conceito do sistema referência do presente estudo.

1.2 QUESTÕES DE ORDEM METODOLÓGICA

A proposta davydoviana tem como matriz teórica o materialismo histórico e dialético. Para sermos coerentes, o desenvolvimento de nossa pesquisa procura adotar a mesma fundamentação. Em outra oportunidade, expressamos nossa compreensão de que o materialismo histórico-dialético, como método de investigação, “[...] tem por objetivo captar e reproduzir no pensamento o movimento do real” (ALVES, 2013, p. 25). Como processo de conhecimento, a lógica dialética permite que se traduzam as relações de essência, que constituem o objeto, por meio da análise de seus aspectos sensoriais perceptíveis (KOPNIN, 1978). Em outras palavras, é a partir da análise dos aspectos sensoriais perceptíveis que se descobrem novos elementos realmente reveladores das relações de essência do objeto em análise.

Contudo há de se esclarecer que, segundo Duarte (2000, p. 84), fundamentado em Kopnin (1978):

> [...] a essência do fenômeno na sua forma mais desenvolvida não se apresenta ao investigador de forma imediata, mas sim de maneira mediatizada, e essa mediação é realizada pelo processo de análise, o qual trabalha com abstrações. Trata-se do método dialético de apropriação do concreto pelo pensamento científico através da mediação do abstrato. A análise seria um momento do processo de conhecimento, necessário à compreensão da realidade investigada em seu todo concreto.

Portanto, o alcance da essência do objeto requer um processo de análise mediada pelas abstrações, em que o real conhecimento supera a aparência. Esta permite apenas a apreensão das características externas do objeto de investigação, o que cria dificuldades para entendê-lo em sua essência, em unidade. Assim, a “[...] essência da abstração não consiste apenas em separar, isolar uns dos outros os indícios sensorialmente perceptíveis [...]” (KOPNIN, 1978, p. 160). Em síntese, “[...] o pensamento deve refletir o objeto com todas as suas contradições internas [...]” (KOPNIN, 1978, p. 182).

Vale esclarecer que a Teoria Histórico-Cultural tem como matriz o materialismo histórico e dialético. Isso significa dizer que somente por meio da apropriação dos conceitos científicos é que ocorre o desenvolvimento do pensamento teórico. Portanto, a finalidade da articulação entre o sistema do conceito é o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes. Para Davýdov (1982), tal pensamento só é atingido pelos movimentos de redução do concreto caótico à abstração e de ascensão do abstrato ao concreto. Esse movimento de superação, no pensamento, tem como referência as abstrações, ou seja:

> [...] o pensamento abstrato, por um lado, está mais distanciado do objeto estudado, pois está a ele vinculado através das sensações, percepções e noções e, por outro, está mais perto dele por apreender a essência, as leis do movimento dos fenômenos do mundo objetivo. (KOPNIN, 1978, p. 159).

Desse modo, as abstrações conduzem, por meio do pensamento, a reprodução do concreto. Vale ressaltar que a apreensão do objeto não é algo imediato, mas sim mediado pelo processo de análise e de abstrações teóricas.

> Embora a abstração represente o objeto não sob a forma em que ele existe na realidade, ela tem por conteúdo aquilo que realmente existe. As abstrações da produção em geral, da matéria em geral, do átomo em geral refletem o que existe em cada forma concreta de produção, em cada tipo de matéria, em cada átomo. Não se pode apreender nenhuma forma de produção, nenhum tipo de matéria, etc. sem a abstração sobre a produção em geral, a matéria em geral. (KOPNIN, 1978, p. 159).

É no processo das abstrações que o objeto deve ser compreendido em sua totalidade. Só assim se tornará concreto pensado. No entanto, esse modo de explicar o desenvolvimento do pensamento não traz somente, em si, a finalidade do seu teor conceitual teórico, pois, conforme Asbahr (2011, p. 102), tal perspectiva abarca "[...] uma lógica de conhecimento, a lógica dialética; uma concepção de homem, baseada na historicidade e na materialidade; e uma concepção de ciência, preocupada em não descrever a realidade, mas em explicá-la e transformá-la”.

No processo de análise do objeto de estudo, nosso propósito é superar as relações externas que se apresentam tanto no âmbito pedagógico quanto no contexto do sistema conceitual matemático. Isso significa que a atenção se volta para as tarefas de estudos em que se apresentam os conceitos – adição e subtração–, a fim de revelar as suas conexões e as significações que emergem naquele momento de apropriação conceitual. Trata-se, pois, de um movimento de vislumbrar e de buscar as abstrações, a fim de atingir o mais alto nível de complexidade. Em outras palavras, é compreender o objeto em análise na sua totalidade, o que requer a compreensão das relações internas existentes.

Por conseguinte, a investigação se caracteriza como de cunho qualitativo, pois adota como referência os livros reveladores da objetivação de uma proposição de ensino, em particular do sistema conceitual matemático, objeto do presente estudo. Por essa peculiaridade, consideramos a pesquisa de natureza bibliográfica, com adoção dos princípios pertinentes do método do materialismo histórico e dialético. Conforme Gil (2002, p. 44), “[...] a pesquisa bibliográfica é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos”. Para tanto, debruçamo-nos no aprofundamento dos conceitos e pressupostos teóricos do ensino desenvolvimental proposto por Davýdov, bem como na sua base e na matriz teórica, respectivamente a perspectiva Histórico-Cultural e o materialismo histórico e dialético. Acresce-se, ainda, a literatura pertinente aos fundamentos matemáticos para o entendimento da base teórica dos conceitos.

A análise do objeto de investigação adota como referência dois tipos de livros voltados ao ensino e à aprendizagem dos conceitos matemáticos, a seguir nomeados, elaborados por Davýdov e sua equipe de colaboradores.

1) O livro didático dos alunos do primeiro ano: **Математика: Учебник для 2 класса начальной школы** – Livro didático e de exercícios para os estudantes da primeira série.

2) O livro de orientação ao professor: **Обучение математике. 1 класс: Пособие для учителей начальной школы** – Ensino de Matemática. 1º ano: livro do professor do ensino fundamental.

A adoção desses livros como referência não significa que eles foram analisados por completo. Por se tratarem de vários anos escolares e de muitos conceitos matemáticos, requereram-se delimitações para que evitássemos dispersão e prolongamento excessivo da dissertação. Por isso selecionamos cinquenta e nove tarefas dos exemplares mencionados acima. A seleção das referidas tarefas se voltou para aquelas que tratam, de algum modo (explícita e/ou implicitamente), da relação universal todo-partes, reveladora da essência do sistema conceitual de adição e subtração. Essas obras estão escritas em língua russa, mas foram traduzidas para o português por Elvira Kim, por solicitação do GPEMAHC. Contudo ainda não foram publicadas. Importa esclarecer que as demais obras de Davýdov, citadas na presente investigação, estão em espanhol, o que requereu nossa tradução para o português.

No âmbito dos pressupostos mencionados anteriormente, a análise se centra na ideia de sistema de conceito no modo davydoviano de organização do ensino. Centramo-nos no movimento de permanência e de surgimento referente às características conceituais do sistema constituído pela adição e subtração. Nesta unidade, contemplamos as inter-relações de alguns elementos pertinentes aos conceitos e ao desenvolvimento do pensamento matemático: gênese, essência, significações, abstrações, generalizações, entre outros. Feitas essas delimitações do processo de organização de análise do objeto da pesquisa, passaremos, no capítulo seguinte, a tratar dos fundamentos teóricos que subsidiarão o processo de investigação.

2 FUNDAMENTOS PEDAGÓGICOS/ PSICOLÓGICOS

Neste capítulo, discutiremos as bases do referencial teórico que fundamenta a dissertação. Elas procuram contemplar categorias conceituais que, explícita ou implicitamente, se apresentam na definição: 1) do **objeto de estudo** – *a organização do ensino, que manifesta o movimento de permanência e de surgimento referente às características conceituais do sistema constituído pela adição e pela subtração*; 2) da **centralidade das análises** – *o movimento de permanência e de surgimento referente às características conceituais do sistema constituído pela adição e pela subtração* – que norteará as discussões sobre o objeto de estudo no terceiro capítulo. Esse componente de estudo traz questões centrais como organização de ensino e conceitos. Nesse sentido, são para eles que se voltam as seções a seguir.

2.1 A ORGANIZAÇÃO DO ENSINO EM DAVÝDOV

Vasili Vasilievich Davýdov, de origem russa, foi membro da Academia de Ciências Pedagógicas, doutor em Psicologia e professor universitário. Pertence à terceira geração de psicólogos russos soviéticos, sendo seguidor de Vigotsky (LIBÂNEO, 2004). Dedicou-se ao aprofundamento dos estudos vigotskyanos referentes ao desenvolvimento cognitivo. Em decorrência, constituiu um grupo de colaboradores para a elaboração e a submissão à investigação de uma proposta para o ensino de matemática que propiciasse a formação do pensamento teórico nos estudantes.

> Na base do pensamento de Davýdov está a ideia-mestra de Vygotsky de que a aprendizagem e o ensino são formas universais de desenvolvimento mental. O ensino propicia a apropriação da cultura e o desenvolvimento do pensamento, dois processos articulados entre si, formando uma unidade. (LIBÂNEO, 2004, p. 14).

A proposta davydoviana se orienta pelos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural e, por consequência, pela sua matriz, o materialismo histórico e dialético. Portanto, “[...] reflete os princípios do pensamento dialético [...]” (SOUZA, 2013, p. 55). Segundo Triviños (1995, p. 51), “[...] o materialismo dialético é a base filosófica do marxismo e como tal realiza a tentativa de buscar explicações coerentes, lógicas e racionais para os fenômenos da natureza, da sociedade e do pensamento". É nesse contexto teórico que Davídov (1988) expõe seu entendimento referente à finalidade da educação escolar:

> [...] formar nas crianças representações materialistas firmes, para produzir nelas o pensamento independente e melhorar significativamente a formação artística e estética; elevar o nível ideológico e teórico do processo de ensino e educação; expor com precisão os principais conceitos e as ideias básicas das disciplinas escolares; erradicar quaisquer manifestações de formalismo no conteúdo e métodos de ensino e no trabalho de formação e aplicar amplamente as formas e métodos ativos de ensino, etc. (DAVÍDOV, 1988, p. 170-171).

Mas para atingir tais propósitos, que levam os estudantes ao desenvolvimento do pensamento e da generalização teórica, Davýdov (1982) não só advoga, como também elabora e investiga uma nova organização do ensino, radicalmente distinta daquela presente nos sistemas educativos formais de seu tempo. Conforme Rosa (2012, p. 37), "Davydov dá ênfase ao papel da educação e do desenvolvimento intelectual do homem. Por isso, assim como os demais psicólogos/educadores russos atribui como objeto da Psicologia a atividade". Isso significa que o indivíduo humano se caracteriza como um ser em atividade. Em outras palavras, o desenvolvimento intelectual da personalidade e da consciência é marcado por distintas atividades que indicam o lugar que o ser humano ocupa na sociedade. Davídov (1988), com base em Leontiev e Elkonin, destaca as três principais atividades indicadoras dos estágios do desenvolvimento humano: o jogo, na infância pré-escolar; o estudo, no período coincidente com a presença obrigatória do estudante na escola; e o trabalho, na idade adulta, em que somos inseridos no exercício profissional.

No entanto, Davýdov, em suas obras – e vale destacar Davýdov (1982) –, voltou-se para a proposição e para a investigação da organização do ensino que levassem as crianças a desenvolverem a atividade de estudo. Nesse sentido, Davídov e Slobódchikov (1991) partem do pressuposto de que escola e sociedade constituem uma unidade. Ou seja, há um reflexo mútuo entre a sociedade e a escola. Portanto, construir uma nova sociedade requer uma nova escola. Para

Vygotsky (1998), o ensino qualificado é o que avança ao desenvolvimento. Para tanto,

> [...] a tarefa da escola contemporânea não consiste em dar aos alunos uma ou outra soma de fatos conhecidos, mas ensinar os alunos a orientarem-se *independentemente* na informação científica e em qualquer outra. Significa que a escola deve ensiná-los a *pensar*, isto é, desenvolver ativamente neles os fundamentos do pensamento contemporâneo mediante um ensino que impulsione o desenvolvimento mental. (DAVÍDOV, 1988, p. 3 – grifo do autor).

Pesquisas realizadas pelo GPEMAHC indicam que, no Brasil, desde os primeiros anos do Ensino Fundamental, os conteúdos e os métodos de ensino são predominantemente organizados a partir do método tradicional: Rosa (2006); Euzébio (2011); Rosa, Soares e Damazio (2011); Brunelli (2012); Damazio et al. (2012); Damazio, Rosa e Euzébio (2012); Madeira (2012); Rosa (2012); Rosa e Damazio (2012); Rosa, Damazio e Alves (2013); Matos (2013); Souza (2013); Rosa, Damazio e Crestani (2014); Rosa, Damazio e Silveira (2014); Hobold (2014); Lemos (2014); Mame (2014); Búrigo (2015); Silveira (2015); Crestani (2016); Freitas (2016); Galdino (2016); entre outros. Tal postura de organização do ensino obstaculiza o desenvolvimento do pensamento teórico (DAVÝDOV, 1982).

Contrapondo-se às concepções tradicionais de organização do ensino, Davýdov busca os fundamentos do materialismo histórico e dialético para a elaboração da sua proposta de ensino voltada para o desenvolvimento, nos estudantes, da atividade de estudo. Para o referido autor:

> [...] o conceito de atividade é introduzido na ciência contemporânea pela lógica dialética, que examina, a partir de um determinado ponto de vista, a estrutura universal e os esquemas universais da atividade e, o mais importante, o desenvolvimento histórico desta nos processos de reflexo e transformação pelo homem do mundo natural e de si próprio. (DAVÍDOV, 1988, p. 13).

Nesse sentido, Kopnin (1978, p. 109) diz que se atribui "[...] à dialética materialista e às suas categorias a função de método do conhecimento científico". Para Souza (2013, p. 43) apoiada em Triviños (1995),

> [...] o materialismo histórico é a ciência filosófica do marxismo, cujo estudo se refere às leis sociológicas inerentes à vida da sociedade, de seu processo evolutivo histórico e da prática social, geradores do desenvolvimento da humanidade. Traz à tona o papel da força das ideias para promover as mudanças econômicas que geraram elas próprias. Para tanto, discute conceitos essenciais como: ser e consciência social; meios, relação e modo de produção.

Davýdov (1982), fundamentado no materialismo histórico e dialético, entende que o processo de desenvolvimento do ser social ocorre por meio da atividade do trabalho. Essa é a gênese para os vários tipos de atividades, dentre elas, destacamos aquelas que Leontiev (2004) chamou de "principais", dados os papéis que elas desempenham no processo de desenvolvimento do indivíduo humano, quais sejam: o jogo, o estudo e o próprio trabalho. A atenção dos estudos de Davýdov se volta à organização do ensino para que os estudantes entrem em atividade. Cabe destacar que, "[...] na idade escolar inicial, as crianças realizam outros tipos de atividade, porém, a principal é a de estudo [...]" (DAVÍDOV, 1988, p. 159).

É na atividade de estudo que a base do pensamento teórico é constituída, quais sejam, de abstrações e generalizações do tipo substancial que, segundo Davídov (1988, p. 152), "[...] encontram sua expressão no conceito teórico que serve de procedimento para deduzir os fenômenos particulares e singulares de sua base universal". No âmbito das abstrações e generalizações, Freitas (2016, p. 144), pautada em Davídov (1988), diz que "[...] a valorização delas no processo de ensino se dá pela natureza teórica, o que permite a revelação, por via do procedimento de análise, da relação geneticamente essencial de certo sistema conceitual integral".

Vale elucidar que a atividade de estudo se desenvolve num processo de apropriação, em um sistema de ensino com conteúdo e método previamente organizado, cuja finalidade seja a experiência de uma necessidade interna para a apropriação de determinado conhecimento com teor teórico (DAVÍDOV, 1987). Segundo Rosa (2012, p. 34):

> A criança só se apropria de algo em forma de atividade de estudo quando experimenta uma necessidade interna para tal apropriação. Esta surge no processo de apropriação real dos conhecimentos, pois os conhecimentos teóricos também são geradores da necessidade de aprender.

Portanto, a interiorização dos conceitos científicos é produto do anseio pelo estudo (DAVÍDOV, 1987). Trata-se do processo de apropriação dos conhecimentos científicos, imprescindível para o desenvolvimento do pensamento teórico, principal objetivo da atividade de estudo (DAVÍDOV, 1988). Ou seja, o lugar da generalização conceitual é na atividade de estudo, inerente à formação dos conceitos. "Sendo assim, o conceito teórico se apoia na generalização teórica [...]" (NUÑES, 2009, p. 50).

A proposição davydoviana, que se centra na atividade de estudo voltada à apropriação do conhecimento teórico, tem sua justificativa fundamentada em reflexões e necessidades, a partir de dois contextos. Um como produto de seus próprios estudos no que se refere à história da educação. O outro decorre da análise das características dos métodos e dos conteúdos de ensino que apontavam para concepções empíricas de organização do ensino e do conhecimento. Em contraposição, debruça-se na investigação de um modo de organização de ensino que possibilita a apropriação do que há de mais elevado na consciência social por parte dos sujeitos, quais sejam, os conhecimentos científicos (DAVÍDOV, 1988).

Em síntese, a premissa davydoviana entende que o ensino qualificado é aquele que desenvolve o pensamento teórico nos estudantes, o que requer métodos e metodologias de ensino adequados. Para tanto, a fim de que o escolar entre em atividade de estudo, Davídov (1988) propõe uma organização de ensino com a seguinte estrutura: *tarefa* de *estudo*, desenvolvida por *seis ações* que, por sua vez, requerem um conjunto de *tarefas particulares* (ROSA, 2012). A tarefa de estudo é responsável pelo estímulo do pensamento dos estudantes para explicar o que desconhecem e, consequentemente, se apropriar de novos conhecimentos e procedimentos de ação (DAVÝDOV, 1982; DAVÍDOV, 1988). Segundo Rosa (2012, p. 55), "[...] na relação tarefa de estudo, ações e tarefas particulares está o que consideramos fundamental na sua proposição de organização do ensino".

Esse modo de organização do ensino tem por base a dialética materialista por ser "[...] o método do desenvolvimento e da explicitação dos fenômenos culturais partindo da atividade prática objetiva do homem histórico" (KOSIK, 1995, p. 39). Nessa perspectiva teórica, o entendimento é que ser humano alcança o que há de mais evoluído por meio da apropriação dos conhecimentos científicos, acumulados historicamente.

Davídov (1988) elenca as seis ações de estudo que compõem o sistema de organização do ensino, que promovem o desenvolvimento do pensamento teórico nos estudantes:

> [...] transformação dos dados da tarefa com o fim de revelar a relação universal do objeto de estudo;
> modelação da relação diferenciada em forma objetal, gráfica ou por meio de letras;
> transformação do modelo da relação para estudar suas propriedades em 'forma pura';
> construção do sistema de tarefas particulares para resolver por um procedimento geral;
> controle sobre o cumprimento das ações anteriores;
> avaliação da assimilação do procedimento geral como resultado da solução da tarefa de estudo dada. (DAVÍDOV, 1988, p. 181).

essas seis ações e procuraremos exemplificá-las com o ensino do sistema conceitual (adição e subtração). A primeira ação de estudo, *Transformação dos dados da tarefa com o fim de revelar a relação universal do objeto de estudo,* é denominada "principal" por Davídov (1988). Ela "[...] deve refletir no conceito teórico correspondente [...]", em que trata da transformação orientada dos dados objetais da tarefa para um fim, qual seja, "[...] buscar, descobrir e distinguir uma relação completamente definida de determinado objeto integral [...]" (DAVÍDOV, 1988, p. 182). Nesse sentido, os dados que constituem a relação universal, no que tange ao sistema conceitual de adição e subtração, é a relação todo-partes (ROSA, 2012; SILVEIRA, 2015; ROSA; DAMAZIO; ALVES, 2013). Nesse caso, a ideia central é que o todo se constitui em partes que, por sua vez, formam o todo. Sobre tal relação, importa destacar que

> A passagem dos estudantes a partir do estudo das propriedades gerais do grau de diferenciação de seus tipos particulares, os que possuem forma de número (natural, posicional, quebrado, negativo, etc.), é a linha principal na estruturação de todo o ensino experimental da matemática. Ao mesmo tempo, desta linha se desprendem numerosas ramificações, associadas a determinadas propriedades das relações diferenciadas que podem ser a base para construir novos conceitos. Estes se formam seguindo o mesmo esquema: desde a separação da relação fundamental e o estudo de suas propriedades à identificação das possíveis consequências particulares. (DAVÍDOV, 1988, p. 210-211).

Portanto, a relação universal todo-partes que constitui o sistema conceitual no contexto da adição e subtração é decorrente de um desenvolvimento constante da relação essencial do sistema de numeração, que traz a relação entre grandezas, sua base genética essencial (DAVÝDOV, 1982).

A segunda ação de estudo, *Modelação da relação universal diferenciada em forma objetal, gráfica ou por meio de letras*, pertinente ao sistema conceitual (adição e subtração), dá-se a partir dos dados revelados na primeira ação. Para Davídov (1988, p. 182), "[...] os modelos de estudos constituem a relação essencial no processo de assimilação dos conceitos teóricos e dos procedimentos gerais da ação". Todavia, conforme o autor, nem todo modelo de estudo trata de uma representação, mas somente aquelas que contemplam no objeto integral a sua relação universal.

O conteúdo do modelo de estudo constitui "[...] as características internas do objeto" (DAVÍDOV, 1988, p. 183), em vez daquelas que são passíveis da observação direta. Diferentemente da didática tradicional, para a proposição davydoviana, a observação direta e/ou o caráter visual "[...] tem um conteúdo específico, pois reflete as relações e as vinculações essenciais ou internas do objeto." (ROSA, 2012, p. 61).

A terceira ação de estudo incide na *Transformação do modelo da relação para estudar suas propriedades em 'forma pura'*. Davídov (1988, p. 183) diz que a relação universal, "[...] nos dados reais da tarefa, parece estar 'oculta' por muitas características particulares [...]". Rosa (2012, p. 61) acrescenta que, em seu conjunto, aquele dado que "dificulta a sua revelação, porém, se faz visível no modelo 'em forma pura’”. Nesse sentido, vale acrescentar que o movimento de transformação do modelo é imprescindível para propiciar a quarta ação de estudo.

É no processo de transformação e reconstrução dos modelos que os estudantes revelam as propriedades da abstração substancial da relação universal (DAVÍDOV, 1988). Cabe destacar que a abstração substancial (teórica) é resultado das sucessivas relações reveladas nas diversas representações (objetal, gráfica e literal). Para o referido autor, na formação dos conceitos matemáticos, os modelos desempenham um importante papel, pois

> [...] sua particularidade essencial é que reúne o sentido abstrato com o concreto objetal. Falando estritamente, a abstração da relação matemática pode ser produzida somente com a ajuda das fórmulas expressadas por meio de letras (DAVÍDOV, 1988, p. 213-214).

Na quarta ação de estudo, *Construção do sistema de tarefas particulares para resolver por um procedimento geral,*

> [...] os estudantes concretizam a tarefa de estudo inicial e a convertem na diversidade de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento único (geral), assimilado durante a realização das anteriores ações de estudo. (DAVÍDOV, 1988, p. 183).

Em outras palavras, o modelo da relação universal, determinado na segunda ação de estudo, possibilita a extração de relações particulares (terceira ação de estudo) para resolver situações singulares. Este último movimento contempla a compreensão da estruturação da operação matemática em seu caráter unívoco, bem como o entendimento da inter-relação dos elementos que constituem as ações aritméticas elementares. Nessa ação é que se concretiza a relação todo/partes para resolver tarefas particulares de procedimentos aditivos/subtrativos que incluem, além das operações em si, a resolução de problemas que, por sua vez, requer a solução de uma equação. É no processo de realização dessas ações que os estudantes revelam as condições em que surgem os conceitos assimilados (DAVÍDOV, 1988).

A quinta ação de estudo é o *Controle sobre o cumprimento das ações anteriores,* constituídas de tarefas particulares, a fim de colocar o estudante em situação de revelação do domínio da essência conceitual até então em destaque. Trata-se, pois, de "[...] determinar a correspondência de outras ações de estudo às condições e exigências da tarefa de estudo" (DAVÍDOV, 1988, p. 184). No peculiar foco da pesquisa vigente, a função da ação de controle consiste em assegurar se o sistema conceitual formado pelos conceitos de adição e subtração, isto é, a relação todo-partes foi assimilada de modo pertinente pelos estudantes. Desse modo, o objetivo dessa ação é garantir que o procedimento geral da ação contemple todas as operações necessárias para que o estudante tenha êxito ao resolver as diversas tarefas concretas particulares (ROSA, 2012). Em síntese, nas palavras de Davídov (1988, p. 216),

> [...] aparece em primeiro plano a ação de controle, cuja função principal é assegurar que este procedimento tenha todas as operações indispensáveis para que o aluno resolva exitosamente a diversidade de tarefas concretas particulares.

Sobre a sexta ação de estudo, *Avaliação da assimilação do procedimento geral como resultado da solução da tarefa de estudo dada*, Davídov (1988, p. 188), por exemplo, diz que ela "[...] em todos os estágios de solução da tarefa de estudo, orienta as demais ações ao resultado final: a obtenção e o emprego do número como meio especial de comparação das grandezas".

Importa destacar que a quinta e a sexta ação de estudos estão estritamente ligadas. Significa dizer que estão dirigidas

> [...] para colocar em evidência se a criança está preparada para resolver uma nova tarefa de estudo, a que exige um novo procedimento de solução (a evolução determina, em particular, o grau de formação de procedimento geral de solução da tarefa anterior). Porquanto, a nova tarefa não é completamente nova, mas somente em uma parte de seus dados ou condições, os alunos ao separar, com ajuda da evolução, esta parte não somente determina a impossibilidade de resolver a tarefa pelo procedimento anterior, mas que também estabelece com que está ligada a dificuldade sugerida. Visto que a evolução estabelece a insuficiência do procedimento geral

> da ação de que dispõe, a criança o orienta para a busca de um novo procedimento geral de solução da tarefa de estudo surgida e não para obtenção de um ou outro resultado parcial de sua solução. (DAVÍDOV, 1988, p. 216).

Os estudantes, ao executarem as ações de controle e avaliação, suas atenções se voltam ao conteúdo das próprias ações e, concomitantemente, à reflexão dos seus fundamentos, de acordo com o propósito da tarefa (DAVÍDOV, 1988). As ações se estruturam e se modificam corretamente, por meio de um atributo fundamental da consciência humana, a reflexão (ROSA, 2012), uma ação mental.

De acordo com Davídov (1988, p. 176), apoiado em Leóntiev, o domínio das ações mentais

> [...] que estão na base da apropriação da 'herança' pelo indivíduo dos conhecimentos, dos conceitos elaborados pela humanidade, requer indispensavelmente a passagem do sujeito desde as ações empregadas externamente às ações no plano verbal e, finalmente, uma gradual interiorização destas últimas, como resultado do qual adquirem o caráter de operações mentais constituídas, de atos mentais.

O exposto até o momento subsidia a reafirmação de que o modo de organização do ensino em Davýdov se volta ao desenvolvimento da atividade de estudo e, consequentemente, requer a atenção das seis ações de estudo por parte dos estudantes. Isso porque são elas as responsáveis pela apropriação do conhecimento teórico. Trata-se, pois, do que Davídov (1988) denomina uma organização correta da atividade de estudo. Mas, para tanto, requer que o professor defina e proponha uma tarefa de estudo que solicite as referidas ações, de acordo com as necessidades e disposição dos estudantes. Davídov (1988, p. 178-179) destaca as condições requeridas aos estudantes:

> A tarefa de estudo que o professor propõe aos estudantes exige deles: 1) a análise do material fático com o fim de descobrir certa relação geral que apresenta uma vinculação sujeita à lei com as diferentes manifestações deste material, isto é, a construção da abstração e da generalização substanciais; 2) a dedução, sobre a base da

> abstração e generalização, das relações particulares do material dado e sua união (síntese) em certo objeto integral, isto é, a construção de sua 'célula' e do objeto mental concreto; 3) o domínio, nesse processo analítico-sincrético, do procedimento geral da construção do objeto estudado.

Portanto, o objetivo desse processo é o domínio dos conhecimentos teóricos resolvidos por meio de um sistema de ações de estudo (DAVÍDOV; SLOBÓDCHIKOV, 1991). Consequentemente, o ensino é um sistema organizado em que o processo de transformação pelo qual os estudantes passam revela a experiência elaborada socialmente (DAVÝDOV, 1982). Nesse âmbito de estruturação do ensino no contexto da Matemática, Davídov (1988, p. 209) explicita o que considera as principais tarefas de estudo:

> 1) introdução dos alunos na esfera das relações entre grandezas: formação do conceito abstrato de grandeza matemática;
> 2) demonstração, para as crianças, da relação múltipla das grandezas como forma geral do número: formação do conceito abstrato de número e da compreensão da inter-relação fundamental entre seus componentes (o número é derivado da relação múltipla das grandezas);
> 3) introdução sucessiva dos estudantes na área dos diferentes tipos particulares de números (naturais, racionais, negativos): formação dos conceitos sobre estes números como uma das manifestações da relação múltipla geral das grandezas em determinadas condições concretas;
> 4) demonstração aos alunos do caráter unívoco da estrutura da operação matemática (se se conhece o valor dos elementos da operação se pode determinar univocamente o valor do terceiro elemento): formação da compreensão sobre a inter-relação dos elementos das ações aritméticas fundamentais.

Vale destacar, ainda, que essas principais tarefas de estudo contemplam as seis ações mencionadas anteriormente. Do mesmo modo, importa evidenciar que, na proposição davydoviana, o ponto de partida para o ensino de todos os conceitos matemáticos, na educação escolar básica, é a relação entre grandezas. Consequentemente, essas também constituem a base para o modo de organização do sistema conceitual de adição e subtração.

Em síntese, a proposição davydoviana contempla a cientificidade referente aos fundamentos da Matemática e, consequentemente, enfatiza a dimensão teórica dos conceitos. Por isso, na próxima seção e na subsequente, trataremos dos pressupostos da teoria histórico-cultural referentes aos conceitos cotidianos e científicos e suas inter-relações com o desenvolvimento do pensamento dos escolares.

2.2 A FUNÇÃO DA ESCOLA: O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO CONCEITUAL

Para o movimento do desenvolvimento dos conceitos científicos e, consequentemente, para a formação do pensamento teórico, acreditamos numa premissa inconteste da Pedagogia Histórico-Crítica, bem como da Psicologia Histórico-Cultural e, por extensão, da Psicologia Pedagógica. Todas elas têm a mesma matriz teórica, o materialismo histórico e dialético, e se apresentam como uma possibilidade de orientar a organização do ensino na educação escolar. Vale esclarecer que tais perspectivas são referências na fundamentação de orientações oficiais, como, por exemplo, a Proposta Curricular de Santa Catarina (SANTA CATARINA, 2014), bem como o PROESDE (Programa de Educação Superior para o Desenvolvimento Regional) (2016), que explicita sua aderência à Pedagogia Histórico-Crítica e à Teoria Histórico-Cultural. Para Saviani (2008, p. 88), a expressão

> [...] pedagogia histórico-crítica é o empenho em compreender a questão educacional com base no desenvolvimento histórico objetivo. Portanto, a concepção pressuposta nesta visão da pedagogia histórico crítica é o materialismo histórico, ou seja, a compreensão da história a partir do desenvolvimento material, da determinação das condições materiais da existência humana.

A Pedagogia Histórico-Crítica entende o desenvolvimento humano em constante devir e, como tal, tem a educação como um meio de compreensão da realidade com vista a sua transformação. Em outros termos, transformar as “[...] relações de produção capitalista, que tem como princípio fundamental a sociedade privada [...]” (MADEIRA, 2012, p. 38). Portanto, “[...] a Pedagogia Histórico-Crítica traz consigo o papel da educação como mediadora do processo da formação do indivíduo, com a consciência de que está num mundo em que, de forma oculta, está a dominação do homem pelo homem.” (MADEIRA, 2012, p. 42).

No que se refere ao papel mediador da educação, na atual sociedade, Giardinetto (1999) destaca dois pontos. O primeiro é *a função precípua da prática educativa na formação do indivíduo*, uma vez que a experiência da vida cotidiana não é suficiente para a formação do indivíduo. Por isso a necessidade de apropriação dos conteúdos das diversas ciências, isto é, teóricos. Nesse sentido, Davýdov (1982) contribui com a tese de que o ensino organizado tem como premissa a garantia do desenvolvimento do pensamento teórico. Para o referido autor,

> [...] a estruturação moderna das disciplinas escolares [...] deve propiciar a formação, nos alunos, de um nível mais alto de consciência e de pensamento que aquele ao qual se orienta a organização até agora vigente do processo de aprendizagem na escola. Postulamos que o nível requerido é o da consciência e do pensamento teóricos modernos, cujas principais leis são evidenciadas pela dialética materialista como lógica e teoria do conhecimento [...]. O conteúdo e os métodos do ensino primário vigentes orientam-se predominantemente à formação, nos escolares dos primeiros anos, das bases da consciência e do pensamento empíricos, caminho importante, mas não o mais efetivo na atualidade, para o desenvolvimento psíquico das crianças. (DAVÍDOV, 1988, p. 99).

Assim como Davídov (1988), a Pedagogia Histórico-Crítica não despreza o conhecimento cotidiano e/ou o pensamento empírico, apenas condena sua supervalorização, por obstaculizar o desenvolvimento do pensamento teórico. O referido autor explicita a seguinte diferença: “[...] o pensamento empírico cataloga, classifica os objetos e fenômenos. O teórico persegue a finalidade de reproduzir a essência do objeto estudado.” (DAVÍDOV, 1982, p. 154). Dado que a apropriação do conhecimento cotidiano promove o desenvolvimento apenas do pensamento empírico, ele carece de superação por meio da apropriação do conceito científico (MADEIRA, 2012).

A escola, ao supervalorizar os conceitos cotidianos, nega a possibilidade de inserção do estudante num processo de desenvolvimento do pensamento teórico. Isso porque, conforme Libâneo (2004, p. 27), "[...] se o ensino nutre a criança somente de conhecimentos empíricos, ela só poderá realizar ações empíricas".

O segundo ponto – indicado por Giardinetto (1999), referente à função mediadora da escola na atualidade – é denominado *a prática educativa enquanto produção de novos carecimentos*. Diz respeito à "[...] crítica de que os conteúdos escolares são distantes dos problemas da realidade dos estudantes." (MADEIRA, 2012, p. 43). Isso significa que o conhecimento adquirido na informalidade, pelo estudante, até pode auxiliar na superação de problemas cotidianos, mas, no contexto escolar, ele apresenta dificuldades quanto ao processo da apropriação.

A Pedagogia Histórico-Crítica – com aporte teórico do materialismo histórico e dialético – tem se apresentado como uma possibilidade de superação de tal dificuldade. Nesse sentido, vale mencionar um de seus pressupostos filosófico e psicológico: "Escola diz respeito ao conhecimento elaborado e não ao conhecimento espontâneo; ao saber sistematizado e não ao saber fragmentado; à cultura erudita e não à cultura popular" (SAVIANI, 2008, p. 14).

Para esclarecer as discrepâncias entre conceito científico/conceito cotidiano, conhecimento teórico/conhecimento empírico, faremos menção à investigação experimental de Vigotski (2000). Seu objetivo consistiu em estudar o processo de formação dos conceitos em seu desenvolvimento, isto é, no seu condicionamento dinâmico-causal. A premissa é de que o "[...] processo de formação de conceitos pressupõe, como parte fundamental, o domínio do fluxo dos próprios processos psicológicos através do uso funcional da palavra ou do signo." (VIGOTSKI, 2000, p. 172). Nesse sentido, Vygotski (1993) estabelece uma série de relações entre conceito cotidiano e conceito científico. Uma delas é o movimento contrário de um em relação ao outro, respectivamente, de ascensão e descida do processo de desenvolvimento de ambos:

> O conceito cotidiano cria uma série de estruturas necessárias para que surjam as propriedades inferiores e elementares dos conceitos. Por sua vez, o conceito científico, depois de ter percorrido de cima para baixo certo fragmento de seu

> caminho, abre espaço para o desenvolvimento dos conceitos cotidianos, preparando de antemão uma série de formações estruturais necessárias para dominar as propriedades superiores do conceito (VYGOSTSKI, 1993, p. 153).

Em decorrência, promover o processo de apropriação – por parte dos estudantes – do conhecimento científico requer da escola uma articulação com o seu entorno, para a identificação dos conhecimentos cotidianos ali disseminados. É para eles que se volta à aquisição do conhecimento científico, a fim de ascendê-los em termos de ressignificação e dar-lhes um novo sentido. É nesse processo que os escolares, na idade de transição, compreendem as questões da sociedade (VIGOTSKI, 2000). Por exemplo, o teor da divisão de classes sociais que se apresentaram historicamente na humanidade por consequência dos diferentes modos de produção: sociedades escravagista, feudal e capitalista. Em síntese, a divisão de classes sociais é reprodutora da desigualdade. Nesse âmbito, vale, novamente, mencionar a proposição davydoviana, pois seu currículo "[...] enfatiza a abordagem de conceitos científicos desde o primeiro dia de escolaridade." (DAMAZIO; ROSA; SOARES, 2011, p. 3). Ao se fundamentar na Teoria Histórico-Cultural, dá ênfase ao ensino desenvolvimental, isto é, aquele que promove o desenvolvimento do pensamento teórico. No entanto, conforme Bernardes e Moura (2009, p. 477), esse tipo de ensino "[...] não se faz presente, de uma forma geral, na educação escolar em nenhum nível de escolarização na atualidade".

Mas essa constatação não ocorre somente em relação ao contexto educacional brasileiro, pois, segundo Davídov (1987), o ensino que promove o desenvolvimento intelectual teórico não foi a referência, basicamente, no mundo inteiro.

> Realmente, ao longo de centenas de anos, a finalidade social principal da educação de massa consistiu em inculcar à maioria dos filhos dos trabalhadores somente aqueles conhecimentos e habilidades sem os quais é impossível obter uma profissão mais ou menos significativa na produção industrial e na vida social (saber escrever, contar, ler; ter ideias básicas do que se passa em seu entorno). (DAVÍDOV, 1987, p. 143).

A cultura que toma como base o conhecimento científico é um bem produzido pela humanidade. Por isso todos têm o direito à apropriação do saber mais elaborado e atual, isto é, de teor teórico. O acesso somente ao conhecimento cotidiano, de base empírica, não é suficiente para a formação humana da atualidade. Nesse sentido, Davídov (1988, p. 154) é insistente na diferenciação desses dois tipos de conhecimentos. Por exemplo, na citação a seguir, ele destaca a distinção entre ambos no que diz respeito aos respectivos modos de obtenção/apropriação:

> Os conhecimentos empíricos se elaboram no processo de comparação dos objetos e as representações sobre eles, o que permite separar as propriedades iguais, comuns. Os conhecimentos teóricos surgem no processo de análise do papel e a função de certa relação peculiar dentro do sistema integral que, ao mesmo tempo, serve de base genética inicial de todas suas manifestações.

Sendo assim, um processo de ensino que dá destaque para conceitos cotidianos subsidiará apenas a compreensão da realidade pelo que ela apresenta externamente. Para Leontiev (2004), a educação assume a característica de continuidade, ou seja, de transmissão da cultura. E, como tal, traz a finalidade que, às vezes, encobre relações de poder voltadas a privilégios da minoria, a qual se beneficia da exploração da maioria das pessoas. Portanto, tem um significado dado aparentemente que se caracteriza como um modo natural de ser e de estar no mundo.

A apropriação das reais significações teóricas, isto é, que desmistifiquem aquelas dadas por relações externas, empíricas, requer uma formação humana que tem como premissa que sua gênese está no processo de aprendizagem fundamentada em conceitos científicos, teóricos (VIGOTSKI, 2000; LEONTIEV, 2004; DAVÍDOV, 1988). Nesse sentido, Lemos (2014, p. 32), apoiado em Davýdov (1982), diz que "[...] a escola tem a função de gerar as condições para que os alunos se desenvolvam com base nos conceitos científicos, que elevam os níveis de pensamento para além dos modos que se constituem espontaneamente".

Mas como a Teoria Histórico-Cultural postula a formação do pensamento conceitual? Vigotski (2000) partiu da vida cotidiana, ou seja, do conhecimento até então apropriado, das práticas sociais e das funções psicológicas, a fim de compreender a gênese de desenvolvimento do pensamento infantil e adolescente. Seus estudos se inserem no que se compreende como novo objeto da psicologia: a atividade humana, mediada pela relação entre o homem e a realidade. Sendo assim, adere ao pressuposto marxista de que a atividade do homem ocorre em uma relação de transformação mútua entre sujeito e objeto. Ou seja, o sujeito não transforma apenas o objeto, mas também a si mesmo, o que se dá numa relação vinculada à natureza.

> Apesar de fazer parte da natureza, [...] o homem se diferencia dela na medida em que é capaz de transformá-la conscientemente segundo suas necessidades. É através dessa interação, que provoca transformações recíprocas, que o homem se faz homem. Dessa forma, a compreensão do ser humano implica necessariamente na compreensão de sua relação com a natureza, já que é nesta relação que o homem constrói e transforma a si mesmo e a própria natureza, criando novas condições para sua existência. É através do trabalho, uma atividade prática e consciente, que o homem atua sobre a natureza. [...] A noção de produção pelo trabalho (encarado como motor do processo histórico) não apenas diferencia o homem dos animais como também o explica: é pela produção que se desvenda o caráter social e histórico do homem. O homem é um ser social e histórico e é a satisfação de suas necessidades que o leva a trabalhar e transformar a natureza, estabelecer relações com seus semelhantes, produzir conhecimentos, construir a sociedade e fazer a história. É entendido assim como um ser em permanente construção, que vai se construindo no espaço social e no tempo histórico. (REGO, 1995, p. 96-97).

Vigotski (2000), ao aderir ao materialismo histórico e dialético, a matriz para a formulação do que denominou nova Psicologia, compreende que na relação homem-objeto, a matéria tem seu papel na produção do conhecimento. Considera a existência de três generalizações importantes necessárias à compreensão da relação homem-natureza (SHUARE, 1990).

A primeira generalização parte do pressuposto de que tempo é história. A segunda considera que a psique humana é social e, como tal (a terceira), tem caráter mediado, o que supera o caráter imediato dado ao psiquismo humano, admitido por outras correntes da psicologia. Essa função mediadora ocorre por consequência de dois elementos: signo e instrumento. Ambos são produtos culturais indispensáveis no processo de internalização que forma a consciência (SHUARE, 1990). Para Leontiev (2004, p. 284):

> No decurso da atividade dos homens, as suas aptidões, os seus conhecimentos e o seu saber-fazer cristalizam-se de certa maneira nos seus produtos (materiais, intelectuais, ideais). Razão porque todo o progresso no aperfeiçoamento, por exemplo, dos instrumentos de trabalho pode considerar-se, deste ponto de vista, como marcando um novo grau do desenvolvimento histórico nas aptidões motoras do homem; também a complexidade fonética das línguas encarna progressos realizados na articulação dos sons e do ouvido verbal, os progressos das obras de arte, um desenvolvimento estético, etc.

O signo linguístico é uma das produções mais elaboradas do processo de desenvolvimento do homem. Sua característica principal é tornar o homem um ser em devir, que promove a formação da consciência e o desenvolvimento das funções psíquicas superiores, os conceitos. O desenvolvimento do psiquismo forma a consciência (SHUARE, 1990).

Para Davýdov (1982, p. 221-222 – grifo do autor):

> Tomar consciência das operações mentais supõe reconstituí-las na imaginação com o fim de lograr sua expressão discursiva, o que necessariamente está relacionado com a generalização dos processos psíquicos. E este reflexo de conversão da consciência em sua própria atividade engendra esse **tipo especial** de generalização que está presente no conceito científico e nas formas superiores do pensamento humano.

Em conformidade com os pressupostos de Vigotski (2000), Duarte (1993, p. 35) entende que:

> Não haveria desenvolvimento histórico se o homem se apropriasse de objetos que servissem de instrumentos para ações que possibilitassem apenas a utilização de um conjunto fechado de forças humanas e a satisfação de um conjunto também fechado de necessidades humanas. O que possibilita o desenvolvimento histórico é justamente o fato de que a apropriação de um objeto gera, na atividade e na consciência do homem, novas necessidades e novas forças, faculdades e capacidades.

Em sua gênese e desenvolvimento, a consciência, a psique tem no trabalho a principal base. Mas o que é trabalho? Ao recorrer a Marx (1983), Leontiev (2004) define o trabalho como a relação mútua entre homem e natureza. Ou seja, a condição de existência do trabalho requer a presença do homem em atividade vinculada à transformação da natureza que, numa relação mediada por instrumentos e signos, também o transforma. Desde a sua origem o trabalho é algo social, o que requer cooperação, sinônimo de divisão técnica (LEONTIEV, 2004).

Toda atividade humana, segundo Leontiev (2004), tem suas peculiaridades, mas que se inserem em uma estrutura que é comum a todas. Assim, a divisão técnica do trabalho e de qualquer atividade condiciona as ações humanas. A atividade é orientada para o objeto que se insere num contexto constituído por necessidade, motivo, finalidade, ação e operação. Leontiev (2004, p. 115) assim explica a confluência entre esses componentes da estrutura da atividade: "Uma vez que a necessidade encontra a sua determinação no objeto (se 'objetiva' nele), o dito objeto torna-se motivo da atividade, aquilo que o estimula". Portanto, o motivo está estritamente ligado à necessidade; essa é responsável por gerar um plano de ação em que o sujeito tenha a possibilidade de concretizá-la" (MOURA, 1998). A finalidade se constitui, mutuamente, em uma causa.

Toda finalidade prática, objetivada, da atividade do homem se faz duplamente mediada por dois tipos de instrumentos: o de sentido literal da palavra (ferramentas) e o do pensamento (apontam e a antecipam).

Bernardes e Moura (2009, p. 466) também enfatizam que o enfoque histórico-cultural entende que:

> [...] as ações humanas direcionadas a um determinado fim têm um caráter mediador por fazer uso de instrumentos elaborados pelo homem ao longo de sua história. O caráter mediador dos instrumentos torna-se elo intermediário entre o sujeito e o objeto da atividade humana.

Do mesmo modo, Sforni (2004, p. 102) destaca a importância do movimento de transformação da ação em operação, pois caracteriza uma aprendizagem:

> Cabe reforçar que uma operação não é simplesmente um ato mecânico que é aprendido como tal. Para que a operação possa ser trazida à consciência, quando diante de uma situação-problema, é fundamental que ela tenha se formado inicialmente como ação, processo em que cada movimento é consciente para o sujeito, e somente depois transformado em prática automatizada. Caso a operação não tenha percorrido esse processo, não sendo consciente, permanece estanque, vincula apenas à situação na qual foi aprendida. Não é efetivamente de domínio do sujeito, pois não pode ser acionada conscientemente diante de outra situação.

Portanto, em conformidade com Leontiev (2004), as ações e suas correspondentes operações objetivam a atividade. Nela, distinguem-se dois momentos: o de preparação e o de execução. No âmbito da inter-relação entre os componentes da estrutura da atividade é que o homem produz e se apropria dos significados. Isso quer dizer que eles são produzidos historicamente, pelo homem, e se apresentam como posto à sociedade. Assim também é que emerge o sentido que se dá à atividade, aos fenômenos, aos objetos, às coisas. Ele tem ligação direta com o motivo. Por exemplo, uma criança que estuda movida pela promessa dos pais de que a premiarão ao ser aprovada no final do ano letivo dará esse sentido (premiação) para a referida atividade.

A síntese que se pode elaborar a respeito da atividade humana é a que ela se constitui na prática social e, como tal, a inter-relação entre os seus componentes gera um movimento transformativo que cria novas atividades. Por consequência, o homem se humaniza, forma-se em um contexto de produção da própria vida e de estar na sociedade.

Ao estar em atividade, o ser humano move-se em um constante vir a ser em que produz e se apropria das mais diversas formas de conhecimento; entre eles, o mais elaborado, o científico – importante no desenvolvimento das funções psicológicas superiores.

A complexificação desse desenvolvimento está relacionada ao lugar que a criança, o indivíduo, ocupa nas relações estabelecidas na sociedade, o que é caracterizado como uma *atividade* que Leontiev (2004) denomina de *principal*. O autor destaca as seguintes atividades principais indicadoras e promotoras dos diferentes estágios de desenvolvimento: jogo, no período pré-escolar; estudo, no período escolar; e trabalho, na idade adulta.

A apropriação do conhecimento científico é a centralidade da atividade de estudo. Isso significa que a criança precisa apreender o conteúdo e o método de modos distintos daqueles que predominaram antes de ingressar na escola. No entanto, Davídov (1988) chama a atenção que o ensino, hoje, ainda está organizado de modo que promove a continuidade. Em outras palavras, a criança da Educação Infantil é preparada para ingressar no Ensino Fundamental que, na essência, tem conteúdo e modo de organização de ensino similar àquele em que se inserira até então, isto é, pertinente à atividade do jogo.

Em conformidade com Davýdov (1982) e Leontiev (2004), o correto é que na pré-escola a criança entre em atividade de jogo e na escola em atividade de estudo. De acordo com Davídov (1988), para que a criança se desenvolva na atividade de estudo, é necessário que se perceba inserida em contexto totalmente distinto daquele vivido na atividade do jogo. Leontiev (2004) acrescenta que, nesse momento, ela deve sentir que ocupa um novo lugar na sociedade. Isso porque assume compromissos com a sociedade (com os pais, com a professora, ...). Em consequência, sua atuação se volta para a formação do pensamento galgado em generalização teórica, pois “[...] o desenvolvimento do pensamento teórico não ocorre mediante generalizações empíricas.” (SILVEIRA, 2015, p. 28). Para Davídov (1988), todas as atividades – entre elas o estudo – requerem o desenvolvimento da vontade de aprender que, por sua vez, vincula-se a uma necessidade surgida na atividade anterior (no caso, o jogo). Conforme Davídov (1988, p. 177):

> O jogo temático de papéis favorece o surgimento, na criança, de interesses cognitivos; entretanto, não os pode satisfazer plenamente. Devido a isso

> os pré-escolares se esforçam por satisfazer seus interesses cognoscitivos mediante a comunicação com os adultos, as observações sobre o mundo que os rodeia, extraindo diferentes conhecimentos dos livros, das revistas e dos filmes que estão ao seu alcance.

Tal movimento caracteriza o ensino desenvolvimental, cuja essência é a formação da criança, em consonância com as peculiaridades de suas atividades (DUSAVITSKII, 2014). Nesse sentido, vale observar a afirmação de Leontiev (2004) no que diz respeito às aquisições humanas que

> [...] não são simplesmente dadas aos homens nos fenômenos objetivos da cultura material e espiritual que os encarnam, mas são aí apenas postas. Para se apropriar destes resultados, para fazer deles as suas aptidões, 'os órgãos da sua individualidade', a criança, o ser humano, deve entrar em relação com os fenômenos do mundo circundante através de outros homens, isto é, num processo de comunicação com eles. Assim, a criança aprende a atividade adequada. Pela sua função este processo é, portanto, um processo de educação. (LEONTIEV, 2004, p. 290).

Cabe reafirmar que, para Vigotski (2000, p. 241), "[...] o desenvolvimento dos conceitos científicos na idade escolar é uma questão prática primordial". Da mesma forma na atividade do jogo, qualquer tarefa tem como objetivo fazer com que a criança entre em atividade imaginativa. Por exemplo, em matemática, compreender que determinado jogo necessita e a instiga a descobrir a importância das medidas, das quantidades, etc. (DUSAVITSKII, 2014). Contudo há de se ter o cuidado para não transformar a criança em um objeto de ensino, que alienaríamos (alheios aos meios que a humanidade produziu), da própria escola e, posteriormente, da sociedade (DUSAVITSKII, 2014).

Esse movimento é oposto ao que Leontiev (2004) estabelece como papel da educação de garantir a apropriação do desenvolvimento historicamente acumulado. Nesse sentido, Sforni (2004, p. 88) afirma que "[...] o desenvolvimento psíquico da criança ocorre, portanto, no processo de apropriação das formas de cultura historicamente elaboradas".

No entanto, o atual modelo de escola se configura com características de um ensino tradicional por promover apenas o desenvolvimento do pensamento empírico e não as abstrações e generalizações teóricas (ROSA, 2012). O conhecimento em seu nível empírico não dá a possibilidade de apropriação do essencial significado dos conceitos, bem como dos seus nexos. Libâneo e Freitas (2013, p. 337) chamam a atenção para a diferença entre o conhecimento empírico e o conhecimento teórico.

> Diferentemente do conhecimento empírico, o conhecimento teórico não busca as semelhanças externas aparentes e comuns aos objetos em dada classe, mas revela as inter-relações e traços de objeto aparentemente isolados num todo, evidenciando seus vínculos e contradições.

Para Davýdov (1982), ao se analisar apenas os traços observáveis dos objetos, tem-se como consequência um processo de generalização e de formação do conceito científico débil. Para o referido autor, a essência dos objetos não está dada de forma imediata, pois "[...] o processo de análise permite descobrir a relação geneticamente inicial do sistema integral como sua base universal ou essência [...]" (DAVÍDOV, 1988, p. 154). É importante salientar que todo ensino promove desenvolvimento, mas a questão que se apresenta é: qual o seu conteúdo, empírico ou teórico?

Portanto, o real teor do ensino é aquele que consiste em desenvolver o ser, isto é, que usufrua daquilo que mais desenvolvido a humanidade já produziu, cuja referência para a escola é o conhecimento científico. Para Vygotsky (1988, p. 243), a escola com teor científico é aquela em que

> [...] o ensino e a educação constituem as formas universais do desenvolvimento psíquico das crianças; nelas se expressa a colaboração entre os adultos e as crianças, orientada de modo que elas se apropriem das riquezas da cultura material e espiritual, elaboradas pela humanidade. O ensino e a educação são os meios com que os adultos organizam a atividade das crianças; graças a tal realização elas reproduzem em si as necessidades surgidas historicamente, indispensáveis para a

> solução exitosa das diversas tarefas da vida produtiva e cívica das pessoas.

É essa concepção e a finalidade do ensino e educação escolar, expressas por Vygotski na citação anterior, que adotam o sistema de ensino desenvolvimental. Ou seja, desenvolver o ser humano em nível das mais altas potencialidades. É nesse sentido que Vigotski (2000) desenvolve o seu estudo experimental, com adoção do método funcional de dupla estimulação, em que propõe 'meta' – Davýdov (1982) o chama de tarefa – em que o meio (instrumento) são cartões com figuras e os respectivos signos (palavra).

As investigações de Vigotski (2000) mostram estágios que se explicitam no desenvolvimento dos conceitos até atingir o nível científico. Cabe antecipar que cada um deles não inicia após o término do que o antecede, mas ocorrem mesclas de características de um e de outro.

O primeiro estágio é o conceito sincrético, o qual se divide em três fases. A primeira consiste na formação da imagem sincrética em relação ao significado da palavra, o que ocorre marcadamente por provas e erros. Na segunda fase, da imagem sincrética, sua formação incide nos encontros espaciais e temporais de determinados elementos. Isso acontece por contato imediato em outra relação mais complexa que surge no processo de percepção direta. Na terceira fase, a imagem sincrética é equivalente ao conceito. Sua base de formação se sustenta na atribuição de um único significado aos representantes dos diferentes grupos; antes de tudo, daqueles unificados na percepção da criança (VIGOTSKI, 2000). Nesse sentido, Amorim e Damazio (2007, p. 2) anunciam que:

> O conceito sincrético estabelece, entre o pensamento e o objeto, uma relação de imagem confusa, de forma que não identifica claramente as relações e significações do conteúdo do mesmo. Na aprendizagem, poderíamos relacionar o sincretismo como a identificação do concreto-material do conceito ainda na sua forma primitiva, com quase nenhuma identificação.

Em síntese, no nível de pensamento conceitual sincrético, o objeto ainda é caótico para a criança, que não estabelece relação com um e outro objeto. No entanto, Vigotski (2000) já infere que a criança não se desenvolve conceitualmente sozinha ou parada. Ou seja, ela precisa estar em movimento, em atividade. Para o referido autor (2000, p. 175), trata-se de "[...] uma tendência infantil a substituir a carência de nexos objetivos por uma superabundância de nexos subjetivos e a confundir a relação entre as impressões e o pensamento com a relação entre os objetos". Em outras palavras, de acordo com Núñez (2009, p. 64), a atividade "[...] em nível psicológico, é uma unidade da vida mediatizada pelo reflexo psicológico, cuja função é orientar o sujeito no mundo dos objetos".

O segundo estágio é a formação de *complexo*s. Nele, ocorre o processo de atribuição de significado único ao representante dos diversos grupos. Por exemplo, todos os cachorros, para a criança, são "au-au". Mas a apropriação de conceitos requer o estabelecimento dos nexos conceituais, o que é imprescindível a atenção na sua gênese e desenvolvimento histórico. Essas inter-relações em suas primeiras manifestações são uma das características do pensamento em complexos, pois a criança já estabelece alguns vínculos.

> Trata-se de um novo passo a caminho do domínio do conceito, de um novo estágio no desenvolvimento do pensamento da criança, que suplanta o estágio anterior e é um progresso indiscutível e muito significativo na vida da criança. Essa passagem para o tipo superior consiste em que, em vez do "nexo desconexo" que serve de base à imagem sincrética, a criança começa a unificar objetos homogêneos em um grupo comum, a complexificá-los já segundo as leis dos vínculos objetivos que ela descobre em tais objetos. (VIGOTSKI, 2000, p. 179).

Trata-se, pois, de desprezar a centralidade em uma coisa em si para colocá-la no rol de maior abrangência, uma vez que inclui variedade que tem uma propriedade em comum. Isso possibilita à criança: a formação de vínculos, o estabelecimento de relações entre diferentes impressões concretas, a unificação e a generalização de objetos particulares, o ordenamento e a sistematização de toda a experiência. Nesse sentido, "[...] a atividade do sujeito não se orienta ao objeto para mudá-lo ou reconstituí-lo, e sim para refletir sobre ele, para conhecê-lo." (NÚÑEZ, 2009, p. 68). Sobre esse estágio, Vigotski (2000, p. 202-203) diz que

> A conclusão básica do nosso estado do desenvolvimento dos conceitos no segundo estágio pode ser formulada da seguinte maneira: a criança se encontra no estágio do pensamento por complexos, concebe com o significado da palavra aqueles objetos graças aos quais se torna possível a compreensão entre ela e o adulto, mas concebe a mesma coisa de modo diferente, por outro meio e com auxílio de outras operações intelectuais.

No estágio em complexo, a palavra assume a função de mediadora entre a criança e o mundo. Para Núñez (2009, p. 45):

> A palavra possui dois componentes básicos que as definimos pelos termos representação material e significados. Na estrutura de cada palavra, podem ser observadas funções que diferenciam os atributos essenciais dos objetos de uma mesma classe, essas funções são a abstração e a generalização.

Segundo Vigotski (2000, p. 179),

> [...] o pensamento por complexos já constitui um pensamento coerente e objetivo. [...] essa coerência e essa objetividade ainda não são aquela coerência característica do pensamento conceitual que o adolescente atinge.

O pensamento em complexo se apresenta com características de cinco fases. A primeira, *complexo de tipo associativo*, depende do meio, da cultura em que a criança vive. Por exemplo, o núcleo é a bola, então a criança classificará como bola o limão, a bola de tênis, a bola de basquete, a laranja, [...] Nesse caso, a criança adota o formato redondo como traço distintivo de bola. Conforme Vigotski (2000, p. 182), “[...] o único princípio de sua generalização é a sua semelhança fatual com o núcleo básico do complexo”. Ou seja, a referência é algo objetivo que, por sinal, é um dos fundamentos de todas as fases. Em qualquer fase, a relação se dá com o objeto. Logo, a prática é o ponto de partida para desenvolver o pensamento. Para criar vínculos, precisamos de objetos para estabelecer relações. A esse movimento, Vigotski (2000) denomina de vínculo concreto. Para Rosental (1956, p. 58), “[...] nos objetos os seus aspectos essenciais e não essenciais, distinguimos o lado exterior, frequentemente enganoso, do interior, que é o mais importante e decisivo".

A segunda fase é chamada *complexo de coleções*. Nela, objetos distintos se integralizam reciprocamente no contexto da criança. Nas palavras de Vigotski (2000, p. 184), "[...] nesse pensamento a criança sempre opera com coleções de objetos que se completam mutuamente, isto é, opera em conjunto". Por exemplo, copo, prato e garfo têm algo em comum: coleção de objetos utilizados nas refeições. Ou ainda, a criança, ao se deparar com peças diversas, faz uma coleção como aquelas de cores iguais. Para tanto, escolhe uma peça aleatoriamente e separa todas que têm a mesma cor. Essas combinações são formadas com base na "[...]percepção sensível e imediata [...]", pois o foco está nas propriedades externas dos objetos (KOPNIN, 1958, p. 316).

Em síntese, essa fase é marcada pela possibilidade, demonstrada pela criança, de combinar objetos e impressões concretas das coisas em grupos particulares que, em seu conjunto, têm similaridades com o que denominamos coleções. Vigotski (2000, p. 184) faz a seguinte distinção:

> [...] se o complexo associativo se baseia na semelhança recorrente e obsessiva entre os traços de determinados objetos, então a coleção se baseia em vínculos e relações de objetos que são estabelecidos na experiência prática, efetiva e direta da criança.

São, precisamente, a heterogeneidade da composição e a intercomplementariedade no estilo de uma coleção que caracterizam essa fase no desenvolvimento do pensamento. Ou seja, "[...] o complexo-coleção é uma generalização dos objetos com base na sua co-participação em uma operação prática indivisa, com base na sua cooperação funcional." (VIGOTSKI, 2000, p. 184). Essa fase, Kopnin (1958) chama de concreto sensível.

A terceira fase se chama *complexo em cadeia*, e é caracterizada pela passagem do núcleo. De acordo com Vigotski (2000, p. 185), "[...] é uma fase inevitável no processo de ascensão da criança no sentido do domínio dos conceitos". Por exemplo, em determinado momento, o núcleo é a forma; em outro, o núcleo é a cor, e assim sucessivamente. Mas esse vínculo não ocorre de maneira isolada, e sim atrelado a outro. Para tanto, a criança busca sempre um elemento geral que possibilita a identificação de uma nova alternativa de agrupar os objetos.

Portanto, o complexo em cadeia se constrói quando a criança leva em consideração o princípio da combinação dinâmica e temporal de elos que unem determinados objetos, bem como pela transmissão do significado por meio de elos isolados que compõem a cadeia (VIGOTSKI, 2000). Cabe destacar que essa fase é "[...] a modalidade mais pura do pensamento por complexos, pois é desprovido de qualquer centro, diferentemente do complexo associativo em que existe um centro a ser preenchido pela amostra" (VIGOTSKI, 2000, p. 187). De acordo com Davídov (1987, p. 144), tal movimento "[...] assegura a orientação da pessoa no sistema de conhecimentos já acumulados sobre as particularidades e traços externos de objetos e fenômenos isolados da natureza e sociedade".

Na quarta fase, denominada *complexo difuso*, o traço importante é a impossibilidade de definir seus contornos. Ou seja, nesse momento,

> [...] a criança ingressa em um mundo de generalizações difusas, onde os traços escorregam e oscilam, transformando-se imperceptivelmente uns nos outros. Aqui não há contornos sólidos, e reinam os processos ilimitados que frequentemente impressionam pela universalidade dos vínculos que combinam. (VIGOTSKI, 2000, p. 189).

Segundo Vigotski (2000), nessa fase, a criança pensa sobre algo além dos limites do seu mundo. É uma cadeia difusa porque não está tudo no objeto visivelmente, o que expressa as primeiras manifestações do pensamento indutivo. Para Davídov (1988, p. 142), o movimento que vislumbra as características internas do objeto, consiste em "[...] elaborar os dados da contemplação e a representação em forma de conceito e com ele reproduzir unilateralmente o sistema de conexões internas que geram o concreto dado, expondo sua essência".

A quinta fase é o *complexo* denominado *pseudoconceito*. Nessa fase, a criança já sabe contar, mas não significa que compreende o conceito de número. Crianças e adultos já se entendem, contudo, por operações diferentes. Tal comunicação se efetiva porque usam a mesma palavra, que é dotada de significado, consequentemente se materializa o conceito. Todavia não existe a garantia de que o sentido e o significado da palavra são os mesmos. Vigotski (2000, p. 191) observa que,

> [...] no pensamento efetivamente vital da criança, os pseudoconceitos constituem a forma mais

> disseminada, predominante sobre todas as demais e frequentemente quase exclusiva de pensamento por complexos na idade pré-escolar.

Essa fase apresenta características que se confundem com aquelas predominantes no terceiro estágio, verdadeiros conceitos.

> Assim, o pseudoconceito, considerado como fase específica no desenvolvimento do pensamento infantil por complexos, conclui todo o segundo estágio e inaugura o terceiro estágio no desenvolvimento do pensamento infantil, servindo como elo entre eles. É uma ponte lançada entre o pensamento concreto-metafórico e o pensamento abstrato da criança. (VIGOTSKI, 2000, p. 199).

Uma criança que expressa o entendimento de quadrado como uma figura geométrica formada por quatro lados iguais revela, ainda, seu estágio de desenvolvimento conceitual em nível de pseudoconceito, porque tal definição não é suficiente para conceituar o quadrado.

De acordo com Vigotski (2000, p. 190):

> Em situação experimental, a criança produz um pseudoconceito cada vez que se vê às voltas com uma amostra de objetos que poderiam ter sido agrupados com base em um conceito abstrato. Consequentemente, essa generalização poderia surgir na base de um conceito, mas na criança ela realmente surge com base no pensamento por complexos.

Todo o movimento e as fases do complexo já mencionados são importantes para a formação do pensamento conceitual na criança. Têm um caráter associativo na medida em que evoluem, pois se complexificam. Entretanto, há uma ausência da unidade de vínculos, isto é, eles são criados, mas não constituem uma unidade. Por exemplo (no início), o nome é em si, simplesmente, não tem significado. A criança atribui um sentido para a palavra, mas não significa que se trata do conceito científico da palavra. O desenvolvimento do pensamento em complexo não ocorre a partir do nada, mas de uma atividade objetal. No entanto, não é o objeto em si que determinará, na criança, as bases do conhecimento, e sim a tarefa que é proposta sobre ele. O complexo é o primeiro estágio que traz uma característica importante do desenvolvimento do pensamento conceitual: o estabelecimento de vínculos e relações. Portanto, lança as bases de vinculação das ideias retrospectiva e prospectiva. Isso faz com que, por um lado, aclare todas as fases de pensamento por complexos percorridos pela criança e, por outro, una-se transitoriamente ao estágio novo e superior: a formação de conceitos (VIGOTSKI, 2000). Portanto, o pensamento infantil por complexos é a base para que ocorra a evolução do desenvolvimento do terceiro e do último estágio do pensamento infantil: os conceitos genuínos. Esses, em suas primeiras fases, não seguem uma ordem cronológica, mas ocorrem de forma transitória, em consequência da experiência cotidiana (VIGOTSKI, 2000). Para Davídov (1988, p. 126), o conceito é concebido "[...] como forma de atividade mental por meio da qual se reproduz o objeto idealizado e o sistema de suas relações, que em sua unidade refletem a universalidade ou a essência do movimento do objeto material".

O pensamento conceitual, propriamente dito, combina complexização/homogeneização e sua função genética "[...] é desenvolver a decomposição, a análise e, a abstração." (VIGOTSKI, 2000, p. 220). Por exemplo, a palavra *casa* pode significar "moradia", ser a terceira pessoa do singular (ela/ele casa) ou, ainda, denotar a casa da camisa, a casa da calça, a casa da bermuda, etc. O desenvolvimento do pensamento conceitual, na criança, segue o seguinte movimento dialético em que se estabelece a seguinte relação: universal → geral → particular → singular. Isso se explicita no exemplo anterior: a palavra (universal) tem um modo de escrita, os fonemas (geral), que se reflete em uma singularidade (casa) dotada de significado (particular). O processo de decomposição identificará e tratará das abstrações. Para Davídov (1998), o pensamento teórico se dá por vários tipos de abstrações.

De acordo com Vigotski (2000), o pensamento por conceito apresenta quatro fases. A primeira tem como principal característica as abstrações positivas e negativas marcadas pelo estabelecimento de um único traço. Na segunda fase, estão os conceitos *potenciais,* em que ocorre o destaque de um grupo (complexos) de objetos e, a partir disso, ocorre a generalização com base em pontos comuns. Na terceira fase, há uma combinação de atributos, é o estágio de complexidade (concreto pensado). Nesse momento, não há mais vínculo com o concreto. Por exemplo, expressa o conceito de círculo em palavra. Na quarta fase, ocorre a formação de conceitos no seu mais alto grau de complexidade (conceitos verdadeiros) (VIGOTSKI, 2000). Davídov (1988, p. 6) afirma que o pensamento teórico é “[...] um procedimento especial com que o homem enfoca a compreensão das coisas e os acontecimentos por via da análise e das condições de sua origem e desenvolvimento”. Para o referido autor, esse tipo de pensamento promove abstrações e generalizações teóricas, consequentemente ocasiona rupturas em relação ao pensamento cotidiano.

Qual é um dos grandes problemas na formação dos conceitos? Segundo Vigotski (2000), é a aplicação ao nível abstrato dos conceitos, pois corre o risco de cair num puro verbalismo. Ainda, para Vigotski (2000, p. 228), “[...] só na adolescência a criança chega ao pensamento por conceitos e conclui o terceiro estágio da evolução do seu intelecto”. Esse não é um período de conclusão, mas sim de amadurecimento do pensamento. Por isso que a transição do abstrato (adolescente) para o concreto (adulto) é muito complexa, momento em que se desenvolve o seu pensamento dialético (VIGOTSKI, 2000). Nesse sentido, para alcançar a formação de conceitos em nível abstrato, requer das crianças a assimilação do conhecimento em sua essência, isto é, em teor científico. De acordo com Leontiev (1991, p. 116):

> [...] para aprender conceitos, generalizações, conhecimentos, a criança deve formar ações mentais adequadas. Isto supõe que estas ações se organizem ativamente. Inicialmente, assumem a forma de ações externas que os adultos formam na criança, e é só depois que se transformam em ações mentais internas.

Vale reafirmar que Vigotski (2000), ao falar de conceito, preocupa-se com a distinção entre conceitos espontâneos dos não espontâneos (científicos). Por exemplo, o processo de ensinar o nome da cor dos objetos não tem um teor científico, conclama por relações mediadas caracterizadas por seus nexos, isto é, possui o teor da ciência. Por consequência, em termos de pensamento, requer e desenvolve as funções como memória e atenção da criança. Nesse processo, a imitação se constitui em elemento essencial por ser um processo de apropriação do gênero humano. Vigotski (2000) trata a imitação no contexto da relação entre desenvolvimento e aprendizagem. Esta – que se adianta ao desenvolvimento – consiste na interiorização dos significados e instrumentos que, inicialmente, se apresentam em relações interpsicológicas. É nessa inter-relação entre externo e interno que se constitui o que Vigotski (2000) denomina Zona de Desenvolvimento

Proximal. Ou seja, emanam as possibilidades de, na interação com outros mais experientes, as crianças se apropriarem das elaborações humanas e, por consequência, desenvolverem as funções mentais superiores. A imitação, portanto, não é um simples ato mecânico de repetir o que alguém faz. Vigotski (2000) a coloca como uma das mediações necessárias nos processos interpessoais, pelas quais ocorrem internalizações dos sujeitos como reflexo de uma realidade.

Davídov (1988) chama conceito empírico e conceito teórico, cuja diferença entre ambos está no fato de que o primeiro contempla apenas as propriedades externas do objeto. O conceito teórico requer o descobrimento das relações internas, que se dá por meio de abstrações e mediações em um sistema integral em sua formação.

Vigotski (2000), em seu estudo, tentou mostrar a sua compreensão acerca do desenvolvimento do pensamento conceitual. Para isso, foi imprescindível falar do desenvolvimento e da aprendizagem, mais especificamente da atenção e da memória. Ou seja, a atenção para chegar ao nível de pensamento conceitual de simples atenção para atenção arbitrária e, memória a memória lógica para atenção lógica.

Mas quando a atenção e a memória se tornam uma função? Quando elas se intelectualizam, ou seja, quando elas passam ser pensadas, conscientizadas? Esse movimento ocorre na fase escolar, quando se dá a tomada de consciência. Conforme Vigotski (2000, p. 283), "[...] o desenvolvimento dessa capacidade é o que constitui o conteúdo principal de toda a idade escolar". De acordo com Davídov (1988, p. 125), "[...] o conteúdo do pensamento teórico é a existência mediatizada, refletida, essencial". O pensamento teórico promove a reprodução mediante o processo de idealização das características internas na atividade objetal prática (DAVÍDOV, 1988).

É nesse estágio que não há distinção para a criança entre memória e atenção, pois "[...] dizer que a memória se intelectualiza na idade escolar é exatamente dizer que surge a atenção arbitrária [...]" (VIGOTSKI, 2000, p. 283). Vale elucidar que a essência da tomada de consciência para Vigotski e Piaget é distinta. Para Piaget, ocorre a tomada de consciência no momento em que a criança abandona o conhecimento anterior para dar lugar ao novo.

Para Vigotski, é na intelectualização das funções memória e atenção e sua respectiva assimilação que traduzem "[...] dois momentos de um mesmo processo de transição das funções psicológicas superiores." (VIGOTSKI, 2000, p. 283). Então, qual é o conteúdo da idade escolar? É o desenvolvimento da capacidade para tomada de consciência e arbitrariedade. É o pensamento teórico. A consciência sempre representa um fragmento da realidade. Vigotski (2000) demonstra quatro estágios, no que tange à evolução dos conceitos: o sincrético (antes dos 3 anos), o complexo (a partir dos 3 anos), o pré-conceito (fase do Ensino Fundamental) e o conceito (na transição do Ensino Fundamental para o Ensino Médio), já mencionados e descritos anteriormente. Para tanto, apresentaremos um exemplo para expor a crítica que Vigotski faz a Piaget: a criança aprende a fazer o nó, mas não sabe o que é o nó, ou seja, não toma consciência do que é o nó. Para ter consciência, está ligada à generalização, requer a sistematização do conceito. Nas palavras de Vigotski (2000, p. 292):

> Desse modo, a generalização de um conceito leva à localização de dado conceito em um determinado sistema de relações de generalidade, que são os vínculos fundamentais mais importantes e mais naturais entre os conceitos. Assim, generalização significa ao mesmo tempo tomada de consciência e sistematização de conceitos.

Nesse sentido, Davídov (1998, p. 126) entende que “[...] a ação de construção e transformação do objeto mental constitui o ato de sua compreensão e explicação, o descobrimento de sua essência [...]” – isto é, a generalização do conceito.

Nesse sentido, Vigotski (2000) discute, contrapõe parte das teorias existentes em quatro estudos, a fim de desenvolver uma hipótese de trabalho que leva a uma única concepção do problema da aprendizagem e do desenvolvimento, cujo objetivo consistiu em descobrir as complexas relações entre estes nas áreas concretas do trabalho escolar. Para o referido autor, “[...] aprendizagem e desenvolvimento são sinônimos.” (VIGOTSKI, 2000, p. 301).

O primeiro estudo focou na maturidade, voltada para as possibilidades do pensamento do conceito científico. A leitura e a escrita – uma função específica da linguagem, não percorrem o mesmo caminho da fala, tampouco uma complementa a outra, pois a linguagem escrita é abstrata e a linguagem falada é concreta. Esses são os focos para se trabalhar a maturidade. “A escrita de uma criança de oito anos deve necessariamente lembrar a fala de uma criança de dois.” (VIGOTSKI, 2000, p. 311). O movimento com lápis na escrita desenvolve uma série de funções cerebrais. O limiar é onde aparecem as primeiras limitações. Desse modo, a linguagem escrita requer dupla abstração da criança, qual seja, o aspecto sonoro da linguagem e do interlocutor. Consequentemente, a linguagem escrita se torna mais complexa que a linguagem falada. Em outras palavras, da mesma forma que

> [...] a álgebra é mais difícil do que a aritmética para a criança. A linguagem escrita é a álgebra da escrita. Entretanto, da mesma forma que a apreensão da álgebra não repete o estudo da aritmética mas representa um plano novo e superior de desenvolvimento do pensamento matemático abstrato, que reconstrói e projeta para o nível superior o pensamento aritmético anteriormente constituído, de igual maneira a álgebra da escrita ou linguagem escrita introduz a criança no plano abstrato mais elevado da linguagem, reconstruindo, assim, o sistema psicológico da linguagem falada anteriormente construído. (VIGOTSKI, 2000, p. 314).

Cabe ressaltar que essa dificuldade está no fato de que a necessidade, a motivação pela linguagem falada, é muito maior que a linguagem escrita. Afinal, não precisamos criar motivações para a fala, tal movimento não acontece para a escrita, pelo contrário, criar uma situação é imprescindível para representá-la no pensamento. A comunicação verbal se faz presente desde o início e se desenvolve ao longo de toda a infância da criança. Diferentemente ocorre com a álgebra da escrita, a motivação advém somente no momento que se tem acesso ao estudo da escrita, ou seja, no motivo para a escrita há ligações rudimentares. Cabe ressaltar que só há atividade se houver um motivo. De acordo com Leontiev (1983), o motivo existirá mediante uma necessidade do sujeito. Nesse sentido, no início da idade escolar, não está clara a motivação para o ensino, embora haja um motivo. Portanto, a função da escola é desenvolver tarefas de estudo. Para tanto, Núñez (2009, p. 80), apoiado em Leontiev (1983), diz que "[...] a motivação da aprendizagem deve levar à transformação dos objetivos de aprendizagem em motivos, de forma tal que a motivação seja premissa, componente e resultado da atividade de aprendizagem". Desse modo, se a necessidade do desenvolvimento da escrita não estiver suficientemente madura, como consequência, o processo de desenvolvimento da linguagem apresentará retardos (VIGOTSKI, 2000). Por isso, sobre a escrita, pode-se afirmar que "[...] é um processo inteiramente diverso da fala. Ela é uma álgebra da fala, uma forma mais difícil e mais complexa de linguagem intencional e consciente." (VIGOTSKI, 2000, p. 318).

No segundo estudo, Vigotski (2000) focou no papel de desenvolvimento, a zona imanente. Refere-se à atividade intelectual. Para tal, apresenta dois conceitos: o cognitivo e o intelectual. Nesse estágio do estudo, verificou-se que

> [...] a aprendizagem está sempre adiante do desenvolvimento, [...] sempre haverá discrepância e nunca paralelismo entre o processo de aprendizagem escolar e o desenvolvimento das funções correspondentes. (VIGOTSKI, 2000, p. 322).

Portanto, o desenvolvimento possui sua própria lógica; logo, não é subordinado ao currículo escolar. Ou seja, o compasso da tomada de consciência e da arbitrariedade não é o mesmo para o desenvolvimento de determinadas grades conceituais, como gramática, operações aritméticas, entre outras. Assim, "[...] a curva do desenvolvimento não coincide com a curva do aprendizado do programa escolar, no fundamental a aprendizagem está à frente do desenvolvimento [...]" (VIGOTSKI, 2000, p. 324). Para Davídov (1988, p. 66), "[...] a apropriação da autêntica cultura por parte dos indivíduos contribui a seu desenvolvimento como sujeitos universais da atividade".

Vigotski (2000), em seu terceiro estudo, o foco incidiu para o processo de aprendizagem. Em suas pesquisas, constatou-se que o desenvolvimento intelectual da criança não ocorre por distribuição, tampouco por meio da sistematização de matérias. Ou seja, a aritmética não se desenvolve de maneira isolada ou independente. "A tomada de consciência e a apreensão ocupam o primeiro plano no desenvolvimento de igual maneira na aprendizagem da gramática e da escrita." (VIGOTSKI, 2000, p. 325). Nesse sentido, Davídov (1988, p. 196) faz seus estudos sobre o processo de aprendizagem com base em experimento formativo, pois

> [...] a educação e o ensino desenvolventes tratam com a criança como individualidade, com a atividade integral que reproduz no indivíduo as necessidades, as capacidades, os conhecimentos e as formas de comportamento socialmente elaboradas.

Portanto, seria errôneo afirmar que nas crianças o desenvolvimento do pensamento abstrato acontece por meio da estruturação de disciplinas isoladas que compõem o currículo escolar. Vigotski constatou que

> [...] existe um processo de aprendizagem; ele tem a sua estrutura interior, a sua sequência, a sua lógica de desencadeamento; e no interior, na cabeça de cada aluno que estuda, existe uma rede subterrânea de processos que são desencadeados e se movimentam no curso da aprendizagem escolar e possuem a sua lógica de desenvolvimento. Uma das tarefas fundamentais da psicologia da aprendizagem escolar é descobrir esta lógica interna, esse código interior de processos de desenvolvimento desencadeados por esse ou por aquele processo de aprendizagem. (VIGOTSKI, 2000, p. 325).

De acordo com o referido autor, durante as aulas, as crianças desenvolvem o pensamento abstrato, todavia tal desenvolvimento não se dá por meio de disciplinas isoladas, como propõe a estruturação escolar. Em outras palavras, o desenvolvimento do pensamento abstrato se manifesta na unidade e não por decomposição, como nos propõem o atual ensino escolar.

No quarto estudo, Vigotski (2000) tentou aplicar um novo procedimento metodológico. Qual seja, desenvolvimento → memória → atenção → memória → atenção arbitrária → esse movimento é o geral. Nesse sentido, em questão de método, de processos metodológicos, Davýdov propõe um sistema de ensino que desenvolve. O conceito cotidiano é o conhecimento imediato. A zona de desenvolvimento imediato são possibilidades. A imitação não é algo mecânico, ela está em movimento. A criança só imita aquilo que tem condições de imitar. A diferença está na natureza do conceito (entre científico e espontâneo). Os conceitos espontâneo e científico vêm ao encontro um do outro. O espontâneo começa de baixo para cima e o específico de cima para baixo. Cabe destacar que o papel da escola é transmitir o conceito científico, pois o conceito cotidiano, segundo Davýdov (1982), obstaculiza o processo de desenvolvimento do conceito científico. Em outras palavras, o conhecimento empírico consiste na análise da relação imediata com o objeto, enquanto que o científico vai para além das propriedades e características externas do objeto. Em consonância, Kalmykova (1991, p. 12) afirma:

> [...] a base psicológica necessária para uma correta formação dos conceitos é uma assimilação tal que permita criar condições entre os componentes abstratos e concretos do pensamento, entre a palavra e a imagem.

Vale dizer, ainda, que ambos os conceitos fazem leitura de mundo distintas. Por exemplo, no ensino tradicional, um estudante que aprende a matemática como ciência estática, voltada apenas para as relações numéricas, que têm como peculiaridade central a contagem, criará uma imagem de mundo. Por sua vez, aquele que compreende a matemática como ciência das relações entre os diferentes tipos de grandezas, terá outra concepção de mundo. Portanto, essas distintas apreensões da matemática produzem determinadas lógicas que nos permitem ver o mundo em movimento ou estático.

Essa dupla concepção cria a necessidade de explicitação de que, ao falarmos em ensino que desenvolve o ser humano para uma sociedade atual pautada pelo princípio da igualdade, uma das possibilidades de fundamentação é a Teoria Histórico-Cultural, pautada nos pressupostos de Vigotski (DUSAVITSKII, 2014).

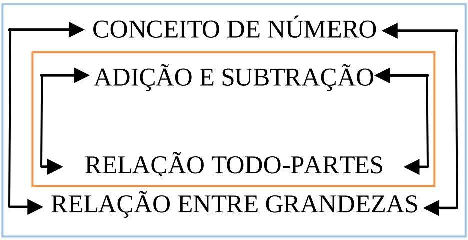
3 O MODO DAVYDOVIANO DE ORGANIZAÇÃO DO ENSINO: O MOVIMENTO DE PERMANÊNCIA E SURGIMENTO DE CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA CONCEITUAL

De início, vale esclarecer que o título do presente capítulo reflete aquilo que denominamos de centralidade das análises do o objeto de estudo, definido na seção 1.1 da dissertação. O sistema conceitual a que se refere é constituído pela adição e subtração. Também vale dizer que, ao adotarmos o modo davydoviano de organização do ensino, entendemos que se trata de mais uma tendência em Educação Matemática. E que, como tal, surgiu pela necessidade de qualificar o ensino (ROSA; DAMAZIO, 2012). Isso significa que outras tendências se manifestaram no contexto da Educação Matemática (DAMAZIO; ROSA, 2012; FIORENTINI, 1995), as quais mais sedimentam aquilo que é questionado do que qualificam o ensino. Elas mudam o método, mas o conteúdo permanece o mesmo (DAVÝDOV, 1982). A proposição davydoviana se apresenta como algo diferente em método e conteúdo (LIBÂNEO, 2004), com a finalidade de colocar o estudante em ação investigativa para apreender a atividade de estudo (ROSA, 2012).

A finalidade é investigar as peculiaridades do modo de organização do ensino davydoviano para o sistema conceitual de adição e subtração. Para tanto, analisaremos algumas tarefas trazidas nos livros didáticos e de orientação aos professores. A centralidade está para o movimento do que é considerado essencial no processo de apropriação, por parte dos estudantes, do referido sistema conceitual. Isso gera a necessidade de estar atento às ideias centrais focadas nas tarefas particulares a serem desenvolvidas pelos estudantes. Para tal finalidade, a referência são os livros didáticos e as correspondentes orientações propostas aos professores para a condução dos estudantes na resolução das tarefas. O movimento da análise se caracteriza pelo que emerge nas tarefas como essencial do sistema de conceito, sua permanência e superação no decorrer do primeiro ano, correspondentes ao ensino fundamental.

A seguir, faremos o estudo das tarefas que, no nosso entendimento, são representativas do caminho percorrido pelo modo davydoviano de organização do ensino do referido sistema conceitual e, por consequência, para o desenvolvimento do pensamento conceitual dos estudantes. Sendo assim, elas orientam o processo de análise voltado ao movimento revelador das intenções e essências conceituais, com ênfase para a suas permanências, superações e surgimento.

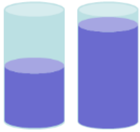
Antes, porém, vale relembrar que a universalidade do sistema conceitual de adição e subtração, conforme Rosa (2012), Rosa, Damazio e Alves (2013), é relação todo-partes. Mas no modo davydoviano de organização do ensino, conforme Горбов, Микулина, Савельева (2008) e Давыдов (2012), ela tem sua gênese em tarefas iniciais do primeiro ano em que a preocupação central é colocar as crianças em ação investigativa referente aos diferentes tipos de grandezas e suas relações, que são base do conceito teórico de número. Isso significa dizer que, nessa perspectiva, os conceitos científicos (teórico) de adição e subtração se apresentam no âmbito do conceito de número como relações entre grandezas que se expressam na especificidade todo-partes. Em síntese, os estudos apontados até o momento nos dão subsídios para que, no processo de análise, possamos admitir que, até então, as tarefas do modo davydoviano de organização do ensino imprimiram um movimento conceitual. Desse modo, a adição e a subtração se inserem no contexto do conceito de número entendido como relação entre grandezas. Esquematicamente:



Fonte: Produção nossa com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008) e Давыдов et al. (2012).

Nesse âmbito, o movimento pertinente ao desenvolvimento do pensamento conceitual de adição e subtração, em sua tarefa introdutória (Ilustração 1), traz um componente conceitual que preanuncia a relação essencial todo-partes. Sobre uma mesa da sala de aula estão dois recipientes iguais, com volumes de líquido diferentes (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 1: Determinação da diferença



Fonte: Produção com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008).

As crianças estabelecem a relação entre os volumes de líquido dos dois recipientes e concluem que o segundo é maior que o primeiro. O professor solicita que elas registrem no caderno a diferença de volume por meio de segmentos de reta[1], enquanto ele realiza a mesma representação no quadro (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008), conforme ilustração 2. Esse tipo de registro é denominado por Davýdov (1982) representação gráfica[2] (por segmento de retas).

Ilustração 2: Representação gráfica da ação objetal

Fonte: Produção com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008).

Com o registro no quadro, o professor explica que o objetivo da tarefa é igualar os volumes dos recipientes. Para tanto, estabelece uma condição: o recipiente com menor volume precisa ter a mesma quantidade de líquido que o outro[3]. Ele questiona: O que precisamos fazer para cumprir a condição estabelecida? Espera-se que as crianças respondam: Temos que colocar líquido no primeiro recipiente. Se assim for, o professor atende à sugestão das crianças, porém, propositalmente, coloca no recipiente a quantidade de água que, visivelmente, não é suficiente. Essa ação requer das crianças atenção à manipulação para que o alertem a fim de colocar mais

[1] O conceito de linha reta e segmentos de reta já foi introduzido e desenvolvido em tarefas anteriores que tratavam das grandezas. É neste momento que as crianças aprendem novas figuras geométricas, como linha, linha reta, ponto e segmento de reta.

[2] No sistema davydoviano, as crianças se envolvem em três tipos de representação: objetal, gráfica e literal.

[3] Sugestão: Esta tarefa pode ser dada na forma de uma história, por exemplo, ligada à composição de uma poção, etc.

> líquido. Então o professor lhes solicita uma orientação mais apropriada, isto é, que expliquem qual é exatamente a quantidade que falta, **a diferença**. Finalmente, ele iguala o volume de água e sugere que façam o mesmo com os segmentos registrados nos cadernos (Ilustração 3). As crianças completam com outra cor o segmento menor, de tal modo que ele fique igual ao comprimento do segmento maior (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 3: Igualar os volumes

Fonte: Produção com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008).

Realizada a alteração no segmento de reta menor, a fim de se igualar ao segmento maior, o professor sintetiza a tarefa com alguns questionamentos: 1) Vocês fizeram a mesma manipulação que eu? Espera-se que as crianças respondam "sim". 2) Eu coloquei líquido. E vocês, o que colocaram? Suponha-se que respondam: Não colocamos líquido, mas completamos o desenho. 3) Como, então, poderemos chamar a nossa ação? A conversa, de cunho orientativo, dará as condições para que as crianças expressem a conclusão: Assim como o professor, também **aumentamos**, ou, ainda, completamos a **diferença** (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

A **primeira tarefa** trata de elementos conceituais, tais como: a medição, o aspecto quantitativo (aumentar o volume) e a representação do resultado da medição. Os direcionamentos do professor colocam o pensamento das crianças em movimento, na busca da explicitação da relação universal todo-partes, peculiar ao conceito teórico de adição e subtração. Isso ocorre pelo trânsito dos estudantes por dois tipos de representações: objetal (recipientes e líquido) e gráfica (segmentos). Haveria duas possibilidades de solução: aumentar e diminuir o volume de líquido de um ou de outro recipiente e do respectivo segmento. Porém, a tarefa direciona para a ideia de aumentar. No entanto, isso só é possível com a presença do outro recipiente e do segmento, que possibilitam a comparação. Nesse âmbito, implicitamente, configura-se outra ideia central do sistema conceitual em foco que é a relação de igualdade e desigualdade. Ora, se é preciso aumentar, significa que se está diante de uma desigualdade que, conceitualmente, demanda um movimento que leve à igualdade, o que requer uma referência, no caso, o recipiente com maior volume. Nessa circunstância de aumento, configura-se o prenúncio de outra ideia caracterizadora do sistema conceitual: se há uma parte e se é necessário o acréscimo de outra para atingir o todo. Горбов, Микулина е Савельева (2008) dizem que, nessas duas representações, há uma ideia peculiar à adição que é **determinar** a diferença. Ou seja, tem-se uma parte conhecida e se faz necessária a identificação da outra parte, o que ocorre com a determinação da diferença.

Observa-se que a primeira tarefa traz ideias e abstrações com um teor anunciativo, pois elas se apresentam no contexto da primeira ação de estudo[4] do modo davydoviano de organização de ensino. A atenção não está somente para a manipulação dos objetos, mas no movimento que incita o surgimento de elementos conceituais que se configurarão na representação gráfica que a situação propõe[5]. Nesse caso, a relação entre dois segmentos de retas, em que um deles (o mais curto) precisa ser aumentado até se igualar[6] ao de maior comprimento, concomitantemente à ação objetal de acrescentar líquido no recipiente. Assim sendo, a relação todo-partes se inicia no âmbito conceitual das abstrações de igualdade e desigualdade, representado por duas grandezas distintas: a objetal, que tratou do volume, e a gráfica (representação geométrica), reveladora da grandeza comprimento.

Vale esclarecer que esses elementos são prolongamentos do que foi desenvolvido em tarefas anteriores, dentre outros, a manipulação de objetos e a construção dos segmentos de retas, em atendimento à finalidade de formação do pensamento teórico de número, atrelado à relação entre grandezas no processo de medição. Em outros termos, é esse o contexto de introdução dos conceitos de adição e subtração, bem como suas relações internas sobre equação e resolução de problemas. Ao ter como referência uma situação objetal, atende a uma das “[...] teses fundamentais da teoria materialista dialética do pensamento [...]”, conforme defende Davýdov (1982, p. 278).

[4]Transformação dos dados da tarefa, a fim de revelar a relação universal do objeto de estudo.

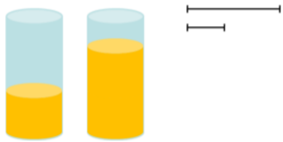
[5]Outras tarefas referentes às relações de igualdade e desigualdade já foram desenvolvidas anteriormente para introduzir a representação gráfica.

[6]Para Caraça (1951, p. 53), “[...] um segmento de reta é uma grandeza geométrica”.

Enfim, essa tarefa da proposição davydoviana, ao prenunciar a relação todo-partes, traz dois novos componentes, conforme esquema a seguir: 1) a ideia comparativa entre duas grandezas pertinente à adição; 2) uma representação objetal e outra gráfica, sem ainda se apresentar a necessidade de expressar o valor numérico. Isso significa que a relação universal do sistema conceitual de adição e subtração não traz explicitamente uma significação aritmética. Em vez disso, revela-se a inter-relação entre o objetal e o geométrico.

A **segunda tarefa** é semelhante à anterior, pois são colocados diante dos estudantes dois recipientes de formatos iguais e com volumes de líquidos diferentes. Dessa vez, a condição estabelecida é igualar o volume de líquido maior com o volume menor, com o objetivo de representá-los por meio de segmentos de reta (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

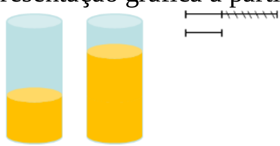
Ilustração 4: Igualar os volumes



Fonte: Produção com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008).

Verifica-se que os estudantes se envolvem em operações da ação de **retirar** líquido do volume maior, diferentemente do que ocorreu na tarefa anterior, que requeria o aumento. Isso significa que, implicitamente, há uma outra condição própria da operação da subtração, ou seja, eliminar a diferença. Com a construção dos dois segmentos (Ilustração 5), torna-se possível a demonstração de movimento necessário para igualar as quantidades. Para tanto, são feitos riscos em uma parte do segmento maior (Ilustração 5), simulando a sua diminuição (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 5: Representação gráfica a partir da ação objetal



Fonte: Produção com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008).

Subjacente à ação realizada, também está a relação todo-partes. O ponto de partida é o volume maior (todo) e o ponto de chegada, o volume menor (uma parte). O mesmo ocorre no que diz respeito ao comprimento dos segmentos de reta, em que a parte cortada em um deles é destacada por meio de “riscos”. Tal movimento, “retirar líquido” e “riscar o segmento”, traz a ideia peculiar da operação subtrativa que, segundo Горбов, Микулина e Савельева (2008), é **eliminar**[7] a diferença. Portanto, difere da tarefa anterior, pois contempla a ideia aditiva que consiste em **determinar** a diferença. Nesse sentido, Davídov (1988, p. 176) diz que “[...] a lei geral de interiorização, a forma inicial das ações de estudo é seu cumprimento desdobrado em objetos exteriormente representados”. A ação objetal está fortemente presente nas tarefas davydovianas, pois constitui a base para desenvolver capacidades psíquicas como reflexão e análise. Consequentemente, para o desenvolvimento da consciência e do pensamento teórico.

Na referida tarefa, os elementos que permaneceram em relação à anterior foram: a ação objetal e gráfica para as respectivas grandezas, volume e comprimento, sem qualquer presença do valor numérico. Cabe ressaltar que, embora as tarefas apresentadas contemplem somente grandezas contínuas, a proposição davydoviana também trata de situações com grandezas discretas (com o mesmo teor teórico das demais grandezas), por exemplo, a relação de igualdade e desigualdade entre objetos distintos.

As duas tarefas introduzem as relações internas dos conceitos de adição e subtração e, por extensão, a iminência de ideias referentes à equação, meio essencial de resolução de problemas. A ideia inicial de “acrescentar líquido” e aumentar um dos segmentos se vincula à necessidade de **determinar** a diferença, outra parte que se constitui em uma propriedade da adição. Assim, também “tirar líquido” e “riscar segmento” se caracterizam em especificidade da subtração, que requer a **eliminação** da diferença. Portanto, a diferença se refere tanto à adição (determiná-la) quanto à subtração (eliminá-la). É ela que gera o movimento caracterizador da relação de igualdade e desigualdade que, na proposição davydoviana, proclama a relação todo-partes. Caso fossem iguais, ter-se-ia o todo sem a necessidade de especificar as suas respectivas partes; consequentemente, não haveria qualquer relação pertinente ao sistema conceitual. Em outras palavras, a diferença permite o aumento ou a diminuição em relação ao todo.

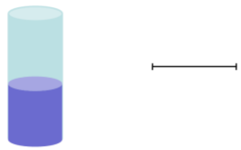
A **terceira tarefa** compõe-se de duas situações. A primeira

---

[7]Os grifos nas palavras **determinar** e **eliminar** são dos próprios autores.

estabelece que sobre a mesa do professor está um recipiente não cheio de líquido. As crianças desenham no caderno o segmento que representa o volume de líquido (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

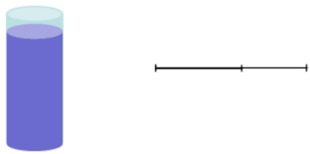
Ilustração 6: Ação objetal e representação gráfica inter-relacionadas



Fonte: Produção com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008).

Feito o registro, o professor coloca mais líquido no recipiente e sugere às crianças que representem esse procedimento no segmento de reta construído. Como o volume aumentou, então é conveniente aumentar o comprimento do segmento (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 7: Acrescentar o volume, consequentemente, aumentar o segmento de reta



Fonte: Produção com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008).

Na segunda situação, o professor mostra uma tira vermelha de papel[8], que também é distribuída para cada criança. No quadro, desenha um segmento de reta que representa o comprimento da tira apresentada (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

[8]A proposição davydoviana introduz as tiras de papel nas primeiras tarefas, anteriores a essas duas em processo de análise, com o objetivo de estabelecer relações e, consequentemente, ser o ponto de partida para a compreensão teórica do conceito de grandeza.

Ilustração 8: Estabelecer relação com a superfície de área e com o segmento de reta

Fonte: Produção com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008).

A próxima ação do professor é riscar uma parte do segmento construído. Então sugere que as crianças façam o mesmo com as suas respectivas tiras. Para elas, a nova representação gráfica indica a necessidade de diminuir o comprimento da tira, isto é, corta-se uma parte (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 9: Realizar a mesma ação em grandezas diferentes

Fonte: Produção com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008).

Essa terceira tarefa traz como peculiaridade externa a proposição de duas situações como forma de mostrar que as relações objetais não ocorrem somente com o envolvimento de um mesmo tipo de grandeza. Por isso, na primeira situação, explicita-se a grandeza volume e, na segunda, o comprimento da largura da tira de papel.

Outra particularidade da terceira tarefa diz respeito às operações a serem desenvolvidas, pois, diferentemente das anteriores, professor e estudantes têm incumbências distintas: modificação no objeto ou na representação gráfica. Na primeira situação, o professor faz a modificação no volume do recipiente, enquanto o procedimento dos alunos ocorre no segmento. Na segunda, invertem-se as incumbências: o professor altera o desenho e as crianças a tira de papel.

Mas em ambas as situações a característica interna (conceitual) que se distingue das duas tarefas anteriores é que o despontar da relação universal (todo-partes) não se apresenta na comparação entre duas grandezas a partir de dois objetos. Nesse momento, o manuseio e as transformações do volume e do comprimento em questão se dão, respectivamente, no próprio recipiente e na tira. Consequentemente, a representação gráfica se dá por um único segmento de reta, que é um implemento da base do modelo representativo a ser sistematizado em estágios superiores, isto é, na segunda ação de estudo[9].

[9]Modelação da relação universal diferenciada em forma objetal, gráfica ou por meio de letras pertinente ao sistema conceitual.

Importa destacar que esse movimento tem por base o pressuposto de Davídov (1988, p. 137) de que “[...] o surgimento do experimento sensório-objetal constituiu, por essência, o surgimento do pensamento teórico em sua forma externa, objetal”. Nesse sentido, importa dizer que as três tarefas analisadas no decorrer deste estudo apresentam um movimento em comum: a partir da manipulação de objetos (representação objetal), desenvolve-se a representação gráfica.

A **quarta tarefa** toma como referência de análise a seguinte situação (Ilustração 10): na mesa do professor, há um pacote de cereal, cuja massa é representada graficamente por meio do segmento de reta (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 10: Relação entre grandezas – massa e comprimento

Fonte: Produção com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008).

O professor faz uma “marca” no segmento com um pequeno traço vertical (Ilustração 11), mas não risca nenhuma das duas partes que se formaram (como feito em tarefas anteriores). Em seguida, questiona as crianças se ficou claro o que é preciso fazer com o cereal a partir da nova representação. Espera-se que elas tirem uma quantidade de cereal da embalagem, além de mostrarem a parte do segmento que representa o que restou de cereal (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 11: Nova representação gráfica

Fonte: Produção com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008).

Em seguida, o professor solicita a dois alunos para que se aproximem do quadro, a fim de que mostrem, por meio de gestos (com as duas mãos), a massa inicial (um aluno) e como ela ficou depois de ter sofrido a diminuição (outro aluno). Depois dessa representação gestual, o professor lhes propõe que marquem os dois comprimentos no segmento (Ilustração 12) com linhas em forma de arcos (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 12: A inserção dos arcos

Fonte: Produção com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008).

A tarefa se caracteriza por dois elementos não presentes nas anteriores. O primeiro diz respeito ao tipo de grandeza em referência, que não é mais o volume e sim a massa. Isso é revelador da preocupação para que as crianças tomem consciência de que as relações em cena não são exclusividade entre uma em si, mas em todos os tipos de grandezas.

O segundo elemento diz respeito à introdução da ideia de medida que, inicialmente, é indicada pelo intervalo entre as mãos. Em seguida, com a marcação dessa distância no segmento de reta, bem como com a inclusão de outros componentes na representação da relação universal todo-partes: os arcos. Estes se revestem de suma importância para a construção do modelo dos conceitos de adição e subtração e, nesse âmbito, para equação e resolução de problemas. Conforme Rosa (2012, p. 122),

> Os arcos constituirão uma importante ferramenta no processo de elaboração do esquema geral de resolução de problemas de adição e subtração. Além disso, subsidiarão a introdução de um novo tipo de representação das relações entre grandezas, a representação literal que, por sua vez, possibilitará a expressão das relações entre grandezas em sua forma abstrata.

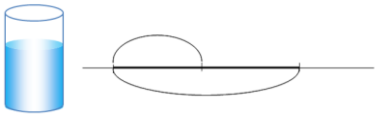
A inclusão do arco é anunciativa de que se trata de elemento essencial quando da segunda ação de estudo, isto é, a *modelação da relação universal*, diferenciada em forma *objetal, gráfica ou por meio de letras.*

Vale salientar que as análises, até o presente momento, mostram que, a cada tarefa proposta, são trazidos novos elementos e, ao mesmo tempo, mantidos aqueles introduzidos nas anteriores.

Observa-se que o objetivo principal da referida tarefa é a inserção de um novo elemento, o arco, que contribuirá para a evidência da relação todo-partes por meio do modelo.

A **quinta tarefa** disponibiliza aos estudantes um recipiente com líquido que está na mesa do professor e, também, um desenho no quadro, conforme ilustração 13 (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008):

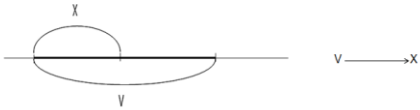
Ilustração 13: A inserção do modelo



Fonte: Produção com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008).

A tarefa prevê uma simulação por parte do professor, qual seja: os alunos da outra sala alteraram o volume de líquido no recipiente e demostraram o movimento realizado por meio do desenho que está no quadro. Ele questiona: Que procedimento foi efetuado por tais alunos? Isso, na certa, promoverá discussões entre as crianças, com intervenções do professor. Em decorrência, verificam que, na forma como o desenho se apresenta, impossibilita a indicação de que houve aumento ou diminuição do volume. Em outras palavras, são dois volumes cujo desenho não proporciona os elementos suficientes para a indicação do volume inicial e, consequentemente, do volume final. Por saber do procedimento adotado pelos alunos da outra turma, o professor auxilia as crianças para descobri-lo com o auxílio de letras. Para tanto, coloca em cada arco uma letra (X e V), bem como acrescenta no registro uma seta com as mesmas letras, respectivamente, na origem e na extremidade, conforme ilustração 14 (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

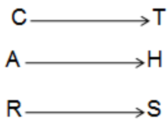
Ilustração 14: Representação literal



Fonte: Produção com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008).

Por consequência das discussões orientadas pelo professor, as crianças considerarão que *V* e *X* indicam, respectivamente, o volume maior e menor. Sendo assim, no registro de seta, as letras (*V* e *X*) expressam o volume inicial e final. Trata-se, pois, de uma representação literal que dá condições para as crianças compreenderem que o registro traduz o movimento realizado pelos alunos da outra turma: o volume de líquido inicial era maior que o final. Em seguida, é solicitado que uma criança vá até a mesa do professor para que proceda com o líquido do recipiente o que indica o desenho (representação literal). O professor acrescenta outra informação: na matemática, os valores geralmente são representados por letras. Por isso sugere que as crianças reescrevam o registro (representação literal) como forma de demonstrar que a escolha das letras tem caráter livre, como indica a ilustração 15 (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 15: Diversas formas da representação literal



Fonte: Produção com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008).

Observa-se que nessa tarefa se apresentam como novos elementos as letras e a utilização de setas que, de acordo com Rosa (2012), são anunciadores da segunda ação de estudo[10]. As letras representam os valores das grandezas e se tornam um dos componentes teóricos dos conceitos matemáticos. Conforme Costa (1866, p. 104), “[...] cada número pode ser representado por uma ou mais letras, em lugar de sê-lo por meio de algarismos. As letras são, do mesmo modo que os algarismos, símbolos matemáticos”.

[10]Modelação da relação universal diferenciada em forma objetal, gráfica ou por meio de letras.

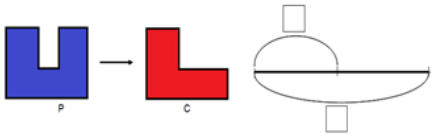
As características assumidas pela presente tarefa dão subsídios para um primeiro anúncio de síntese de nossa parte: diferentemente do ensino tradicional, as operações de adição e subtração são propostas por meio da relação entre grandezas, cujo cálculo aritmético não é introduzido de imediato. Primeiramente, é desenvolvido um processo repleto de mediações, abstrações e relações, como aquelas evidenciadas em todas as tarefas discutidas que apontam para um sistema conceitual que ainda não se prendeu à utilização dos algarismos singulares, representativos de uma situação particular. Em vez disso, a preocupação é prover o estudante de um modo geral que advém do movimento de representação objetal e gráfica, até atingir a expressão literal.

Observa-se que a inserção da seta tem um significado especial: indica a operação a ser realizada. Essa busca de um modo geral possibilita um movimento de ir e vir entre as diferentes representações. No caso, é o início de uma declaração de que se trata de uma subtração, o que remete à retirada do líquido do recipiente. O movimento explicitado na referida tarefa, bem como nas anteriores, reflete o pensamento de Kalmykova (1991, p. 13), ao dizer que "[...] entre os conceitos com ligações, têm que se estabelecer relações e devem-se organizar em determinado sistema". Com isso, queremos dizer que todo esse processo não será exclusivo da adição e da subtração, mas, na certa, se apresentarão novos elementos que constituirão o sistema conceitual, como, por exemplo, o de equação. E, por extensão, se constituirão em operações da atividade de estudo necessárias à resolução de problemas.

Em síntese, a contribuição dessa tarefa no movimento de formação do conceito é a representação literal, genérica, de base algébrica, além da indicação do ponto de partida e de chegada (aumento ou diminuição) por meio da seta, imprescindível para a realização da ação objetal. Acresce-se, ainda, que o desenho com os arcos se constitui em um esquema que mediará a definição simultânea das duas operações (adição e subtração), bem como da identificação do todo e das partes.

A **sexta tarefa** propõe que o estudante marque no esquema as representações corretas referentes às áreas P e C, indicadas na ilustração 16 (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 25).

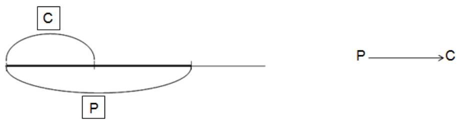
Ilustração 16: Completar o modelo com base na representação objetal



Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

De acordo com o desenho, verifica-se que a grandeza em foco é área. A seta é indicadora de que houve alteração da superfície de área P, que gerou uma nova área, C. Ao discutir o desenho, espera-se que as crianças percebam que a situação inicial é área maior, representada pela letra P. Em decorrência, C é resultante de uma alteração, isto é, houve uma diminuição da área inicial. As respectivas letras devem ser marcadas nos dois quadrados que constam no esquema proposto. Em seguida, o professor sugere às crianças que representem de outra forma o procedimento realizado. Trata-se da representação literal no esquema acrescido do uso da seta indicadora do movimento requerido pela tarefa, traduzido na ilustração 17 (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 17: Modelos gráficos e literal



Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

A sexta tarefa trata das mesmas ideias da anterior, isto é, de uma representação objetal por meio do esquema e sua expressão literal. No entanto, tem sua peculiaridade o fato de que o esquema e a representação literal não estão prontos, mas sim em processo de construção. Cabe às crianças a compreensão necessária para preencher de forma coerente os espaços solicitados, o que requer a identificação da área maior e menor, bem como desenhar a seta indicadora do movimento. A apropriação, pelos estudantes, do conjunto dos elementos constitutivos do esquema e suas respectivas funções são essenciais, não como representação literal genérica, mas como subsidiadora da compreensão da relação todo-partes. Davýdov e colaboradores (2008) sugerem o uso frequente da representação do referido esquema (segmento, arcos, letras e seta), desde que entendido como em uma unidade.

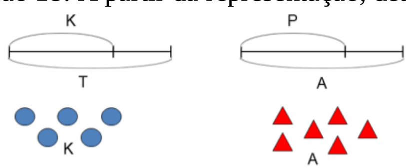
Esse movimento se constitui em mais uma das possibilidades que cria a necessidade interna de aprender; isto é, coloca o estudante em atividade de estudo, com vista ao desenvolvimento do pensamento teórico. Por isso, cada tarefa proposta contempla novas necessidades, para que o estudante sempre esteja em estado de devir. Isso ocorre por que Davídov (1988, p. 178) parte do seguinte pressuposto para a organização do ensino:

> [...] a necessidade da atividade de estudo estimula os estudantes a assimilar os conhecimentos teóricos; os motivos, a assimilar os procedimentos de reprodução destes conhecimentos por meio das ações de estudo, dirigidas a resolver as tarefas de estudo (recordemos que a tarefa é a unidade do objetivo da ação e das condições para alcançá-lo).

Nesse sentido, Búrigo (2015) afirma que todas as tarefas propostas aos estudantes por Davýdov e colaboradores geram necessidades de ordem conceitual da matemática e pedagógica, consequentemente, novos elementos surgem para supri-la. No que diz respeito à análise do objeto do presente estudo, todos os elementos surgidos permaneceram, mesmo que de forma implícita. Por exemplo, a partir do segmento de reta (introduzido nas primeiras tarefas), formaram-se os esquemas e as representações gráficas e literais. Desse modo, a característica do desenvolvimento da sexta tarefa é a necessidade de completar o esquema e a indicação do movimento na seta.

A **sétima tarefa** se apresenta com o seguinte questionamento**:** Como podemos modificar cada quantidade, de acordo com o respectivo esquema, em conformidade com a ilustração 18 (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 25)?

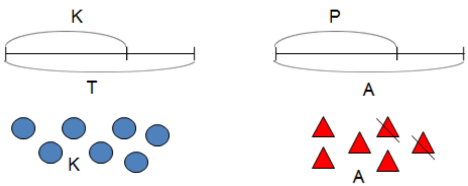
Ilustração 18: A partir da representação, determinar a ação objetal



Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

A tarefa possui duas situações e tem como objetivo colocar a criança em situação de análise, a fim de tomar decisão para adoção de um determinado procedimento, isto é, aumentar ou diminuir quantidades com base nos esquemas propostos. Na primeira situação, há a necessidade de identificar se as quantidades representativas pelas letras K e T constituem o todo ou uma das partes. O primeiro esquema subsidia a análise que propiciará a afirmação de que a quantidade K é uma das partes que compõem o todo T. Logo, o procedimento é aumentar a quantidade de círculos. Por sua vez, o segundo esquema dá as condições para que as crianças observem que A representa o todo e, por consequência, P é uma das partes. Portanto, é necessário diminuir a quantidade de triângulos (Ilustração 19). Um aspecto importante nessa tarefa é o entendimento, por parte dos estudantes, de que as situações dadas se referem ao estado inicial e que a partir dele se inicia o movimente de acréscimo ou diminuição.

Ilustração 19: Relação todo-partes com base na relação entre grandezas



Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

A representação final dos desenhos ocorre com certa precaução, pois ambas as situações não poderiam envolver quantidade de desenho superior ou igual à parte conhecida, pois o esquema mostrava que a parte desconhecida é menor.

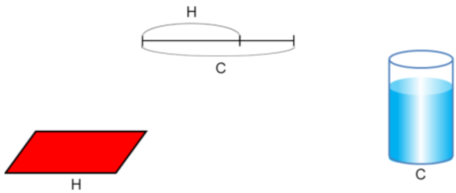
Ainda, compõe essa tarefa a exigência de que as crianças façam a representação literal, por seta, do movimento. O diálogo movido por questionamentos dos estudantes e orientações do professor auxiliará no entendimento de que, na primeira situação, a quantidade menor (parte K) é a quantidade inicial, consequentemente, sua representação literal é dada por $K \longrightarrow T$. Na segunda situação, o movimento é o inverso: a quantidade inicial é o todo A, portanto, $A \longrightarrow P$.

A tarefa, como um todo, traz um novo elemento que basicamente explicita as componentes, parte e todo, da unidade dialética da relação todo-partes, base do sistema conceitual de adição e subtração. Isso se dá por via da necessidade de alteração na representação objetal inicial, tendo como referência os esquemas e representação literal.

Importa destacar o movimento de “ida e volta” presente nas tarefas davydovianas. As representações objetal, gráfica e literal estão interligadas, pois constituem uma unidade que, adiante, se explicitarão na relação universal (todo-partes) do sistema conceitual de adição, subtração e equação. De um mais específico, as tarefas cinco, seis e sete tratam da mesma ideia (acrescentar e/ou diminuir quantidades), porém se mudam as necessidades, o que requer operações diferenciadas.

Na sequência, apresentamos a **oitava tarefa**, que propõe aos estudantes fazerem as modificações das diferentes grandezas com base no único modelo (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 26).

Ilustração 20: Um esquema representativo da relação entre grandezas de diferentes espécies

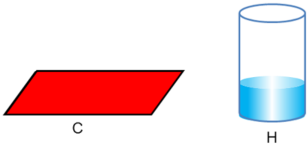


Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

Assim como nas anteriores, o foco da referida tarefa é o acréscimo ou a diminuição de quantidades. Porém o que se apresenta como novo é que um mesmo esquema é indicador da relação todo-partes de qualquer espécie de grandeza, desde que atenda a uma condição: a representação literal deve ser a mesma. Nesse caso, as grandezas são área e volume, mas nada impede que sejam representadas por outras, como, por exemplo, quantidade discreta, comprimento e massa.

A observação atenta da superfície H permite a afirmação de que ela é parte de um todo – área total – representado pela letra C. Isso significa que o procedimento requerido pelo esquema é o aumento da área. No que diz respeito ao volume C, ele representa a quantidade final (todo). Portanto, requer a obtenção do volume H, o que é necessário para a diminuição do líquido do recipiente (Ilustração 21).

Ilustração 21: Um esquema para várias grandezas a partir de uma mesma unidade de medida



Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

Após a alteração objetal, novamente é solicitado às crianças que façam as respectivas representações literais, quais sejam: para a grandeza área, H → C[11], e para a grandeza volume, C → H. Cabe ressaltar que a ideia central dessa tarefa é: grandezas diferentes representadas por mesmas letras em um único modelo gráfico, todavia, a representação literal também pode ser a mesma ou não, como apresentado nesse caso. O esquema único prognostica a elaboração de um modelo das relações essenciais do sistema conceitual. Davídov (1988, p. 134) define os modelos como sendo "[...] uma forma peculiar de abstração, em que as relações essenciais do objeto estão fixadas nas ligações e relações visivelmente perceptíveis e representadas de elementos materiais ou semióticos".

Outra síntese referente à análise da oitava tarefa é: permanecem as representações objetal, gráfica e literal[12] que constituem a relação essencial todo-partes; o "novo" que se apresenta é a condição de representação de duas ou mais grandezas diferentes em um único esquema.

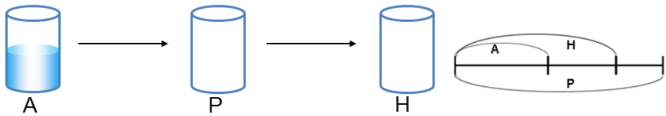
A **nona tarefa** (Ilustração 22) solicita que os estudantes modifiquem o nível de água, de acordo com os esquemas gráfico e literal (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 26).

---

[11]Importa destacar que a representação literal da proposição davydoviana é formada por diferentes letras. A ideia é mostrar que toda grandeza pode ser representada por quaisquer letras.

[12]Trata-se da segunda ação de estudo: *Modelação da relação universal* diferenciada em forma *objetal, gráfica ou por meio de letra.*

Ilustração 22: Relação todo-partes com base na inter-relação entre grandezas



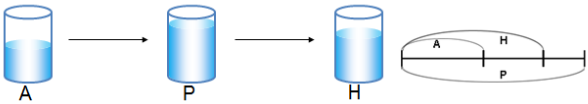
Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

Verifica-se que a operação objetal é realizada por três movimentos, consequentemente, as representações gráfica e literal requerem três letras. De acordo com Давыдов et al. (2012), o objetivo da tarefa é a análise do esquema para orientar o preenchimento do volume correto de cada recipiente, isto é, a operação de cunho objetal. Nesse sentido, Davídov (1988, p. 133) diz que "[...] a especificidade do caráter visual do modelo material consiste em que sua percepção está indissoluvelmente ligada com a compreensão de sua estrutura". É imprescindível que a criança compreenda as relações subjacentes ao esquema, pois são elas que orientam o movimento a ser realizado e não mais diretamente o professor.

Ao compreender o significado do esquema, na sua essência, a criança perceberá que a tarefa lhe propõe dupla orientação. Uma delas é a combinação da representação objetal (recipientes e a grandeza volume) com a literal (por nomear o volume de cada recipiente por uma letra e a indicação do movimento por seta). Sua finalidade é sugerir o movimento a ser imprimido no ato objetal de acrescentar e diminuir o volume, isto é, volume inicial (A) – intermediário (P) – e final (H). A outra se trata do esquema que ajuda a criança a interpretar a quantidade de volume em cada recipiente. Observa-se que as duas representações se inter-relacionam entre si e trazem alguma informação relevante necessária à operação objetal. Nesse caso, o esquema, além de revelar a relação todo-partes, dá margem para algumas interpretações. Uma delas é que o todo (P) compõe-se de duas partes H e de uma desconhecida. No entanto, H é composto por A e também por uma parte desconhecida. Isso se difere das tarefas anteriores[13], pois agora uma das partes conhecida também possui uma quantidade desconhecida. Além disso, o movimento se caracteriza por estágios: parte – todo – parte. No âmbito do sistema conceitual de adição e subtração, podemos sintetizar assim: a partir do volume inicial, acrescenta-se líquido e, deste, retira-se uma certa quantidade (Ilustração 23).

[13]Nas tarefas anteriores, o todo era composto por duas partes apenas.

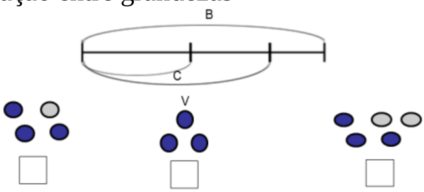
Ilustração 23: Representação objetal com base na representação gráfica



Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

A décima tarefa quer que o estudante identifique a quantidade de círculos, com as letras correspondes, de acordo com a ilustração 24 (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 26).

Ilustração 24: O todo constituído de mais de duas partes com base na inter-relação entre grandezas



Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

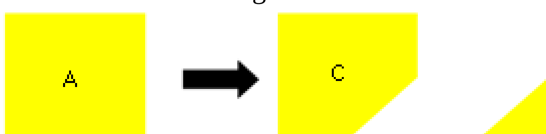
Assim como a anterior, a décima tarefa também apresenta dupla orientação: representação gráfica e objetal acrescidas de letras. Nesta última, porém, é que se apresenta a diferença em relação à nona tarefa – além de se referir à grandeza discreta –, pois é seu objetivo justamente a indicação das letras, correspondente ao esquema literal gráfico. Dito em outros termos, ela requer a informação referente ao movimento de acréscimo ou de diminuição por meio das respectivas letras, isto é, das situações inicial, intermediária e final. Como mencionado anteriormente, a compreensão das representações, em sua essência, possibilita a determinação dos procedimentos de resolução da tarefa sem uma participação mais efetiva do professor. Portanto, o enunciado e suas representações falam por si e colocam os estudantes em ação investigativa (DAVÍDOV, 1988). Consequentemente, as crianças – em seu coletivo e com as eventuais participações do professor – admitirão que o modelo gráfico mostra que o todo (B) é composto por três partes: C, V e outra não identificada, mas V contém uma parte que também é desconhecida. Outra interpretação seria: o todo B é composto de duas partes, V e outra desconhecida; no entanto, V é composta por C e uma quantidade não estabelecida. Por causa desses entendimentos, as crianças admitirão o pressuposto: a quantidade maior de círculos representa o todo (B), a menor retrata a parte C e a intermediária simboliza V. Sendo assim, o movimento expresso, na forma literal, com base na condição estabelecida, é V → C → B.

Torna-se imprescindível destacar que a proposição davydoviana, mesmo em situações com grandezas discretas, mantém o teor científico. Isso porque, na presente tarefa, a contagem das "bolinhas" (círculos), não é a sua centralidade, somente uma decorrência. O que está em questão são relações conceituais não dadas explicitamente, por exemplo, que um todo pode ter várias partes, independentemente da grandeza em questão. A própria orientação se constitui em fundamentos teóricos, uma vez que se conflui e interliga a tríade de representações – objetal-gráfica-literal, que se confundem, pois todas assumem o *status* de literal por requerem identificações desconhecidas dadas por letras.

Essas interconexões manifestam o movimento descendente do conceito científico, a fim de prover uma situação cotidiana de elementos teóricos. No caso específico da presente tarefa, a contagem dos círculos em cada situação: inicial, intermediária e final (VYGOTSKI, 1993).
Enfim, a décima tarefa mantém a ideia da anterior de que o todo compõe-se de três partes: uma conhecida, que se inclui na segunda, com complemento desconhecido e uma terceira desconhecida. A diferença se apresenta quando requer a inclusão de letras na representação objetal para indicar o movimento de aumento ou diminuição de quantidade para expressar os estados inicial → intermediário → final.

A **décima primeira tarefa** se intitula Permanência de grandezas. O professor mostra uma peça de cartolina com formato quadrangular. Aleatoriamente, escolhe uma letra (A) para representar a medida da área de sua superfície. Em seguida, corta uma parte da referida peça e reserva. Como a área A sofreu alteração, sua resultante será representada pela letra C (Ilustração 25). Para registrar a ação objetal, o professor anota no quadro o seguinte: A → C. Trata-se de uma representação literal (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

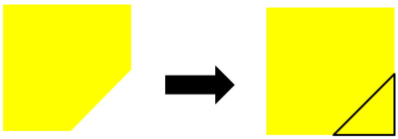
Ilustração 25: Permanência da grandeza inicial



Fonte: Produção com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008).

O professor coloca o canto cortado anteriormente no seu lugar de origem (Ilustração 26). Tal movimento indica que a área C sofreu uma modificação e resulta na superfície de área inicial (A). Isso ocorre porque foi adicionada a mesma parte que havia sido retirada. Com isso, a representação literal apresentada pelo professor não traduz o movimento das operações executadas. Logo, se há mudanças na ação objetal, consequentemente a representação literal se altera: A → C → A (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

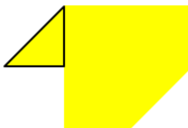
Ilustração 26: Grandezas inicial e final iguais



Fonte: Produção com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008).

Feita a nova representação, em seguida, o professor retira a parte cortada e a dispõe em outro lugar da figura (Ilustração 27). E questiona: Qual é a área que temos agora (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008)?

Ilustração 27: Conservação da área, mas forma diferente



Fonte: Produção com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008).

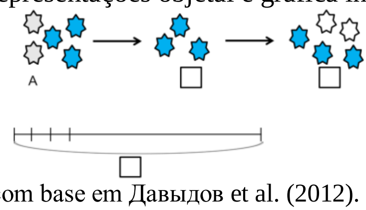
De acordo com Горбов, Микулина e Савельева (2008), algumas crianças ficarão confusas. Então o professor explica que a área permanece a mesma que a inicial (A), pois foi adicionada a mesma parte cortada, porém anexada em outro lugar. Tal procedimento modifica somente a forma. Portanto, o registro permanece o mesmo.

A décima primeira tarefa objetiva a apropriação conceitual por parte das crianças de que a área de uma superfície não se altera quando uma parte é recortada e disposta em outra posição da figura. Outra síntese é: muda a forma, mas a área permanece a mesma. Mais uma vez, chama a atenção o cuidado de Davýdov e de seus colaboradores na elaboração das tarefas para não permanecer somente na relação objetal em si, com procedimentos analíticos empíricos. Por isso, incita os estudantes para as representações gráfica e literal, reveladoras de abstrações extraídas das propriedades externas do objeto em análise. Com diz Davídov (1998, p. 118), “[...] o ideal se revela no processo de formação, orientada a uma finalidade, do objeto necessário e realizada na atividade”. Para tanto, os enunciados das tarefas, além das orientações para o seu desenvolvimento, instigam o diálogo entre as crianças e a ajuda do professor, que são premissas para o surgimento de necessidades que as colocam em atividade de estudo, cuja finalidade é a formação do pensamento teórico.

A referida tarefa também releva a relação essencial todo-partes, a ideia do sistema conceitual de adição e subtração (operações inversas). Além disso, evoca o conceito de equação ao trazer a ideia de igualdade (de área), mesmo quando ocorrem transformações internas no todo. Ainda nesse contexto, subjacentemente estão procedimentos teóricos de resolução de problemas. As representações objetal, gráfico e literal são componentes mediadores que permanecem, mas fazem com que emerja a necessidade do surgimento de novos elementos. Nesse caso, o novo foi provar que recortes de formatos diferentes podem ter a mesma área da superfície, sem a necessidade de expressar o movimento por meio de números abstratos.

A **décima segunda tarefa** (Ilustração 28) traz como enunciado: Com base na representação objetal, complete os esquemas gráfico e literal (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., p. 27, 2012).

Ilustração 28: Representações objetal e gráfica incompletas

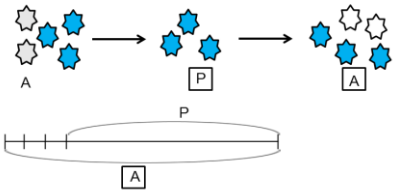


Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

Após a ilustração, aparece a seguinte pergunta: Por que os valores final e inicial são representados pela mesma letra (A)?

Ao analisar o modelo objetal, verifica-se que ocorreram duas alterações consecutivas: havia um estado inicial com a diminuição da quantidade de estrelas, gerador de um estado intermediário que, por sua vez, é aumentado com a mesma quantidade retirada anteriormente, atingindo o estado final. Esse movimento de diminuição e acréscimo do mesmo número de estrelas faz que com o estágio inicial e final coincidam no que diz respeito à quantidade. Em outras palavras, embora o conjunto final de estrelas seja diferente pelas características externas (cor) do conjunto inicial, ambas têm a mesma quantidade. Portanto, é possível responder à pergunta da tarefa com base na análise da grandeza discreta (Ilustração 29), que neste caso se volta para a quantidade de desenho que possui em cada estado do movimento transformativo – diminuição da situação inicial, gerador do estado intermediário, que sofre acréscimo para configurar a situação final – e não para suas características externas (cor, forma e tamanho).

Ilustração 29: Relação todo-partes no âmbito das diferentes representações



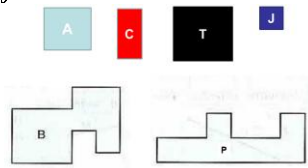
Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

Observa-se que a tarefa em análise traz uma nova representação para o esquema, pois a quantidade de estrelas retirada (geradora da grandeza intermediária) é caracterizada por traços verticais no segmento de reta. Essa prática – fazer traços no segmento de reta para indicar que houve uma diminuição da grandeza inicial – foi introduzida em tarefas iniciais (apresentadas e analisadas no decorrer deste estudo). Desse modo, os novos elementos da tarefa possibilitam outra representação para o esquema: uma das partes é identificada pela ausência de arcos – mas com a presença de traços indicadores de que houve diminuição na quantidade inicial –, a outra e o todo são distinguidos por arcos.

A **décima terceira tarefa** (Ilustração 30) faz a seguinte orientação aos estudantes: utilize vários recortes de cada tipo (A, C, T e J)[14] do kit – dentro de um envelope – para compor as figuras de área B e P (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 36).

[14]Há no Kit um exemplar de cada recorte do tipo T, A, J e vários de C.

Ilustração 30: Composição do todo a partir das partes a serem identificadas objetalmente



Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

As crianças compuseram a superfície B com T, A e J, mas não encontram nos seus envelopes um recorte igual ao que está no livro, referente a P. O professor insiste que na outra sala os estudantes conseguiram, com o material restante no kit. Sugere que atentem para o formato de P e observem os recortes disponíveis. Então elas, depois de muitas tentativas e discussões, conseguem formar a área da figura-modelo P com quatro partes de C (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008). A ilustração 31 mostra a composição, conforme a solicitação da tarefa.

Ilustração 31: O todo e suas várias partes

Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

O professor enfatiza que a leitura da operação necessária à execução da tarefa é: “[...] a grandeza B foi determinada com o auxílio das grandezas TAJ.” (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008, p. 57). Os autores também orientam para que o professor mostre a nova representação: B ← TAJ. No que diz respeito à superfície P, dizemos: “[...] a grandeza P foi determinada com o auxílio da grandeza C.” (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008, p. 57). O professor acrescenta a respectiva representação literal: P ← C. Realizada a composição e a leitura das áreas, o professor sugere que as partes sejam transferidas para o caderno e contornadas.

A tarefa requer a composição de duas grandezas B e P, cada qual compõe um todo a ser constituído por partes que precisam ser identificadas para que atendam à seguinte condição de ordem operacional: os recortes sejam suficientes para cobrir as duas superfícies. Isso significa que a composição de uma implica na sobra de recortes para o arranjo da outra. Ela traz um novo método de representar a relação todo-partes, uma vez que, para atender à condição estabelecida, recorre-se a outras grandezas que, inicialmente, são apresentadas para as crianças com o uso do termo “medidor”, mas com o desenvolvimento da tarefa recebe o nome de “medida”. Todavia, na figura P, a peça C se traduz, implicitamente, numa ideia introdutória de “unidade de medida”.

Nesse movimento de resolução da décima terceira tarefa, interconectam-se, além da relação essencial – todo-partes – e suas representações do sistema conceitual (adição e subtração), significações relacionadas à figura geométrica que, segundo Aleksandrov (1976, p. 18), seu conceito “[...] resulta da abstração de todas as propriedades de um objeto executada em sua forma espacial e dimensional”. Aqui está mais uma revelação da coerência de que cada tarefa está em consonância com a cientificidade dos fundamentos da Matemática.

Nesse âmbito, estão outras peculiaridades da tarefa, sendo uma delas a sutil introdução do significado de número como operador, isto é, como processo de medição e reprodução da grandeza. Além disso, a representação literal se apresenta com a seta em sentido contrário, mas tem a mesma essência que a anterior (décima segunda), pois traduz a grandeza final da operação objetal. Ou seja, antes (sentido para a direita) a referência inicial eram as partes necessárias para compor o todo, agora (sentido para esquerda) o todo está à mercê da composição, partes. No entanto, em ambas as situações, a seta é indicadora do movimento “ponto de partida e de chegada”. Acresce-se, ainda, que a representação gráfica não foi requisitada.

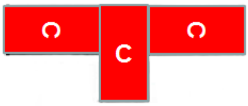
A **décima quarta tarefa** (Ilustração 32) anuncia que as crianças componham a figura H, com o mesmo kit (recortes) utilizado na tarefa anterior. Além disso, comparem as duas operações com o esquema registrado à direta (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 36).

Ilustração 32: Nova representação literal

Fonte: Давыдов et al. (2012).

A tarefa requer a construção de uma nova superfície com a utilização dos recortes, isto é, a partir de diferentes partes construir uma figura de área proposta. Nesse momento, o professor questiona: Quantos medidores precisamos tirar do envelope? Será que é possível usar apenas uma medida? As crianças experimentam vários recortes até perceberem que a tira de área C é a adequada para ser “a medida” e que esta se repete três vezes (Ilustração 33). Após as operações objetais, elas comparam com o esquema literal ao lado, conforme solicitação da tarefa (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 33: A partir da nova representação literal, compor o todo a partir das partes



Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

Decorrente das prováveis discussões, é possível que os estudantes concluam que as três marcas, indicadas no esquema, representem a quantidade de vezes que os recortes ou a superfície de área C se repetem para compor a área inicial H. O professor ressalta que há diferentes tipos de marcas para indicar a quantidade de vezes que a medida (C) se incluiu na superfície (H) (Ilustração 34). Ele cita como exemplo os círculos, os xises, etc. A quantidade de marcas necessárias é colocada em cima da seta (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 34: As várias maneiras da representação literal

$$H \longleftarrow CCC;\ H \xleftarrow{\bigcirc\bigcirc\bigcirc} C;\ H \xleftarrow{xxx} C$$

Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

O objetivo dessa tarefa é que a essência – no caso, três marcas – permaneça a mesma, independentemente da ideia de que qualquer grandeza pode ser construída pela composição de outras e, ainda, da adoção de diferentes marcas para a representação literal. Trata-se, pois, de outro modo de representar a relação todo-partes a partir de qualquer grandeza[15]. Todo o movimento pertinente ao desenvolvimento da tarefa

[15]Tal relação é representada também pelas grandezas volume, comprimento e pela grandeza discreta com elementos do cotidiano.

sugere, ainda que implicitamente, um processo de transformação da ideia de parte (C) em uma unidade de medida. Isso, segundo Davýdov (1982), é uma característica de teor científico teórico de número. Nesse sentido, Costa (1866, p. 10, grifo do autor) faz a seguinte especificação: “[...] se a grandeza, que se mede, contém a unidade uma ou mais vezes, exatamente, a sua medida é um número *inteiro*”.

Sendo assim, a tarefa aponta para significações referentes ao conceito teórico de número – como emergente das relações entre grandezas – que inter-relacionam operações aritméticas e algébricas: a) expressa a vinculação ao conceito de adição (H = C + C + C); b) traz a relação de multiplicidade entre grandezas (H = 3C). Nesse sentido, Caraça (1951, p. 25) faz a seguinte consideração no que diz respeito às operações que auxiliam a interconexão entre os dois campos da matemática: “[...] são duma aplicação constante e quem as conhecer bem, principalmente as da soma e produto, tem a chave do cálculo algébrico”. A evidência dessa relação de multiplicidade traduz a coerência da teorização de Davýdov (1982), ao estabelecer que: a finalidade do ensino da matemática, desde o primeiro ano escolar, é promover entre os estudantes a apropriação do conceito teórico de número como relação entre grandezas.

A **décima quinta tarefa** (Ilustração 35) convida as crianças para que construam um segmento de comprimento P, com base no esquema literal e na “medida” T (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 37).

Ilustração 35: Construção de um segmento em conformidade com a especificação do esquema

Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

Para tanto, elas têm como auxílio recortes – uma espécie de unidades arbitrárias – que estão no envelope, entre os quais procuram aquele que corresponde à medida dada pelo comprimento. Com a devida identificação da medida, o professor fala (Ilustração 36): “[...] usem a medida uma vez... agora mais uma vez... mais uma vez... mais uma vez [...]” (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008, p. 59).

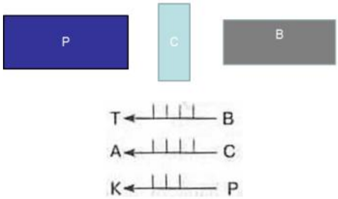
Ilustração 36: O segmento de P constituído de quatro “medidas”

Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

A relação todo-partes, bem como o conceito de adição, se faz presente de modo indireto em todo o movimento realizado na construção da tarefa. Mais uma vez, é enfatizado que a partir de uma grandeza há a possibilidade de se estabelecer outra. Sua peculiaridade está na sua orientação ao propor que se construa um segmento de comprimento igual à quantidade de marcas que se estabeleceu no esquema. Porém isso não é suficiente, pois não estabelece a extensão da unidade, o que exige que as crianças tomem uma decisão entre aquelas que lhes são dadas no envelope. Vale destacar que o foco não é o número abstrato – que, no caso, seria o 4 –, mas as grandezas ou partes, unidades. A evidência maior não é, pois, a relação todo-parte com ênfase no sistema conceitual de adição e subtração, mas, em âmbito mais geral, a formulação do conceito de número. Para Davýdov (1982, p. 435-436 – grifo do autor), o ideal é que “[...] se forme, nas crianças, o conceito de número como reprodução da revelação das condições necessárias para o **surgimento** do mesmo (ou seja, por meio da generalização essencial).” Tal generalização é desenvolvida, de um modo geral, pelas mediações das representações objetal, gráfica e literal, bem como os seus elementos constituintes. Nesse caso, por exemplo, o arco se apresenta como um modo de chamar a atenção de que a característica em questão não era a área da superfície, mas sim o comprimento da largura da peça. Nessa tarefa, assim como na anterior, há um novo artifício revelador de um estado de devir do conceito de número que carrega a adição e a subtração.

A **décima sexta tarefa** (Ilustração 37) retoma a análise do material do kit para a construção de superfícies, cujas áreas são indicadas na representação literal (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 38).

Ilustração 37: Construção de figuras retangulares com áreas indicadas pelas marcas do respectivo esquema e unidade a identificar

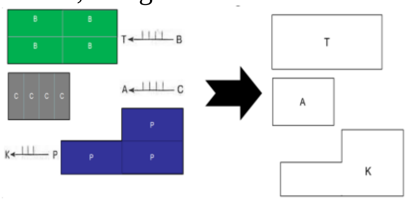


Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

De acordo com a orientação de Горбов, Микулина e Савельева (2008), para o desenvolvimento dessa tarefa, as crianças devem ter autonomia para a análise do registro e, consequentemente, determinar a medida correta no envelope[16].

A presente tarefa tem o mesmo conteúdo da anterior: construção de figura retangular com área indicada pelas marcas do esquema e unidade a identificar. Sua especificidade é que se trata não mais de uma, mas de três figuras, cada qual com uma orientação por respectivo esquema. Para a construção, a criança precisa encontrar no envelope a unidade (peça) correspondente e repeti-la tantas vezes quanto for a marca do esquema. Assim, o retângulo T corresponde a quatro peças B, A a quatro unidades C e K a três P (Ilustração 38).

Ilustração 38: Resolução da tarefa: de um lado, a respectiva orientação e, de outro, as figuras solicitadas



Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

O objetivo da referida tarefa se volta para a compreensão e a apropriação dos procedimentos de medição, a partir da leitura dos esquemas propostos. Ao se tratar da construção de várias figura, ela apresenta como conteúdo à generalização teórica, que tem por base a

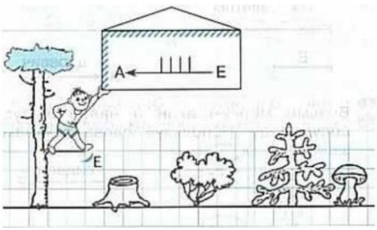
[16]Essa tarefa pode ser proposta em pares. Enquanto um trabalha no âmbito da operação objetal, o outro se ocupa com a representação literal.

relação entre grandeza – número real – com a ideia central de que as partes constitutivas do todo são iguais e se transformam em unidade de medida. Desse modo, a criança se apropria concomitantemente da generalização teórica da relação essencial todo-partes do sistema conceitual de adição/subtração e do conceito de número. Para Davídov (1988), as crianças que analisam um determinado conteúdo, bem como identificam e registram a relação essencial nas suas manifestações em relações particulares, demonstram que estão em processo de elaboração de uma abstração teórica. Além disso, identificam a articulação regular da relação principal com suas manifestações particulares e estão em processo de desenvolvimento de generalização teórica.

Nesse sentido, é positiva a reafirmação de que a organização do ensino, proposta por Davýdov e seu grupo de investigadores, tem como prioridade o conhecimento teórico envolto num processo em que cada tarefa apresenta um novo elemento inter-relacionado com componentes conceituais apresentados anteriormente.

A **décima sétima tarefa** (Ilustração 39) requer que a criança, com base no modelo que há na carta, determine o local onde o Pequeno Polegar pretende se esconder (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 39).

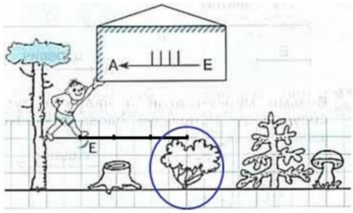
Ilustração 39: Comprimento da distância entre dois locais



Fonte: Давыдов et al. (2012).

A tarefa apresenta alguns diferenciais em seu propósito de colocar em movimento o pensamento conceitual das crianças. Um deles é a não utilização de recortes (medidas) para sobrepor em determinado objeto, a fim de compor uma nova grandeza. Outro está na orientação para a sua execução, esquema com marcas (unidade), indicador de que o esconderijo está a quatro unidades. O essencial é a identificação, pelos estudantes, de qual unidade foi estabelecida, isto é: comprimento do passo do pequeno Polegar, porém atrelado à malha quadriculada, correspondente ao lado de dois quadrados. Como o menino já havia dado um passo, ainda necessitava de mais três (Ilustração 40).

Ilustração 40: O processo de desenvolvimento da tarefa



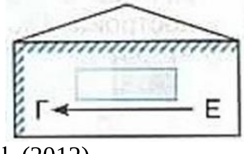
Fonte: Давыдов et al. (2012).

Portanto, o pequeno Polegar pretende se esconder atrás da touceira. Observa-se que no contexto da tarefa se explicita o todo – o comprimento da distância de onde o menino se encontra até o local do esconderijo – e as partes: em número de quatro, se considerarmos o passo, ou oito se for o lado do quadrado da malha. Essa relação todo-partes, em que quatro passos se igualam a oito lados do quadrado, é, segundo Madeira (2012), a premissa básica do conceito de multiplicação. Isso porque entram em cena dois tipos de unidades: básica, o lado do quadrado, e intermediária, o passo.

Também cabe destacar que a tarefa parte de uma situação cotidiana e dá conta de desenvolver a relação entre grandezas. Isto é, revelar as relações internas por meio de midiatizações, com base num todo (geral). Nesse sentido, podemos dizer que a malha quadriculada apresenta outra característica da tarefa, que é a possibilidade para a inserção de um novo elemento: a reta numérica.

A **décima oitava tarefa** (Ilustração 41) simula a complementação de uma carta para ajudar o pequeno Polegar a se esconder embaixo do cogumelo que aparece na paisagem da décima sétima tarefa. (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 39).

Ilustração 41: Indicação do movimento orientador para que o personagem chegue ao local determinado

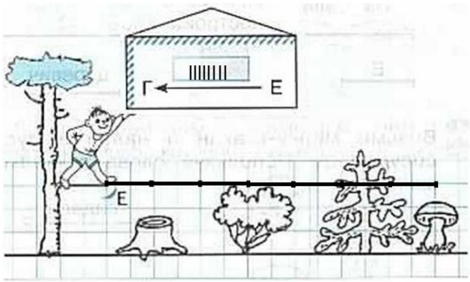


Fonte: Давыдов et al. (2012).

Para a execução da tarefa, as unidades de referência são as mesmas da anterior: passo do Pequeno Polegar, que é constituído de duas unidades da malha. Um dos atos do pensamento da criança é a identificação de que o movimento proposto é inverso, por isso precisa, primeiramente, compor a grandeza comprimento, para depois concluir o esquema literal, pois nele não existe nenhuma marca ou especificação de quantidade de unidade.

Ao adotarem o passo como medida, os estudantes complementam a composição do trajeto, ou seja, chegar ao local do esconderijo, o cogumelo. Observa-se que Polegar caminhará oito passos em linha reta. Estabelecido o ponto de chegada, escrevem-se as oito marcas no esquema literal sobre a flecha de sentido contrário (Ilustração 42). Teoricamente, o espaço a percorrer pelo personagem significa um todo (Γ) constituído por oito partes iguais (passos), unidade intermediária (E), ou dezesseis unidades básicas (lado de um quadrado da malha). Ou: Γ = 8 E.

Ilustração 42: Resolução da tarefa com especificação do comprimento do trajeto e sua indicação no esquema literal



Fonte: Давыдов et al. (2012).

Cabe lembrar que as marcas poderiam ser representadas por outros símbolos. Também que a tarefa se centrou nas representações objetal (marcação dos passos que compuseram um segmento de reta de oito unidades) e literal (marcas sobre seta, mas sem a representação gráfica – esquema com segmento e arcos). Mesmo com essas características, a tarefa mantém princípios e elementos conceituais com teor científico, desencadeados anteriormente. Conforme Davídov (1988, p. 121), "[...] na construção e modificação do projeto da coisa em si, surge a compreensão propriamente racional do mesmo objeto da atividade". Por isso que as tarefas do modo davydoviano de organização do ensino são marcadas por idas e voltas durante o seu processo de desenvolvimento.

Na **décima nona tarefa** (Ilustração 43), o professor fala às crianças que há três vasos com plantas a serem regadas. Para tal, mostra o recipiente maior com água e disponibiliza de três menores, vazios, de tamanhos diferentes. Ele propõe que as crianças o ajudem a descobrir quantas vezes será possível regar as plantas com a quantidade de água à disposição (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 43: Situação desencadeadora da necessidade de unidade composta

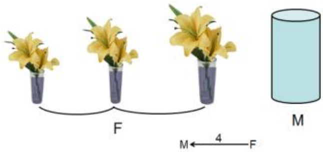
Fonte: Produção com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008).

O professor questiona: O que é preciso fazer? Após discussões, as crianças verificam[17] que é necessário usar, simultaneamente, os três recipientes menores como unidade de medida, para que nenhuma das plantas fique sem água. Então o professor coloca água nos três recipientes e inicia o processo de regar. Coloca em cada vaso a primeira porção de líquido, enquanto as crianças pronunciam a contagem um (1). O professor prossegue, mas coloca água apenas num dos recipientes/unidades e incita os alunos a contarem como se fosse o número dois (2). Tal procedimento tem como objetivo verificar se os estudantes estão atentos à sua ação. As crianças constatam que essa não é a medida integral, pois, para tal, é necessário o correto preenchimento dos três recipientes. O professor sugere que uma das crianças execute os próximos passos da medição e chegue à conclusão de que, ao utilizar toda a água disponível, as plantas foram regadas com quatro unidades. Ao final da tarefa, o professor sugere às crianças que escolham as letras para marcar a unidade medida e o valor medido (grandeza). No caso, a opção foi por F, acrescida ao esquema literal (Ilustração 44) que traduz a operação objetal (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

---

[17]Esse tipo de decisão dos estudantes foi propiciado em tarefas anteriores, não desenvolvidas no presente, por não terem vinculação mais próxima com o objeto do presente estudo.

Ilustração 44: Resolução da tarefa e explicitação do resultado no esquema de flecha



Fonte: Produção com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008).

O elemento novo que a décima nona tarefa traz como componente conceitual a ser apropriado pelos estudantes é a ideia de medida composta, isto é, diferentes unidades constituem uma unidade de medida. Com isso, o estudante compreende a unidade de medida no seu essencial, ou seja: o importante é o que se estabelece para a medição e a indicação de quantas vezes se inclui na grandeza a ser medida. Portanto, não trata somente das características do objeto em si, como algo isolado, mas sim o seu entendimento na relação entre grandezas. Em outras palavras, possibilita que o estudante elabore o pensamento teórico de número um (1), como unidade de uma grandeza a ser medida, e não somente como um membro independente, isolado.

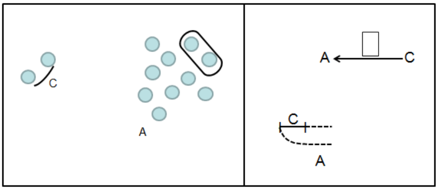
A tarefa introduz a medição por meio de um sistema padronizado, que é a base para o cálculo, isto é, não se trata de algo aleatório. Ela se insere entre aquelas que criam as necessidades para a inserção conceitual da escrita numérica. Todavia, essa ideia também se constituiu em conteúdo de outras tarefas, que trataram de sistemas numéricos não padronizados. Por exemplo, determinar o comprimento de algum objeto por meio de palavras, ou seja, com a utilização de parlendas, cantigas e textos[18]. Esse movimento é proposto para justificar a necessidade do uso de um sistema numérico padrão, bem como suas características essenciais, em que cada número tem o seu o lugar. Em uma sequência numérica, os números não se repetem, sendo ela infinita, há sempre um número após o outro; os números são representados por algarismos. Nesse sentido, Davýdov (1982, p. 168 – grifo do autor) destaca: “[...] um conceito matemático tão importante como o de **número,** com o que a criança inicia seu conhecimento das matemáticas escolares e que conserva sua identidade durante todo o processo de estudo das mesmas”.

[18]Tais tarefas são propostas no âmbito das grandezas: comprimento, superfície de área e volume. Para um melhor entendimento, sugerimos a leitura de Rosa (2012, p. 147-150).

A tarefa traz, pois, um componente novo para a relação todo-partes, por descaracterizar a ideia de unidade e de “um” como algo representativo de um único objeto. Pelo contrário, sua preocupação é também elaborar a ideia de um conjunto de unidades diferentes que podem se constituir em uma unidade no processo de medição. Sendo assim, as partes que formam o todo trazem a ideia de composição.

A **vigésima tarefa** (Ilustração 45) coloca o estudante em atividade ao solicitar que determine o valor da grandeza A, por meio da unidade de medida composta C. Também estabelece que represente a sequência das ações pertinentes a ambos os esquemas (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 45).

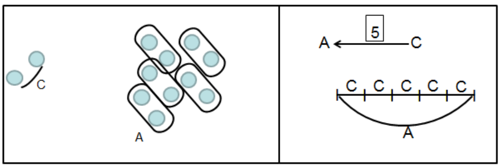
Ilustração 45: Unidade de medida composta



Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

A tarefa trata da grandeza discreta, própria para enfatizar a ideia de unidade de medida composta, intermediária, no caso, constituída de duas unidades básicas, círculos. O objetivo é agrupar a quantidade A com C, que leva à conclusão de C caber cinco vezes em A.

Ilustração 46: O movimento de resolução da tarefa e suas representações



Fonte: Produção com base em Давыдов al. (2012).

Nessa tarefa, bem como na anterior, a questão central é verificar quantas vezes determinada quantidade cabe dentro de outra. Embora também trate da identificação e da caracterização da representação das grandezas inicial e final, por meio da unidade composta, mesmo assim ela se distingue em dois aspectos. Um deles é a indicação numérica (5) no esquema de flecha. O outro é a explicitação do movimento para atingir essa quantidade por meio da representação gráfica (esquema com segmento, marcas e arcos).

À primeira vista, parece que a relação todo-partes não é algo inerente à tarefa. Mas vale observar que a representação objetal mostra, até visualmente, a existência de um todo (dez círculos) que carece de uma composição por parte de duas unidades cada. Vale chamar a atenção que, para tanto, isso não fica restrito à simples circunscrição das figuras em pares, pois, assim sendo, se configuraria em uma operação eminentemente empírica, que não é a intenção central da proposta de Davýdov (1982), pois propõe o desenvolvimento nos estudantes do pensamento teórico. Por isso a tarefa incita a manifestação teórica da referida relação, a representação gráfica, que incorpora a objetal, mas a supera com teor operativo numérico. Para Aleksandrov (1976, p. 26) “[...] as operações com números aparecem como reflexo das relações entre os objetos concretos”.

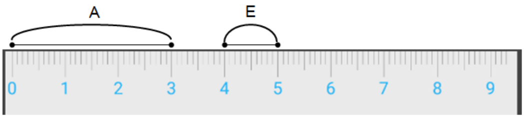
Por exemplo, a ideia aditiva se revela durante o procedimento da operação objetal e se teoriza na igualdade A = C + C + C + C + C. Do mesmo modo, o esquema literal traduz a inter-relação no âmbito da equação, pois o valor da grandeza inicial precisa ser transformado em outro valor de mesma grandeza. Trata-se de uma igualdade na qual se verifica a quantidade de vezes que para a grandeza C se repetirá até transformar-se em A. Em outras palavras, reforça a ideia do real significado do número um (1) como unidade, não só como um objeto em si. Em vez dessa simples característica, ele se revela como um valor que faz parte da grandeza (nesse caso, o número um é representado por dois círculos)[19].

A **vigésima primeira tarefa** (Ilustração 47) questiona: Qual a quantidade de unidades de medida E que cabe dentro do comprimento A (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008)?

---

[19]Diversas tarefas são propostas para este fim: a compreensão em seu teor teórico de conceito de número.

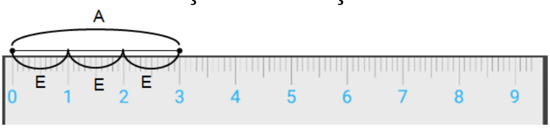
Ilustração 47: Uso do instrumento para a explicitação do teor numérico da grandeza e da unidade de medida



Fonte: Produção com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008).

Com base na ilustração, régua, constata-se que: o comprimento A mede 3 cm[20] e a unidade de medida E, 1 cm. Portanto, o comprimento E cabe três vezes em A, ou seja, o todo se compõe de três partes.

Ilustração 48: Demonstração da resolução da tarefa



Fonte: Produção com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008).

O objetivo da tarefa é o desenvolvimento do aspecto quantitativo do número, como resultado da medição (contagem). Nesse caso, o número tem como significado a resposta para uma pergunta relacionada à grandeza, no caso o comprimento, com a especificação numérica e do tipo de unidade (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008). Logo, esse novo elemento possibilita uma nova forma de registrar a operação objetal, trata-se do número nominal A = 3E ou A = 3 cm, isto é, o todo A é composto por três partes de um centímetro. Ou seja, é nesse momento que os estudantes passam efetivamente a usar o signo numérico (no caso, 3) com a corresponde qualidade da unidade (cm).

No contexto do conceito de número, isso, segundo Rosa (2012), é uma manifestação da sua relação universal A = nE. Assim, em A = 3E, o número 3 é representativo de uma singularidade numérica, o número natural. Para a autora, o referido modelo é revelador do teor aritmético e algébrico do conceito de número.

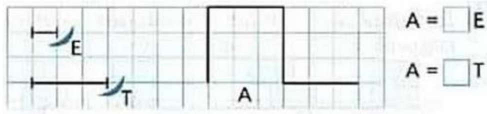
---

[20] Outras tarefas antecedentes criaram a necessidade do uso de instrumentos para medir determinadas grandezas: a régua como um dos instrumentos para medir a grandeza comprimento; a balança para a grandeza massa; o litro para a grandeza volume; entre outros.

Cabe ressaltar que essa nova representação da relação todo-partes, fundamento do sistema adição/subtração, também traz o conteúdo de equação, caracterizado pelo sinal de igualdade.

A **vigésima segunda tarefa** (Ilustração 49) também parte de uma pergunta dirigida às crianças: Quantas vezes as unidades de medida E e T cabem, respectivamente, na grandeza comprimento A (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., p. 48, 2012)?

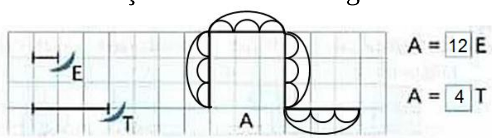
Ilustração 49: Composição de um todo, considerando duas unidades (partes) de comprimentos diferentes



Fonte: Давыдов et al. (2012).

A tarefa oportuniza que os estudantes internalizem uma nova forma de registro que requer a transformação do modelo essencial de número. Além disso, mostra que uma grandeza pode ter vários resultados, dependendo da unidade de medida. O processo de medição (Ilustração 50) evidencia que, ao se adotar a unidade de medida E, se observa que o todo A se compõe de 12 partes de E. Pelo modelo geral de número, tem-se a igualdade A = 12E. Ao empregar T como unidade de medida ou parte, ela incluir-se-á quatro vezes em A, isto é, A = 4T. Trata-se de valores aparentemente distintos, todavia, a essência é a mesma, pois se referem ao mesmo comprimento. O que faz os resultados serem numericamente desiguais é o comprimento da unidade.

Ilustração 50: Resolução da tarefa com evidência de dupla representação da medição de uma mesma grandeza



Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

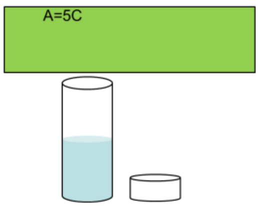
Reafirma-se a possibilidade de representar a relação todo-partes de duas ou mais formas, sem alterar a grandeza a ser medida. O resultado depende do tamanho da unidade. A ideia aditiva, na inter-relação com equação, se apresenta em

A=E+E+E+E+E+E+E+E+E+E+E+E ou A=T+T+T+T. Outra interconexão que se pode noticiar, mesmo não sendo nosso objeto de estudo, é com o conceito de divisão, uma vez que 12E foi divido em partes de T cada qual com 3E.

De modo geral, as tarefas analisadas até o presente momento têm como objetivo desenvolver na criança o processo de medição da grandeza a partir do modelo ou esquema (incluso nesse processo, a utilização da unidade de medida simples e composta). Também pretendem o desenvolvimento da compreensão do significado do número um (1) na relação entre grandezas e dos algarismos, com exceção do algarismo zero (0). Cabe destacar que as referidas tarefas ainda não tratam do significado do número zero.

A **vigésima terceira tarefa** (Ilustração 51) tem a seguinte organização: sobre a mesa do professor estão dois recipientes, um com líquido e outro vazio a ser usado como unidade de medida. No quadro, está um registro: A = 5C. O professor informa que o valor A é o volume de líquido que precisa ser colocado no recipiente. Simula que um aluno de outra sala, Vitor, colocou certa quantidade, sendo necessário completá-lo (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

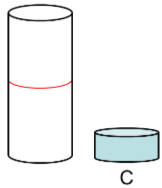
Ilustração 51: Dados para resolução da tarefa: registro no quadro e representação objetal



Fonte: Produção com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008).

Conforme Горбов, Микулина e Савельева (2008), as crianças observam que, para completar o recipiente, precisam saber a quantidade de líquido colocada por Vitor. Novamente, o professor simula que não acompanhou o procedimento do outro aluno, o que é de se lamentar, pois, ao trabalhar com líquido, as medidas não são visíveis. Portanto, diferente do que acontece quando se medem as grandezas área e comprimento. A decisão coletiva é medir o líquido colocado. Mas como tornar “visíveis” as medidas do recipiente? Por sugestão, procede-se a marcação no vidro com a caneta ou elástico e retira-se o líquido.

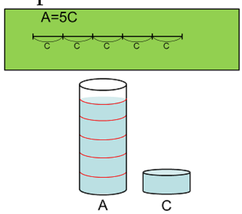
Ilustração 52: Marcação do volume de líquido do recipiente



Fonte: Produção com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008).

Executa-se a medição com o recipiente-unidade e, a cada uma delas depositada, registra-se por meio de esquema – segmento de reta, arcos e a letra C – no quadro, sob a representação A = 5C, que estava no enunciado (Ilustração 53). Compete às crianças a manipulação do líquido e ao professor o registro no quadro. Ao colocar a primeira unidade no recipiente, o professor desenha um determinado segmento para representá-lo. Propositalmente, na segunda vez, faz um segmento (unidade) maior, que deve ser percebido, com a devida correção, pelas crianças, pois se trata de uma mesma unidade. Nesse processo, descobre-se que Vitor colocara apenas três medidas no recipiente. (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 53: Processo de medição completa e identificação da quantidade de unidade depositada anteriormente

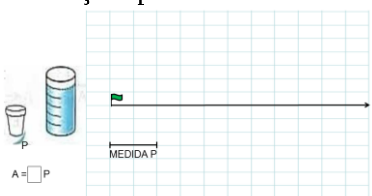


Fonte: Produção com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008).

Segundo Rosa (2012, p. 163), a referida tarefa trata de registrar as medidas de líquido do recipiente com o auxílio do esquema, como um preparativo para a construção na reta numérica, em que se faz necessária a adoção de uma mesma “medida unitária livre: a unidade”. No que diz respeito ao sistema de conceito adição/subtração, a tarefa se caracteriza por um todo estabelecido, que se constitui em uma parte conhecida, porém não identificada (aquela colocada por Vitor no recipiente), e uma desconhecida. Com base no todo estabelecido, a criança se coloca em atividade de pensamento, focada em abstrações relacionadas à identificação das partes. Ambas são incógnitas passíveis de serem determinadas com a mediação da unidade estabelecida e pela representação gráfica/literal. Trata-se de um movimento dialético conceitual – pertinente ao sistema adição/subtração – em que a representação objetal inicial e a especificação do todo dão os elementos para a elaboração de pensamento abstrato que permite retornar ao objeto com a solução desejada (ROSENTAL, 1956). Nesse movimento, além das significações aritméticas e algébricas – que futuramente se traduzirão por A = 3C + 2C –, a tarefa também traz componentes geométricos constituintes do esquema. Eles não representam apenas traços quaisquer, mas adoção, por parte dos estudantes, de representação de conceitos apropriados por consequência do desenvolvimento de tarefas anteriores com tal finalidade. As crianças sabem que o arco é uma linha curva aberta; e o segmento é parte de uma linha reta com início e fim, determinado por dois pontos.

A **vigésima quarta tarefa** (Ilustração 54) propõe que as crianças representem, na reta, a operação objetal realizada por um estudante – de nome fictício Nicolas[21] – no recipiente com líquido ao adotar como medida o copo ao lado esquerdo. Também orienta que iniciem a marcação da unidade a partir da bandeira[22] e destaquem a grandeza comprimento A com o arco (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., p. 50, 2012).

Ilustração 54: Condições para o desenvolvimento da tarefa



Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

A referida tarefa apresenta dois elementos essenciais para determinar o comprimento A, são eles o segmento de comprimento P (unidade de medida) e uma semirreta de origem na bandeira e com seta indicativa do sentido para a direita. As crianças transportam a unidade P

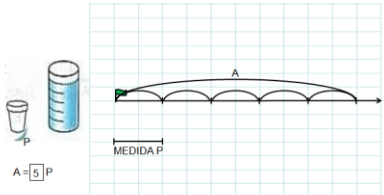
[21]Os recipientes se apresentavam sem marcas; a partir do momento que as tarefas introduzem recipientes com marcações, é denominado bureta graduada.

[22]Ainda não há o registro do número zero, o que ocorrerá em tarefa mais adiante, como a mediação da operação de subtração.

para a semirreta, a partir da bandeira, repetindo por cinco vezes, conforme indicam as marcas na bureta. Além disso, cada repetição é destacada por arcos unidades e, ao término da medição, elas desenham o arco representativo do todo A. Em seguida, preenchem com cinco o espaço no quadrado, que expressa a igualdade A = 5P (Ilustração 55).

Esse conjunto de operações realizadas pelas crianças só foi possível pelo cuidado na elaboração da tarefa que estabelece que o segmento de reta representa a unidade de medida P que, naquela circunstância, não poderá ser alterada no momento da representação geométrica. A bandeira indica exatamente onde deve iniciar tal representação. A seta[23] adverte para o sentido; neste caso, o deslocamento ocorrerá à direita.

Ilustração 55: O processo de medição na reta: o todo e as partes representados por respectivos arcos



Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

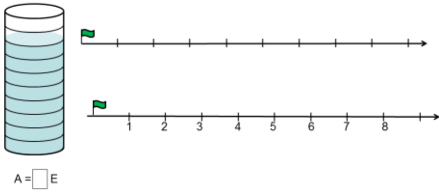
Cabe destacar que tanto o desenho da ação objetal de Nicolas como o esquema (representação gráfica) a ser completado pelas crianças traduzem a relação essencial todo-partes. Todavia, a especificidade da tarefa é a construção geométrica específica: a reta com prenúncio de ser numérica. É nesse estágio de constituição da reta numérica que o esquema se apresenta com a evidência da relação todo-partes, no âmbito do sistema conceitual de adição e subtração. Agora sua representação concreta permanece com o processo de medição de grandezas (no caso, A), mas tendo como base as seguintes peculiaridades: um ponto de partida; a bandeira, que futuramente será substituída por um signo numérico; um sentido normatizador de que os elementos constituintes do esquema (representação gráfica/literal) ficarão à direita de um ponto de referência, origem (bandeira) e anunciador de que o todo pode assumir comprimento infinito; um segmento de reta (unidade livre) indicador da extensão da unidade, que poderá se repetir, nenhuma, uma,

[23] Há várias tarefas em que o sentido da seta está para a esquerda.

duas vezes, ... n vezes, e cada uma delas será indicada por um signo numérico. Enfim, esses elementos são fundamentais para o entendimento da construção da reta numérica.

A **vigésima quinta tarefa** (Ilustração 56) propõe que as crianças registrem, em ambas as retas, o valor da grandeza A, com base na quantidade de líquido contido na bureta graduada (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 51).

Ilustração 56: Apresentação de duas possibilidades de representação da grandeza A em reta

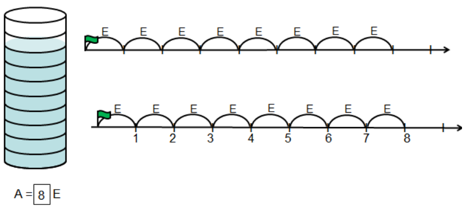


Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

Além disso, o professor orienta a resolução da tarefa mediada pelo seguinte contexto: Outras crianças, Olga e Paulo, investigam a quantidade de líquido colocada na bureta, representada no desenho. *Qual é o registro sobre o volume de água que eles fizeram* (Давыдов et al., 2012, p. 51, tradução nossa)*?*

Em seguida, apresenta-se e analisa-se a ilustração (57), em que a reta superior representa o procedimento adotado por Olga e a segunda os registros de Paulo.

Ilustração 57: Duas representações da grandeza A



Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

A análise dos estudantes conclui que ambos os procedimentos explicitam corretamente o resultado da quantidade de unidades contidas na bureta graduada. Contudo, há diferenças, pois Olga, para indicar que A = 8E, na certa teve que proceder à contagem das unidades sem as especificar numericamente. Paulo, ao adotar a segunda reta com a presença dos algarismos, imediatamente percebe que sua representação se encerra em oito, então: A = 8E.

Горбов, Микулина e Савельева (2008) ainda propõem uma nova problematização na tarefa. Para marcar o valor da grandeza A no desenho, que um aluno, por solicitação do professor e com a ajuda dos demais, faça a opção entre a representação de Olga e a de Paulo. Eles percebem que é mais cômodo a segunda, pois os algarismos indicam o valor de imediato, sem a necessidade de contar os segmentos.

Essa tarefa tem a finalidade de apresentar a ideia e a nomenclatura “reta numérica”. Por isso requer a informação, por parte do professor, que: “[...] uma reta com os numerais chama-se **reta numérica** [...]” (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008, p. 69 – grifos do autor). Mame (2014, p. 122) diz que a reta caracterizada como lugar geométrico se constitui no melhor modo de apresentação dos numerais, pois “[...] dá condições para manter o vínculo da propriedade numérica de uma grandeza sem colocar a contagem das unidades no patamar de procedimento empírico”.

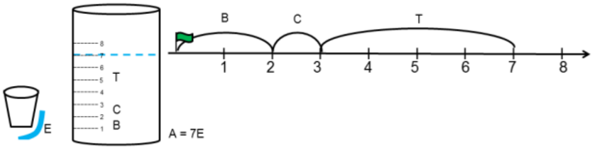
Conforme Rosa (2012, p. 164), “[...] a reta numérica reproduz o processo de desenvolvimento, de formação do sistema integral”. Isso porque – por exemplo, na tarefa em discussão – o oito (medida do volume de líquido) é uma expressão concreta de número na reta numérica, pois

> [...] não é um ato pelo qual se capte em forma elementar e primariamente sensorial, mas é mediada pela relação essencial, universal de multiplicidade e divisibilidade entre grandezas. Dito de outro modo, o volume de líquido do recipiente, dividido em uma determinada unidade de medida, resulta oito. (ROSA, 2012, p. 164).

Nessa tarefa, há elementos que contribuem para o objeto do nosso estudo no que diz respeito à centralidade da análise o movimento de permanência e surgimento de características do sistema conceitual –, pois trazem a ideia essencial dos conceitos matemáticos (relação entre grandezas), a expressão aditiva e subtrativa de número. Nela se configura um novo elemento: a inserção na reta numérica do todo, com sua indicação por um algarismo, e das partes.

A **vigésima sexta tarefa** é introduzida pelo professor, o qual mostra quatro recipientes médios, três com líquido e um vazio. Ele informa que o líquido dos recipientes foi medido com o auxílio da unidade de medida E, sendo transferido para outro recipiente maior, que resultou no volume A. Esse processo faz parte da ilustração 58 (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

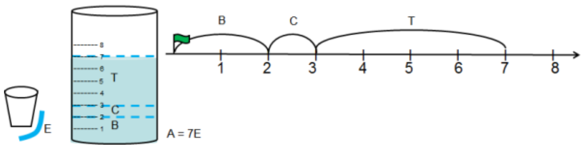
Ilustração 58: Diferentes partes que compõem o todo



Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

A reta numérica passa a ser o elemento de orientação para a operação objetal. Ela dá subsídios para as crianças identificarem que, inicialmente, foi o volume B (B=2E) de líquidos na bureta graduada, posteriormente o volume C (C=E) e, finalmente, T (T=4E). Consequentemente, a junção dos três volumes resulta nas sete unidades E (Ilustração 59). Esses volumes precisam ser destacados na imagem da bureta (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 59: Com base no esquema, representar a operação objetal

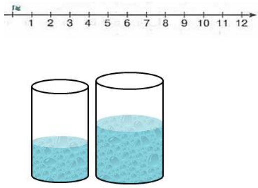


Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

A tarefa (vigésima sexta) tem como diferencial a ideia aditiva em que o todo (7) é indicado na reta numérica, e sua composição por três partes (B, C e T), cada qual com quantidade diferente da unidade (E). Contempla, pois, a relação essencial todo-partes, isto é, a junção dos três volumes resultará em outro maior. Em tal movimento conceitual, está o fundamento qualitativo de número, pois o que está em foco é o conceito de adição e subtração na relação entre grandezas.

A **vigésima sétima tarefa** (Ilustração 60) coloca os estudantes em situação de análise, com base em dois recipientes de tamanhos e volumes de líquidos diferentes. Também na reta numérica exposta no quadro (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

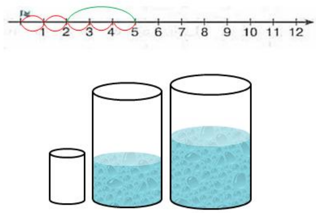
Ilustração 60: Igualar os volumes



Fonte: Produção com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008).

Como os volumes de líquido dos recipientes não são os mesmos, o professor sugere que sejam igualados. Para tanto, fica a critério dos estudantes a escolha de um dos métodos: acrescentar líquido no primeiro recipiente ou retirar do segundo. Observa-se, no entanto, que não é possível se orientar pelo nível de água dos recipientes, pois ambos são de capacidades diferentes. O professor questiona: *Como vamos determinar o volume de líquido que temos que acrescentar no primeiro recipiente ou diminuir do segundo?* Com base em tarefas anteriores, as crianças propõem a execução da medição. Para tanto, o professor providencia uma unidade de medida (um copo), que permite a identificação e o registro na reta numérica, pelas crianças, de que no primeiro recipiente há duas medidas. Em seguida, outro aluno mede o volume do segundo recipiente e também representa o resultado (5 medidas), conforme ilustração 61. O professor sugere que elas mostrem a diferença na reta numérica e destaca o respectivo arco com outra cor (verde), o que significa ser igual a três unidades (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

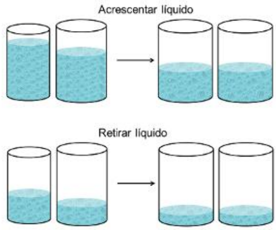
Ilustração 61: Igualdade de volume de líquido por meio da unidade de medida e com o auxílio da reta numérica



Fonte: Produção com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008).

Após esse movimento, o professor questiona: E agora vocês podem igualar o volume de líquido nos recipientes? Espera-se que as crianças respondam afirmativamente e completem: temos que acrescentar três medidas no primeiro recipiente ou retirar três do segundo. As crianças efetuam as duas operações de igualar (Ilustração 62). Para verificar se tudo foi feito corretamente o líquido igualado nos dois recipientes é transferido para outros dois iguais na forma e no tamanho (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 62: Verificação da igualdade



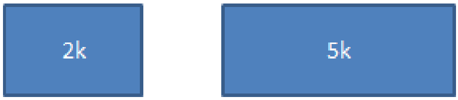
Fonte: Produção com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008).

O foco é a determinação da diferença entre quantidade de volumes desiguais em recipientes diferentes, o que requer dupla mediação: objetal, com a escolha de um recipiente para unidade de medida, e a reta, para a sua representação numérica. Diante das referidas desigualdades, apresentam-se duas possibilidades referentes ao sistema conceitual (adição/subtração): acréscimo ou diminuição. Observa-se que o desenvolvimento da tarefa ocorre por um procedimento geral que requer a determinação das partes e do todo, com necessidade de aumento ou diminuição da grandeza, agora com o apoio da reta numérica. Nesse movimento é que foi possível, por exemplo, a identificação de que a diferença entre os volumes da ilustração 61 é de três unidades de medida.

De acordo com Горбов, Микулина e Савельева (2008), é nessa circunstância – com o auxílio da reta numérica para representar a diferença de líquido – que o professor irá propor o uso de uma nova linguagem: quantas medidas **a mais** havia no segundo recipiente ou quantas medidas **a menos** havia no primeiro. Ainda, a tarefa, segundo os autores, movimenta o pensamento conceitual das crianças, que leva à apropriação da síntese: independente de acrescentar ou diminuir, a diferença entre duas grandezas será a mesma. No caso específico da situação em análise, permaneceram as três medidas.

Essa apropriação não se encerra, uma vez que o professor desenha dois retângulos e informa que suas áreas foram medidas com a unidade de medida K. A área do primeiro é 2K e do segundo 5K (Ilustração 63). Ainda, sugere que as crianças determinem o quanto a área de um é maior que a do outro. Pergunta: *Será que é preciso fazer um outro desenho para isso?* (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 63: Relação de desigualdade: determinar a diferença de medidas de superfícies

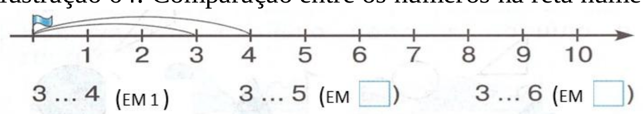


Fonte: Produção com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008).

As crianças verificam que não há necessidade de outro desenho, pois basta observar a representação anterior na reta numérica, que apresenta um todo com cinco unidades e uma parte com duas, além do destaque para a diferença entre ambos de três. O que se diferencia na situação anterior e na atual é a grandeza (antes volume e agora área) e o tipo de unidade, mas as respectivas quantidades são as mesmas. No caso, a diferença é 3 medidas de K, ou, ainda, 3K. Trata-se, pois, de evidenciar que, independente da grandeza, o valor que caracteriza a desigualdade, a diferença, não mudará. Afinal, 5 é maior que 2 em três unidades, ou, ainda, 2 é menor que 5 em três unidades. Com o auxílio dos símbolos maior (>) e menor (<), o professor, juntamente com as crianças, registra as duas formas de desigualdade. Logo: 5 > 2 (com diferença 3) ou 2 < 5 (com diferença 3) (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

A **vigésima oitava tarefa** (Ilustração 64) diz: Determine, com o auxílio da reta numérica, o quanto um número é menor que o outro. Registre a diferença dentro dos parênteses (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 70).

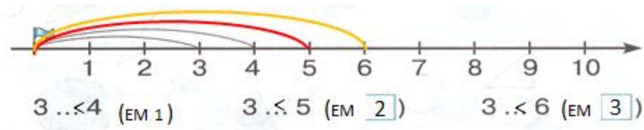
Ilustração 64: Comparação entre os números na reta numérica



Fonte: Давыдов et al. (2012).

A tarefa, além de comparar o grau de desigualdade entre os pares de números, reforça a ideia de que a diferença é determinada pelo aumento de um ou diminuição do outro. No entanto, duas características lhes são peculiares. Uma delas é a especificação do todo e de uma parte na reta numérica, por meio de arcos, que são elementos imprescindíveis. Eles possibilitam que se opere no sistema conceitual de adição e subtração, mesmo que de maneira implícita. Para determinar a diferença 1, podemos operar da seguinte maneira: 3 + 1 = 4 ou 4 – 1 = 3. Da mesma forma procedemos com os demais pares de números: 3 + 2 = 5 ou 5 – 2 = 3; 3 + 3 = 6 ou 6 – 3 = 3. A outra característica é a especificação dos símbolos (<) e do número representativo da diferença entre parênteses (Ilustração 65)[24]. Aqui se inicia o processo de explicitação da adição e da subtração em termos de algoritmo: compõe-se de três elementos numéricos, dois que se operam e um resultado.

Ilustração 65: Relação de desigualdade entre os números na reta numérica



Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

A reta numérica e o movimento dos arcos nos permitem vislumbrar a inter-relação entre as operações de adição e subtração, ou seja, o sistema conceitual. Cabe ressaltar que tais elementos são a base para o desenvolvimento do cálculo mental. De acordo com Davídov (1988, p. 153), "[...] o procedimento de construção mental do objeto é uma ação especial do pensamento do homem, que surge como derivado da ação objetal-cognoscitiva, a que reproduz o objeto de seu conhecimento [...]". Desse modo, podemos dizer que as ações objetal e gráfica são indispensáveis para alcançar o desenvolvimento no plano mental, isto é, a base para promover mentalmente as operações de adição e subtração relacionadas entre si, por isso as tarefas

[24]Embora nessa tarefa solicite o uso do sinal <, as tarefas subsequentes – que não analisaremos por terem o mesmo teor conceitual – incluem situações com o sinal >.

davydovianas dão ênfase para tais ações[25].

A **vigésima nona tarefa** parte do seguinte registro no quadro, escrito pelo professor: 7 ____ 9; (diferença: ___), para que as crianças o completem por meio de gestos, como se visualizassem a reta numérica. Tem o mesmo objetivo da anterior: a comparação entre os pares de números, o que implica em determinar a diferença entre ambos. Porém se distingue, de início, por não trazer ilustração indicadora de possíveis procedimentos com base nas representações objetais, gráficas e literais. Isso significa que os números se apresentam numa relação entre si, fora de um contexto objetal ou gráfico. A desigualdade entre ambos é determinada com a evocação da imaginação, pelas crianças, ao simularem mentalmente uma reta numérica. Em outras palavras, a diferença entre sete e nove é estabelecida por meio de gestos numa reta numérica imaginária. No modo davydoviano de organização de ensino, colocar a criança em atividade de pensamento imaginário não é algo aleatório ou questão de dinamizar a aula. Em vez dessa conotação utilitária, a preocupação é com o atendimento e fidelidade a princípios da Teoria Histórico-Cultural. Para Vigotski (2000), a experiência da imaginação é desenvolvida em processo de atividade, atrelada às condições histórico-sociais. É concebida como um pensamento que, simultaneamente, se afasta e se orienta da realidade, por se atrelar às emoções. Estas, por sua vez, se constituem em condição de mediação entre a realidade imediata e a imaginação. Portanto, ambas possuem alguns componentes emocionais.

São esses pressupostos que alimentam a proposição da vigésima nona tarefa, em que a simulação galgada na imagem da reta se constitui em uma operação mediadora para que as crianças concluam que sete é menor que nove em duas unidades. Esse resultado é registrado no quadro pelo professor, com o auxílio das crianças, isto é: $7 < 9$[26] (diferença: 2). Isso não significa a conclusão da tarefa, pois o professor questiona: E qual é a diferença entre nove e sete? As crianças, ao

---

[25]Diversas tarefas com o mesmo teor desta foram propostas. Como já anunciado, o objetivo é que as ações externas, em um determinado grau de desenvolvimento, sejam realizadas no plano mental.

[26]Vale observar que a introdução dos símbolos matemáticos como > (maior), < (menor), = (igual) e ≠ (diferente) já foram estudados e desenvolvidos em tarefas anteriores. Porém as tarefas davydovianas propõem um movimento de ida e volta, para revelar que os conceitos matemáticos não são apreendidos isoladamente, sem uma continuidade, mas sim inter-relacionados entre si, ou seja, a partir de uma unidade.

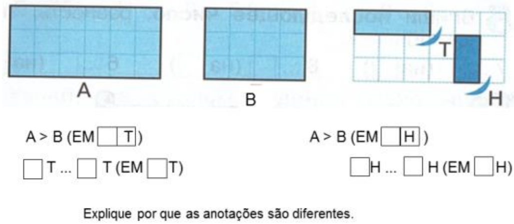
recorrerem à reta numérica, observam que cada número possui, nela, um lugar próprio. Por consequência, os números nove e sete permanecem nos mesmos lugares, portanto a diferença continuam sendo duas unidades.

Conforme Горбов, Микулина e Савельева (2008), é com a mesma intenção que o professor propõe novas situações, cuja diferença é calculada com o auxílio da reta numérica, qual seja: entre os números cinco e oito, bem como oito e cinco. No primeiro caso, recorrem à reta, recurso que não se faz necessário para o segundo, pois, de início, constatam a diferença 3. Isso significa que cinco é menor que oito e que este é maior que cinco. O professor apresenta outras duas situações – determinar a diferença entre os números nove e seis, como também entre cinco e sete – com a utilização dos dedos. Depois de várias tentativas, as crianças concluem que o mais cômodo é a utilização da reta numérica. Nesse caso, a intenção da tarefa é questionar a recorrência ao que Vigotski (2000) denomina “conduta fossilizado”. Para o autor, contar nos dedos se tratava de um procedimento que expressava a atitude mais desenvolvida de um período da história humana. Porém não mais condizente com atual estágio de formação humana, uma vez que foram produzidos outros processos de contagem mediados por criações do homem, como é o caso da reta numérica. Implicitamente está a preocupação de Davýdov (1982) de mostrar que é papel da escola desenvolver atitudes e condutas pertinentes ao atual estágio de desenvolvimento da humanidade.

Além disso, a tarefa tem a finalidade de colocar o pensamento das crianças em movimento de internalizações, isto é, a passagem de ações objetais para o plano mental. Desse modo, a relação todo-partes, bem como a ideia do sistema conceitual de adição e subtração, está em processo de atividade mental, cujos objetivos, segundo Núñez (2009, p. 107), “[...] estão orientados para a transformação de uma situação objetal”.

A **trigésima tarefa** (Ilustração 66) retoma as representações objetais, gráficas e literais, bem como a grandeza área. Aos alunos, cumpre-lhes medir as superfícies, respectivamente, das áreas A e B, ambas com as unidades de medida T e H. Que também determinem a diferença entre elas e as indiquem nos quadrados incompletos (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 72).

Ilustração 66: Adoção de duas unidades de medida distintas para medir e comparar duas grandezas



Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

Novamente, a sugestão é do uso da reta numérica[27]. Procedida a medição, o professor questiona as crianças: Quantas unidades de medida devemos usar para aumentar a grandeza menor ou quantas unidades de medida é necessário retirar da grandeza maior para obtermos a igualdade (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008)?

A pergunta é convencional nas últimas tarefas, pois reflete a preocupação com o conteúdo do sistema conceitual adição/subtração a partir da relação todo-partes.

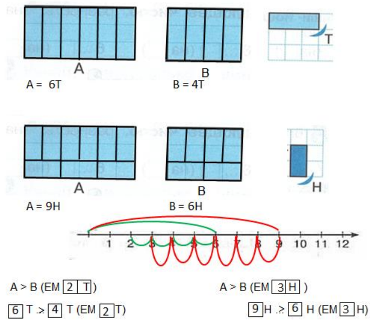
A ilustração 67 mostra que as superfícies A e B, na posição superior, foram medidas com a unidade T, que resultou, respectivamente, nas igualdades: A = 6T e B = 4T. Esses resultados são representados na reta numérica e destacados com arcos de cor verde. Nesse caso, 6T constitui o todo e 4T uma das partes. Consequentemente, a outra parte, 2T, não destacada por arcos, é a diferença. Por sua vez, a medição das figuras na posição inferior ocorreu com a unidade H, obtendo-se A = 9H e B = 6H, que também foram levados para a reta numérica, distinguidos pelos arcos de cor vermelha. Assim, 9H é o todo, 6H uma das partes. Por extensão, a diferença 3H, não destacada por arcos, é a segunda parte.

Importa a observação de que o não destaque, na reta, da diferença em ambas as medições se justifica, uma vez que o movimento gerado pela parte conhecida culmina com o valor numérico da parte desconhecida. A resolução da tarefa se encerra quando são preenchidos os espaços determinados – abaixo da reta numérica – com o sinal de desigualdade (>) entre os resultados de cada medição, além da indicação das respectivas diferenças.

---

[27]Reta numérica construída pelos próprios alunos na tarefa anterior (ДАВЫДОВ, 2012, p. 72, nº 1).

Ilustração 67: Representações, objetal e na reta, da relação de desigualdade entre as figuras para cada unidade de medida grandezas na reta numérica

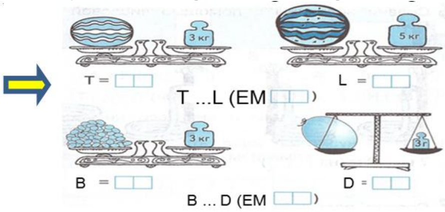


Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

Todo o movimento, proporcionado pela tarefa, prospectiva para o processo aditivo/subtrativo traduzido em sentenças numéricas que revelam as igualdades 4 + 2 = 6 ou 6 – 2 = 4 (para a unidade de medida T) ou 6 + 3 = 9 ou 9 – 3 = 6 (para a unidade de medida H). Tal movimento, de acordo com Aleksandrov (1976, p. 27), expressa “[...] que toda operação aritmética determina uma conexão ou relação entre números”. Observa-se que o enunciado da tarefa dá ênfase para a desigualdade. No entanto, a existência de duas grandezas – no caso, área – a serem medidas com unidades diferentes também proporciona indícios para a relação de igualdade entre os dois modos de medir, que promovem o desenvolvimento do pensamento matemático transitivo. Ou seja: se A = 6T e A = 9H, então 6T = 9H e, da mesma forma, B = 4T e B = 6 H, o que acarreta 4T = 6H.

A **trigésima primeira tarefa** (Ilustração 68) estabelece que as crianças identifiquem as unidades de medida da grandeza massa, comparem-nas com o auxílio da reta numérica e completem os registros (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 74).

Ilustração 68: Relação de desigualdade na grandeza massa

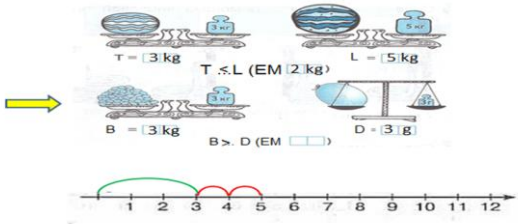


Fonte: Давыдов et al. (2012).

A flecha é a indicação de alerta aos estudantes de algo que torna impossível a resolução de alguma da tarefa. Esse tipo de situação se constitui no que Davídov (1988) denomina tarefa de controle. E, como tal, tem por finalidade buscar subsídios referentes às apropriações ou não, por parte das crianças, de conceitos desenvolvidos em tarefas anteriores. Observa-se que ainda se recomenda o uso da reta numérica. Mas qual o seu objetivo nessa tarefa?

A mensagem dessa tarefa é que podemos representar qualquer operação na reta numérica, desde que se trate de unidade de medida da mesma espécie da grandeza (comprimento/comprimento, área/área, volume/volume, massa/massa) e de seus respectivos graus de multiplicidade. Por exemplo, na grandeza comprimento: m/m, dam/dam, hm/hm, km/km, dm/dm, cm/cm e mm/mm. Sendo assim, ela reafirma a preocupação com a apropriação, por parte das crianças, da real relação entre grandezas, suas nuances e nexos com o sistema conceitual adição/subtração. Por isso é que na primeira situação das Ilustrações 68 69 não é difícil para a criança – nesse estágio de desenvolvimento do pensamento conceitual – verificar que é possível representar na reta numérica os valores das igualdades T = 3 kg e L = 5Kg e, posteriormente, registrar que T < L, com diferença de 2Kg. No entanto, na segunda situação, tal representação não é possível, mesmo que as unidades sejam grandezas da mesma espécie (massa).

Ilustração 69: Ênfase para a condição ao determinar a relação de desigualdade entre as grandezas



Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

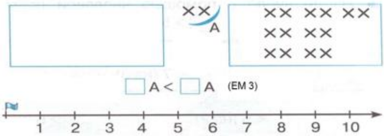
A reta, assim como está – com apenas 12 unidades –, e as condições de desenvolvimento do pensamento conceitual atual (as crianças agora que estão nas primeiras escritas numéricas, tampouco conviveram com transformações de medidas) tornam a situação como impossível de determinar a diferença. Entretanto, como situação de controle, deixam um vazio conceitual que aponta para dupla finalidade: avaliar o desempenho dos estudantes e criar a necessidade de novas tarefas que desenvolverão conceitos do sistema que superarão essa impossibilidade e viabilizarão a resolução da referida situação.

É no âmbito dessas possibilidades que, futuramente, o modo davydoviano de organização do ensino colocará os estudantes em situações de aprendizagem que proporcionarão o entendimento de que é possível a representação de 3kg e 3g, desde que se faça a transformação de 3kg em 3000g ou 3g em 0,003kg. Mesmo assim, ao atingir esse estágio de compreensão, os estudantes não mais necessitariam recorrer à reta numérica para a identificação da diferença entre as duas quantidades. Até porque, no primeiro caso, seria trabalhoso traçar uma reta no caderno ou no quadro com 3000 unidades.

Nesse contexto de perspectividade, as representações objetais (Ilustrações 68 e 69), por meio de balanças, também são ilustrativas de uma relação de igualdade em que se acresce ao sistema adição/subtração o conceito de equação. Segundo Costa (1866, p. 118 – grifo do autor), “[...] quando algum dos números componentes de uma igualdade é desconhecido, a igualdade é denominada *equação*, e o número desconhecido é chamado a *incógnita* da equação”. Afinal, o instrumento balança utilizado para medir a grandeza massa revela um equilíbrio entre a fruta e o peso, isto é, requer uma igualdade entre dois elementos. Porém, teoricamente, não se pode ficar na percepção do equilíbrio do instrumento de medida, mas na ideia de igualdade, à mercê da relação essencial todo-partes.

A **trigésima segunda tarefa** (Ilustração 70) requisita que os estudantes completem os registros com os números e construam a grandeza menor no painel em branco (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 75).

Ilustração 70: Determinação da grandeza menor

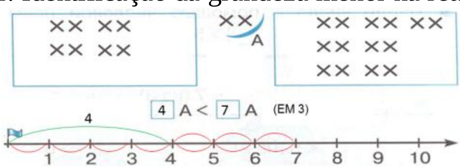


Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

O objetivo é que as crianças saibam explorar de forma correta os elementos fornecidos na tarefa: a unidade de medida (formada por dois xises) e, com o apoio da reta numérica, determinar a grandeza menor, visto que a maior já está dada. Para a resolução da tarefa, entra em cena um movimento conceitual constituído por ideias aditivas e subtrativas na relação todo-partes.

Pelas condições dadas na tarefa, o provável é que as crianças verifiquem quantas unidades de medida A existem na grandeza (quadro da direita) e registrem o resultado na reta numérica (arcos vermelhos sob a reta da ilustração 71). Em seguida, desloquem para a esquerda (arcos vermelhos sobre a reta da ilustração 71) três unidades, correspondentes à diferença indicada na própria ilustração (70) da tarefa. Com isso, chega-se a quatro, o valor desconhecido, isto é, a diferença procurada, cujo intervalo na reta é destacado com o arco de cor verde. Concluídos os movimentos e as representações, completam-se os quadrados, respectivamente com quatro e sete que satisfazem a desigualdade 4A < 7A (Ilustração 71).

Ilustração 71: Identificação da grandeza menor na reta numérica



Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

A tarefa tem como especificidade a ideia de determinação de uma grandeza menor, quando se conhece a maior, mas permanece com a adoção da reta como mediadora dos procedimentos a adotar, local de representação dos movimentos e, por consequência, de explicitação dos valores numéricos. É interessante observar que mesmo dando destaque para a desigualdade, ela projeta três igualdades movimentadas pela a essencialidade conceitual todo-partes. Mas não é seu objetivo identificá-las. Para tanto, a própria representação na reta auxilia para que elas sejam destacadas. Observa-se que sete (o todo) pode ser composto pelas partes quatro e três que, em termos operativo e de representação algorítmica é $7 = 4 + 3$. Uma segunda igualdade diz respeito à obtenção da parte quatro, que requer a retirada da parte de valor três do todo sete, isto é, $4 = 7 – 3$. Assim também é o cálculo da parte três com a diminuição da parte quatro do todo sete, ou seja: $3 = 7 - 4$

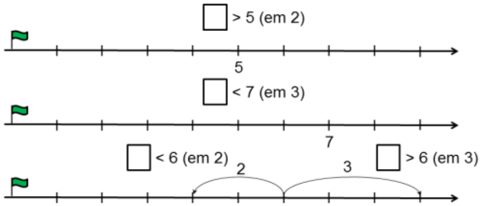
Mais uma vez vale destacar que as tarefas davydovianas se apresentam no âmbito de um sistema conceitual, ou seja, em uma unidade. Por isso elas conservam um estado de movimento entre o que a criança já aprendeu, as suas condições atuais para novas aquisições e os acenos de apropriações futuras. Nesse estágio de desenvolvimento, por exemplo, haverá crianças que conseguem determinar o valor numérico sem o auxílio da reta, isto é, mentalmente. Mesmo assim, o ideal é que ao explicitar o resultado, o professor solicite que elas reproduzam na reta numérica. De acordo com Davídov (1988, p. 125), a

> [...] reprodução tem lugar na atividade laboral das pessoas como peculiar experimento objetal-sensorial. Logo este experimento adquire cada vez mais um caráter cognoscitivo, permitindo as pessoas, com o passar do tempo, os experimentos realizados mentalmente.

Sendo assim, as tarefas davydovianas dão ênfase para a ação objetal, mediante a condição de representá-la em modelos gráfico e literal e, por conseguinte, na reta numérica. Tal movimento é a base para o desenvolvimento das abstrações no plano mental.

A **trigésima terceira tarefa** (Ilustração 72) traz três situações, cada qual especificada por uma representação na reta, que orientará a identificação do número desconhecido (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 76).

Ilustração 72: Determinação do número com base nas informações



Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

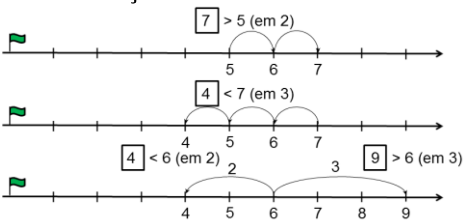
Para que as crianças desenvolvam a primeira situação, de acordo com Горбов, Микулина e Савельева (2008), o professor dá a seguinte orientação: localize na reta o número cinco. Posteriormente, ele informa: agora precisamos determinar o número desconhecido com base na informação dada. Ele pergunta: É maior ou é menor que cinco? Com base na informação contida acima da reta, □>5(em 2), as crianças respondem: É maior. O professor continua: Então para que lado devemos prosseguir pela reta numérica: de acordo com a seta (se distanciando do início) ou para o lado contrário da seta (para o início)? Dadas as apropriações anteriores, é possível que respondam e justifiquem: Temos que seguir a indicação da seta, porque quanto mais distante do início, maior é o número. Novamente o professor pergunta: Quantas unidades precisamos nos deslocar a partir do número cinco? Elas respondem: Duas unidades, porque esse número é maior que cinco, com diferença dois. Após essa conversa com os alunos, o professor solicita que façam o deslocamento de duas unidades à direita do número cinco e que as marquem com o arco e a seta, a fim de identificar o número obtido (Ilustração 73, primeira reta).

Em seguida, o professor registra no quadro a operação realizada, “5 + 2”, e explica que o ponto de partida foi o número cinco, mas como o objetivo é determinar um número maior que este, é imprescindível o deslocamento com o mesmo sentido da reta. Esse movimento é simbolizado com o sinal de “mais” e, após, coloca-se o número de unidades de deslocamento a partir do número cinco. Além disso, o professor diz: Acabamos de fazer um registro que se chama sentença. Lê-se assim: “cinco mais dois” ou “adicionamos dois a cinco” (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Procedimentos similares são adotados para a resolução da segunda situação: identificação, na segunda reta, do valor conhecido (7); verificar se o número desconhecido é maior ou menor que o valor dado, que indicará o sentido do deslocamento na reta numérica, no caso, é contrário ao indicado pela seta (Ilustração 73, segunda reta). Como o valor a determinar é menor que o número sete em três unidades, o professor registra 7 - 3 e lê “sete menos três” ou “diminuímos três de sete”.

Na última situação, que tem por base a terceira reta, as crianças terão que determinar duas sentenças a partir de um mesmo número de referência (6) que não foi colocado na reta. No entanto, a orientação anterior, □ < 6 (em 2) e □>6 (em 3), dá condições para que a tarefa seja efetivada com duas sentenças: uma aditiva, correspondente ao movimento que parte do seis e desloca as três unidades indicadas no arco com seta para a direita, isto é, 6 + 3; outra subtrativa, 6 – 2, que traduz o movimento com ponto de partida em seis e deslocamento de duas unidades para esquerda. Acrescem-se, ainda, as respectivas leituras: “seis mais três” ou “adicionamos três a seis” e “seis menos dois” ou “diminuímos dois de seis”[28].

Ilustração 73: Identificação dos números faltantes



Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

A tarefa tem como teor típico a explicitação do movimento transformativo da desigualdade em três desigualdades, como anunciado na tarefa anterior, que em linhas gerais se traduz da seguinte forma: **todo**=*parte 1*+*parte 2*, **parte 1**=*todo* - *parte* 2 e **parte 2**= *todo* - *parte 1*. Isso quer dizer que os sinais **+** (mais) e **–** (menos) significam a existência de movimentos distintos, definidores das operações. Na reta numérica, se o deslocamento – partir de um número fixo – for no sentido positivo, significa que há acréscimo de unidades, então a operação é a adição. Nesse caso, o número fixo e os acréscimos correspondem a duas partes do todo. Por sua vez, se o deslocamento for

[28]Tarefas com o mesmo teor foram propostas, porém com grandezas diferentes, como volume, massa, área, etc.

no sentido contrário, a operação é a subtração e o número fixo é todo, do qual será diminuída uma das partes. Para a explicitação desses movimentos, na reta, houve a necessidade de uma nova caracterização de um elemento geométrico indicador: a seta no arco.

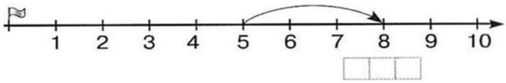
Todo esse movimento traduz o caráter científico do sistema em que se destacam a tríade conceitual adição/subtração/equação, principalmente no que diz respeito ao primeiro axioma de Costa (1866, p. 117-118, grifo do autor):

> Da *comparação elementar* de dois números dados, quaisquer, **A** e **B**, não podem resultar senão duas relações possíveis, que consistem na *igualdade* ou na *desigualdade* de suas grandezas respectivas.
> No caso de *igualdade*, teremos **A = B**; simples identidade, que não poderá ter leis diferentes dos axiomas seguintes:
> I Pode-se adicionar um mesmo número aos dois membros de uma igualdade, ou deles subtrai-lo;
> [...] Resulta do axioma I: que os termos aditivos de um membro podem passar em subtrativos para o outro membro, e os subtrativos em aditivos.
> Com efeito, se A + m = B – n; adicionando **n** a ambos os membros obtém-se A + m + n = B; e diminuindo **m** de ambos os membros, obtém-se A + n = B – m, o que prova a proposição.

Enfim, a trigésima terceira tarefa se particulariza pela apresentação da ideia de “sentença matemática” na correlação entre o todo e suas partes, bem como pela sua devida leitura oral. Esta é anunciadora para a indicação, em tarefas futuras, dos termos que compõem as sentenças das referidas operações.

A **trigésima quarta tarefa** apresenta duas situações articuladas entre si. Na primeira (Ilustração 74), questiona: Como foi determinado o número? Anote a sentença na malha abaixo da reta. A segunda solicita que se identifique, entre as quatro igualdades, aquela que corresponde à sentença (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 76).

Ilustração 74: Reta numérica a ser observada para a resolução da tarefa



5 + 3 = 8 7 − 2 = 5
8 = 5 + 3 5 = 7 − 2

Fonte: Давыдов et al. (2012).

A primeira situação postula que os estudantes adotem como referência o arco e seu sentido. Ao se reportarem à apresentação do professor, na tarefa anterior, as crianças observarão que o ponto de partida foi o número cinco e, a partir disso, houve o deslocamento de três unidades para a direita, conforme o sentido da seta do arco. Logo, a sentença correspondente é:

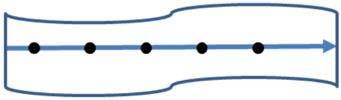
5	+	3

A segunda situação tem um teor de avaliação a fim de observar se as crianças conseguem identificar as igualdades matemáticas oriundas da sentença, quais sejam: 5 + 3 = 8 e 8 = 5 + 3. Tais igualdades são lidas de várias maneiras, em voz alta, pelas crianças, juntamente com o professor: “Cinco mais três dá oito” ou “se acrescentarmos três a cinco resultará em oito”[29] (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008). Importa destacar que a presente tarefa foca na sentença e na sua correspondente igualdade.

A **trigésima quinta tarefa** (Ilustração 75) coloca as crianças na seguinte situação: Elas têm em suas carteiras os números mágicos[30] recortados do Anexo de seus livros. O professor lhes sugere que inventem uma série numérica com os mesmos. No quadro, está desenhada uma fita com as pontas rasgadas que contém uma reta numérica com seta indicativa para a direita e com quatro unidades marcadas (delimitadas por cinco pontos) (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

[29]Diversas tarefas com esse teor são propostas a fim de que a criança compreenda o significado de sentença e de igualdade, bem como suas respectivas pronúncias.
[30]Tarefas que envolvem os números mágicos foram introduzidas anteriormente.

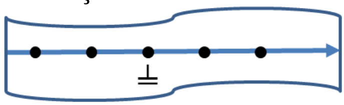
Ilustração 75: Representação da reta numa fita mediadora da resolução da tarefa



Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

Em seguida, o professor pega um símbolo, aleatoriamente, coloca-o no ponto central da reta numérica (Ilustração 76) e pergunta: Que número é esse? (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008):

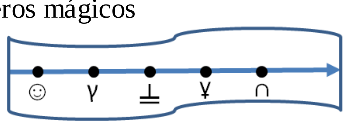
Ilustração 76: A inserção de um símbolo na reta



Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

É provável que as crianças respondam que se trata do número três. O professor argumenta que não é possível identificá-lo, porque o início da fita, juntamente com parte reta numérica, foi cortado. Em seguida, sugere que escolham outro símbolo para marcar o próximo número, isto é, uma unidade a mais. Ele interroga: Em que lado o colocaremos? Espera-se que as crianças respondam “do lado direito”, por influência do sentido da flecha. Posteriormente, solicita que uma criança vá ao quadro e escolha os números mágicos, aleatoriamente, para completar a sequência numérica. Uma, entre tantas possibilidades, é a representação da ilustração 77 (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 77: Uma das possibilidades de compor uma sequência na reta com números mágicos



Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

A formação da sequência com números mágicos abre a possibilidade para que o professor solicite às crianças algumas identificações: do menor número (☺); do número maior em uma unidade que o anterior[31], o que possibilita mais de uma resposta (γ; ╧; ɏ e ∩); do número, uma unidade menor que o primeiro, que não é possível responder, por não estar visivelmente na reta, mas é importante que os estudantes compreendam que ele existe; o número que é uma unidade maior ou menor que o ɏ, respectivamente, ╧ e ∩). (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

A tarefa coloca os estudantes em movimento de pensamentos aditivo e subtrativo inter-relacionados entre si, mesmo sem envolver números representados com algarismos adotados universalmente. Em termos numéricos, traz implicitamente a ideia de que os seus símbolos são produções humanas que poderiam adquirir qualquer formato, desde que cumpram determinados princípios lógicos que possibilitam, por exemplo, a contagem. Também é intento o desenvolvimento da ideia de que as operações matemáticas são ato de pensamento e que, para a sua comunicação, o homem criou formas de representações, entre elas a simbólica. Como diz Aleksandrov (1976, p. 27), “[...] os números não aparecem como entidades separadas, mas como um sistema com suas relações mútuas e suas regras”.

Nesse âmbito, a tarefa proporciona um contato inicial das crianças com a ideia de que o primeiro elemento, na reta numérica, nem sempre corresponde ao número um (1). Isso se apresenta no momento em que se explicitam os conceitos de antecessor e sucessor que, por consequência, se inserem ao sistema conceitual adição-subtração-equação. Vale observar que mesmo não se tratando de valores numéricos indo-arábicos, a tarefa possibilita que, aritmeticamente, os estudantes operem mentalmente, com base na reta, por meio dos símbolos: afinal ☺ + 1 = γ; γ - 1 = ☺; ou, ainda, ☺ + 2 = ╧; ╧ - 2 = ☺.

A **trigésima sexta tarefa** (Ilustração 78) convida os estudantes para que determinem o resultado das operações e deem continuidade à sequência de contas, com uso da reta numérica, caso necessário (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 81).

[31]Anteriormente, foram introduzidas tarefas que trataram dos diferentes sistemas numéricos (romanos, egípcios, entre outros), bem como dos conceitos de antecessor e sucessor, no âmbito das sentenças aditivas e subtrativas.

Ilustração 78: Operações de adição e subtração a serem resolvidas pelos estudantes.

$1 + 1 = \square$	$10 - 1 = \square$
$2 + 1 = \square$	$9 - 1 = \square$
$3 + 1 = \square$	$8 - 1 = \square$
....	....
....	....
$9 + \square = \square$	$2 - \square = \square$

Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

O professor solicita que as crianças pronunciem em voz alta as sentenças (inclusive aquelas faltantes na sequência) da primeira coluna e seus respectivos resultados – sem o uso da reta numérica, a não ser se necessário – e, concomitantemente, registra no quadro. Ele chama a atenção para que observem alguma regularidade – aumento gradual dos números que estão depois do sinal de igualdade. O mesmo trabalho é desenvolvido com a segunda coluna. O professor reforça a ideia de que é necessário repetir esse tipo de movimento – resolução das operações mentalmente, de forma correta e rápida[32] (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

A tarefa é representativa daquelas que colocam o cálculo mental como sua finalidade, mas com o cuidado para que ocorra a partir de um processo operativo e conceitual que requer atenção nas regularidades. Por exemplo, na primeira coluna, as primeiras parcelas das sentenças são a sequência numérica de 1 a 9, adicionada (segunda parcela) por 1. Isso faz com se completem as contas que faltam da sequência (4 + 1, 5 + 1, 6 + 1, 7 + 1, 8 + 1), bem como perceber que nove também deverá ser acrescido de uma unidade. Tais condições é que proporcionam como resultado a sequência de 2 a 10. Por decorrência, os estudantes perceberão o movimento inverso na segunda coluna, tanto em termos conceituais – em vez da adição, a subtração – quanto da ordem das sentenças, em que os primeiros elementos das igualdades formam uma sequência decrescente. Observa-se que na primeira coluna o essencial era a busca do todo, sendo conhecidas as duas partes, uma delas variável e a outra constante (1). Na segunda coluna, tem-se o todo variável e uma das partes é sempre a mesma (1). Assim, infere-se mentalmente o

---

[32]As tarefas que desenvolvem a habilidade de adição e de subtração estão representadas no caderno de exercícios e, também, no livro didático, a partir da página 120. Elas são desenvolvidas paralelamente ao processo de aprendizagem do novo material.

resultado, a outra parte, que forma uma sequência numérica decrescente de 9 a 1. A unidade (1), como uma das partes fixas, constantes, afirma, respectivamente, a ideia de sucessor (com a adição) e de antecessor (com a subtração).

A dinamicidade que a tarefa proporciona para o desenvolvimento do cálculo mental não é algo momentâneo ou questão de técnica operatória em si. Em vez disso, ela traz fundamentos científicos da própria Matemática. Por exemplo, na constatação de Giuseppe Peano (1858-1932) de que toda teoria atual da constituição de número natural se alicerça em quatro propriedades, axiomas: (A_1) possui um único sucessor, também natural; (A_2) números diferentes possuem sucessores distintos; (A_3) há um número natural que não é sucessor de nenhum número natural, o zero; (A_4) um subconjunto qualquer, com o zero e os sucessores de todos os seus elementos, é igual ao conjunto dos números naturais (EVES, 1997).

Além disso, entre outros fundamentos matemáticos, vale distinguir a relação de ordem que, de acordo com Eves (1997), sua introdução é uma consequência da operação adição. Em termos genéricos, consideram-se dois números naturais, a e b, diz-se que a é menor que b ($a < b$) como significado da existência de c pertencente a N ($c \in$ N) de modo que $b = a + c$, o que possibilita dizer que b é maior que a, além disso, a é menor que b. Caso ocorra $a \leq b$, significa que $a < n$ ou $a = b$. Por decorrência, $a < b + c$, consequentemente, $a < a + 1$ e, por extensão, $1 < b$, para qualquer número natural diferente de ($n \neq 1$).

Importa esclarecer que a referência aos fundamentos de Peano não significa que eles são contemplados literalmente e com a linguagem rigorosa da Matemática Pura nas tarefas do primeiro ano escolar pelo grupo de pesquisadores liderados por Davýdov. Na realidade, a menção é a elucidação do pensamento conceitual com ideias pertinentes à referida base matemática. No estágio de formação em que se encontram as crianças, a preocupação é com as orientações para o desenvolvimento do cálculo mental, a fim de evitar memorizações mecânicas ou "decorebas" para usar a terminologia do senso comum. Observa-se que o próprio enunciado da tarefa ainda explicita a possibilidade de adoção, em extrema necessidade, da reta numérica, mas seu uso começa a ser desestimulado para que atinjam o plano mental.

A **trigésima sétima tarefa** (Ilustração 79) também traz uma sequência de operações de adição e subtração para completar com os respectivos resultados. No entanto, estabelece uma condição de procedimento de resolução: o uso de uma reta numérica imaginária (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 82).

Ilustração 79: Operações aditivas e subtrativas

$5 + 2 = \square$	$8 - 2 = \square$	$6 - 3 = \square$
$7 + 3 = \square$	$7 - 3 = \square$	$9 - 2 = \square$

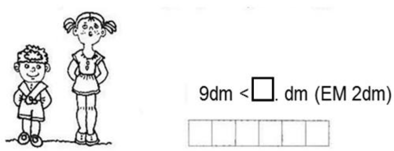
Fonte: Давыдов et al. (2012).

A finalidade dessa tarefa, assim como a anterior, também é o cálculo mental, porém relacionado à reta numérica. Segundo Горбов, Микулина e Савельева (2008), não há necessidade de habituar as crianças às descrições faladas completas das operações, por exemplo: 5 + 1 dá 6, 6 + 1 dá 7, para significar que 5 + 2 é igual a 7. Esse procedimento pode retardar o processo da contagem. Por isso, a orientação do professor é para que elas falem o resultado dos próximos valores da reta numérica assim que ouvirem ou verem a sentença. Às vezes, adotam o número inicial como a primeira unidade na reta. Porém é sugerido que não o repitam, com a justificativa de que “já foi ouvido ou visto no registro”. Para tanto, o desenvolvimento da tarefa é organizado da seguinte maneira: um aluno lê o valor inicial da sentença em voz alta, os demais pronunciam, juntos, os números seguintes ou antecedentes, seguidamente, um a um. O objetivo aqui é que os estudantes saibam identificar rapidamente, pelo visual do operador, a direção por onde deverão se deslocar pela reta numérica (mentalmente), isto é, contar até o número necessário e parar a tempo. Todas essas condições orientam os estudantes para as soluções da seguinte forma: o deslocamento de três unidades para a direita, depois do sete se atinge e pronuncia o 10. Nas subtrações, por exemplo, 8 – 2 = □, eles pensam: voltar duas unidades do oito, pronunciam seis.

Tal movimento, segundo Davýdov (1982, p. 162), possibilita o “[...] saber reproduzir mentalmente seu conteúdo, elaborá-lo. A ação de elaboração e transformação do objeto mental constitui o ato de sua compreensão e explicação, o descobrimento de sua essência”. Por isso a peculiaridade da tarefa é a operação mental voltada ao movimento imaginário na reta. Assim também a pronúncia em voz alta, presente em tarefas anteriores, adquire outro objetivo. Antes se pronunciava somente a sentença ou a sentença seguida do resultado. Esse procedimento não é mais o essencial, pois o foco é somente a leitura do resultado, que não ocorre ainda de forma direta, mas gradual. Ou seja, mentalmente, as crianças aumentam ou diminuem uma unidade seguida com a união de outra até alcançar o resultado esperado.

Na **trigésima oitava tarefa,** Давыдов et al. (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de 2012, p. 82) propõe que as crianças elaborem um problema referente às estaturas das crianças que contemple as representações da Ilustração 80. Além disso, resolvam-no e indiquem o resultado.

Ilustração 80: Representações que dão base para a introdução de problema-texto



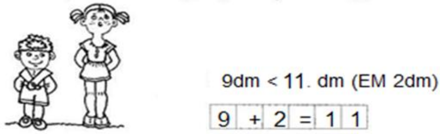
Fonte: Давыдов et al. (2012).

A ilustração com os garotos de alturas diferentes, a indicação da desigualdade – 9dm < □ dm (em 2dm) – e a malha com seis espaços são representações familiares das crianças, as quais proporcionam condições para elas transformarem a desigualdade em igualdade e completarem o resultado. Nesse caso, nove e dois são partes e a meta é buscar o todo. No entanto, se assim procederem, a tarefa não trará nada de novo e se tornará repetitiva, o que deixará, intelectualmente, os estudantes no mesmo lugar, isto é, conforme Vigotski (2000), sem promover a aprendizagem e o desenvolvimento. Por isso, o professor parte daquilo que eles já sabem e pede que façam mentalmente o deslocamento pela reta numérica. Segundo Горбов, Микулина e Савельева (2008), o que se almeja é a transformação da situação em um texto. Porém sem a necessidade de exigir-lhes a explicação do que seja um problema, uma solução. O professor simplesmente inicia o uso desses termos com bastante frequência.

Pode ser que as crianças elaborem um problema-texto do tipo: Pedro e Laura são irmãos. Um dia Pedro descobriu que tinha nove decímetros de altura e sua irmã, Laura, media dois decímetros a mais que ele. Qual é a altura de Laura[33]? Em seguida, traduzam para a igualdade matemática representada na malha da ilustração 81.

[33]Paralelamente a tarefas como essas são propostas outras que envolvem adição e subtração com números 1 e 2.

Ilustração 81: A resolução do problema



Fonte: Давыдов et al. (2012).

Para a teoria histórico-cultural, a elaboração de problemas-texto e sua resolução matemática é uma necessidade para a formação de abstrações conceituais. Kalmykova (1991, p. 13) entende que

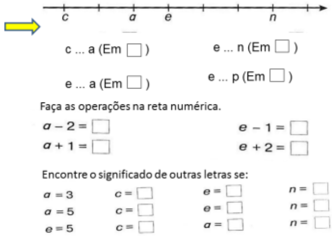
> [...] para facilitar a formação de conceitos matemáticos mais abstratos, é necessário intensificar os exercícios de abstração e generalização. Um meio para chegar a este fim consiste em exprimir o texto de um problema em termos matemáticos mais generalizados [...].

A abstração se manifesta na resolução de problemas, pois se tem que determinar o valor desconhecido. Para Luria (1990), o movimento durante o processo de resolução de problemas requer uma capacidade intelectual complexa. Em outras palavras, requer dos estudantes a análise das condições estabelecidas na estruturação de cada tarefa. Conforme Kalmykova (1991, p. 10), “[...] para resolver bem um problema, tem que existir sínteses a nível de análise complexa [...]”, que permitem a elaboração de estratégias pertinentes.

Portanto, a tarefa tem sua identidade própria, a introdução de problemas matemáticos com teor aditivo e subtrativo. O que nos chama a atenção é seu modo de surgimento: o texto não vem pronto, mas uma produção das crianças.

A **trigésima nona tarefa** (Ilustração 82) tem o seguinte enunciado: Compare os números representados por letras e resolva as operações (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 85).

Ilustração 82: Comparação algébrica dos números na reta numérica

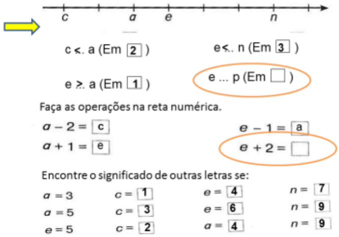


Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

O professor explica que alguns números na reta numérica estão representados por letras. Diferentemente das grandezas que são representadas por letras maiúsculas, os números geralmente são representados por letras minúsculas. E afirma: Vocês não sabem quais números são esses, mas tenho a impressão de que mesmo assim conseguirão compará-los. Observa-se que o início da reta numérica não é visível, mas a seta indica sua direção. As crianças comparam os pares de números propostos na tarefa, a fim de determinar a diferença entre eles. Percebem que não há possibilidade de comparar um dos casos, pois o número *p* não está marcado na reta, o que Davídovi (1988) denomina de situação de "controle", a fim de identificar se os estudantes demonstram o entendimento daquilo que se apropriaram anteriormente. "Permite que quando os estudantes mudarem a composição operacional das ações, descubram sua relação com uma ou outra peculiaridade dos dados da tarefa a resolver e do resultado obtido" (DAVÍDOVI, 1988, p. 184).

Ainda, na resolução da tarefa, a impossibilidade no que diz respeito aos resultados das operações com os números, também representados por letras. O professor destaca que existe um deles, mas não há registro literal da unidade ($e + 2$), o que inviabiliza a sua identificação. É solicitada a presença de quatro crianças no quadro, a fim de representarem os números *c, a, e, n*. Elas ficam cada uma ao lado da representação. O professor determina o valor do número *a*, entrega ao aluno responsável pela resolução da situação um cartão com o número três. O aluno coloca o cartão na reta numérica (no quadro), embaixo da letra *a*. Esse movimento possibilita que os demais alunos "revelem" os outros números. Os números são anotados nos cadernos. As duas outras situações são resolvidas da mesma maneira, conforme ilustração 83 (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 83: A verificação de uma impossibilidade

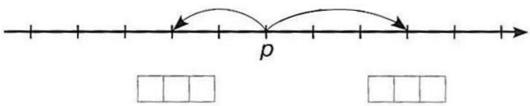


Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

Essa tarefa se caracteriza pela evidência daquilo que, assim como Rosa (2012), temos dito: a proposição davydoviana não se limita às operações de adição e subtração somente no contexto aritmético, mas também em um contexto conceitual marcado por significações geométricas (representação na reta numérica) e algébricas (letras). O movimento proporcionado por ela explicita que a essência do sistema conceitual de adição e subtração se dá na relação entre grandezas, a qual conclama por operacionalização com o olhar atento para a interconexão todo-partes de teor geométrico, algébrico e aritmético. Essa interatividade do sistema conceitual traz em sua subjacência o conceito de equação, embora de forma aberta, uma vez que os números são especificados por letras. Por exemplo, em *a – 2 = c* e *a + 1= e*, as letras *a*, *c* e *e* assumem diferentes valores, dependendo do número que se estabelece para uma delas em cada igualdade.

A **quadragésima tarefa** (Ilustração 84) tem como proposição aos estudantes que registrem as operações desenvolvidas na reta numérica (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 85).

Ilustração 84: Registro das operações



Fonte: Давыдов et al. (2012).

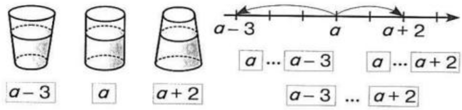
A tarefa contempla a ideia de que, na reta, uma equação pode promover um movimento conceitual nos dois sentidos. Isso significa que à incógnita *p* é acrescida ou retirada uma quantidade. Em termos genéricos, a letra pode, em alguma situação, ser uma parte quando envolve a adição; ou o todo, se a subtração. Sua peculiaridade em relação à anterior é que a formação da sentença é de responsabilidade do estudante. Para tanto, Горбов, Микулина е Савельева (2008) trazem como orientação ao professor chamar a atenção das crianças, pois alguns números na reta numérica estão representados por letras. Que também aproveite para novamente enfatizar que os números são representados com letras minúsculas cursivas. No momento, não é possível saber quais são esses números, o que não os impede de compará-los. Elas verificam que o início da reta não está marcado, mas a seta indica a direção. É essa característica que possibilita a relação entre os números, ou seja, colocar nas malhas as respectivas sentenças $p - 2$ e $p + 2$. Com isso, a tarefa fica resolvida. No entanto, ela possibilita múltiplas interpretações que extrapolam a sua finalidade. Uma delas é que ao se transformarem as referidas sentenças em igualdades, necessariamente se apresentará um número representado por letra que não pode ser a mesma para as duas situações, pois a distância em termos de unidades de $p - 2$ é diferente de $p + 3$. Assim é possível, por exemplo, formar as igualdades $p - 2 = m$ e $p + 3 = n$. Tais inter-relações são expressões de determinações históricas no processo de produção do conhecimento. Como diz Aleksandrov (1976, p. 26):

> [...] no processo de contar, os homens não somente descobriram e assimilaram as relações entre os números, como por exemplo, que dois e três são cinco, mas que também foram estabelecendo gradualmente certas leis gerais. [...] Desse modo, os números aparecem não como entidades separadas e independentes, mas relacionadas umas com outras.

Da citação se conclui que “[...] o objeto da aritmética são as relações entre números [...]” (ALEKSANDROV, 1976, p. 27), mas delas decorrem elaborações de ordem algébrica. Contudo, não se pode perder de vista que a atividade prática é o meio fundamental para que ocorra a aproximação do abstrato ao concreto. Em outras palavras, conforme Ilienkov (2006), trata-se de um critério do fazer prático.

A **quadragésima primeira tarefa** (Ilustração 85) é reveladora da ascendência da articulação entre as representações objetais, gráficas e literais, movida por um conteúdo eminentemente algébrico que induz à ideia de inequação. Isso se configura ao expressar aos estudantes que em cada recipiente estão registradas as medidas de líquido. Exige duas operações pertinentes à tarefa: 1) a indicação, por meio de registros, de como foram encontrados os outros volumes; 2) estabelecer as comparações (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 86).

Ilustração 85: Análise dos números



Fonte: Давыдов et al. (2012).

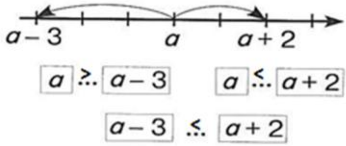
No quadro e no livro está a representação da reta numérica com o número *a*. O professor tem um recipiente com líquidos, bem como as respectivas medidas. Também mostra a unidade de medida, indicadora do volume que foi medido, mas sem a apresentação do número concreto. Nesse sentido, vale esclarecer que

> [...] o número, de que nos servimos, sem determinar a espécie das unidades, como quando dizemos simplesmente três, ou três vezes, quatro ou quatro vezes, chama-se número *abstrato*; porém quando declaramos ao mesmo tempo a espécie das unidades, quando dizemos quatro libras, cem toneladas, chama-se número *concreto*. (BEZOUT, 1791, p. 2 – grifo do autor).

Costa (1866, p. 11 – grifo do autor) acrescenta: “[...] os números concretos, falando propriamente, não são números, são *quantidades”*. Retomando o desenvolvimento da referida tarefa, ele prevê que é preciso colocar duas medidas a mais de água em um outro recipiente de mesma forma. Tal informação, segundo Горбов, Микулина e Савельева (2008), dá condições para a descoberta de que se permite a colocação da mesma quantidade de líquido nos referidos recipientes, com a adição de duas medidas. A operação é representada na reta numérica com um arco indicador do ponto que corresponde ao volume obtido. O professor questiona: *Como podemos marcá-lo? Podemos dizer que este é o número a?* Espera-se que as crianças respondam não, porque o *a*, ponto de partida, foi registrado anteriormente. Portanto, o novo número deverá ser marcado com outra letra. Mas o professor explica que há outra possibilidade: marcá-lo com uma sentença, isto é, “*a* + 2”. As crianças o registram embaixo da reta numérica e unem com o respectivo ponto (ГОРБОВ, МИКУЛИНА, САВЕЛЬЕВА, 2008).

Depois, o professor coloca o volume *a* dentro de um recipiente (que tenha a mesma forma) e, em seguida, retira três medidas, o que leva as crianças afirmarem: o terceiro recipiente contém três medidas a menos de líquido que o primeiro. Elas encontram e marcam com uma sentença o respectivo ponto na reta numérica. Discute-se o nível de água no desenho do livro e completam os registros, como se apresentam na ilustra 86 (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 86: Comparação entre os números

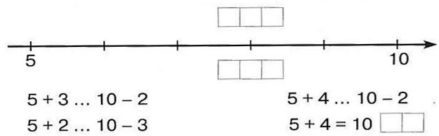


Fonte: Давыдов et al. (2012).

A correta identificação do esquema requer da criança a compreensão da relação todo-partes, bem como o significado das letras em matemática, que são de valores desconhecidos. Esse movimento direciona, de acordo com Davídov (1988, p. 185), para a finalidade do ensino fundamental de formação nos estudantes de uma concepção autêntica de número com base no conceito de grandeza. Isso começa com a introdução desse conceito, determinado pelas relações de "igual", "maior", "menor", de modo tal que a criança compare de um modo diferente as grandezas apresentadas objetalmente. Mesmo antes da assimilação do conceito de número, apresentam-se os resultados da comparação por meio de fórmulas literais: a = b; a > b; a < b. Em momentos posteriores, realizam-se suas transformações com conteúdos peculiares da adição e subtração, por exemplo, a + c > b, a = b – c e a + c = b + c, etc., com apoio nas correspondentes propriedades das referidas relações em articulação com a base essencial, parte-todos.

A **quadragésima segunda tarefa** (Ilustração 87) traz uma situação de análise para que, a partir dela, a criança represente o número destacado por meio de duas sentenças e, em seguida, complete os registros (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 88).

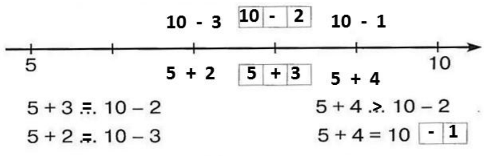
Ilustração 87: Determinação da sentença que representa o número destacado



Fonte: Давыдов et al. (2012).

Nessa tarefa, as sentenças são numéricas, em vez de literais, como nas anteriores. Os números 5 e 10 estão representados na reta e, além deles, há outro (desconhecido) a ser marcado. O desenvolvimento da tarefa requer a participação do professor na seguinte simulação: Daniel o determinou a partir do 5 e Vitor, do 10. *Qual será a sentença em que cada um dos meninos marcará esse número?* O detalhe a se observar é que ambas as sentenças representam o mesmo número, o que postula, inicialmente, que cada um dos dois meninos precisou resolver os dois pares de operações que mostram uma constante nos resultados, 8. Para isso, é sugerido às crianças que desenvolvam as respectivas operações na reta numérica (Ilustração 88) e que nela indiquem todas as sentenças (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008). Em seguida, que preencham os espaços, caracterizados por reticências, com os símbolos matemáticos correspondentes: nas operações da primeira coluna com igual (=) e na segunda com maior (>).

Ilustração 88: Análise das sentenças para a determinação do número

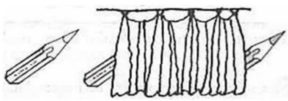


Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

A característica que diferencia essa tarefa das demais é que explicitamente a relação de igualdade e desigualdade se apresenta com a comparação de duas sentenças aritméticas (uma aditiva e outra subtrativa), mas, implicitamente, reflete seu conteúdo algébrico ao mostrar que um mesmo número pode ser representado por diversas sentenças. Também se contextualiza no sistema conceitual – adição e subtração –, na relação universal todo-partes. Afinal, o todo oito é composto por partes diferentes pré-estabelecidas, isto é, escrever duas sentenças que resultem em oito, com os números 5 e 10. A especificação do número ponto de partida leva à representação das duas operações, visto que oito é, simultaneamente, menor que 10 e maior que 5. Decorrem, então, as duas igualdades 10 – 2 = 8 e 5 + 3 = 8 e, consequentemente, pelo pensamento transitivo, a igualdade das sentenças 10 - 2 = 5 + 3. Também se apresentam outras possibilidades de compor o todo oito, como, por exemplo, 6 + 2, 9 -1 e 4 + 4.

A **quadragésima terceira tarefa** (Ilustração 89) coloca o estudante em situação de escolha da unidade de medida mais apropriada para a grandeza em questão, comprimento de três lápis, alguns deles com partes invisíveis. Porém isso não acontece diretamente com a apresentação de uma sentença, mas com a elaboração de uma história que traga a necessidade de comparação dos números (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 88).

Ilustração 89: Comparação algébrica



p　　*p+2*　　*p-1*

p ... p + 2　　p ... p - 1

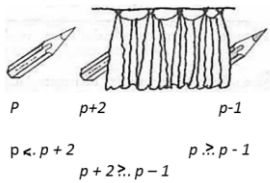
p + 2 ... p – 1

p	5	7	4
P - 1			
P +2			

Fonte: Давыдов et al. (2012).

As crianças analisam o desenho e chegam à conclusão de que para medir o comprimento dos lápis convém usar a unidade de medida *centímetro*. Significa, então, que o comprimento do primeiro lápis é *p* cm. O segundo e o terceiro lápis são cobertos de tal maneira, que não se sabe o seu real comprimento, por isso há as sentenças que os identificam. A partir de então, o professor entra em cena com algumas solicitações e perguntas que destacaremos a seguir. Leiam em voz alta a primeira sentença que representa o comprimento do segundo lápis (p + 2). Continuem a frase: O comprimento do primeiro lápis é p cm e do segundo é … Maior ou menor? Espera-se que elas respondam: O comprimento do segundo lápis é 2 cm maior. Falem algo sobre o comprimento do terceiro lápis. Pode ser que respondam: O comprimento do terceiro lápis é 1 cm menor. Especifiquem, o menor o quê? As crianças respondem: Menor que o comprimento do primeiro lápis. Depois desses questionamentos, elas comparam as sentenças propostas ($p < p + 2$, $p > p - 1$, $p + 2 > p - 1$), conforme Ilustração 90. O professor lhes mostra que foram estabelecidos valores para *p*, como mostra o quadro. Elas determinam os valores numéricos das sentenças e pronunciam os comprimentos dos lápis. Os resultados são anotados no quadro, situação inferior da ilustração 90 (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 90: Atribuição de valores à letra *p*



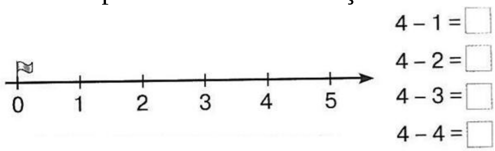
p	5	7	4
P - 1	5 -1= 4	7 -1= 6	4 -1= 3
P +2	5 +2= 7	7 +2= 9	4 +2= 6

Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

Nessa tarefa, o foco inicial é a significação algébrica para que, no processo de seu desenvolvimento, se transforme em aritmética, sem a explicitação da geométrica. Isso significa a recorrência ao cálculo mental. Ela volta a enfatizar a possibilidade de um número desconhecido, no caso o *p*, assumir quaisquer valores, o que modifica constantemente o seu resultado. Esse movimento revela que a equação está estritamente relacionada ao sistema conceitual de adição e subtração. Mais ainda, o conhecimento matemático se dá em num contexto de inter-relações e conexões conceituais. O desencadeamento de tarefas – que dá conta de um desenvolvimento do pensamento conceitual marcadamente por esse processo de vinculação de um conceito a outros com seus princípios e propriedades – atende a achados da Teoria Histórico-Cultural. Os estudos de Vigotski (2000) demonstram que a formação de um conceito não é consequência de um interjogo de associações. Por exemplo, na adição, a igualdade $2 + 3 = 5$ está associada simplesmente ao desenho de duas estrelas, inicialmente, e, depois, de outras três. Em vez disso, trata-se de operações intelectuais em que participam e se combinam todas as funções mentais. Envolve, pois, operações mediadas por palavras como forma de centrar ativamente a atenção e abstrair certos traços conceituais, bem como sintetizá-los e simbolizá-los por meio de signos.

A **quadragésima quarta tarefa** (Ilustração 91) retoma o uso da reta numérica para determinar o resultado das sentenças com o auxílio da reta numérica (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 89).

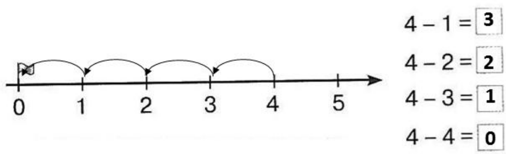
Ilustração 91: A possibilidade de inserção do número zero



Fonte: Давыдов et al. (2012).

A instrução de Горбов, Микулина e Савельева (2008) é que o professor desenhe no quadro uma reta numérica idêntica a do livro didático que será a referência para determinar os resultados das operações solicitadas. Trata-se de uma sequência de subtrações cujo todo, em cada uma delas, é quatro e parte a ser subtraída é a sequência crescente de 1 a 4. A nova situação com que se defrontam as crianças está na reta numérica, é a última subtração da sequência – 4 - 4. As crianças param em sua origem, isto é, no início da reta. O professor lhes pergunta: Que número teremos que anotar como resultado? Elas apresentam suas sugestões. Ele informa que, nesse caso, é colocado o número especial chamado zero (0), que geralmente representa o início da reta numérica (Ilustração 92).

Ilustração 92: Início da presença do zero na reta numérica

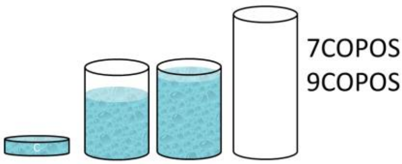


Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

Se recorrermos às tarefas anteriores que trouxeram a reta numérica, verificaremos que o valor que marcava a sua origem era uma bandeira. Esta já havia sido assimilada pelas crianças como a demarcação do início da reta. Por isso, ao realizarem 4 - 4, é possível que algumas delas indiquem como resultado a bandeira[34]. Mas, por que Davýdov e seus colaboradores não apresentaram o zero no momento em que colocaram os demais números na reta (Vigésima quinta tarefa, ilustrações 56 e 57)? De acordo com Rosa (2012), esse posicionamento do grupo davydoviano é para evitar que as crianças se apropriem do conceito de zero como se "não valesse nada" ou que não tem "valor algum". Ou, conforme Souza (2012), para evitar o seu significado dado empiricamente pela ideia de que representa um conjunto sem nenhum elemento, como entendeu o Movimento da Matemática Moderna. Em vez disso, conforme Rosa (2012) a introdução do zero decorrente da operação subtração traz como significações a origem da reta (possuí um lugar geométrico) e a ausência de unidade (sentido quantitativo). Além disso, acena para as possibilidades de existência de novos números que se situarão à esquerda como o resultado, por exemplo, da operação 4 - 5. Em síntese, o significado do número zero é concebido no âmbito do sistema conceitual de adição e subtração, na relação todo-partes.

A **quadragésima quinta tarefa** (Ilustração 93) parte da seguinte situação: Na mesa do professor, estão dois recipientes com líquido e um (maior que os dois primeiros) vazio. Ele mostra o copo menor – unidade de medida – e informa que no primeiro recipiente tem sete copos de líquido e nove no outro. Os números são anotados no quadro (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 93: Determinação do todo a partir das partes



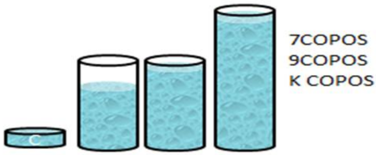
Fonte: Produção com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008).

Em seguida, ele explica que, inicialmente, todo o líquido estava no terceiro recipiente (agora vazio) e seu volume era de k copos. Sugere-se que os números k e 7 e k e 9 sejam comparados. O professor se abstém de comentários, enquanto as crianças tentam provar suas respostas. Ele chama três crianças para o quadro, cada qual nomeada

[34] Além de tarefas como essas, são propostas também no âmbito algébrico.

como responsável pelo respectivo volume de líquido: 7, 9 e *k* copos. Sugere-se que cada uma, ao mesmo tempo, pegue nas mãos o recipiente correspondente ao seu volume. Pode ocorrer de a criança do volume *k* pegar o recipiente vazio, o que demanda a correção: ela tem que pegar *k* copos de *líquido*! Conclui-se que é um daqueles recipientes que está com um dos outros dois alunos. O professor ajuda as crianças com a introdução dos termos: 7 copos e 9 copos são as partes que compõem *k* copos; ao mesmo tempo, *k* copos é o todo, composto de duas partes, 7 e 9 (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008). Consequentemente, o recipiente maior, quando estava cheio, representava o todo com *k* copos de líquidos, compostos por duas partes conhecidas, 7 e 9 (Ilustração 94).

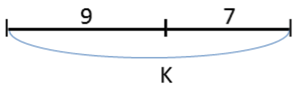
Ilustração 94: Representação algébrica do todo



Fonte: Produção com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008).

De acordo com Горбов, Микулина e Савельева (2008), ainda é necessário que se demonstre esse processo por meio de desenho, representação gráfica. As crianças propõem: Uma parte – um segmento. O professor acrescenta: É mais cômodo posicionar a outra parte ao lado da primeira, então o todo envolverá os dois segmentos da reta com o arco. Os elementos do desenho são representados por números. Com gestos, as crianças identificam no desenho a parte 7 copos e o todo *k* copos e chegam a uma conclusão sobre a relação entre eles. Do mesmo modo procedem sobre 9 e *k* (Ilustração 95).

Ilustração 95: Esquema que representa a relação todo-partes da situação



Fonte: Produção com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008).

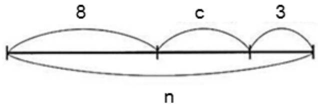
Essa tarefa, com seus minuciosos detalhes de envolvimento por parte das crianças, coloca esses aprendizes em ações investigativas para a elaboração, sistematização e síntese de que o sistema –

adição/subtração/equação – tem sua essência na relação todo-partes. Mas, explicitamente, só mostra que, no caso, o todo é composto por duas partes. As tarefas anteriores propuseram tal relação de forma implícita. Esse movimento ocorre num sistema organizacional de tarefas, a fim de que a criança se aproprie do conceito teórico. Ou seja, a apropriação do conceito científico não se dá de forma imediata, mas num processo de mediações e abstrações. Como diz Davídov (1988), o pensamento teórico, mesmo que elementar às crianças, manifesta-se no desenvolvimento de profundas estratégias, no aumento da compreensão de características essenciais e de relações que estão além da superficialidade do material da aprendizagem. Isso demanda abstração dos fenômenos e penetração na sua gênese e desenvolvimento. Por isso, para enfatizar que o todo é composto de partes, são retomados conhecimentos introduzidos anteriormente, como as representações objetal, gráfica e gestual. No entanto, ainda não completa a síntese de quando, nessa relação, se trata da adição ou da subtração, o que ocorrerá em tarefas posteriores.

A **quadragésima sexta tarefa** diz que é necessário estender uma corda no quintal, de um poste a outro. Mostram-se três novelos de corda, cujos comprimentos já foram medidos com a unidade metro. Verificou-se que o primeiro comprimento equivale a oito, o segundo corresponde a *c* e o terceiro mede três. Esses números são anotados no quadro. Qual foi a medida das três cordas, isto é, a distância entre os postes? Como há três partes e uma delas, não especificada, está em forma de letras, isso leva à conclusão de que o comprimento necessário é *n* metros, obtidos a partir da união das três cordas. O professor chama quatro alunos – não mais três como na tarefa anterior, pois agora o todo é composto por três partes – para ir ao quadro, a fim de que todos, ao mesmo tempo, peguem as cordas descritas pelos comprimentos *8, c, 3, n*. Tal movimento possibilita a compreensão de que o comprimento *n* metros é o todo composto pelos três valores, o que leva a criança responsável por *n* a pegar todas as cordas.

É solicitado que representem graficamente, a partir da objetal. Por meio de gestos, o professor solicita a comparação, bem como a explicação do movimento, como demonstrado na tarefa anterior (Ilustração 96): *n* é maior que 8, porque *n* é o todo do qual o número 8 é uma parte. O mesmo ocorre para as demais medidas (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 96: O todo composto de três partes, representado algebricamente

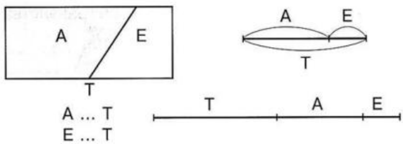


Fonte: Produção com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008).

A referida tarefa também trata da explicitação da relação todo-partes. O diferencial é que ela completa o objetivo da anterior ao indicar que o todo é composto por três partes, o que dá margem para o entendimento de que pode ser por outras quantidades. Também possibilita o entendimento de que não é só a identificação do todo que se dá por letra, mas de qualquer uma das partes. Contudo, não as expressa como sentenças matemáticas aditivas nas múltiplas possibilidades: $8 + c + 3 = n$; $8 + 3 + c = n$; $c + 3 + 8 = n$; $c + 8 + 3 = n$; $3 + 8 + c = n$; $3 + c + 8 = n$.

A **quadragésima sétima tarefa** (Ilustração 97) se refere à comparação das áreas A, E e T. Solicita às crianças que indiquem qual das representações gráficas exprime a área T (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 91).

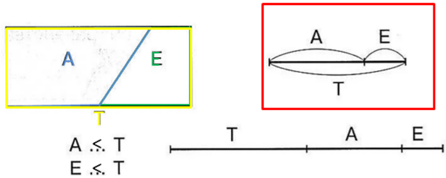
Ilustração 97: Identificação do esquema referente à representação objetal da relação todo-partes



Fonte: Давыдов et al. (2012).

Os alunos observam que a área T é composta por duas partes, ou seja, duas superfícies de áreas A e E. Por consequência, obtêm-se as relações A < T e E < T (Ilustração 98). A questão pendente é: Qual dos dois esquemas apresentados traduz a representação da relação todo-partes da situação dada? O professor “defende” o errado, aquele composto somente por segmentos de reta. É possível que crianças discordem de sua afirmação e tentem convencê-lo de seu equívoco. A explicação esperada é que a representação escolhida, a grandeza T, também constitui uma parte de determinado todo, o que não corresponde ao desenho com as áreas (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 98: Esquema que representa o todo T e suas respectivas partes A e E



Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

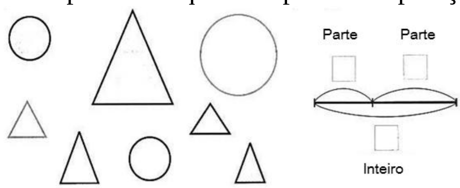
A tarefa se configura em algumas peculiaridades. Uma delas diz respeito à forma – com teor avaliativo sobre as aquisições das crianças. Nesse sentido, propõe-se a sua execução, o que proporciona aos estudantes tomar um posicionamento e defendê-lo. Isso se manifesta no momento em que o professor, propositalmente, defende a solução inadequada para a representação gráfica da relação todo-partes e requisitou um argumento de ordem conceitual com o seguinte teor: naquelas circunstâncias, o todo não pode ser uma parte, como induz o esquema sem arcos, defendido pelo professor. Outra peculiaridade se refere ao conteúdo, uma vez que tanto o todo como as suas partes não são especificados numericamente, pois seus respectivos valores são dados por letras. Trata-se, pois, de trazer à tona a generalização teórica da relação essencial todo-partes, não somente pela sua representação esquemática com uso de letras, mas, acima de tudo, pelo entendimento da existência de uma vinculação de uma relação essencial com suas manifestações particulares. Isso significa dizer que as características invariáveis e relações essenciais desse objeto de aprendizagem e suas representações foram determinadas e apropriadas, ativamente, pelas crianças (DAVÍDOV, 1988).

Isso contribui para que elas atinjam essa compreensão teórica, o modo de organização do ensino em foco. Observa-se que em cada tarefa a relação todo-partes foi desenvolvida com grandezas diferentes. Nas anteriores, as grandezas em destaque foram volume e comprimento. Na presenta, trata-se da área, com o diferencial que propõe a identificação da representação correta. Cabe destacar o predomínio da significação algébrica, pois as letras se fazem presentes em todas as representações (objetal, gráfica e literal).

Por fim, importa a menção de a tarefa também ter uma finalidade avaliativa. Isso se revela no momento em que o professor aponta a resposta incorreta como sendo a certa, com o intuito de verificar se os alunos estão atentos ao desenvolvimento da tarefa ou, até mesmo, se houve a apropriação dos conceitos trabalhados anteriormente. Ela é, pois, pertinente à quinta ou à sexta ação de estudo.

A **quadragésima oitava tarefa** (Ilustração 99) disponibiliza um kit com dois tipos diferentes de formas geométricas, círculos e triângulos. Elas desencadeiam as perguntas diretrizes que movimentam o pensamento das crianças em busca da finalidade traçada. Quantos círculos compõem o kit? E triângulos? Quantas figuras compõem esse kit (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 91).

Ilustração 99: Completar o esquema a partir da operação objetal

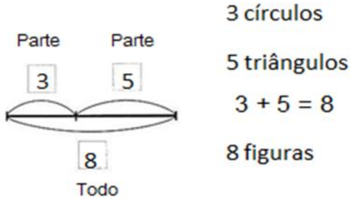


Fonte: Давыдов et al. (2012).

Observa-se que as três perguntas não visam somente à identificação das peças e suas quantidades; subjacentemente, elas trazem significados distintos: a terceira se relaciona com o todo e as outras com as duas partes. A tarefa também se diferencia, uma vez que nas anteriores as partes e o todo eram identificados no esquema, o que propõe o inverso. Significa que, mesmo com o esquema incompleto, é possível fazer uma leitura e elaborar abstrações essenciais para que ele seja completado corretamente, desde que se tenha uma orientação de ordem objetal ou textual. Mesmo incompleto, o esquema explicita uma generalização com a indicação de que o todo é composto por duas partes distintas, visto que os segmentos que as representam são de comprimentos distintos (um menor que o outro). Logo, o segmento menor corresponde às figuras de quantidade inferior, círculos, e o maior se refere aos triângulos.

A tarefa se completa com a especificação numérica das quantidades, além da sentença matemática aditiva que traduz a ideia: parte + parte = todo, que, para a situação em referência, se particulariza em 3 círculos + 5 triângulos = 8 figuras ou 3 + 5 = 8 (Ilustração 100).

Ilustração 100: Identificação das partes e do todo



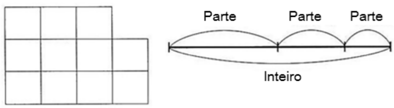
Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

Ainda, é de se destacar o movimento de forma cautelosa das representações da relação conceitual fundamental, todo-parte, no percurso de todas as tarefas. Ele se reproduz aqui, na quadragésima oitava tarefa, onde, inicialmente, a representação gráfica, o esquema, se apresenta de modo genérico: um segmento de reta com um traço interno que o divide em duas partes e com arcos indicativos do todo e das partes. Posteriormente, ela se particulariza com a indicação numérica de uma dada situação: 3 e 5 o valor das partes e 8 do todo. Dado que se conhecem as partes e a partir delas se busca o todo, então se caracteriza como a ideia essencial da adição.

Há um zelo nessa inter-relação, pois o segmento menor sempre representará a quantidade menor, da mesma forma ocorre para o segmento maior, que corresponderá à quantidade maior. E o mais interessante é que, a partir de uma representação objetal, extrai-se uma representação algébrica que se transforma em aritmética.

A **quadragésima nona tarefa** (Ilustração 101) tem por base uma representação objetal e um esquema indicador de que o todo se compõe de três partes (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 91).

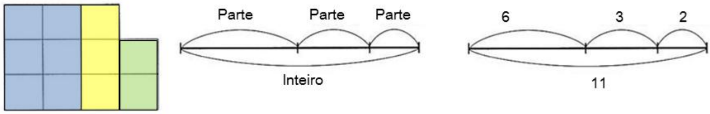
Ilustração 101: O esquema genérico indicativo de que o todo se compõe de três partes diferentes



Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

A análise da representação objetal permite afirmar que o todo é igual a 11 unidades quadradas. Por sua vez, a representação gráfica, de forma genérica, indica que esse todo é constituído de três partes distintas. Uma das possibilidades de solução da tarefa é apresentada pela ilustração 102: a parte maior, 6, a intermediária, 3 e a menor 2, que produz uma igualdade aditiva, 6 + 3 + 2 = 11.

Ilustração 102: Uma das possibilidades de constituição do todo a partir de partes distintas



Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

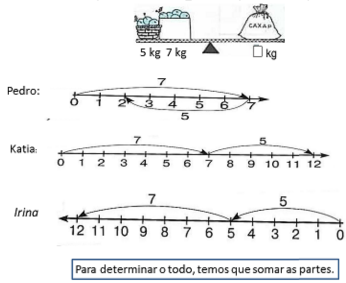
A estrutura e objetivo da tarefa é a mesma da anterior, mas tem sua característica peculiar que é o todo. Em vez de duas partes passíveis de identificação imediata, apresenta-se com três, que dão margem para diferentes composições. Por isso há outras possibilidades: 5 + 4 + 2; 7 + 3 + 1; 8 + 2 + 1; 6 + 4 + 1. Para tanto, é necessária a interpretação e a compreensão do esquema para identificar e destacar as partes do todo na representação objetal.

A **quinquagésima tarefa** (Ilustração 103) requer a leitura do enunciado do seguinte problema: Uma dona de casa tinha 7 quilos de frutas na caixa e mais 5 na cesta. Ela resolveu fazer um doce, para isso precisou comprar a mesma quantidade de açúcar. Como descobrir quantos quilos de frutas ela tem no total? O professor faz o seguinte acréscimo problematizador: o filho da dona sugeriu que colocasse todas as maçãs na balança para descobrir sua massa. E sua filha propôs que se determinasse isso com o auxílio da reta numérica. Como fazê-lo? (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Provavelmente as crianças irão sugerir o uso da reta numérica para identificar o número 7, para depois acrescentar 5 unidades. O professor “fica surpreso” e questiona: Por que aumentar? Eu não estou dizendo que temos que descobrir um número maior que aqueles especificados. As crianças respondem que o problema quer determinar o todo, que é composto pelas partes 7 e 5 (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

A partir dessas discussões, o professor propõe a seguinte tarefa (Ilustração 104) que tem os mesmos dados do problema: Como podemos descobrir quantos quilos de maçã há no total? Avalie o trabalho de cada criança. Represente o procedimento da respectiva igualdade (ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 92, tradução nossa).

Ilustração 103: Identificação da operação objetal na reta numérica



Fonte: Давыдов et al. (2012).

A tarefa acrescenta três novas situações em retas numéricas, cada qual com a explicitação de procedimentos diferentes para traduzir uma mesma igualdade aditiva em que as partes são 5 e 7. Ao analisarem os movimentos de Pedro sobre a reta – simbolizados pelos arcos de flechas de sentidos contrários –, as crianças perceberão que não estão corretos. O garoto considerou o 7 (uma parte) como o todo e a partir desse valor retirou 5, outra parte. Enfim, ele subtraiu parte de parte, que levou à obtenção do resultado incorreto 2.

Katia procedeu do mesmo modo sugerido pelas crianças anteriormente – quando da leitura do problema inicial: a partir do zero, deslocou o arco no sentido do 7 (primeira parte) e, na sequência, deslocou outro arco com extensão que representa acréscimo de 5 unidades (segunda parte), que resulta em 12.

Irina faz uma inversão em relação ao que se propôs Katia, o que foi considerada correta: a adoção do sentido positivo da reta para a esquerda. A sua representação segue exatamente a orientação prescrita na balança, inicia com a representação da parte 5, seguida do acréscimo de unidades que se finda no todo 12. Ambas as alunas procederam de maneiras diferentes, porém obtiveram o mesmo resultado (12). O professor solicita que anotem as duas sentenças corretas (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Essa tarefa tem como objetivo apresentar a síntese definidora do conceito de adição: "[...] *para determinar o todo, temos que somar as partes* [...]" (ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 92). Suas duas situações – o problema e a balança com as representações respectivas dos personagens – conduzem a algumas ideias conceituais. Uma delas é que, na adição, não importa a ordem em que as partes se apresentam ou se representam, uma vez que o todo não se altera: propriedade comutativa, que segundo Caraça (1951), como veremos em tarefas posteriores, é imprescindível para a simplificação da definição da subtração como operação inversa da adição. O pensamento comutativo só veio à tona por consequência da interconexão das duas situações. Katia toma como referência a ordem das partes que se apresentam no problema; Irina, por sua vez, segue a instrução contida na situação da balança.

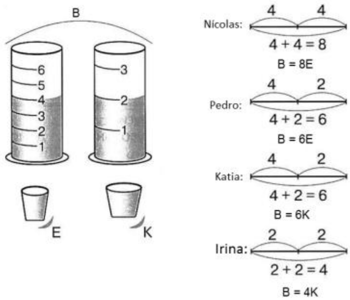
Outra ideia conceitual é que o sentido da reta é algo que se estabelece, inicialmente, e deve ser seguido no momento das representações em questão. Esse posicionamento inicial do sentido adotado justifica a admissão, como corretos, dos movimentos – mesmo que contrários – de Katia e Irina, que chegam ao mesmo todo.

Mesmo considerado inconveniente, o procedimento de Pedro prenuncia a reflexão de que é possível outro movimento ainda em processo de elaboração de síntese, no caso, relacionado à subtração. Todas essas interconexões de ideias conceituais trazem o modo geral – a relação todo-partes – do sistema conceitual, mas se particularizam nas duas situações pelos valores estabelecidos que também são expressos pela representação na reta numérica.

Há de se destacar, também, que a tarefa não tem propósito eminentemente analítico por parte dos estudantes, pois não solicita que eles executem e representem qualquer operação, mas analisem os procedimentos especificados no problema e nas suas ilustrações.

A **quinquagésima primeira tarefa**, como a anterior, solicita que expliquem os procedimentos realizados individualmente pelas crianças – Nícolas, Pedro, Katia e Irina (Ilustração 104) – com a identificação dos resultados corretos (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 93).

Ilustração 104: Identificação dos esquemas que contemplam a operação objetal



Fonte: Давыдов et al. (2012).

A tarefa se caracteriza como um verdadeiro convite ao pensamento dos estudantes para análise que requer uma compreensão do concreto integral dos componentes conceituais que se constituem, segundo Rosental (1962, p. 474 – acréscimo do autor),

> [...] na multiplicidade de suas propriedades e determinações, na interação de todos os seus aspectos e partes. Toda coisa possui numerosas facetas [aspectos] e partes e existe apenas como integridade na diversidade de suas manifestações, diversidade em que todos os seus elementos estão concatenados entre si e se condicionam reciprocamente.

A tarefa requer uma atenção por parte dos estudantes de seus detalhes não tão evidentes na representação objetal, imprescindíveis para a interpretação das representações de cada criança. O arco sobre as buretas indica que elas constituem um todo e que cada uma delas representa uma parte. As duas apresentam unidades de medidas diferentes, com a possibilidade de identificar que são equivalentes, K = 2E, pois o volume de ambas é o mesmo. Essas análises dão subsídios para duas explicações conclusivas.

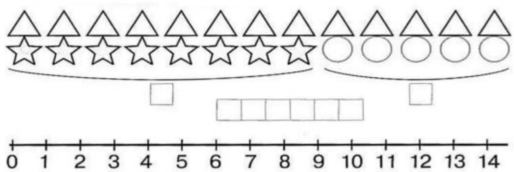
A primeira se refere ao entendimento do porquê de as partes, em todos os segmentos, terem o mesmo comprimento. Trata-se, pois, do princípio já elaborado de que não se pode, num mesmo esquema, valer-se de unidades distintas, o que também imprime uma inferência da equivalência das unidades E e K. Isso significa que os duplos valores numéricos de cada esquema estão corretos, mesmo aqueles diferentes entre si, pois indicam que entre eles há uma relação de multiplicidade. A desatenção para esses detalhes leva Pedro e Katia a se equivocarem nos seus respectivos resultados, pois se ativeram aos números de modo isolado e não à referida relação entre si. Em outras palavras, ambos adicionaram as partes tais como se apresentaram e optaram por uma das unidades de medida: B = 6E, o garoto, e B = 6k, a menina.

A outra explicação conclusiva é que, para adicionar corretamente as duas partes, é necessário que se transforme K em E (2k = 4E). Com base nessas análises é que os estudantes concluem que Nícolas e Irina mediram as partes com base nessa transformação. A diferença é que se adotou a unidade de medida E (2K = 4E): 4E + 4E = 8E, então B = 8E. Por sua vez, Irina preferiu a unidade K, que resulta na operação 2K + 2K = 4K, por consequência, o todo B = 4K.

Essa tarefa proporciona uma exaustiva oportunidade de análise em processo de síntese, pois requer que o pensamento dos estudantes transite pelo conteúdo teórico do sistema conceitual – todo-partes, em suas múltiplas relações – em seu processo de desenvolvimento. Nesse estágio do pensamento, segundo Davídov (1988), se revela essa essência, que reflete os nexos do conceito, intrínsecos no processo de sua formação. Por consequência, conforme afirma Freitas (2016), ocorre a revelação da essência como expressão da universalidade do objeto em estudo, que proporciona a reprodução do concreto em sua integridade pelo pensamento.

A **quinquagésima segunda tarefa** (Ilustração 105) se apresenta, em sua representação objetal, com grandezas discretas. Agora os estudantes não se prendem à análise de algo resolvido, pois se põem em processo de busca de uma finalidade operativa. Para tanto, eles são colocados em situação inicial de contagem da quantidade de estrelas e círculos. O resultado é parâmetro para determinar o número de triângulos, com o auxílio da reta numérica (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 94).

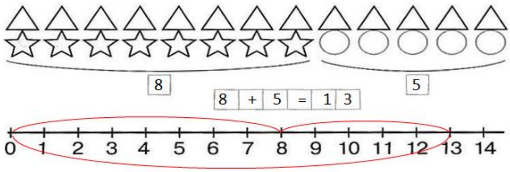
Ilustração 105: Identificação de um todo a partir de outro todo composto por partes diferentes



Fonte: Давыдов et al. (2012).

As crianças contam as estrelas e os círculos, o que obtém, respectivamente, 8 e 5. A relação que se estabelece entre esses resultados (partes) ocorre na sentença 8 + 5. Ao representá-los na reta numérica, revelar-se-á o valor do todo, 13. Consequentemente, completa-se a igualdade 8 + 5 = 13 (Ilustração 106).

Ilustração 106: Identificação do número de triângulos na reta numérica a partir do número de estrelas e círculos



Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

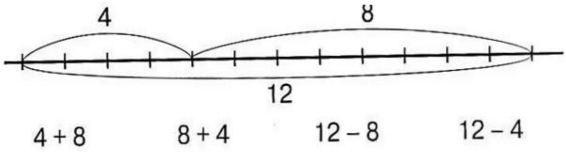
Mesmo que a tarefa sugira a realização do cálculo na reta numérica, o professor solicita que um aluno da classe conte os triângulos um a um. Ao final, comparam-se as respostas obtidas. Observa-se que ambos os resultados estão corretos, porém com a ressalva de o método de contagem um a um ser denominado “pré-escolar” e o outro “racional” (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008, p. 104).

Por isso, de início, evita-se a contagem dos triângulos, pois a pretensão é que sua quantidade seja entendida como o todo que se obtém a partir de outro todo, constituído de duas partes, cada qual de figuras diferentes (estrelas e círculos). Portanto reflete uma precaução para não levar as crianças ao entendimento de que um todo discreto se obtém somente pela contagem ou por adição de unidade por unidade (1 + 1 + 1 + ...). De modo geral, a tarefa traz, implicitamente, a seguinte problematização: É possível representar na reta objetos diferentes? A resposta é afirmativa, com a justificativa de que o importante não é o tipo de objeto, mas o que ele representa, ou seja, uma unidade discreta.

Observa-se que a tarefa intenciona a ênfase de que o procedimento de contar um a um não é mais condizente e suficiente com o estágio de desenvolvimento conceitual em que se encontram as crianças do primeiro ano escolar. Isso não implica dizer que esse método não é importante, pelo contrário, faz parte do processo de aprendizagem.

A **quinquagésima terceira tarefa** (Ilustração 107) volta-se à determinação dos resultados das sentenças com base na representação gráfica que especifica numericamente os valores das partes e do todo (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 97).

Ilustração 107: A representação das possíveis sentenças obtidas da relação todo-partes



Fonte: Давыдов et al. (2012).

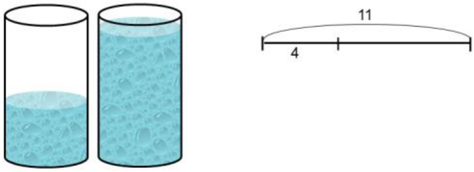
Aparentemente, ela se apresenta pronta, o que indica sua finalidade de colocar os estudantes em processo de análise fundamentado na relação essencial todo-partes. Em outros termos, ali se manifestam interconexões do sistema conceitual que não são somente sua peculiaridade, mas algo que ocorre em outras situações. Essencialmente, possibilita que os estudantes percebam a manifestação das sentenças matemáticas decorrentes da composição do todo com suas duas partes. Especificamente, são elas: 4 (parte) + 8 (parte) = 12 (todo) ou, comutativamente, 8 (parte) + 4 (parte) = 12 (todo), 12 (todo) – 8 (parte) = 4 (parte) e 12 (todo) – 4 (parte) = 8 (parte).

Um olhar retrospectivo para as tarefas anteriores e observaremos que desde a quadragésima quinta tarefa o foco é para as evidências das múltiplas relações do conceito adição. A atual, ao trazer sentenças subtrativas, tem teor prospectivo de que as tarefas seguintes darão o mesmo tratamento à subtração. Isso quer dizer que, mesmo fazendo parte de um mesmo sistema conceitual e movidas pela mesma base essencial, a adição e a subtração têm suas peculiaridades conceituais. Como diz Vigotski (2000), uma nova etapa no desenvolvimento das generalizações se constitui sobre os fundamentos daquelas de níveis precedentes. Em outras palavras, não se perde produtos elaborados nas etapas anteriores.

Portanto, essa tarefa destaca que aquele esquema tem os elementos necessários que completam um sistema conceitual – adição e subtração. Para a adição, como esboçado nas tarefas anteriores, somam-se suas respectivas partes. Para a subtração, delineia-se que é diminuído do todo uma parte para se obter uma outra.

A **quinquagésima quarta tarefa** (Ilustração 108) novamente dispõe sobre a mesa dois recipientes com líquido e, no quadro, a anotação do esquema com os arcos (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 108: A determinação de uma parte



Fonte: Produção com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008).

As duas representações, objetal e gráfica, evidenciam a existência de um todo e suas partes. O esquema indica que no recipiente com menor volume, parte conhecida, há quatro unidades de medida de líquido. No outro recipiente, o todo contém um volume de 11 unidades de medidas. Em outras tarefas analisadas, as situações traziam a ideia de subtração no âmbito da transformação da desigualdade em igualdades. No entanto, na presente situação, o centro é somente a igualdade da relação todo-partes. Por isso, e por consequência de conhecimentos já generalizados da adição, as crianças concluirão que também é possível medir numericamente o volume do segundo recipiente, mesmo sem dispor de um recipiente como unidade e movimentar o líquido.

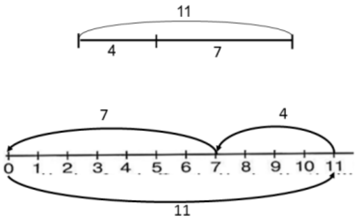
Como decorrência dessa possibilidade de ordem conceitual, o professor define uma condição: determinar o volume de líquido – outra parte que completa o todo – sem mexer no recipiente. No entanto, possibilita uma condição objetiva de solução da tarefa: recorrer à reta numérica, uma vez que já se dispõe, numericamente, do todo e de uma das partes. Como os movimentos na reta lhes são familiares, as crianças verificam que o número é obrigatoriamente menor que o valor do todo, 11, em quatro unidades, a parte conhecida. Portanto, requer um deslocamento em sentido contrário, que se encerra no número 7, a parte até então desconhecida (Ilustração 109). Posteriormente, anota-se o resultado no esquema (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Depois de representar o movimento na reta numérica e completar o esquema, o professor apresenta a nomenclatura no contexto da relação essencial: para determinar o valor menor, o nome dado à operação é **subtração**[35] (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

---

[35]Tarefas com o mesmo teor foram propostas com grandezas diferentes, como: massa, comprimento, quantidade discreta, entre outras.

Ilustração 109: Representação gráfica resultante do movimento na reta



Fonte: Produção com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008).

Portanto, a tarefa apresenta como elemento novo a ênfase ao significado das partes na relação com o todo. Por extensão, a centralidade se volta à subtração, operação que possibilita a determinação do valor referente a uma das partes. A maneira que a tarefa foi proposta explicita a relação existente entre o esquema e a reta numérica, que se diferencia daquele, por vislumbrar o valor de imediato.

Foi a vinculação entre esses elementos mediadores – esquema e reta – que promoveu o desencadeamento da independência da atividade objetal. Parafraseando Freitas (2016) e Rosa (2012) diríamos que, nesse estágio, a tarefa exige que o pensamento dos estudantes se mova pela análise que articula abstrações elaboradas com representações de ordem gráfica (esquemas e retas), as quais propiciam a manifestação da relação essencial todo-partes no conceito de subtração. Consequentemente, possibilita o processo de elevação do plano objetal ao plano mental.

A ausência da reta numérica condiciona a solução desse tipo de situação exclusivamente pela operação de subtração, o que explica sua necessidade produzida pelo homem. E, conceitualmente, em nível científico, que se caracteriza pela sua independência de contextos, mas de gênese neles, e, ao voltar para eles, faz isso com novas significações (VIGOTSKI, 2000), A subtração desprendida da dependência da reta numérica é o que se vislumbra de finalidade nas tarefas posteriores.

Na **quinquagésima quinta tarefa**, a relação todo-partes se apresenta no âmbito exclusivo da sentença matemática. A pergunta-guia, como denomina Vigotski (2000), é: Em quais sentenças, a seguir, foi determinada uma das partes e quais se referem ao todo (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 101)?

3 + 6	7 + 2	8 – 3	9 – 2
6 – 2	8 – 2	3 + 7	7 – 3

Essa tarefa requer da criança um domínio da função das partes e do todo em uma sentença matemática aditiva e subtrativa. Para tanto, o professor sugere que, previamente, ela produza síntese para cada caso. A ideia é que lembre os conceitos elaborados por consequência do desenvolvimento das tarefas anteriores. Горбов, Микулина e Савельева (2008) entendem que esse movimento de ida e volta, durante o processo de aprendizagem, possibilita que os estudantes compreendam que a operação da adição é usada para determinar o todo e a da subtração para identificar cada uma das partes. Em seguida, para distinguir as anotações (todo ou partes), o professor sugere que a palavra "todo" seja escrita a lápis e o termo "parte" à caneta (Ilustração 110).

Ilustração 110: Identificação das sentenças que se referem ao todo e às partes

3 + 6 = 9 (todo)	7 + 2 = 9 (todo)	8 – 3 = 5 (parte)
9 – 2 = 7 (parte)	6 – 2 = 4 (parte)	8 – 2 = 6 (parte)
3 + 7 = 10 (todo)	7 – 3 = 4 (parte)	

Fonte: Produção com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008).

Se em tarefas anteriores o significado das partes e do todo foi enfatizado separadamente, nesta eles são abordados em concomitância, a fim de verificar se o aluno se apropriou da relação essencial. Observa-se, ainda, que não foi sugerido o uso de esquemas ou da reta numérica, o que indica a escolha livre para o processo de resolução pela criança, bem como a preocupação com o desenvolvimento do cálculo mental. Enfim, centra-se nas relações internas, em busca da compreensão da lei que expressa a base universal do sistema conceitual, razão pela qual foi exigido que os estudantes apresentassem a síntese de seus entendimentos referentes ao papel do todo e das partes vinculado, respectivamente, à adição e à subtração.

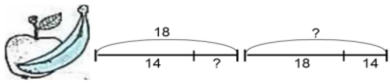
A **quinquagésima sexta tarefa** (Ilustração 111) não mais simula, como em tarefas anteriores, a formulação de um problema a partir de uma situação objetal ou gráfica. Agora o problema é dado e acrescido de esquemas, dentre eles um que revela a correta representação da situação que subsidiará a sua resolução. Por isso o enunciado: Identifique o esquema que contempla o problema[36] e, posteriormente, determine o

[36]Nesse momento, as crianças já sabem diferenciar história – situação em que o texto apresenta todos os valores das partes e do todo – de problema-texto, que deixa um valor como incógnita que precisa ser determinado. Uma tarefa foi

resultado com o auxílio da calculadora (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 103).

Ilustração 111: Identificação do esquema que representa o problema

> Trouxeram 14 quilos de maçãs e 18 quilos de bananas para a quitanda. Quantos quilos de frutas trouxeram?



Fonte: Давыдов et al. (2012).

Горбов, Микулина e Савельева (2008) orientam para que o professor enfatize a importância da leitura pausada de todo o problema, mais de uma vez, pois auxiliará na sua compreensão. Tal recomendação é condescendente com o pressuposto elaborado por Kalmykova (1991), quando afirma que resolver um problema é muito mais complexo do que determinar o resultado de uma adição ou subtração em si. O problema envolve leitura com identificação e interpretação da ideia conceitual que determinará qual operação é pertinente para a sua resolução.

Na quinquagésima sétima tarefa, a relação todo-partes e suas determinações nas operações de adição e subtração aparecem em outro contexto: problemas-texto. Por estar nesse âmbito conceitual, uma correta resolução do referido problema requer a compreensão de que os seus dados revelam as partes de um todo (desconhecido). Para tanto, a operação que contemplará essa relação é a adição; por isso, o segundo esquema valida a referida situação, que se sintetiza em 18 + 14 = 32, cujo resultado é obtido com o uso da calculadora, pois o processo algorítmico ainda está por vir no segundo ano escolar.

O desenvolvimento dessa tarefa primou pela substituição da representação objetal por situação problema, articulada com duplo esquema. Sendo assim, exigiu que o pensamento dos estudantes, tendo como referência a relação essencial (todo-partes), transitasse por duplas interpretações interligadas entre si. A primeira se refere aos dados do problema e a segunda dos esquemas que lhes exigiam uma decisão (qual deles é o que traduz corretamente os valores conhecidos e desconhecidos, bem como a operação correspondente). Na realidade,

---

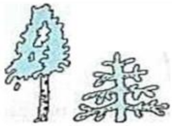
introduzida para essa finalidade, que desencadeou vários problemas. A análise dessa tarefa é encontrada em Rosa (2012, p. 221).

também é subsidiadora a introdução da notação de um modo geral, expresso na forma literal.

A **quinquagésima sétima tarefa** (Ilustração 112) retoma a representação objetal, articulada com um problema. A partir daí, compete aos estudantes elaborar um esquema para o problema-texto e recorrer à calculadora para a obtenção do resultado (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 103).

Ilustração 112: Elaboração de um esquema a partir do problema

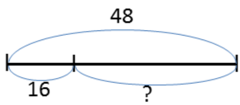
Os estudantes plantaram no parque 48 árvores. Entre elas, 16 eram araucárias, o restante, ipês. Quantos ipês os estudantes plantaram?



Fonte: Давыдов et al. (2012).

Diferentemente da tarefa anterior, em que o esquema foi dado, nesta há a necessidade de sua construção e, a partir disso, identificar o valor a ser determinado, uma das partes ou o todo, que possibilitará a escolha da operação. As interações entre as próprias crianças e com o professor, mediadas pela situação-problema, levam à identificação de que 48 árvores é todo, prenunciadora de que se trata da operação de subtração. Por consequência, cada planta específica corresponde às partes: uma delas conhecida, 16 araucárias, e a outra desconhecida, ipês. Com essa compreensão, as crianças montam o esquema (Ilustração 113) e recorrem à calculadora, conforme orientação, para o cálculo de 48 – 16 = 32.

Ilustração 113: Esquema elaborado a partir do problema



Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

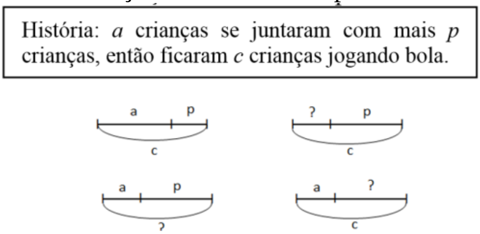
Mas em que se diferencia essa tarefa em relação à anterior, uma que também se trata da relação todo-partes em situação de resolução de problemas? Acima de tudo, demonstra a preocupação com a organicidade e articulação de uma tarefa com a outra, movida por uma relação conceitual essencial. Porém de modo tal que o pensamento das crianças transite por diferentes modos de composição das mediações (esquema, reta numérica, objetos, problema) necessárias para a apropriação do conceito de adição e subtração. Isso se explicita quando, anteriormente, a composição se deu com o problema-texto, o esquema e uma representação visual/imaginativa (maçã e banana). Agora é somente o texto do problema e a situação visual/imaginativa, indicativa de que uma parte é maior que outra pela diferença de altura. Outra diferença é que a sua resolução ocorre pela subtração. Esse modo davydoviano de organização das tarefas, que coloca o pensamento da criança em constante movimento, atende ao pressuposto de que,

> Em primeiro lugar, o pensamento dos estudantes se move orientadamente do *geral ao particular* (ao começo buscam e fixam a 'célula' geral inicial do material a estudar e logo, apoiando-se nela, deduzem as diversas particularidades do objeto dado). Em segundo lugar, tal assimilação está orientada para que os estudantes revelem as condições de origem do conteúdo dos conceitos que assimilam. (DAVÍDOV, 1988, p. 175, grifos do autor, tradução nossa).

Em síntese, a operação de subtração no contexto de resolução de problema, que requer leitura e interpretação para a produção do esquema que subsidiará a identificação da operação.

A **quinquagésima oitava tarefa** (Ilustração 114) se contextualiza com a seguinte composição de representações mediadoras: uma história e quatro esquemas (um que a identifica) e três que representam problemas dela decorrentes. Em outros termos, a partir do esquema que representa uma história, foram elaborados três novos modelos. A tarefa dos alunos se volta às seguintes identificações relativas aos esquemas: aquele que representa a história; o que o todo é o valor desconhecido, correspondente à operação de adição; e os dois em que uma das partes precisa ser determinada, os quais caracterizam problemas subtrativos (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 108).

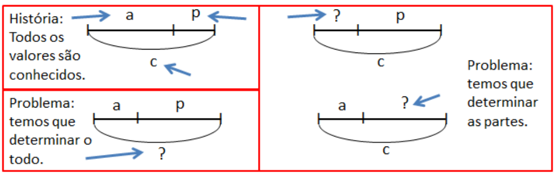
Ilustração 114: Identificação das representações decorrentes da transformação da história em problemas



Fonte: Давыдов et al. (2012).

Para as crianças identificarem a função de cada esquema, o professor lê a história. Após, questiona: Quantos problemas podemos escrever com base nessa história? Em função de elaborações propiciadas por tarefas que trataram da temática, os estudantes respondem que são três problemas, pois a história apresenta três números identificados com letras, valores desconhecidos. Como envolve a relação todo-partes, tal determinação se dá no sistema conceitual de adição ou subtração. Os questionamentos continuam: O primeiro modelo representa um problema ou a história? Mesmo que os dados no modelo sejam representados por letras e não por números concretos, é possível que as crianças respondam que não há números, por isso se trata de uma história e não de um problema. O professor lembra que o número também é representado por letras. Mas o primeiro esquema realmente simula uma história, porque todos os números são dados. O segundo (situado abaixo) corresponde a um problema aditivo, pois se conhecem as duas partes que comporão o todo. O terceiro e quarto (localizados à direita) também correspondem a problemas subtrativos, uma vez que se estabelece o todo e uma das partes. Feitas essas identificações, os alunos refazem os desenhos, esquemas, de tipos similares à ilustração 115 (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Ilustração 115: Classificação dos modelos



Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

Na tarefa em análise, inicialmente, a ênfase se equilibra entre a transformação da história em problema e os respectivos esquemas. Como os valores são indicados por letras, entendemos que o esquema se transforma em uma *representação genérica* da essencialidade todo/parte que orientará a solução de qualquer problema de teor conceitual relacionado à adição e à subtração.

No entanto, a *representação genérica* conduzirá para que, no segundo ano escolar, as tarefas proporcionem à transformação no modelo a + b = c, correspondente à adição. Dela – segundo Rosa, Damazio e Alves (2013), com base em Caraça (1951) – decorrem outras transformações: c – b = a. Mas como a adição é comutativa, b + a = c, gera uma nova transformação que se expressa em outro modelo, c – a = b. O fundamento para o desdobramento de dois modelos subtrativos, a partir da propriedade comutativa da adição, vem da definição de operação de inversa de Caraça (1951, p. 20): "[...] dado o resultado da operação e um dos dados, determinar o outro dado". Com essa base, Rosa, Damazio e Alves (2013, p. 67) complementam com a seguinte síntese relacionada ao movimento inverso entre a adição e a subtração:

> Adição → subtração: dada a soma e o adicionador, determinar o adicionando[37].
> Subtração → adição: dada a diferença e o subtraendo, determinar o minuendo.

O modelo se origina de uma representação gráfica genérica, por seus valores serem constituídos de letras no âmbito de uma expressão de igualdade operativa. Ele se particulariza quando é atribuído às letras, valores correspondentes de uma situação específica, de uma determinada situação.

A questão que pode se apresentar é: Os alunos, agora no final do primeiro ano, estão em condições de movimentar seu pensamento por todo esse processo transformativo? De acordo com Davýdov (1982, p. 433-434), o "[...] simbolismo literal, as correspondentes fórmulas literais e a interconexão das mesmas, consolidativo das propriedades fundamentais das grandezas, são inteiramente acessíveis às crianças".

---

[37]Para Caraça (1951), o adicionando é o primeiro termo da sentença aditiva, isto é, a primeira parte. O adicionador corresponde ao segundo termo, à segunda parte.

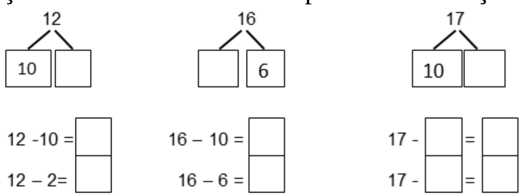
Enfim, todo o processo de compreensão para a elaboração de problemas-textos, bem como a interpretação de um modelo ou esquema é imprescindível, pois

> [...] uma assimilação consciente dos métodos de resolução dos problemas não só exige que se assimile o correspondente sistema de operações aritméticas, como também que se assimile a forma de raciocínio mediante a qual os alunos analisam o conteúdo de um problema e escolhem determinadas operações. (KALMYKOVA, 1991, p. 24).

Com tal preocupação é que a proposição davydoviana dá ênfase para o desenvolvimento de tarefas que envolvem situações com representações (objetal, gráfica, literal), esquema e modelos, os quais intensificam as inter-relações todo-partes. Trata-se de algo geral para a resolução de problemas, bem como de equação, pois, de acordo com Costa (1866, p. 122), “[...] qualquer que seja a natureza de um problema, será impossível determinar-lhe a solução sem formar e resolver uma equação expressa ou existente no pensamento”. No caso de nosso objeto de estudo, é inerente ao sistema conceitual de adição e subtração, na relação todo-partes.

A **quinquagésima nona tarefa** (Ilustração 116) tem o seguinte enunciado: Complete os esquemas e suas respectivas igualdades (Interpretação nossa, a partir da tradução de Elvira Kim, de ДАВЫДОВ et al., 2012, p. 116).

Ilustração 116: Outra forma de representar a relação todo-partes

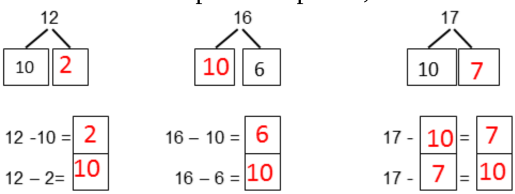


Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

Nas tarefas anteriores, o contato das crianças era, basicamente, com os números de 0 a 10. Sempre que se apresentavam valores maiores, geralmente se solicitava o uso da calculadora. Essa tarefa introduz a composição de números da segunda dezena, dada pela variante 10 + *a*. Significa dizer que os números maiores que 10 são compostos por duas partes, em que uma delas assume o valor 10 (Ilustração 117) (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Sendo assim, a tarefa anuncia o modo de organização, historicamente produzido, do sistema de numeração decimal. No entanto, nesse seu estágio de preparação, ela proporciona que os estudantes assimilem a importância do 10 na constituição numérica e sequencial. Por isso ele é referência aqui em todas as situações da tarefa como, necessariamente, uma das partes do todo. Em cada esquema, o valor do todo está dado e uma das partes é constante, 10, o que justifica a presença, na ilustração, de somente igualdades subtrativas que ao serem resolvidas, deram os valores a serem colocados nos quadrados vazios (Ilustração 117). É provável que algumas crianças tenham determinado os resultados mentalmente ou simplesmente pela comparação do 10 com o outro valor em esquema.

Ilustração 117: O todo composto de partes, sendo uma delas o 10



Fonte: Produção com base em Давыдов et al. (2012).

Observa-se que na proposição davydoviana a introdução da segunda ordem da composição numérica decimal apresenta um novo esquema, que também contempla a relação todo-partes, com a condição de que uma das partes seja 10. Por consequência, proporciona tanto a formação do número concreto quanto facilita o processo de obtenção dos resultados das operações.

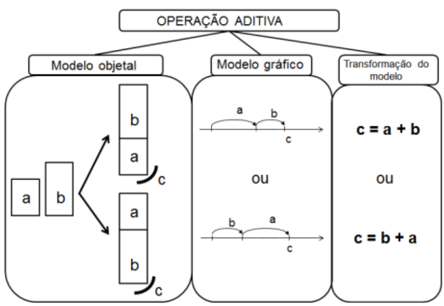
Antes de chegar nesse tipo de esquema (tarefa 60), Davýdov e colaboradores propõem operações com números maiores que 10 também na reta numérica. Por exemplo: 10 + 2 = 12, em que o ponto de partida é o valor 10 e se acrescentam duas unidades na reta. Outras situações, ainda na reta, são direcionadas para a comparação (maior, menor ou igual). Por exemplo, 15 < 17, em que do 15, para atingir o número 17, é possível proceder, na reta, de duas formas: 15 + 1 + 1 ou 15 + 2. Esse mesmo procedimento é adotado por tarefas que envolvem resolução de problemas (problemas-texto).

Há tarefas complementares do tipo 14 + □ = 15 para determinar o valor desconhecido em que se apresentam duas possibilidades de resolução: 1) deslocamento pela reta numérica; 2) a operação inversa da comutativa, isto é, □ + 1 = 15, o que implica em sua inversa 15 – 1 = 14.

Depois da tarefa 60, o foco é obter o número 10, não que ele necessariamente seja o todo, mas, de início, a meta é chegar nele pela junção de duas partes que, em seguida, recebem o acréscimo de outro valor. Por exemplo, na sentença 4 + 6 + 3, o objetivo é, primeiramente, juntar as partes até obter o 10, depois se acrescenta o valor 3. O mesmo ocorre para a subtração 12 – 1 – 2, em que primeiro se subtrai 2 de 12 para atingir o 10 e, depois, retira-se o número 1. Davýdov (1988) denomina esse procedimento método cômodo. Todo o movimento se dá por meio de tarefas que contemplam esquemas (dos mais variados) e problemas-textos.

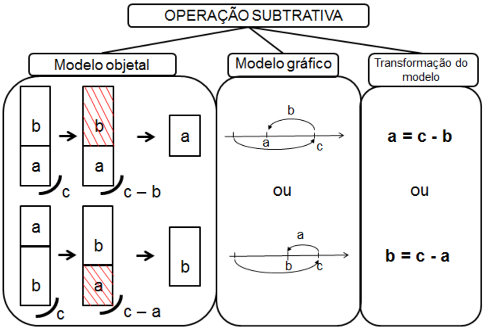
As páginas finais do livro trazem tarefas que retomam conceitos e procedimentos desenvolvidos durante o ano, por exemplo: □ + 1 ou □ – 1; □+ 2 ou □ – 2; □+ 3 ou □ – 3. Em seguida, tratam das possíveis partes que compõem os respectivos todos (a partir de expressão algébrica): 6 = a + c; 7 = a + c; 8 = a + c; 9 = a + c e 10 = a + c. Cabe destacar que, novamente, são apresentadas em tarefas que contemplam representações objetais, esquemas, lacunas em branco para completar (uma sequência de resultados que formará uma palavra) e resolução de problemas, inclusive tarefa de controle.

Esse movimento, no segundo ano, atinge o modelo da relação universal todo-partes no sistema conceitual adição/subtração/equação que dá base para a resolução de problemas, conforme síntese a seguir:



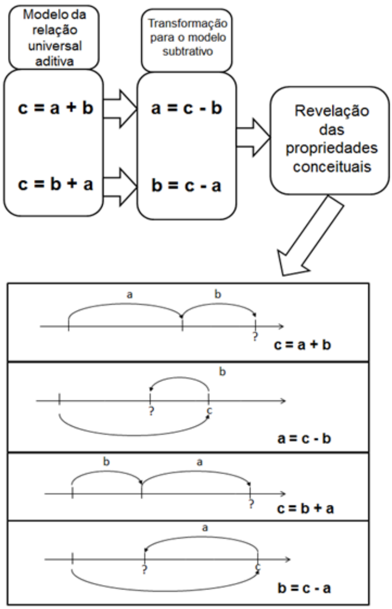
Fonte: Produção nossa com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008) e Давыдов et al. (2012).

Esses modelos constituem uma unidade pelo movimento contrário:



Fonte: Produção nossa com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008) e Давыдов et al. (2012).

A partir desses modelos, na peculiaridade do sistema conceitual em foco, suas transformações decorrentes da sua relação universal são as que seguem:



Fonte: Produção nossa com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008) e Давыдов et al. (2012).

Mas vale ressaltar que para chegar a esse nível de compreensão, as cinquenta e nove tarefas aqui analisadas dão conta de um movimento complexo de idas e voltas conforme a síntese (elaboração nossa, com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008) e Давыдов et al. (2012)).apresentada a seguir, que se observada atentamente, aponta as peculiaridades de cada uma delas:

1ª) Ideia comparativa aditiva que consiste em determinar a diferença entre dois objetos, por meio de representações objetal e gráfica (segmento de reta);

2ª) Ideia comparativa subtrativa que consiste em eliminar a diferença entre dois objetos, por meio de representações objetal e gráfica (segmento de reta);

3ª) Unificação da ideia comparativa aditiva e subtrativa num único objeto, por meio de representações objetal e gráfica (segmento de reta);

4ª) Unificação da ideia comparativa subtrativa num único objeto, por meio de representações objetal, gestual e gráfica (segmento de reta e inserção de arcos);

5ª) Ideia comparativa subtrativa que consiste em identificar as grandezas final e inicial, por meio das representações objetal, gráfica (inserção do esquema) e literal (indicação por seta);

6ª) Início da explicitação dos componentes todo-partes, com base nas representações objetal, gráfica (esquema incompleto) e literal (indicação por seta);

7ª) Início da explicitação dos componentes todo-partes, a partir da identificação do todo e das partes;

8ª) Início da explicitação dos componentes todo-partes, a fim de determinar a representação literal (indicação por seta);

9ª) Combinação de representação objetal, gráfica e literal, em que a parte é composta por outras duas (uma conhecida e outra desconhecida), por meio da situação inicial, intermediária e final;

10ª) Combinação de representação objetal, gráfica e literal, em que a parte é composta por outras duas (uma conhecida e outra desconhecida), o que consiste na complementação da representação literal indicada por seta;

11ª) Recortes de formatos diferentes podem ter a mesma superfície de área;

12ª) Quantidade do valor inicial e final em nova representação do esquema;

13ª) Composição do todo que introduz ideias conceituais de geometria e número representadas literalmente por seta de sentido contrário;
14ª) Transformação da parte em unidade de medida, com adoção de diferentes marcas na representação literal;
15ª) A construção do segmento em conformidade com o esquema que possibilita a identificação da unidade;
16ª) Generalização teórica: partes iguais se transformam em unidade de medida;
17ª) Comprimento da distância entre dois locais a partir de uma situação que envolve um personagem da história infantil;
18ª) Especificação do comprimento do trajeto do personagem da história infantil com base na unidade estabelecida;
19ª) Medida composta em que distintas unidades constituem uma unidade de medida que cria uma necessidade de sistema numérico padrão;
20ª) Manifestação do todo constituído por unidade de medida composta, com representação objetal e gráfica em que o esquema aparece com a notação numérica;
21ª) A grandeza e a unidade de medida apresentam um teor numérico, além da especificação do tipo de unidade;
22ª) Composição do todo de formas distintas, por consequência de partes (unidades) de comprimentos diferentes e diferentes modos de representação de uma grandeza;
23ª) O todo é conhecido e constituído de partes a determinar, o que dá subsídios para a representação na reta numérica;
24ª) A relação todo-partes expressa numa semirreta que dá condições para a introdução dos elementos de construção da reta numérica;
25ª) Inserção do todo e das partes na reta, com indicação numérica do todo;
26ª) A reta numérica como mediadora da ação aditiva na operação objetal, com o todo constituído de três partes;
27ª) Igualdade e desigualdade na relação numérica todo-partes, que leva à ideia de que, independentemente de acrescentar ou diminuir, a diferença entre duas grandezas será a mesma;
28ª) Representação do todo e de uma parte, na reta numérica, por meio de arcos, além da especificação da simbologia da desigualdade e do resultado numérico;
29ª) Passagem do plano da ação objetal para o mental em que a relação todo-partes ocorre no âmbito estritamente numérico;

30ª) Desigualdade de duas grandezas a serem medidas por duas unidades de tamanhos diferentes, que dá indícios para o conceito matemático de transitividade;
31ª) Condição de representação na reta numérica: unidade de medida de mesma espécie da grandeza, o que desencadeia outros conceitos (equação e transformações de unidades);
32ª) Determinação da grandeza menor de uma desigualdade que possibilita a transformação da desigualdade em igualdades;
33ª) Movimento transformativo da desigualdade em três desigualdades, geradoras da necessidade de sentenças matemáticas;
34ª) Produção de uma sentença matemática a partir da interpretação do movimento do arco na reta;
35ª) Composição da sequência na reta com números mágicos, com a ideia de sucessor e antecessor;
36ª) Desenvolvimento do cálculo mental, com base em regularidades de sequências de adição e subtração com a ideia de sucessor e antecessor;
37ª) Cálculo mental referente à reta numérica, com leitura voltada para o resultado, em vez da sentença como um todo;
38ª) Produção e resolução de um problema, que proporciona as condições para estabelecer a relação todo-partes e formação da igualdade;
39ª) Manifestação da inter-relação entre álgebra, geometria e aritmética, que prenuncia o conceito de equação de forma aberta;
40ª) O movimento conceitual de equação, em duplo sentido, na reta, que faz transformar uma desigualdade em desigualdade com números, necessariamente representados por letras diferentes;
41ª) Articulação entre as representações objetais, gráficas e literais, com conteúdo eminentemente algébrico, com a ideia de inequação;
42ª) A relação de igualdade e desigualdade como comparação de duas sentenças aritméticas (uma aditiva e outra subtrativa), isto é, conteúdo algébrico implícito: um mesmo número representado por diversas sentenças;
43ª) Transformação da significação algébrica em aritmética, com recorrência ao cálculo mental e adoção de uma unidade de medida, bem como atribuição de um valor à letra;

44ª) A subtração como operação mediadora para o surgimento do zero na reta numérica, isto é, como uma parte constitutiva do todo;

45ª) A representação da relação todo-partes sem a especificação da operação;

46ª) A representação do todo constituído de três partes com sua identificação e uma das partes por letras;

47ª) Manifestação da generalização teórica na relação todo-partes com a presença da significação algébrica nas representações;

48ª) A tradução do movimento geral-particular da relação todo-partes referente à adição em sentença matemática aditiva;

49ª) A tradução do movimento geral-particular, com o todo de três partes definidas, porém com possibilidade de variações em sentença matemática aditiva de três números;

50ª) Uma prévia definição do conceito de adição: a determinação do todo pela soma das partes, pelo pensamento comutativo;

51ª) A transformação de uma unidade de medida em outra para satisfazer a igualdade das partes;

52ª) Obtenção de um todo a partir de outro todo composto por partes diferentes para que se evite a contagem como único meio de sua obtenção;

53ª) Manifestação das sentenças matemáticas decorrentes da composição do todo com suas duas partes, que requer o retorno da ideia subtrativa;

54ª) Significação das partes, na relação com o todo com centralidade na subtração, com base no esquema e na reta numérica, em vez da representação objetal;

55ª) Distinção da sentença que indica o todo e a parte com a condição prévia: síntese do papel do todo e da parte vinculada às operações de adição e subtração;

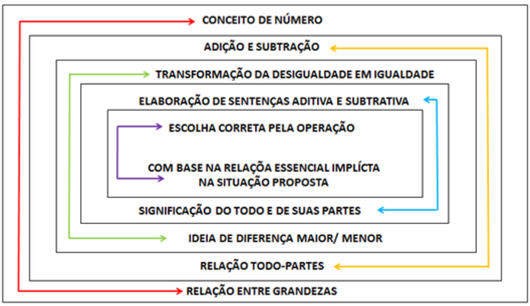
56ª) A operação de adição no contexto de resolução de problema, o que exige leitura e interpretação do texto para identificar se o que se busca é o todo ou uma das partes, a fim de definir a operação;

57ª) A operação de subtração no contexto de resolução de problema, que requer leitura e interpretação para a produção do esquema que subsidiará a identificação da operação;

58ª) Inter-relação de representações literais com a transformação da história em problemas, que anuncia a possibilidade de modelo geral para o sistema: adição/subtração/resolução de problemas;

59ª) O todo composto de partes, sendo uma delas necessariamente 10, com a apresentação de um novo esquema.

As tarefas particulares aqui analisadas vislumbram cinco estágios para a apreensão teórica referente à relação essencial todo-partes no que tange ao sistema conceitual de adição e subtração. O primeiro se dá no âmbito do processo de conhecimento das grandezas, no teor científico de conceito de número. O segundo se estabelece no âmbito da relação de desigualdade, o que implica a ideia de diferença maior/menor nas diversas grandezas. O terceiro tem sua objetivação na transformação da desigualdade para uma igualdade. O quarto estágio se volta para a produção de sentenças aditiva e subtrativa, cuja finalidade é explicitar os significados da relação todo-partes, ou seja, o todo é composto por partes, já a parte emerge da relação do todo e de uma de suas partes. Finalmente, o último estágio se dedica à compreensão subjacente da relação todo-partes, com base no sistema conceitual de adição e subtração, ou seja, a situação (objetal, gráfica ou literal) implicará na escolha correta pela operação. Para tanto, esse esforço para alcançar tal compreensão (sistema conceitual de adição e subtração) revela que o todo está estritamente relacionado à operação de adição, e as partes, inerentes à subtração, a partir daquela. Vale destacar que esses estágios evidenciam a relação todo-partes no âmbito da relação entre grandezas, caracterizadora do desenvolvimento do conceito teórico referente ao sistema de adição e subtração que no próprio processo inclui o conceito de equação e inequação. Desse modo, segue o esquema caracterizador dos cinco estágios vislumbrados no que tange à apreensão teórica referente à relação essencial todo-partes no âmbito do sistema conceitual de adição e subtração:



Fonte: Produção nossa com base em Горбов, Микулина e Савельева (2008) e Давыдов et al. (2012).

4 CONSIDERAÇÕES

Resta-nos, neste espaço, a explicitação das sínteses que refletem o movimento da referida pesquisa. Cabe destacar que nossas reflexões tiveram centralidade em algumas tarefas específicas do primeiro ano escolar do modo davydoviano de organização do ensino, que revelam as intenções e essências conceituais, com ênfase nas suas permanências, superações e surgimento referente ao sistema conceitual de adição e subtração no âmbito da universalidade todo-partes, com base no conceito de número na relação entre grandezas.

Trata-se de uma investigação preocupada com a elaboração de uma resposta à sua pergunta norteadora: No modo davydoviano de organização do ensino referente ao sistema de conceito (adição e subtração) – que se volta para o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes –, quais os componentes conceituais que, nas tarefas particulares, se apresentam, permanecem e são superados no primeiro ano escolar? Entendemos que tais componentes são inerentes ao processo de apropriação do referido sistema conceitual. Nesse sentido, focamos no *objetivo geral* de investigar o modo davydoviano de organização de ensino – que tem como finalidade o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes –, os componentes conceituais do sistema adição/subtração que se apresentam, permanecem e são superados no primeiro ano escolar. Para tanto, partimos do pressuposto elaborado com base no referencial teórico de que somente por meio da apropriação dos conceitos científicos ocorre o desenvolvimento do pensamento teórico.

Para alcançar a apropriação dos conceitos científicos, Davídov (1988) se preocupou em elaborar uma organização de ensino cuja finalidade é propiciar nos estudantes o desenvolvimento do pensamento teórico, mediado por abstrações e generalizações do objeto em análise. A leitura atenta do capítulo anterior mostra que Davýdov e seu grupo de investigadores foram fiéis ao seu pressuposto:

> O experimento mental [...] está estritamente vinculado aos conceitos teóricos, são realizadas as transformações dos objetos que não podem efetuar-se por meio de ações objetal-práticas. Se estas transformações descobrem no objeto novas propriedades, estas constituem os resultados específicos, justamente, do pensamento teórico

> que reflete a natureza interna da realidade. (DAVÍDOV, 1988, p. 153-154).

Inerentes ao pensamento teórico estão as peculiaridades das abstrações e generalizações teóricas formadas com fundamentos dos conceitos científicos (DAVÍDOV, 1988), o que requer método e conteúdo previamente organizados. Para a apreensão desses e dos demais elementos conceituais – análise, síntese, sistema conceitual, entre outros – desencadeadores do movimento do pensamento conceitual teórico, foi-nos requerido estudos, entre outros, de autores como: Kopnin (1978; 1958), Rosental (1962; 1956), Kosik (1995), Davýdov (1982) e Davídov (1987 e 1988).

De acordo com esses autores, o processo que conduz ao pensamento teórico requer a busca de manifestações decorrentes das relações da essência constituinte do objeto, o que demanda a análise dos aspectos sensoriais perceptíveis. Consequentemente, implica na apreensão do objeto em sua totalidade, isto é, em unidade. Em outras palavras, trata-se de compreender todas as contradições internas subjacentes ao objeto (KOPNIN, 1978). Nesse sentido, Davídov (1988, p. 147) afirma que:

> [...] a essência é a conexão interna que, como fonte única, como base genética, determina todas as outras especificidades particulares do todo. Trata-se de enlaces objetivos, os que em sua desmembração e manifestação asseguram a unidade dos aspectos do todo, isto é, dão ao objeto um caráter concreto. Neste sentido, a essência é a determinação universal do objeto. Por isso, a abstração geneticamente inicial, substancial, expressa a essência de seu objeto concreto.

Portanto, atingir o conhecimento da essência significa compreender o objeto em sua forma mais desenvolvida. Ou seja, isso se dá pelas mediações, o que requer um processo de análise, por meio de abstrações e generalizações (KOPNIN, 1978).

Com base na compreensão desse movimento, iniciamos a análise das abstrações e generalizações pertinentes às tarefas particulares do sistema de conceito (adição e subtração) referente ao primeiro ano escolar. Para tanto, debruçamo-nos nos objetivos específicos de analisar os elementos novos que trazem a relação entre grandezas no referido sistema conceitual, bem como as peculiaridades de cada um dos conceitos constituintes do sistema em estudo, além das características do teor do pensamento teórico referente a cada conceito do sistema referência do presente estudo.

Nesse âmbito, centramos esforços na seguinte centralidade: no movimento de permanência e de surgimento de características conceituais do sistema constituído pela adição e subtração, articulado com o modo peculiar de organização de cada tarefa.

Com base na teoria materialista histórica e dialética, e na análise das tarefas particulares, entendemos que o movimento do pensamento conceitual se referente ao sistema (adição e subtração) – o processo de redução do concreto ao abstrato – cuja relação essencial do conceito surge mediante a universalidade da relação todo-partes no âmbito do conceito de número na relação entre grandezas (DAVÝDOV, 1982).

A análise das tarefas nos possibilitou vislumbrar cinco estágios para a apreensão teórica referente à relação universal todo-partes no que tange ao sistema conceitual de adição e subtração: 1) Ocorre no âmbito do processo de conhecimento das grandezas; 2) Se dá na relação de desigualdade, o que implica a ideia de diferença maior/menor; 3) Apresenta-se com o objetivo de transformar a desigualdade em uma igualdade; 4) A produção de sentenças aditiva e subtrativa, com foco para os significados da relação todo-partes, isto é, o todo é composto por partes, já a parte emerge da relação do todo com uma de suas partes; 5) A compreensão da relação todo-partes com o sistema conceitual de adição e subtração, ou seja, a escolha correta pela operação de acordo com a situação. Para tanto, explicita-se que o todo está relacionado à operação de adição, e as partes, à de subtração. Vale destacar que esses estágios sempre colocam em evidência a relação todo-partes no âmbito da relação entre grandezas, caracterizadora do desenvolvimento do conceito teórico referente ao sistema de adição e subtração que no próprio processo inclui o conceito de equação e inequação.

Nesse sentido, o movimento apresentado pelas tarefas particulares em análise contempla o que Aleksandrov (1976, p. 37) sintetiza: “[...] a realidade é concreta; e resulta particularmente importante recordar este fato em relação com a matemática devido precisamente a sua abstração”.

Observa-se, ainda, que as tarefas não seguem um movimento linear, mas sim um movimento de ida e volta. Ou seja, os conceitos matemáticos são apreendidos numa inter-relação que, para apreender um novo conceito, precisa do outro. Isso implica que o conhecimento não se dá de forma isolada, pelo contrário, nas inter-relações das significações algébrica, aritmética e geométrica.

No que tange ao nosso objeto de pesquisa, o sistema conceitual de adição e subtração na relação todo-partes não é diferente. Tais significações se dão por meio de elementos essenciais, como as representações objetal e gestual que manifestam o conhecimento por meio de situações do cotidiano, mas as superam pelas representações gráfica (segmento de retas, modelo, esquema e reta numérica) e literal (modelo e equação). Esses elementos essenciais que promovem o desenvolvimento do pensamento teórico têm por base a relação de igualdade e desigualdade que, por sua vez, é reveladora das ideias comparativas aditiva e subtrativa.

Nossa preocupação, durante a análise, foi com o detalhamento de cada uma das tarefas, entendidas como aquelas que traduzem os diversos componentes e seus nexos conceituais do sistema conceitual de adição e subtração. No entanto, não significa que no processo de ensino essa pormenorização seja evidenciada, pois entendemos que o conteúdo das tarefas em si e o entrelaçamento entre elas fazem com que as crianças se apropriem e infiram em muitos elementos trazidos à tona ou não em cada uma delas.

O conceito de adição e subtração ocorre num trânsito entre as relações das diversas grandezas: discretas e contínuas (comprimento, área, volume, massa). Isso significa que não se adiciona ou se subtrai objetos em si, mas números que representam determinadas unidades de medida oriundas de um processo de medição. Basicamente, todas as tarefas trazem uma dupla finalidade: desenvolver uma ideia conceitual e prenunciar outras.

A partir de certo momento, as tarefas são organizadas de um modo tal, que mesmo se tratando de situação particular de diversas ordens, em seus enunciados se apresentam conceitos e ações da atividade de estudo que já se transformaram em operações. Por exemplo, as representações objetais com diferentes espécies de grandezas, o esquema, a reta, etc., uma vez apreendidos, eles se transformam em elementos dos enunciados das próximas tarefas, como mediadores para novas elaborações. Essa articulação só não acontece explicitamente em algumas tarefas que visam ao desenvolvimento do cálculo mental, isto é, da atividade puramente mental.

No entanto, ainda vem à tona aquela pergunta relacionada à "opinião" daqueles que convivem com a apresentação inicial da proposta davydoviana: Uma criança do primeiro ano escolar tem condições de se envolver com tarefas, aparentemente, complexas para a realidade brasileira? Ou, esse modo de organização do ensino não colocaria a criança em situação muito além de suas possibilidades em relação à sua idade, ou seja, da zona de desenvolvimento proximal?

Nesse sentido, a própria indicação de Davýdov (1982) e reflexão proporcionada pelo estudo nos dão, neste momento, elementos para dizer que as tarefas tiram as crianças da rotina do até então vivido, não a abandona, mas sim a incorpora com componentes teóricos. Por exemplo, encher ou esvaziar um recipiente com água é comum à maioria das crianças. Essa situação, na proposta davydoviana, recebe um componente científico que é a grandeza volume no processo de medição, de aumento e de diminuição. Acrescem-se, ainda, as formas de representação e a interface com o movimento impulsionado por abstrações (mais, menos, igual). Diríamos, então, que as tarefas nascem complexas, porque recebem formas de conceitos científicos e assim permanecem, pois continuam recebendo novos componentes conceituais. Mas essas complexidades não ficam estagnadas, pois as tarefas trazem um teor questionador que coloca o pensamento dos estudantes em movimento de pensamento, em ação investigativa, como diz Davídov (1988). Sendo assim, a complexidade das tarefas é algo da convivência da criança em atividade de estudo. E, como tal, cria necessidades que despertam para novas possibilidades. Conforme Vigotski (2000), constitui-se em zona de desenvolvimento proximal. Caso assim não fosse, a criança continuaria em estado de inércia de seu desenvolvimento.

Por se tratarem de complexidades conceituais, dificuldades também se apresentam aos estudantes. Afinal, eles estão em processo de apropriação de um sistema de conceitos, isto é, em atividade de estudo que promove o desenvolvimento. Mas como diz Davýdov (1982), a superação ocorrerá em nível teórico. Davídov (1988, p. 185) nos ajuda a compreender esse processo de superação referente às relações entre grandezas:

> Sem dúvida, em algumas situações é dificíl ou, em geral, impossível de realizar a comparação diferencial direta e descobrir de imediato, por exemplo, a igualdade e desigualdade das magnitudes em questão (segmentos, pesos, etc.). O professor demonstra, aos estudates do primeiro ano, situações semelhantes e lhes solicita que encontrem um procedimento adequado para resolver a tarefa dada. As crianças formulam diferentes hipóteses e, com ajuda do professor, chegam à conclusão de que em todos esses casos

> se deve realizar uma comparação mediatizada. Porém, o que é isso? Com ajuda de que meios é possível cumprir? Como operar com estes meios e a que resultado eles chegam? No começo, o professor estimula as crianças a planejar essas questões e, em seguida, propõe-lhes uma tarefa que requer o descobrimento e a assimilação do procedimento geral da comparação diferencial mediatizada das grandezas, que se apoia previamente na comparação múltipla destas com ajuda do número.

A diretividade evita, pois, o espontaneísmo dos estudantes que poderão transitar por conceitos eminentemente empíricos. Davýdov (1982) tem como pressuposto que a criança vai à escola para se colocar em outro lugar social, em atividade de estudo que se trata de um estágio de desenvolvimento ainda não alcançado na pré-escola. Dadas as suas possibilidades do momento, o estudante não dispõe de condições para vislumbrar, de modo espontâneo, os componentes peculiares dessa atividade humana: as tarefas de estudo, ligadas a uma finalidade, suas respectivas ações, cada qual com seu conjunto de tarefas particulares, que são desenvolvidas por diferentes operações. Enfim, os estudantes não dispõem de qualidades intelectuais necessárias para estabelecer os fins, as condições e os meios que, articuladamente, com surgimento de necessidades e motivos, aprendem e desenvolvem a própria atividade de estudo. Por isso a atribuição de tal atividade infantil para se constituir na finalidade da atividade do professor, ensino, por meio da organização do ensino.

O envolvimento neste estudo também nos leva a mergulhar nas experiências pessoais – quando estudante, nas observações de crianças e como professora dos anos finais do ensino fundamental – que mostram o enfoque dado aos conceitos de adição e subtração como operações distintas. A centralidade estava na contagem, no "arme e efetue" (algoritmo) que, para o "cálculo", recorria a procedimentos eminentemente empíricos: traçar riscos na margem do caderno ou na carteira (mesa) escolar e contagem de dedos. A única ligação que existia entre as duas operações era que uma servia para tirar a "prova real" da outra. Em palavras correntes da época: Se diminuir uma parcela do total e der a outra, então a "conta de mais" está correta; também estava certa "a conta de menos" se somado o seu resultado com o número menor e fosse obtido o maior. Outrora, conforme relato de nossos avós, nem essa parca vinculação entre as duas operações se dissipava, pois a constatação de acerto ou não das “contas” era obtida pelas “provas dos noves”, obtidas por procedimentos aditivos.

Diante dessas ideias pertinentes ao “ensino tradicional” (DAVÝDOV, 1982), o modo davydoviano de organização do ensino de matemática traz expectativas alentadoras ao se ter como finalidade o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes. Sendo assim, adição e subtração se confluem em um sistema que traz a equação da base para a resolução de problemas, em um movimento dialético impulsionado pela relação todo-partes, num contexto de relação entre grandezas e da concepção de número real.

REFERÊNCIAS

ALEKSANDROV, A. D. Visión general de la Matemática. In: ALEKSANDROV, A. D. et al. **La matemática:** su contenido, métodos y significado. 2. reimpresión. Madrid: Alianza Universidad, 1976, p. 17-91.

ALVES, E. de S. B. **Proposições brasileiras e davydovianas**: limites e possibilidades. 2013. 119 f. Monografia (Especialização em Educação Matemática) – Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2013.

ASBAHR, F. da S. F. **"Por que aprender isso professora?"** Sentido pessoal e atividade de estudo na Psicologia Histórico-Cultural. 2011. 219 f. Tese (Doutorado em Psicologia) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

BERNARDES, M. E. M.; MOURA, M. O. de. Mediações simbólicas na atividade pedagógica. **Educação e Pesquisa** (USP. Impresso), v. 35, p. 463-478, 2009.

BÉZOUT, É. **Elementos de arithmetica.** [IV]. Coimbra: Real Officina da Universidade, 1791. 270 p.

BRUNELLI, J. B. **Projeto ou atividade de ensino e de aprendizagem?** Expressões da implantação da Proposta Curricular do Estado de Santa Catarina. 2012. 128 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2012.

BÚRIGO, L. S. M. **Necessidades emergentes na organização do ensino davydoviano para o número negativo.** 2015. 153 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2015.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Livraria Sá da Costa, 1951.

COSTA, J. M. C. da. **Tratado de arithmetica**. Lisboa: Imprensa Nacional, 1866.

CRESTANI, S. **Organização do ensino de matemática na perspectiva**

do desenvolvimento do pensamento teórico: uma reflexão a partir do conceito de divisão. 2016. 125 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2016.

DAMAZIO, A.; AMORIM, M. P. A apropriação de significações de conceito de números racionais: um enfoque histórico-cultural. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte: SBEM, 2007, v. 1, p. 1-17.

DAMAZIO, A.; ROSA, J. E. ; EUZEBIO, J. S. . O ensino do conceito de número em diferentes perspectivas. **Educação Matemática Pesquisa** (Online), v. v. 14, p. 209-231, 2012.

DAMAZIO, A.**;** ROSA, J. E. ; PEREIRA, L. L. ; BANHARA, E. V. . A concepção de álgebra na proposição de Davydov para o ensino de número. **POIÉSIS -** Revista do Programa de Pós-Graduação em Educação (Unisul), v. v.5, p. 280-299, 2012.

DAMAZIO, A.; ROSA, J. E.; SOARES, M. T. Conceito de número no sistema de ensino de Davydov. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. **Anais...** Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2011, p. 1-11.

DAVÍDOV, V. V. Análisis de los principios didácticos de la escuela tradicional y posibles principios de enseñanza en el futuro próximo. In: SHUARE, M. (Comp.). **La psicología Evolutiva y pedagógica en la URSS.** Moscú: Progreso, 1987, p. 143-155.

______. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico:** investigación teórica y experimental. Trad. Marta Shuare. Moscú: Editorial Progreso, 1988.

DAVÍDOV, V. V.; SLOBÓDCHIKOV, V. I. **La enseñanza que desarrolla en la escuela del desarrollo; en La educación y la enseñanza:** una mirada al futuro. Moscú: Progreso, 1991, p. 118-144.

DAVÝDOV, V.V. **Tipos de generalización en la enseñanza.** 3. ed. Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1982.

______. La renovación de la educación y el desarrollo mental de los alumnos. **Revista de Pedagogía,** Santiago, n. 403, p. 197-199, jun. 1998.

DORIGON, J. C. G.; DAMAZIO, A.; ROSA, J. E. Proposição de Davýdov e colaboradores para introdução ao ensino do conceito de equação. **Revista Iberoamericana de Educacion Matemática-UNIÓN**, Madri, v. 45, p. 76-95, mar. 2016. Disponível em: <http://www.fisem.org/www/union/revistas/2016/45/45_articulo04.pdf.>. Acesso em: 16 jan. 2017.

DUARTE, N. A anatomia do homem é a chave da anatomia do macaco: a dialética em Vigotski e em Marx e a questão do saber objetivo na educação escolar. **Caderno Cedes,** v. 21, n. 71, jul. 2000. Disponível em: <http://www.scielo.br>. Acesso em: 28 jul. 2016.

______. **A individualidade para–si. Contribuição a uma teoria histórico–social da formação do indivíduo.** 1ª Ed. Campinas, SP: Autores Associados, 1993. (Coleção Educação Contemporânea).

DUSAVITSKII, A. K. Educação desenvolvente e a sociedade aberta. **Ensino Em Re-Vista**, v.21, n.1, p.77-84, jan./jun., 2014.

EUZÉBIO, J. da S. **Ensino do conceito de número:** Proposta de ensino Davydov e as proposições tradicionais. 2011. 64 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Pedagogia) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2011.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** 2. ed. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: UNICAMP, 1997.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetiké**, Campinas, Unicamp, Ano 3, n. 4, p. 1-37, 1995.

FREITAS, D. **O movimento do pensamento expresso nas tarefas particulares proposta por davýdov e colaboradores para apropriação do sistema conceitual de fração.** Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2016.

GALDINO, A. P. S. **O conhecimento matemático de estudantes do 3º ano do Ensino Fundamental sobre o conceito de multiplicação:** um estudo com base na teoria Histórico-Cultural. 2016. 110 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2016.

GIARDINETTO, J. R. B. **Matemática Escolar e Matemática da Vida Cotidiana**. V. 65. Campinas, SP: Autores Associados, 1999. (Coleção Polêmicas do Nosso Tempo).

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

HOBOLD, E. S. F. **Proposições para o ensino da tabuada com base nas lógicas Formal e Dialética.** 2014. 199 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2014.

ILIENKOV, E. V. La ascensión de lo abstracto a lo concreto en principios de la lógica dialéctica. In: Alfredo Tecla Jiménez, **Teoría de la construcción del objeto de estudio**. México: Instituto Politécnico Nacional, p. 151-200, 2006.

KALMYKOVA, Z. I. Pressupostos psicológicos para uma melhor aprendizagem da resolução de problemas aritméticos. In: LÚRIA; LEONTIEV; VYGOTSKI et al. **Pedagogia e Psicologia II.** Lisboa: Estampa, 1991, p. 9-26.

KOPNIN, P. V. Lo abstrato y lo Concreto. In: ROSENTAL, M. M.; STRAKS, G. M. (Orgs.). **Categorias del materialismo dialectico**. México: Grijalbo, 1958, p. 299-320.

______. A dialética como lógica e teoria do conhecimento. Tradução de Paulo Bezerra. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

KOSIK, K.; TORÍBIO, A. **Dialética do concreto.** 2. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1995.

LEMOS, L. V. **A atividade do professor e a matemática no ensino fundamental:** uma análise sócio-histórica de sua estrutura e conteúdo.

2014. 154 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2014.

LEONTIEV, A. N. **Actividad, consciência, personalidade.** 2. ed. Havana: Pueblo y Educacion, 1983.

______. **O desenvolvimento do psiquismo**. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2004.

______. Os princípios psicológicos da brincadeira pré-escolar. In: VIGOTSKI, L. S.; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. (Orgs.). **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem.** São Paulo: Ícone, 1991.

LIBÂNEO, J. C. A didática e a aprendizagem do pensar e do aprender: a Teoria Histórico-Cultural da atividade e a contribuição de Vasili Davydov. **Revista Brasileira de Educação,** Rio de Janeiro, n. 27, p. 5-24, 2004.

LIBÂNEO, J. C.; FREITAS, R. A. M. M. Vasily Vasilyevich Davydov: a escola e a formação do pensamento teórico-científico. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (Orgs.). **Ensino desenvolvimental:** vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. Uberlândia: EDUFU, 2013, p. 315-350.

LURIA, A. R. **Desenvolvimento cognitivo**. Tradução de Fernando Limongeli Gurgueira. São Paulo: Ícone, 1990.

MADEIRA, S. **“Prática”:** uma leitura histórico-crítica e proposições davydovianas para o conceito de multiplicação. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2012.

MAME, O. A. C. **Os conceitos geométricos nos dois anos iniciais do Ensino Fundamental na proposição de Davýdov.** 2015. 160 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2014.

MARX, K. Posfácio à segunda edição. **O capital**. São Paulo: Abril Cultural, 1983.

MATOS, C. F. **Resolução de problemas davydovianos sobre adição e subtração por estudantes brasileiros do sexto ano do ensino fundamental.** 2013. 168 f. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2013.

MOURA, M. O. de. A educação escolar como atividade. in: ix encontro nacional de didática e prática de ensino. **anais** do IX Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino. Águas de Lindóia. v. 1/2. p. 510-528, 1998.

NUÑES, B. I. **Vygotsky, Leontiev e Galperin:** formação de conceitos e princípios didáticos. Brasília: Líber Livro, 2009.

REGO, T. C. **Vigotsky:** uma perspectiva histórico-cultural da educação. Petrópolis, RJ: Vozes: 1995.

ROSA, J. E. da. **O desenvolvimento de conceitos na proposta curricular de matemática do Estado de Santa Catarina e na abordagem Histórico-Cultural**. 2006. 111 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2006.

______. **Proposições de Davydovy para o ensino de Matemática no primeiro ano escolar:** inter-relações dos sistemas de significações numéricas. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

______. O ensino de Matemática. In: SCHLICKMANN, Maria Sirlene Pereira (Org.). **Áreas do conhecimento: Diálogos em articulação.** Palhoça: Editora da Unisul Virtual, 2016. p. 184 – 202.

ROSA, J. E.; DAMAZIO, A. O ensino do conceito de número: uma leitura com base em Davydov. **Revista Unión,** San Cristobal de La Laguna, v. 30, p. 81-100, 2012.

ROSA, J. E.; DAMAZIO, A.; ALVES, E. S. B. Adição e subtração em Davydov. **Boletim GEPEM /Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática**, Rio de Janeiro, n. 63, p. 61-75, Jul./Dez. 2013.

ROSA, J. E. ; **DAMAZIO, A.** ; CRESTANI, S. . Os conceitos de divisão e multiplicação nas proposições de ensino elaboradas por Davydov e seus colaboradores. **Educação Matemática Pesquisa** (Online), v. 16, p. 167-187, 2014.

ROSENTAL, M. **Da teoria marxista do conhecimento**. Rio de Janeiro: Editorial Vitória, 1956.

ROSENTAL, M. M. **Princípios de Logica Dialectica.** Tradução de Augusto Vidal Boget. Uruguai: Montevideo, 1962.

SANTA CATARINA. Secretaria de Estado da Educação. **Proposta Curricular de Santa Catarina:** formação integral na educação básica. [S.l.; S.n.]: 2014.

SAVIANI, D. **Pedagogia Histórico-Crítica**: Primeiras Aproximações. 10. ed. São Paulo: Cortez e Autores Associados, 2008.

SFORNI, M. S. de F. **Aprendizagem conceitual e organização do ensino:** contribuições da Teoria da Atividade. Araraquara: JM Editora, 2004.

SHUARE, M. **La psicologia soviéticat al como yo la veo.** Moscú: Editorial Progreso, 1990.

SILVEIRA, G. M. **Unidade entre lógico e histórico no movimento conceitual do sistema de numeração proposta por davýdov e colaboradores para o ensino das operações da adição e subtração.** Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2015.

SOUZA, M. B. **O ensino do conceito de número:** objetivações nas proposições davydovianas e formalista moderna. 2013. 237 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2013.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à Pesquisa em Ciências Sociais**: a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo: Atlas, 1995.

VIGOTSKI, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem.** Trad.

Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

VYGOTSKI, L. S. **Obras Escogidas II**: Incluye Pensamiento y Lenguaje, Conferencias sobre Psicología. Madrid: Visor Distribuciones, 1993.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. Trad. José Cippola Neto, Luis Silveira Menna Barreto, Solange Castro Afeche. 6. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

ГОРБОВ С. Ф.; МИКУЛИНА Г. Г.; САВЕЛЬЕВА О. В. **Обучение математике. 1 класс: Пособие для учителей начальной школы** (Система Д.Б. Эльконина – В.В. Давыдова). 2-е ида, перераб. - М.:ВИТА-ПРЕССб 2008. 128р. [GORBOV, S.F.; MIKULINA, G.G.; SAVIELIEV, O.V. **Ensino de Matemática. 1 ano: livro do professor do ensino fundamental** (Sistema do D.B. Elkonin – V.V. Davidov). 2ª edição redigida, Moscou, Vita-Press, 2008.]

ДАВЫДОВ, В. В. О. et al. **Математика, 1-Kjiacc.** Mockba: Mпрос - Аргус, 2012a. Davídov, V.V. **Matemática, 1ª série**. Livro didático e de exercícios para os estudantes da primeira série. Moscou: MIROS, Argus, 2012.