UNIVERSIDADE DO EXTREMO SUL CATARINENSE – UNESC
UNIDADE ACADÊMICA DE HUMANIDADES, CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO – UNAHCE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MESTRADO EM EDUCAÇÃO

LUCAS SID MONERETTO BÚRIGO

NECESSIDADES EMERGENTES NA ORGANIZAÇÃO DO ENSINO DAVYDOVIANO PARA O NÚMERO NEGATIVO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade do Extremo Sul Catarinense – UNESC, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação.

Orientador: Prof. Dr. Ademir Damazio

CRICIÚMA
2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

B958n Búrigo, Lucas Sid Moneretto.
Necessidades emergentes na organização do ensino davydoviano para o número negativo / Lucas Sid Moneretto Búrigo ; orientador : Ademir Damazio. – Criciúma, SC : Ed. do Autor, 2015.
153 p. : il.; 21 cm.

Dissertação (Mestrado) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Programa de Pós-Graduação em Educação, Criciúma, 2015.

1. Ensino de matemática. 2. Proposições davydovianas. 3. Números negativos. I. Título.

CDD. 22ª ed. 372.7

Bibliotecária Eliziane de Lucca Alosilla – CRB 14/1101
Biblioteca Central Prof. Eurico Back - UNESC

"NECESSIDADES EMERGENTES NA ORGANIZAÇÃO DO ENSINO DAVYDOVIANO PARA O NÚMERO NEGATIVO"

Esta dissertação foi julgada e aprovada para obtenção do Grau de Mestre em Educação no Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade do Extremo Sul Catarinense.

Criciúma, 20 de fevereiro de 2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ademir Damazio
(Orientador – UNESC)

Prof. Dr. José Carlos Libâneo
(Membro - UCG)

Profa. Dra. Josélia Euzébio da Rosa (Membro – UNISUL)

Prof. Dr. Vidalcir Ortigara
(Suplente – UNESC)

Prof. Dr. Vidalcir Ortigara
Coordenador do PPGE-UNESC

Lucas Sid Moneretto Búrigo
Mestrando

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos aqueles que contribuíram direta e indiretamente para este estudo:

- Ao Prof. Dr. Ademir Damazio por ter orientado a presente pesquisa.

- Aos colegas do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: Uma Abordagem Histórico-Cultural.

- Aos professores que participaram da banca de qualificação Prof. Dra. Josélia Euzébio da Rosa e Prof. Dr. Vidalcir Ortigara, pelas importantes contribuições.

- Aos componentes da banca de defesa, Prof. Dra. Josélia Euzébio da Rosa e Prof. Dr. José Carlos Libâneo.

- A minha família: Sidnei, Maristela e Matheus. E, também, à Monike.

- À Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina – FAPESC e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPQ, pelo apoio financeiro concebido por ambos.

RESUMO

O presente estudo é consequência advinda de reflexões com base na literatura que aponta para problemas relacionados ao ensino e aprendizagem referentes ao conceito de número relativo. Por decorrência, apresenta-se a proposta de Davýdov e colaboradores para a organização do ensino de Matemática que traz como princípio básico o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes, tendo como premissa o conceito de número real, cujo fundamento é a relação entre grandezas. Essa ideia central se constitui em critério para a caracterização do número em positivo e negativo. Sendo assim, a relatividade numérica se manifesta no contexto de número negativo e positivo sem privilégio inicial para as singularidades (natural, inteiro, racional e irracional). É nesse âmbito que se define o objeto da presente pesquisa: o modo davydoviano de organização do ensino com foco para o conceito de número negativo. O problema de pesquisa é: Que necessidades se apresentam no âmbito das atividades de ensino e estudo, mais especificamente no modo davydoviano de organização do ensino referente às tarefas particulares voltadas ao conceito de números negativos? A pesquisa teve como objetivo investigar as necessidades inerentes ao processo davydoviano de organização do ensino referentes ao conceito de números negativos. Trata-se de uma pesquisa qualitativa na modalidade bibliográfica que tem como fonte de análise um livro didático do estudante e um livro de orientação ao professor correspondentes ao sexto ano escolar. O processo de análise se desenvolveu com base em duas categorias: 1) as necessidades de ordem conceitual e 2) as necessidades pedagógicas. O estudo evidencia que, na proposição davydoviana, o número negativo traz o significado de oposto. Por conseguinte, emerge a necessidade de mudança do tipo de grandeza: de escalares – até então, base do surgimento dos números positivos – para a vetorial. Nesse movimento conceitual, a especificação do módulo e do sentido na ação geradora do número negativo demandou outra necessidade: a comparação de dois vetores. Além disso, se manifesta outra necessidade: a adoção de um elemento que permite a indicação do sentido ao se representar o número na reta.

Palavras-chave: Proposição Davydoviana. Necessidades. Número Negativo. Vetor.

ABSTRACT

The present study is consequence coming from the reflections based on the literature that points to problems related to teaching and learning concerning the concept of relative number. As result, it is presented the proposal of Davýdov and collaborators for the organization of Mathematics teaching that has as a basic principle the development of theoretical thinking of students, having premise the concept of real numbers whose foundation is the relation between magnitudes. This main idea constitutes in criteria for the characterization of the number in positive and negative. That being, the numerical relativity is presented in the concept of negative and positive without the beginning privilege of the singularities (natural, whole, rational and irrational). It is in this context that presents the object of the presented research: the davydovian mode of organization of teaching with focus for the concept on the negative number. The problem of the research is: What necessities are presented in the context of teaching and study activities, more specifically, in the davydovian mode of organization of teaching, regarding particular tasks facing the concept of negative numbers? The objective of the research was investigate the necessities inherent in the organization of the teaching in the davydovian process, concerning the concept of negative numbers. This is a qualitative research in bibliographical modality whose source analysis of a student textbook and the teacher´s guide book, corresponding to the sixth school year. The process of analysis was developed based on two categories: 1) the necessities of conceptual order and 2) the pedagogical necessities. The study shows that, in the davydovian proposition, the negative number brings the opposite meaning. It further emerges the need to change the type of magnitude: scalar - until then, based on the appearance of positive numbers - to the vector. In this conceptual movement, the module specification and sense in generating action of the negative number demanded another necessity: a comparison of two vectors. Furthermore, it presents other necessity: the adoption of an element that enables indication of the sense to be represented on the number line.

Keywords: Proposition Davydovian. Necessities. Negative number. Vector.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

GPEMAHC – Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: uma Abordagem Histórico-Cultural
PCNs – Parâmetros Curriculares Nacionais
PCSC – Proposta Curricular de Santa Catarina
PIC – Programa de Iniciação Científica
UNESC – Universidade do Extremo Sul Catarinense
URSS – União das Repúblicas Soviéticas Socialistas

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

A produção desta dissertação decorre do interesse pelo modo de organização do ensino escolar que tem como finalidade o desenvolvimento, nos estudantes, do pensamento conceitual relacionado à Matemática.

Essa temática constituiu-se, desde o curso de graduação, com a participação em projetos de iniciação científica, oportunidade em que me debrucei sobre o estudo da proposição de ensino de Davýdov e colaboradores. Desde então, tornou-se instigante o pressuposto do referido autor de que o número real é o conceito referencial no ensino de matemática – ao iniciar o primeiro ano escolar – quando a pretensão for o desenvolvimento do pensamento teórico. Sendo assim, a base de todas as realizações das crianças, nas aulas de matemática, é a relação entre grandezas. Qualquer proposta pedagógica que não considere tal premissa Davýdov (1982) denomina de tradicional, tendo como consequência o desenvolvimento do pensamento empírico.

A partir de então, o alvo passa ser a literatura sobre os fundamentos da Matemática – principalmente Caraça (2010) e Aleksandrov (1976), articulados com as produções de Davýdov – com atenção voltada ao estudo do objeto da Matemática, ou seja, a dúvida era: a relação entre grandezas é realmente a básica genética do conceito de número real e, como tal, seria possível ser a referência no ensino, mesmo no primeiro ano escolar, como elucida a proposta davydoviana? O questionamento se justifica, uma vez que as concepções formadas durante a trajetória escolar estavam fortemente arraigadas pela ideia de que, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, o essencial seria o ensino dos números naturais. Os reais só se apresentariam no nono ano.

O contato com os livros didáticos e de orientações aos professores produzidos por Davýdov e colaboradores, bem como as produções do GPEMAHC, especialmente Rosa (2012), indicavam a efetividade e possibilidade da proposição davydoviana no contexto escolar da Rússia. Realmente, a relação entre grandezas escalares permeia, em seus mínimos detalhes, todos os conceitos matemáticos que envolvem números positivos, como têm mostrado as pesquisas de Rosa (2012), Madeira (2012), Rosa e Damazio (2012), Souza (2013), Rosa Damazio e Alves (2013), entre outros.

Nesse processo de compreensão do modo davydoviano de organização do ensino da matemática, outra questão, entre tantas que se apresentaram, diz respeito ao conceito de número negativo. Particularmente, o interesse se volta às necessidades conceituais e pedagógicas emergentes, ao privilegiar a relação entre grandezas como premissa para o desenvolvimento do pensamento teórico. É nesse contexto que se desenvolve a presente dissertação, organizada em quatro capítulos. O primeiro deles contempla o processo de produção do objeto, dos objetivos e do problema da pesquisa, como consequência de reflexões decorrentes da participação em projetos de iniciação científica em que foi estudada a proposição davydoviana, bem como textos dos seus coautores e estudiosos, em especial, de Davýdov. Também aponta indicativos metodológicos orientadores da investigação.

O segundo capítulo traz as bases da proposta davydoviana: contexto e características, isto é, em qual contexto surge tal proposição de ensino, bem como as suas peculiaridades, quais sejam: o novo pensamento pedagógico e os princípios didáticos.

O terceiro capítulo trata de tarefas particulares, pertinentes à proposição davydoviana, sobre a grandeza vetorial, o deslocamento e o vetor, que se traduzem em necessidades para o desenvolvimento do conceito de número negativo. Apresenta, ainda, as análises das tarefas particulares referentes ao conceito de número negativo, bem como sua introdução na reta numérica. Para tanto, as referências são o livro de orientações ao professor (ГОРБОВ, et al, 2006) e o livro didático do estudante do sexto ano escolar (ГОРБОВ, et al, 2007).

Por fim, o quarto capítulo traz algumas considerações centradas nas principais evidências a respeito do problema de pesquisa.

1. PROBLEMÁTICA DA PESQUISA

O início da escrita sistemática desta dissertação exigiu um esforço intelectual nada diferente da própria fase que o antecedeu: elaborações a respeito de sua organização. Afinal, estava ciente de que se trataria da exposição de uma investigação com um objeto de estudo definido, de aproximações de um método e da base teórica. No entanto, a questão que se apresentou foi: no processo de problematização de uma pesquisa sobre Educação, é necessário que o pesquisador exponha a sua trajetória de formação e nela explicite a constituição do objeto da pesquisa? Nas leituras dos clássicos pesquisadores da Teoria Histórico-Cultural – basicamente Vygotski, Leontiev e, principalmente, Davýdov – não tenho visto em momento nenhum tal preocupação. Em vez disso, eles contextualizam seus estudos no âmbito de investigações correlatas, quer de fundamentos antagônicos ou de mesma base teórica, mas que abrem possibilidades de questionamentos de suas fragilidades.

Contudo, nas últimas defesas de dissertações assistidas, uma questão que se apresentou de forma constante nas arguições proferidas pelos membros das bancas refere-se a que o mestrando explicite na dissertação a sua vida acadêmica. Em específico, de que modo ocorreu o processo de construção do objeto de pesquisa. Disso decorre, então, a minha decisão de adotar essa orientação.

Tal processo se origina durante o curso de Licenciatura em Matemática na Universidade do Extremo Sul Catarinense, UNESC, em 2009. Nesse curso, algumas disciplinas – Didática da Matemática e Estágio Supervisionado no Ensino Fundamental I e II – permitiram o debate sobre a organização do ensino de alguns conceitos matemáticos e, também, do processo de aprendizagem dos estudantes.

No que concerne à discussão sobre a organização do ensino dos conceitos matemáticos, um marco no referido curso foi a participação na sua Quarta Semana Acadêmica, em 2010. Nesse evento, a inscrição como ouvinte possibilitou-me a participação em um minicurso, o primeiro contato com as proposições de ensino de Davýdov[1] e seus colaboradores para os anos inicias do estudo da Matemática no Ensino Fundamental.

A breve apresentação, pelos ministrantes, de algumas tarefas do sistema de ensino mencionado e resolvidas pelos participantes, seguida de discussão, deu indício de que se tratava de um ensino de Matemática

---

[1]Utilizarei a grafia Davýdov, porém, quando se tratar de referência será preservada a original.

diferente do recomendado pelos documentos que servem de referência para a organização do ensino brasileiro. Cito, por exemplo, a Proposta Curricular de Santa Catarina, os Parâmetros Curriculares Nacionais, bem como o processo por mim vivenciado em todos os níveis de ensino.

Como consequência, passei a participar das reuniões do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: uma Abordagem Histórico-Cultural (GPEMAHC), do qual os ministrantes eram membros. Por decorrência, despertou-me o interesse em envolver-me em projetos de pesquisa, especialmente naqueles voltados para o estudo da proposição de ensino de Davýdov e seus colaboradores. Isso aconteceu com a oportunidade propiciada pelos pesquisadores do grupo que acataram minha manifestação de empenho em elaborar e executar um projeto de pesquisa, o que se efetivou com a submissão em um edital interno da UNESC de iniciação científica, PIC 170[2]. O período de avaliação do projeto até o resultado foi marcado por grande expectativa, devido ao meu interesse. Com a aprovação, comecei o estudo da citada proposição voltada para o primeiro ano do Ensino Fundamental, em 2011.

O objetivo do referido projeto incidiu na análise da proposição de ensino de Davýdov e seus colaboradores à luz dos fundamentos matemáticos. Na realidade, busquei na literatura pertinente a explicitação de que a base geral da Matemática é a relação entre grandeza, como explicitara Davýdov (1982). Na continuidade, em 2012, participei de outro projeto, que decorreu da conclusão da primeira pesquisa do GPEMAHC (ROSA, 2012) – referente à proposta davydoviana – de que ela não divorcia as significações aritméticas, geométricas e algébricas, mesmo no primeiro ano escolar. Dediquei-me à investigação sobre o objeto da álgebra, geometria e aritmética, tendo como base os fundamentos da Matemática e, de forma articulada, com a referida proposta com olhar para o conceito de número.

Com o ingresso no mestrado, em 2013, o foco continuou na proposição de ensino de Davýdov e seus colaboradores para a Matemática. Porém, debrucei-me sobre estudo e entendimento, de forma

---

[2]Programa de Iniciação Científica da UNESC desenvolvido pela PROPEX (Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa e Extensão) em conjunto com a Coordenação de Políticas de Atenção ao Estudante – CPAE. Seu objetivo constitui-se em fomentar projetos de pesquisa a serem executados por acadêmicos em conjunto com o professor orientador, cuja bolsa é proveniente do Governo Estadual, em atendimento ao prescrito no artigo 170 da Constituição Estadual.

intensa, dos livros e artigos de Davýdov traduzidos da língua russa para a espanhola[3], além das suas produções em português.

Davýdov nasceu em 1930 e faleceu em 1998. De nacionalidade russa, era doutor em psicologia e seguidor de Vygotski (ROSA, 2012). Importa dizer que Vygotski, segundo Libâneo e Freitas (2013), foi o fundador da Teoria Histórico-Cultural e Davýdov compôs a terceira geração dos seus seguidores.

Em sua formação acadêmica, Davýdov, de acordo com Libâneo e Freitas (2013), teve como professores: Leontiev, Luria, Rubinstein, Galperin, Zaporózhets, Elkonin, Talizina, entre outros. Vale destacar que todos os professores mencionados foram expoentes da psicologia marxista (LONGAREZI; PUENTES, 2013).

No que diz respeito à carreira profissional de Davýdov, Libâneo e Freitas (2013, p. 317), com base em Zinchenko (1998), destacam que,

> Embora sua carreira teórica e investigativa tenha se dado com base na psicologia, era tido como um grande pedagogo por conhecidos estudiosos da pedagogia russa como Kairov, Arseniev, Babanski e Skattkin [...].

O reconhecimento de Davýdov como pedagogo, para Libâneo e Freitas (2013), não impede de considerá-lo como o mais destacado pesquisador em psicologia pedagógica da terceira geração dos seguidores de Vygotski.

Em suas primeiras investigações, Davýdov chegou a resultados que comprovaram a inexistência da atividade de estudo, mesmo para as crianças que frequentavam a escola. Isso porque os métodos e os conteúdos de ensino não possibilitavam o envolvimento dos estudantes de modo que lhes proporcionassem o desenvolvimento do pensamento conceitual. Por consequência, ele e Elkonin, nos anos 1960, propuseram a criação de novos programas de ensino para a Matemática, que culminaram no sistema de ensino denominado de Elkonin-Davýdov[4] (LIBÂNEO; FREITAS, 2013).

Outros seguidores de Vygotski também elaboraram propostas de ensino para a Matemática, tais como: Zankov, Galperin e Talizina

[3]A maioria dos livros e artigos que se encontra em língua espanhola foi traduzida do russo para o espanhol por Marta Shuare, Ph. D. em Psicologia.
[4]Utilizarei o nome proposições de ensino de Davýdov e seus colaboradores ao invés de sistema de ensino Elkonin-Davýdov.

(ROSA, 2012). Contudo, as proposições de ensino de Davýdov e seus colaboradores, segundo Galperin, Zaporózhets e Elkonin (1987), se diferenciavam das até então presentes no ensino da União Soviética, tanto pela amplitude como pela profundidade.

Nesse âmbito, busquei alargar a compreensão dos seus livros e artigos iniciada nos projetos de iniciação científica. Assim, para o estudo da proposição de ensino de Davýdov e seus colaboradores para o primeiro ano do Ensino Fundamental, foi feita a leitura de capítulos dos livros de Davýdov: *Tipos de generalización en la enseñanza* (1982) e *La enseñañza escolar y el desarrollo psíquico* (1988). Além disso, dediquei-me ao estudo de alguns de seus artigos, quais sejam: *Análisis de los princípios didácticos de la escuela tradicional y posibles princípios de enseñanza en el futuro próximo* (1987) e *La renovación de la educación y el desarrollo mental de los alunos* (1998)[5].

Com base nessas leituras, constatei que uma de suas preocupações, se não a principal, diz respeito a um ensino que priorize o desenvolvimento do pensamento teórico nos estudantes, em vez do pensamento empírico que, para o autor, é priorizado pelos sistemas educativos. Para Davídov (1988, p. 154) essas duas formas de pensamento trazem contribuições distintas na formação intelectual dos estudantes, dadas as suas diferenças. Uma delas é de que o "pensamento empírico cataloga, classifica os objetos e fenômenos. O teórico persegue a finalidade de reprodução da essência do objeto estudado.".

Vale dizer que Davídov (1988) considera que qualquer ensino escolar, ao mesmo tempo em que desenvolve as capacidades intelectuais dos estudantes, igualmente possibilita, desde seu início, por meio de seus conhecimentos, a formação de um tipo de pensamento. Nesse sentido, Rubtsov (1996) também destaca que a Psicologia moderna e a Didática distinguem dois tipos de pensamento: o empírico e o teórico. E tais modos de pensar são responsáveis por duas maneiras distintas de o indivíduo compreender a realidade.

Esses diferentes modos de pensamento, de acordo com Davídov (1988, p. 106), são conhecidos desde a antiguidade. O empírico como "[...] a atividade mental orientada a separar e registrar os resultados da experiência sensorial [...]" e o teórico pelo "[...] pensamento que procura a essência dos objetos, as leis internas de seu desenvolvimento.".

---

[5]No que se refere aos textos em língua espanhola usados nesta dissertação, esclareço que as citações deles extraídas foram traduzidas por mim. Por isso, assumo a responsabilidade caso tenha cometido algum equívoco.

Davídov (1988) considera que o modo de pensar empiricamente é decorrente dos conhecimentos cotidianos, cuja fonte se vincula com a vida cotidiana das pessoas. Por isso, ele é contrário às propostas defensoras de que a escola deva considerar os conceitos espontâneos dos estudantes. Seu contra-argumento é de que se priorizaria o desenvolvimento do pensamento empírico, o que obstaculiza a aprendizagem dos conceitos científicos. O objetivo consiste na compreensão, pelos estudantes, do conhecimento teórico, referência essencial para a atual educação escolar.

Outra justificativa para a não primazia do pensamento empírico, na escola, baseia-se no pressuposto de que o seu cultivo é uma das razões da pouca influência que o ensino representaria tanto no desenvolvimento psíquico quanto das capacidades intelectuais das crianças. Isso porque ele é peculiar de uma relação cotidiana, isto é, utilitária das coisas. Dessa forma, é alheio à avaliação e compreensão teórica da realidade (DAVÍDOV, 1988).

De forma geral, o pensamento empírico visa separar e registrar os resultados da experiência sensorial a partir do aspecto exterior do objeto. Assim, esse pensamento possui como característica a categorização e classificação dos objetos, de forma que permita a resolução de problemas quando é necessário reconhecer alguns elementos e qualidades do objeto. Além disso, ele se centra no caráter utilitário de todos os dias, isto é, orienta as pessoas para a solução das tarefas cotidianas, por meio do cumprimento de ações rotineiras (DAVÍDOV, 1987; DAVYDOV, 1998).

Ao realizar um exame da organização de um material didático para o ensino do conceito de número na União Soviética (correspondente ao primeiro ano do Ensino Fundamental no Brasil), Davýdov (1982) verificou que, em seu início, se mantém um vínculo com os conhecimentos cotidianos adquiridos pela criança antes de ela entrar na escola. A explicação para tal afirmação está no procedimento comum entre os professores de, nos primeiros dias de aula, verificarem o que os estudantes compreendem sobre o número e darem ênfase somente ao que eles conhecem sobre a série natural dos números, ou seja: se sabem contar um grupo de objetos, etc.

Na época de tal exame da organização do ensino soviético, realizado por Davýdov, para a construção do conceito de número,

> [...] vigorava nas escolas russas a pedagogia tradicional, em que primeiro eram aprendidas as características aparentes dos objetos; em seguida

> os objetos eram comparados uns com os outros e classificados, resultando na aquisição de conhecimentos empíricos pelos alunos. (LIBÂNEO; FREITAS, 2013, p. 320).

Como consequência dessa análise, Davýdov chegou à conclusão de que o sistema educacional da União Soviética não cumpria com as condições necessárias para o desenvolvimento dos estudantes. Por sinal, uma das tarefas da nova sociedade soviética, a socialista, consistia na formação de um novo modo de pensar nos estudantes, o teórico (DAVÝDOV, 1982).

Em outra análise, Davydov (1998, p. 147) verificou "[...] que não é possível resolver problemas tão complicados sem algumas mudanças radicais tanto no conteúdo como nos métodos educacionais.".

As conclusões oriundas das referidas análises e os compromissos educacionais até então não cumpridos levaram Davýdov a propor uma nova organização do ensino voltada para o desenvolvimento do corpo, do intelecto e da moralidade do estudante (DAVYDOV, 1998).

Para essa nova organização do ensino, Davídov (1988, p. 172) parte da tese de que sua base "é seu conteúdo, do qual se derivam os métodos (ou procedimentos)".

Além disso, Davídov (1988) assume a compreensão de Elkonin ao adotar a premissa de Vygotski de que o ensino possui um papel diretor no desenvolvimento mental por meio do conteúdo dos conhecimentos assimilados. Isso se explica por dupla razão: o seu vínculo aos pressupostos vigotskianos sobre aprendizagem e desenvolvimento, e seu propósito de um desenvolvimento intelectual diferente do que na oportunidade se propunha nas escolas russas.

Esse conteúdo dos conhecimentos, segundo Davídov (1988), diz respeito aos conhecimentos teóricos e o seu processo de assimilação constitui-se por dois traços característicos:

> Em primeiro lugar, o pensamento dos estudantes se move orientadamente do *geral ao particular* (ao começo buscam e fixam a 'célula' geral inicial do material a estudar e logo, apoiando-se nela, deduzem as diversas particularidades do objeto dado). Em segundo lugar, tal assimilação está orientada para que os estudantes revelem as condições de origem do conteúdo dos conceitos que assimilam. (DAVÍDOV, 1988, p. 175, grifos do autor).

Esse processo de assimilação dos conhecimentos teóricos tem por finalidade o desenvolvimento do pensamento teórico, uma vez que, para Davídov (1988), esse modo de pensar revela a essência dos objetos. Tal essência, de acordo com Davídov (1988, p. 6, grifos do autor), consiste num "[...] procedimento especial que o homem focaliza a compreensão das coisas e os acontecimentos por via da análise das condições de sua *origem e desenvolvimento*.". E acrescenta: "quando os estudantes estudam as coisas e os acontecimentos desde o ponto de vista desse enfoque [a essência], começam a pensar teoricamente.".

Nesse âmbito de preocupação da organização de um ensino que promova o desenvolvimento de um novo modo de pensar nos estudantes, Davídov (1988, p. 110) se apóia no pressuposto de que "[...] com o ingresso das crianças na escola, deve-se começar a ser formado nelas os conceitos científicos e outros conhecimentos teóricos, com os que não se confrontaram na idade pré-escolar.".

Com tal objetivo, Davýdov (1982) estabelece que a finalidade do ensino da Matemática, durante todo o seu período escolar, é a formação, nos estudantes, de uma concepção circunstanciada e válida de número real. Mas, para alcançar tal intento, a sua proposição de ensino se alicerça no conceito de grandeza que, de acordo com o mencionado autor, se constitui como o objeto matemático mais geral que os números.

Rosa (2012) realizou um estudo detalhado sobre a especificidade do conceito de número abordado na proposição de ensino de Davýdov e seus colaboradores para o primeiro ano do Ensino Fundamental. A autora averiguou que realmente o conceito de número introduzido no material de ensino é o de número real por meio da comparação entre grandezas, isto é, da medição delas. Também mostra que antes do estudo dos números, propriamente dito, as crianças aprendem as grandezas (comprimento, área, volume, massa e quantidade discreta), visto que o número é decorrente das relações múltiplas entre duas grandezas da mesma espécie.

Nesse contexto, cabe dizer que pesquisas realizadas na área da Educação Matemática, como a de Rosa (2012) e a de Damazio, Rosa e Euzébio (2012), demonstram uma preocupação com o modo que está organizado o ensino do conceito de número, no Brasil, e sua objetivação nas escolas. Tal inquietação provém do confronto com o estudo da proposição de ensino de Davýdov e seus colaboradores para os anos iniciais do Ensino Fundamental. Isso porque pressupõe o desenvolvimento do pensamento teórico nos estudantes, o que não ocorre nas proposições oficiais e livros didáticos adotados pelas escolas brasileiras.

A partir da existência da preocupação com o modo de organização do ensino do conceito de número, no Brasil, surge uma questão: o que dizem os documentos que servem de referencial para o ensino brasileiro e catarinense referente à Matemática, no período correspondente ao início do Ensino Fundamental?

Dentre os documentos[6], recorri aos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) – PCNs – e à Proposta Curricular de Santa Catarina (SANTA CATARINA, 1998) – PCSC –, nos quais existe um consenso: o conceito de número está presente no início do estudo da Matemática, na escola, e é com ele que o estudante começa a aprendizagem da referida disciplina.

Outro consenso entre esses documentos diz respeito à sequência do ensino do conceito de número, qual seja: natural, racional, inteiro e irracional. A partir desse modo sequencial inclui-se, nos últimos anos do Ensino Fundamental, o caso mais geral, o de número real.

Esse último consenso nos permite identificar uma diferença entre a organização do ensino proposta por Davýdov e seus colaboradores e a indicada pelos documentos (brasileiro e catarinense). Na primeira, inicia-se o estudo do conceito de número por meio do número real e na segunda, a brasileira e a catarinense, pelo número natural.

Os PCNs, ao tratarem do ensino e aprendizagem da Matemática para os primeiros anos do Ensino Fundamental, ressaltam que as crianças, ao ingressarem na escola, tendo frequentado ou não a pré-escola, trazem consigo conhecimentos sobre numeração, medida, espaço e forma, decorrentes da sua vivência cotidiana (BRASIL, 1997).

Assim sendo, os conhecimentos adquiridos pelas crianças na pré-escola e em sua vida cotidiana, segundo os PCNs, servem como referência para que o professor organize as formas de ensino. A orientação é que, antes de organizar o processo de apropriação conceitual, o professor investigue qual a compreensão de cada estudante

---

[6]No processo de construção desta pesquisa, os documentos que se apresentaram como referência para a organização do ensino brasileiro e catarinense foram: os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) e a Proposta Curricular de Santa Catarina (PCSC, 1998). No entanto, vale informar que próximo do fechamento desta pesquisa uma nova versão da Proposta Curricular de Santa Catarina foi publicada (PCSC, 2014), e ela acena para algumas possibilidades interessantes, ao mencionar que: "nos diferentes movimentos de elaboração conceitual, um dos conceitos fundantes é o de grandezas, que perpassa todos os conceitos matemáticos demandados no percurso da Educação Básica, pelo professor." (SANTA CATARINA, 2014, p. 167-168).

sobre o mesmo. E, em específico, que situações ainda se apresentam como estáveis e quais as possibilidades e as dificuldades de cada um para enfrentar os desafios da aprendizagem (BRASIL, 1997).

A orientação em relação à Matemática dada pelos PCNs para o primeiro ciclo[7], que correspondia à primeira e segunda séries do Ensino Fundamental – atualmente, do primeiro ao terceiro ano –, é de que não existe uma sequência dos conceitos a serem ensinados, devido à diversidade das experiências vivenciadas pelas crianças antes de elas entrarem para a escola. Mas, ao mencionar os objetivos da Matemática e os conteúdos conceituais a serem apropriados pelos estudantes no referido período, o conceito que se apresenta em ambos é o de número natural (BRASIL, 1997).

Na PCSC, o indicativo é que também se inicie pelo ensino do conceito de número natural[8]. Esta, assim como os PCNs, recomenda que o professor explore os significados que os estudantes construíram sobre os números antes de eles ingressarem na escola. Alguns desses significados são: número de telefone, da casa, de placas de carro, sua idade, entre outros (SANTA CATARINA, 1998). Desse modo, o ponto de partida para o ensino de Matemática no início do Ensino Fundamental são os conhecimentos prévios das crianças sobre o conceito de número, em específico o natural, oriundo da pré-escola e da vida cotidiana.

Como tanto os PCNs quanto a PCSC propõem que o ensino da Matemática comece pelo conceito de número, cabe explicitar o que eles entendem sobre tal conceito. Para os PCNs, o número é indicador de quantidades (coleções de objetos), de posições (possibilita guardar o lugar ocupado por um objeto numa listagem). Além disso, é usado como código, por exemplo, placa de carro, número de telefone, entre outros (BRASIL, 1997). A PCSC não explicita uma compreensão de número, mas quando se refere ao estudo do campo numérico, destaca que “[...] o

[7]Anteriormente à lei Nº 11274, de 6 de janeiro de 2006, o tempo mínimo para um estudante cumprir o Ensino Fundamental era de 8 anos. Nesse sentido, os PCNs (1997) dividiram esse período em oito séries e em quatro ciclos, cada qual composto de duas séries. Mas, com a referida lei, o Ensino Fundamental passa a ter duração mínima de nove anos.

[8]Por ter utilizado como fonte de análise a Proposta Curricular de Santa Catarina publicada no ano de 1998, vale elucidar que a sua versão recente (SANTA CATARINA, 2014) traz uma nova compreensão do número, isto é, no contexto das grandezas discretas e contínuas. Porém, ela não traz tarefas a serem desenvolvidas com objetivo de explicitar tal compreensão no contexto da sala de aula.

significado privilegiado pela escola é o de número enquanto quantidade.” (SANTA CATARINA, 1998, p. 109).

Até agora, procurei explicitar a aproximação entre os PCNs e a PCSC quanto ao modo como ambos entendem a organização para o início do ensino de Matemática, isto é, para os primeiros anos do Ensino Fundamental. Em síntese, no que se refere ao ensino do conceito de número, diria que os dois documentos indicam que o professor aproveite o que a criança aprendeu na pré-escola e na vida cotidiana. Outra afinidade dos dois documentos é o início da aprendizagem do conceito de número trazer apenas a ideia de quantidade.

Os PCNs e a PCSC, ao proporem que o professor utilize como base os conhecimentos cotidianos obtidos pela criança antes de ela ingressar na escola, retratam justamente o que Rosa (2012, p. 25), com base em Davýdov, considera ponto frágil das proposições brasileiras para o ensino de Matemática, pois nelas há “[...] o predomínio da formação do pensamento empírico, nos escolares dos anos iniciais.”.

Apesar das aproximações entre a PCSC e os PCNs, vale dizer que esses documentos que servem de referência para a organização do ensino de Matemática estão fundamentados em concepções distintas. O primeiro – PCSC – na Teoria Histórico-Cultural, cuja base filosófica é o materialismo histórico e dialético (ROSA, 2012). E o segundo – PCNs – adota o construtivismo como referência teórica (DUARTE, 2001).

Destaque-se que na própria PCSC, conforme Rosa (2006, p. 82), se apresenta discordância com sua base teórica, isto é:

> [...] as orientações metodológicas e a sequência dos conceitos são conduzidas ao oposto sugerido por Vigotski (relação entre conceitos científicos e espontâneos) e Davydov (relação entre pensamento teórico e pensamento empírico).

Portanto, a PCSC se diz fundamentada na mesma concepção teórica das proposições de ensino de Davýdov e seus colaboradores, a Teoria Histórico-Cultural. No entanto, a análise de suas recomendações aponta que ela se volta ao desenvolvimento do pensamento empírico. Sendo assim, contraria o que sugere Davýdov com base na referida teoria, que é a formação do pensamento teórico.

Salienta-se, então, que as pesquisas até agora mencionadas trazem a preocupação com o tipo de pensamento que as proposições de ensino desenvolvem nos estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental. No referente às orientações oficiais para organização do ensino de Matemática, uma evidência é o desacordo entre o que propõem e a sua fundamentação teórica.

É nesse contexto que passo a delinear o objeto da presente pesquisa, que se insere no âmbito do modo davydoviano de organização do ensino da Matemática. Para tanto, retomo os estudos brasileiros sobre a mencionada proposição que têm focado no ensino dos conceitos matemáticos (número, operações, resolução de problemas, sistema de numeração, etc.) pertinentes às séries iniciais do Ensino Fundamental: Rosa (2012); Damazio, Rosa e Euzébio (2012); Rosa e Damazio (2012); Madeira (2012); Rosa, Damazio e Alves (2013); Souza (2013); Rosa, Damazio e Crestani (2014); Rosa, Damazio e Silveira (2014); Hobold (2014); Mame (2015), dentre outros.

Essas pesquisas têm seus objetos voltados aos anos iniciais do Ensino Fundamental. Sendo assim, indicam possibilidades de investigação sobre o ensino dos conceitos matemáticos do sexto ao nono ano. Dentre tantos, o interesse se voltou, inicialmente, para o conceito de número inteiro relativo, uma vez que não encontrei pesquisa que o abordasse na perspectiva histórico-cultural, em especial à luz da proposta davydoviana. A veemência por tal estudo se justifica pela necessidade de entendimento do ensino de uma singularidade numérica, no contexto do número real e, portanto, relações entre grandezas. A expectativa surge, pois, em minhas vivências como estudante e professor, bem como as buscas na literatura apontam a inexistência de tal enfoque para o referido conceito.

Por decorrência, volto-me novamente para preocupação que se explicita no âmbito do ensino de Matemática, mais especificamente no documento base para a organização do ensino brasileiro, os PCNs, com foco para o conceito de número inteiro relativo. O documento afirma que “[...] na escola, o estudo dos números inteiros costuma ser cercado de dificuldades, e os resultados, no que se refere a sua aprendizagem ao longo do Ensino Fundamental, têm sido bastante insatisfatório.” (BRASIL, 1998, p. 97).

Tal afirmação dá indícios de que existem problemas no que concerne à organização do ensino brasileiro para o desenvolvimento do pensamento conceitual do número inteiro relativo. Porém, essa situação ainda persiste, mesmo passadas quase duas décadas da implementação dos PCNs. Essa afirmativa tem respaldo em Amorim (2012, p. 12), ao dizer que em sua atuação como professora nos níveis de Ensino Fundamental, Médio e Superior, comprova o que foi dito pelos PCNs. De acordo com a autora em referência: “[...] venho percebendo a dificuldade apresentada por muitos alunos, em diferentes níveis, para resolver atividades relacionadas a números inteiros." Por consequência, Amorim (2012) investigou o estado da arte dos estudos que trataram sobre questões voltadas ao ensino e aprendizagem do conceito matemático em questão.

Do mesmo modo, Silva (2012), com base na sua própria atuação docente, afirma que os estudantes têm dificuldades para a compreensão do referido conceito. Esse não entendimento levou-a pesquisar as elaborações dos estudantes quando vivenciam as atividades orientadoras de ensino com números inteiros. A pesquisadora verificou algumas elaborações dos sujeitos da investigação: encaram os números inteiros como números absurdos; apresentam a necessidade de dar significado ao sinal negativo; não admitem a existência de nada abaixo do zero. Dentre essas elaborações, a primeira delas é similar à dificuldade enfrentada pelo homem anteriormente à sua aceitação.

No contexto das dificuldades dos estudantes com os números inteiros relativos, Glaeser (1985) destaca que elas refletem aquelas que foram averiguadas no seu desenvolvimento histórico. Ele ressalta que o processo de construção conceitual desses números foi extremamente lento, durou mais de 1500 anos. Nesse período, os matemáticos tinham uma compreensão apenas parcial deles.

Glaeser (1985) assinala, ainda, que tal limitação se manifesta em seis obstáculos epistemológicos: 1) Inaptidão para manipular quantidades isoladas; 2) Dificuldade em dar um sentido a quantidades negativas isoladas; 3) Dificuldade em unificar a reta numérica; 4) A ambiguidade dos dois zeros; 5) Estagnação no estágio das operações concretas; 6) Desejo de um modelo unificador.

Como dito anteriormente, os PCNs também reconhecem que os estudantes apresentam dificuldades na assimilação dos números inteiros. No entanto, com a finalidade de alertar e auxiliar os professores na elaboração de alternativas para o ensino, eles apontam alguns obstáculos dos alunos em relação ao conceito, quais sejam: atribuir significado a quantidades negativas; distinguir a existência dos números em dois sentidos a partir do zero; e reconhecer o zero como origem, pois trazem a compreensão do zero apenas como absoluto (BRASIL, 1998).

Esse entendimento – zero absoluto, ou seja, que na reta não existe antes dele nenhum outro número – também perdurou entre os matemáticos durante muito tempo, o que impediu de atribuir-lhe outro significado: origem, isto é, com a pretensão de marcá-lo sobre um eixo orientado (GLAESER, 1985).

Os obstáculos apontados pelos PCNs não são peculiaridades dos estudantes brasileiros, pois, segundo Davýdov (1982), decorrem do ensino de Matemática que inicia pelo número natural, com o significado de quantidade, sem perspectiva de existência de número negativo. Traz apenas a ideia da possibilidade de obtenção da ausência de quantidade: o nada, o zero (ROSA, 2012). Esse entendimento prenuncia, aos estudantes, a compreensão de que a representação dos números, na reta, só possível em seu sentido positivo.

Uma nova síntese, nesse processo de problematização do objeto de pesquisa, é que o estudo do número inteiro relativo é marcado por dificuldades e os resultados equivalentes à sua aprendizagem não são satisfatórios. Os estudantes se confrontam com obstáculos peculiares ao conceito, decorrentes de um modo de organização do ensino que privilegia o número natural com o significado de quantidade.

Essas apreensões alimentaram-me, ainda mais, a necessidade de estudar a organização do ensino proposta por Davýdov e seus colaboradores no que concerne ao número inteiro relativo. No entanto, uma análise prévia dos livros correspondentes à mencionada proposta de ensino para o conceito, identifiquei que ela se volta ao estudo de um contexto conceitual mais amplo: número negativo. Isso ocorre pelo referido pressuposto davydoviano de ensino dos números reais, desde o primeiro ano escolar. Significa dizer que, a relação entre grandezas como base genética faz com que o resultado da medição seja: um número *inteiro*, se a grandeza unidade cabe uma quantidade inteira de vez na grandeza a ser medida; um número *fracionário* se couber parte não inteira de vez; e *irracional* em caso de incomensurabilidade. Ao abarcar todas essas singularidades, o estudo dos números reais requer a apropriação de duplo significado: positivo e negativo. Portanto, não faz sentido seguir uma sequência ao se tratar da relatividade numérica, como orientam a PCSC e os PCNs: iniciar pelo inteiro relativo.

Uma vez que a proposta de Davýdov tem como alvo os números positivos do primeiro a quinto ano, então, no sexto ano escolar apresenta-se o ensino dos números negativos. Eis a razão de sua centralidade no presente estudo.

Mesmo assim, ainda vale questionar: por que o modo davydoviano de ensino propõe o estudo dos números negativos ao invés do inteiro relativo que também engloba o negativo?

O argumento para tal ênfase é que:

> O sistema dos números reais é síntese do processo histórico do desenvolvimento do conceito de número composto por particularidades (as diferentes unidades de medidas) e singularidades

> (os números naturais, inteiros, racionais e irracionais). (ROSA, 2012, p. 138).

Em termos pedagógicos e de elaboração conceitual, Davídov (1988, p. 193) diz que “a assimilação dos conhecimentos que tem um caráter geral e abstrato precede a familiarização dos alunos com conhecimentos mais particulares e concretos [...]”.

Desse modo, os números inteiros relativos se configuram como um conhecimento mais particular em relação aos negativos que possuem um caráter geral. Como o estudo do conceito de número, no modo davydoviano de ensino, se inicia com o número real e não com o natural, o mesmo princípio é adotado: em vez da especificidade de inteiro relativo, ele trata de número negativo.

Mas, por que Davýdov propõe que o ensino da Matemática não só inicie com a ideia de número real, mas também perdure por todo o processo escolar? Se esta proposta rompe com aquilo sacramentado como o normal – iniciar com os naturais –, então por que os números negativos só recebem um tratamento efetivo no sexto ano (que corresponde ao sétimo ano no sistema escolar brasileiro) como também é proposto nos PCNs e na Proposta Curricular de Santa Catarina?

Esses questionamentos remeteram-me a um aprofundamento das obras de Davýdov e outros clássicos da Teoria Histórico-Cultural, cujos pressupostos e desdobramentos para o ensino tratarei no capítulo 2. No entanto, para anunciar o tratamento das questões anteriores que subsidiarão as delimitações necessárias ao objeto e ao problema desta pesquisa, vale reafirmar que Davýdov adere ao chamamento de Vigotski de que a educação e o ensino são fundamentos para o desenvolvimento das funções psíquicas superiores. Portanto, é adepto e um dos principais estudiosos do ensino desenvolvimental (LIBÂNEO; FREITAS, 2013). Porém, para tanto, ele adota outra referência vigotskiana que fora aprofundada por Leontiev, a teoria da atividade. Esta traz como pressuposto que o indivíduo se constitui como humano, isto é, forma a sua consciência e personalidade pela atividade. Leontiev (2004) compreende – como também admite Davídov (1988) – que o desenvolvimento de um indivíduo humano ocorre por estágios caracterizados por três atividades principais: o jogo, o estudo e o trabalho.

Portanto, esses são alguns dos pressupostos da base teórica da proposição davydoviana para o ensino da Matemática que, em termos conceituais numéricos, prioriza a ideia de número real e, por extensão, os negativos. Ensino este que se efetiva com a premissa de que a escola é espaço em que o estudante esteja em atividade de estudo. Davídov (1985, p. 89, grifos do autor) reconhece que “[...] somente no estudo *o objetivo fundamental e o principal resultado da atividade* é a assimilação dos conhecimentos científicos e das habilidades correspondentes.”.

No entanto, vale destacar que o estudante somente assimila algum conceito na atividade de estudo, de acordo com Davídov e Slobódchikov (1991), quando ele experimenta uma necessidade interna e uma motivação para tal. Para esses autores, são as necessidades e os motivos de estudo que orientam os estudantes no processo de aquisição do conhecimento.

Davídov (1988) ressalta que somente o ingresso da criança na escola não garante que o estudante experimente a necessidade de conhecimentos teóricos. A mencionada necessidade surge apenas no processo “[...] de assimilação real dos conhecimentos teóricos elementares durante a realização conjunta com o professor das ações de estudo mais simples, dirigidas a solução das correspondentes tarefas de estudo.” (DAVÍDOV, 1988, p. 178).

Aqui surge um novo elemento que aguça a problemática de estudo, que traduzo nos seguintes questionamentos: em que momento e circunstâncias se constituem a(s) necessidade(s) para a atividade de estudo? No processo de desenvolvimento da atividade de estudo surgem necessidades específicas que se constituem em condição à apropriação de um determinado conceito, como por exemplo, de número negativo? Essas questões serviram de base para especificar o objeto.

Vale observar que a última citação – antecedente aos questionamentos do parágrafo anterior – é anunciativa dos primeiros indícios da estrutura da organização do ensino adotada por Davýdov e colaboradores que, a seguir, realço, mas será completada e aprofundada nos próximos capítulos: ações e tarefas de estudo. E, novamente, outros questionamentos são suscitados, agora mais pontuais: uma tarefa, relativa à apropriação do ensino do conceito de número negativo, cria necessidade para a formulação de outra? Em outras palavras, o que determina a elaboração de uma nova tarefa a ser desenvolvida pelos estudantes no processo de estudo dos números negativos? Os mesmos questionamentos valem para as ações.

O contexto dessa reflexão – galgada em bases teóricas, que propiciou o surgimento das diversas questões – gerou a necessidade particular de duas delimitações essenciais da presente investigação. A primeira delas diz respeito ao **objeto de estudo,** que em meu entendimento trata-se, como anunciado anteriormente, do modo davydoviano de organização do ensino com foco para o conceito de número negativo. A segunda se refere ao **problema de pesquisa**, assim definido: que necessidades se apresentam no âmbito das atividades de ensino e estudo, mais especificamente, no modo davydoviano de organização do ensino referente às tarefas particulares voltadas ao conceito de números negativos? Em concernência, dedico-me ao **objetivo** de investigar as necessidades inerentes ao processo davydoviano de organização do ensino alusivo ao conceito de números negativos.

Mesmo assim, estabeleci elementos conceituais que me permitissem na análise do objeto, centrar-me neles e nas suas articulações. Esse foco se explicita nas seguintes questões norteadoras: o que caracteriza o surgimento das necessidades peculiares na organização do ensino de números negativos? As necessidades inerentes ao modo davydoviano de organização do ensino dos números negativos surgem das relações internas ou essenciais constitutivas do referido conceito matemático? Dado que na proposta indicada a relação entre as grandezas é a base genética essencial do conceito teórico de número, qual a sua característica na singularidade de negativo?

Essas questões requerem atenção particular, isto é, levam à determinação de novos objetivos, os específicos:

1) Identificar e analisar as necessidades e suas características de ordem conceitual e pedagógica que movem a determinação e elaboração das tarefas peculiares ao ensino do conceito de número negativo.

2) Investigar o modo que a relação entre as grandezas – base genética essencial do conceito teórico de número – se apresenta na singularidade numérica, negativo, e se manifesta nas tarefas a serem desenvolvidas pelos estudantes.

A expectativa é de que no processo de exposição da investigação se apresentem novas questões, como também se produzam respostas – ainda que provisórias – às questões da pesquisa e norteadoras e, também, às demais explicitadas na problematização.

Todos os objetivos apontados suscitam um modo de organização da pesquisa, um método, para que eles sejam perseguidos e atingidos no processo de investigação. Isso será tratado na próxima seção.

1.1 O MODO DE ORGANIZAÇÃO DA PESQUISA

Na presente seção, o objetivo se volta à explicitação do modo de organização da pesquisa, cujo objeto se refere ao conceito de números negativos na proposição de ensino de Davýdov e colaboradores. Vale destacar que a referida proposição de ensino se constitui como a objetivação dos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural para o ensino. Dentre outros, ressalto o desenvolvimento do pensamento teórico.

O processo de desenvolvimento da pesquisa teve por base os próprios fundamentos da proposta de Davýdov: materialismo histórico e dialético. De acordo com Berbeshkina, Zerkin e Yakovlev (1986), o Materialismo Histórico é a ciência filosófica e sociológica que estuda as leis mais gerais e as forças motrizes do desenvolvimento da sociedade. Por sua vez, o Materialismo Dialético, base filosófica do marxismo, se volta às explicações lógicas e racionais, tanto para os fenômenos da natureza quanto da sociedade e do pensamento.

Além disso, procurei ser coerente com a lógica das investigações peculiares à psicologia pedagógica de base Histórico-Cultural. Nesse sentido recorri a Damazio (2006, p. 4) que assim expressa o seu entendimento dos princípios da pesquisa na referida perspectiva psicológica:

> A Teoria Histórico-Cultural advoga por uma abordagem metodológica com ênfase aos aspectos qualitativos em detrimento dos quantitativos, preocupando-se em ir além da simples descrição da realidade estudada. O interesse é para o modo de manifestação do problema e, ao mesmo tempo, numa ação dialética, priorizar: a transformação quantidade/qualidade, a interligação todo/partes, explicação/compreensão e análise/síntese.

Trata-se, então, de um estudo numa perspectiva dialética, pois o problema de pesquisa é tratado num movimento de ascensão e diferenciação dos vários núcleos do conceito de número negativo e das necessidades emergentes no processo de elaboração das tarefas, que levam o estudante ao desenvolvimento do pensamento desse conceito matemático. Para tanto, houve um movimento entre abstrações que se apresentaram e careceram de compreensões, isto é, um trânsito marcado por idas e vindas em busca de entendimentos em nível concreto de pensamento (DAVÝDOV, 1982). Por consequência do próprio objeto de estudo, a atenção voltou-se, também, a um dos princípios do materialismo histórico e dialético, qual seja: a prática social como ponto de partida e chegada de todo processo investigativo. Neste caso, trata-se do modo davydoviano de organização do ensino para que os estudantes desenvolvam o pensamento conceitual teórico de número negativo.

Por conseguinte, pelas características apontadas, a presente pesquisa é do tipo qualitativa e de natureza bibliográfica, pois ela "[...] é desenvolvida com base em material já elaborado [...]" (GIL, 2002, p. 44). O mencionado material consiste em dois livros dirigidos ao sexto ano escolar: o de orientação ao professor (ГОРБОВ et al., 2006) e o didático do estudante (ГОРБОВ et al., 2007).

Ambos foram indispensáveis, pois o livro de orientação ao professor contém informações detalhadas do conceito em desenvolvimento e o seu conteúdo, bem como os procedimentos didáticos de cada uma das tarefas particulares, a serem realizadas pelos estudantes. O livro didático do estudante apresenta as tarefas particulares, isto é, aquelas citadas no livro de orientação ao professor; porém, serão desenvolvidas pelos estudantes.

A adoção dos dois livros do sexto ano como referência não significa que eles foram tomados por completo. A análise centrou-se em apenas duas partes que, direta ou indiretamente, abordam o conceito de números negativos. Uma delas se volta à grandeza de deslocamento, a vetorial que, posteriormente, representa-se por um vetor, por se tratar da origem do referido conceito. A segunda explicita as tarefas concernentes ao conceito de número negativo, propriamente dito. No entanto, por decisão de delimitação, tomei somente aquelas que introduzem o conceito em questão. Isso quer dizer que o estudo não abrange todo o sistema conceitual, pois as limitações do tempo para sua conclusão tornaram-se impeditivo para tamanha aspiração.

Sendo assim, limitei-me à análise das tarefas e seus contextos de necessidades que introduzem o conceito (vetor, sentido, direção, módulo, oposto, o zero, a relação positivo e negativo, a representação na reta). Portanto, não tratemos das operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação) e outros conceitos.

As duas partes referentes ao conceito em análise estão assim distribuídas no livro de orientação ao professor: as duas primeiras seções – 'Caminhos e deslocamentos no plano' e 'Vetores nos planos' – do quinto capítulo, intitulado "Deslocamento e vetor"; a última seção do quinto capítulo, com o título de 'Trabalho inicial', acrescida das duas seções do sexto capítulo, que tem como título "Números positivos e negativos". Cada uma dessas partes está conectada com o também sexto capítulo do livro didático do estudante – "Números positivos e negativos" – do seguinte modo: a primeira, corresponde às tarefas particulares que introduzem o deslocamento e depois o vetor, pois eles são base para o estudo do número negativo; a segunda, orienta as seguintes tarefas particulares: as três iniciais do sexto capítulo, bem como as referentes às duas primeiras seções do mesmo capítulo.

Não é demais reafirmar que o número negativo, ideia central tratada nesses capítulos, tem no conceito de *vetor* um de seus fundamentos. Ele é o foco num capítulo precedente que traz tarefas particulares dirigidas para o seu desenvolvimento pelos estudantes. Estes, por decorrência, apresentam as elaborações necessárias à apropriação do novo, isto é, número negativo.

As indicações metodológicas para o sexto ano escolar estão presentes em uma parte do livro de orientação ao professor, cujo propósito, de acordo com Горбов et al. (2006), é tratar do modo de organização do ensino e dos conceitos a serem apropriados pelos estudantes no mencionado ano escolar.

As fontes originais, os dois livros mencionados, estão escritos em russo. Por isso, fez-se indispensável a tradução das partes concernentes ao conceito de número negativo. Isso exigiu esforço e tempo, pois assumi o desafio de fazer a primeira tradução, mesmo sem o mínimo domínio da língua russa. Para tanto, recorri à *internet,* utilizando-me da ferramenta Google Tradutor, o que requereu, inclusive, a adoção de um teclado virtual com o alfabeto e outros códigos linguísticos russos. Essa iniciativa foi tomada por dois motivos. Um deles pelo conhecimento das traduções dos livros correspondentes ao primeiro e segundo anos, adotados por outros pesquisadores do GPEMAHC em seus estudos, que indicavam pistas da organização dos livros e seus objetivos. O outro motivo pela hipótese de que a atenção concentrada na tradução contribuiria para a identificação de questões essenciais, referentes ao teor pedagógico e conceitual das tarefas. Isso proporcionou-me incertezas e desafios que exigiram releituras do texto e idas a outras literaturas. Sem contar, ainda, que a ferramenta Google Tradutor não reconhecia muitas palavras e letras. Tais inconvenientes se transformavam em possibilidades de suposições que se confirmavam ou se desfaziam. Enfim, resultaram em aprendizagens.

Feito esse primeiro e extensivo exercício de conhecimento da base de análise do objeto de estudo, providenciei a tradução oficial, com o aval do GPEMAHC, das partes do conceito em estudo, do capítulo que se refere à grandeza deslocamento e ao vetor e da parte sobre as orientações metodológicas, especificamente do livro de orientação ao professor. Tal tarefa foi realizada por Anastassia Bytsenko[9], professora

---

[9]Possui graduação em Biblioteconomia pela Universidade Estadual de Cultura de São Petersburgo - Rússia (1996). Mestrado em Literatura e Cultura Russa

de Língua Russa. No entanto, a tradução para o português dos capítulos cinco e seis do livro didático referentes às tarefas, por se tratar apenas de enunciados, foi assumida por mim com o uso da ferramenta Google Tradutor. Assumi tal responsabilidade porque tinha por base a parte correspondente na tradução do livro de orientação ao professor.

O estudo articulado das duas traduções sobre o objeto de pesquisa forneceu subsídios para averiguar a insuficiência delas para a finalidade deste trabalho. Isso porque eram frágeis meus conhecimentos: 1) de matemática, conforme a abordagem do conceito em estudo, uma vez que se tratava, para mim, de algo incomum; 2) do modo de organização do estudo da referida proposição de ensino, o que implicou a necessária ida aos livros dos primeiros anos escolares, a fim de estudar o desenvolvimento de outros conceitos como, por exemplo, número e as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão.

Preocupado com o entendimento dos números negativos, recorri a três tipos de referenciais, a seguir indicados. 1) Fundamentos da proposição davydoviana – Davýdov (1982); Davídov (1985); Davídov (1987); Davídov e Márkova (1987); Davídov (1988); Davídov e Slobódchikov (1991); Davydov (1998) – com ênfase no ensino da Matemática. 2) Fundamentos matemáticos, cuja referência foram as obras dos seguintes autores: Caraça (1957 e 2010); Costa (1981); Loreto e Loreto Junior (2014); Winterle (2000); Lima (1999) e Lima et al. (2006). 3) Estudos realizados sobre a proposição davydoviana de ensino para os primeiros anos escolares: Rosa (2012); Rosa e Damazio (2012); Madeira (2012); Rosa, Damazio e Alves (2013); Souza (2013); Rosa, Damazio e Crestani (2014); Rosa, Damazio e Silveira (2014); Hobold (2014); Mame (2015), entre outros.

Ressalto que o entendimento das tarefas particulares do livro didático articulado com as suas orientações passa pelo processo de estudo dos fundamentos da proposição davydoviana, bem como dos fundamentos matemáticos e dos conceitos referentes aos primeiros anos escolares. Essa compreensão auxiliou na investigação das necessidades que se apresentam numa tarefa particular para a criação da seguinte, em todas aquelas que dizem respeito ao objeto de estudo. Em outras palavras, o que move a elaboração de uma nova tarefa para ser desenvolvida pelos estudantes no processo de apropriação das ações e significações do conceito teórico de número negativo.

---

pela Universidade de São Paulo (2006), Doutorado em Literatura e Cultura Russa pela Universidade de São Paulo (2012).

Nesse contexto de movimento – entre a base de análise, o fundamento teórico histórico-cultural e sua literatura – destaco duas categorias de análise: 1) as necessidades de ordem conceitual e 2) as necessidades pedagógicas. As primeiras aludem às significações pertinentes ao conceito de número negativo; as segundas se referem às peculiaridades do processo de organização do ensino do conceito matemático em foco.

A aquisição dos resultados sobre os números negativos teve início com o estudo das tarefas particulares e de suas orientações. Como decorrência, foram obtidas as primeiras elaborações a respeito do conceito de números negativos. Contudo, elas se apresentaram não como a compreensão plena das tarefas, mas deram indícios para o direcionamento do seu entendimento, com base nas suas orientações. O pensamento conceitual sobre o objeto de estudo estava envolto por duas situações que delineavam o seu movimento e desenvolvimento: um concreto caótico em processo de redução às abstrações que necessitavam ascender ao concreto pensado (DAVÍDOV, 1988).

A partir de tal direcionamento, isto é, do que propõe a tarefa, busquei os fundamentos da proposição davydoviana e da matemática. Além disso, sempre que necessário, recorri aos estudos realizados sobre os conceitos dos primeiros anos escolares. Isso me possibilitou a compreensão dos conceitos apropriados pelos estudantes e sua base ou meio para a apropriação de novos conceitos. Tais buscas permitiram realizar o movimento de novas consultas aos fundamentos da proposição davydoviana e matemáticos, como também o retorno às tarefas particulares e suas orientações. Esse processo de inserção, isolamento e retorno a literatura e aos textos da análise permitiu novos entendimentos e desconstrução de outros considerados como equivocados.

Vale reafirmar que o processo de análise das tarefas particulares foi movido pela identificação das necessidades de ordem didática e conceitual que as determinam. Isso ocorre em dois momentos: um que trata do desenvolvimento do conceito de número negativo; outro em sua introdução na reta numérica. Em síntese, preocupei-me em analisar o surgimento das carências e suas superações por meio de elaborações de tarefas particulares imprescindíveis ao ensino desenvolvimental referentes ao estudo do número negativo.

A investigação sobre as necessidades, categorias de análise, é apresentada no terceiro capítulo, antecedido pelo capítulo, a seguir, que trata das bases da proposição davydoviana.

2 BASES DA PROPOSTA DAVYDOVIANA: CONTEXTOS E CARACTERÍSITICAS

No presente capítulo, a preocupação volta-se para o que considero novo pensamento pedagógico, a proposta de ensino de Davýdov e sua equipe de colaboradores. Está divido em duas seções. Na primeira – contexto – a referência é o ambiente social e político no qual se insere a proposta e as finalidades a que se propõe. Na segunda – características – se explicitam os seus fundamentos e princípios, bem como se apontam as principais considerações sobre o modo de organização do ensino de Matemática.

2.1 CONTEXTO SOCIO-POLÍTICO DA PROPOSTA DE DAVÝDOV E SUAS FINALIDADES

De acordo com Fiorentini (1995), toda educação e suas propostas não estão imunes a influências de teor ideológico. Há sempre uma intencionalidade de cunho social que atende á premissa: se educa para conservar ou produzir uma determinada ordem social. A proposta davydoviana não foge à regra, pois se insere no âmbito das preocupações de prover o estudante soviético de uma educação coerente com os princípios de uma sociedade socialista.

Com a Revolução Socialista de Outubro, na União das Repúblicas Soviéticas Socialistas – URSS –, em 1917, pretendia-se a formação de uma nova sociedade que, ao mesmo tempo, correspondia também a um novo indivíduo. Nesse sentido, vale ressaltar o pressuposto de Davídov e Slobódchikov (1991) de que a escola e a sociedade são indivisíveis, isto é, a sociedade vive e se desenvolve conforme aprende que, por sua vez, ocorre tal como quer viver. Por decorrência, uma nova sociedade demanda uma nova escola.

Essa compreensão está de acordo com a tarefa primordial da Revolução que consistia na “[...] formação do homem novo e da escola nova que iria educar esse homem que viveria na nova sociedade socialista.” (PRESTES; TUNES; NASCIMENTO, 2013, p. 55).

Nesse contexto, Galperin, Zaporózhets e Elkonin (1987) destacam que, após a Revolução de Outubro na URSS, realiza-se nessas repúblicas um grande esforço para reconstruir a pedagogia, visto que os seus avanços, até então, eram considerados insuficientes para a resolução das novas tarefas atribuídas a ela pelo Partido e pelo Governo.

Dentre os obstáculos para a reconstrução da pedagogia, em específico dos seus programas e métodos para o ensino, Galperin, Zaporózhets e Elkonin (1987) ressaltam que o difícil eram as concepções sensualistas vulgares que, de alguma forma, não compreendiam a diferença entre a aprendizagem do animal e a do homem.

O entendimento dessa diferença só foi possível a partir das investigações de Vygotski, Leontiev e outros cientistas soviéticos. Os resultados explicitaram que a aprendizagem do animal acontece com a sua adaptação às condições de existência. No homem, ela ocorre por meio da assimilação da experiência social, acumulada pelas precedentes gerações (GALPERIN; ZAPORÓZHETS; ELKONIN, 1987).

Tal insuficiência na pedagogia levou à necessidade de compreensão de que o processo de assimilação da experiência social se constituiria a partir de novos dados científicos e sobre as leis psicológicas deste processo. O entendimento era de que essas leis contribuiriam no momento em que fosse discutido o conteúdo e o método para a organização dos novos programas de ensino (GALPERIN; ZAPORÓZHETS; ELKONIN, 1987).

Essas preocupações são insistentes, pois estão atreladas ao rompimento de um tipo de vida fundamentado num determinado modo de relações econômicas para dar lugar a outro com bases antagônicas. Ou seja, trata-se da formação da nova sociedade, que pressupõe uma organização do ensino escolar, cuja essência incide no desenvolvimento psíquico do indivíduo, de modo que satisfaça as qualidades almejadas para a nova sociedade na URSS, a socialista.

Por se inserir no contexto revolucionário soviético, a proposta tem uma base filosófica marxista: o materialismo histórico e dialético[10]. Nesse sentido, vale questionar: o que essa base teórica entende por desenvolvimento? Quais suas premissas?

---

[10]Embora na presente dissertação não tenha uma seção que trate dos pressupostos dessa matriz teórica, vale indicar que Davýdov (1982) e Davídov (1988) faz uma análise de suas principais teses, quais sejam: a atividade prática como base do pensamento humano; o ideal como reflexo do objeto; a especificidade da sensibilidade humana; particularidades do pensamento empírico; o conteúdo específico do pensamento teórico; a modelação como meio do pensamento científico; o sensorial e o racional no pensamento; o procedimento da ascensão do abstrato ao concreto; particularidades da generalização substantiva e do pensamento teórico. Além disso, os seguintes estudiosos tratam sobre o método materialista histórico e dialético: Afanasiev (1968), Cheptulin (2004), Kopnin (1978), Kosik e Toríbio (1995), Lefebvre (1991) e Rosental e Straks (1965).

Tais questionamentos remetem ao consenso de Leontiev e Davýdov – fundamentados na teoria marxista – de que a atividade é a responsável pelo desenvolvimento psíquico do ser humano.

De acordo com Leontiev (2010), o que determina as fases do desenvolvimento humano é o lugar que o indivíduo ocupa nas relações sociais produzidas historicamente. Entende que esse desenvolvimento se caracteriza marcadamente pelos seguintes estágios: o período pré-escolar, o ingresso na escola, o da escola secundária e o do trabalho. Cada um desses estágios possui como indicativo a ocupação da criança em diferentes lugares no sistema das relações sociais, que é o primeiro fato a ser observado ao se buscar uma resposta para as forças condutoras no desenvolvimento da psique (LEONTIEV, 2010).

Mas, para Leontiev (2010), o lugar ocupado pela criança no sistema das relações sociais não pode ser tomado como o único fator responsável para determinar o seu desenvolvimento, pois apenas permite a identificação do estágio alcançado pelo indivíduo. O "que determina o desenvolvimento da psique da criança é sua própria vida e o desenvolvimento dos processos reais desta vida" (LEONTIEV, 2010, p. 63). Ou seja, trata-se do desenvolvimento das diferentes atividades.

É importante assinalar que a vida do ser humano não é caracterizada por uma sequência linear desses estágios e, em cada um deles, faz parte somente uma atividade bem como, ao se passar para outro, a anterior não se faz presente. Leontiev (2010) afirma que algumas atividades são as principais em certos estágios e, com isso, são da maior importância para o desenvolvimento psíquico. Porém, os outros tipos de atividade não são negados e ocupam um domínio secundário.

Na pré-escola, por exemplo, a atividade principal da criança é o jogo, que muda com o seu ingresso na escola, com o predomínio do estudo. Tal mudança na atividade principal significa que o jogo até então cumpria o papel essencial em seu desenvolvimento, porém deixa de ser prioritário, mas ainda continua sendo importante em sua vida, secundariamente (DAVÍDOV, 1985).

Leontiev (2010, p. 63) entende que há uma "[...] dependência do desenvolvimento psíquico em relação à atividade principal e não à atividade em geral". Reafirma, então, que cada estágio do desenvolvimento humano se caracteriza por um tipo de atividade principal. Assim, no estágio pré-escolar, a atividade principal é o jogo; com o ingresso na escola e na escola secundária é o estudo e, por fim, no período adulto é o próprio trabalho. Na URSS as atividades principais, conforme Leontiev (2010), eram o jogo, o estudo e o trabalho.

Dentre as atividades principais que são responsáveis pelo desenvolvimento psíquico do ser humano, destaquei a de **estudo** como foco da presente pesquisa. Por isso, apresentarei algumas de suas características na subseção a seguir, e a seção subsequente será a dedicada aos pressupostos referentes ao modo de organização do ensino concernente à referida atividade.

2.1.1 A Atividade de Estudo

Nesta seção focalizo a atividade de estudo, uma vez que é para o seu desenvolvimento, no contexto escolar, que se voltam as preocupações referente à organização de ensino. As investigações de Davýdov sobre o processo de formação da atividade de estudo tiveram início no final dos anos 1950. Inicialmente, debruçou-se na análise do que ele denomina de defeitos do ensino primário. Como consequência, formulou a hipótese de que existem grandes reservas nas possibilidades cognoscitivas dos estudantes dos anos iniciais (DAVÍDOV; MÁRKOVA, 1987).

Por decorrência, estruturou um ciclo de programas experimentais para a escola primária, por meio de novos princípios psicológicos. A Matemática e a Língua Russa foram algumas das disciplinas organizadas para o referido estudo. Desde o início, os resultados alcançados apontaram para a obtenção de provas referentes às grandes possibilidades cognoscitivas e às particularidades da formação do pensamento teórico, nos estudantes (DAVÍDOV; MÁRKOVA, 1987).

Shepel (2014) considera que as investigações com maior intensidade e extremo rigor científico sobre a atividade de estudo foram desenvolvidas, sob a liderança de Davýdov, em duas escolas experimentais: a PS 91, em Moscou, e a PS 17, em Kharkov, na Ucrânia. Sistematicamente, esses estudos ocorreram entre as décadas de 1960 e 1980, voltados para o Ensino Fundamental. No que corresponde ao período do 6º ao 9º ano do ensino brasileiro, os estudos e interesses contínuos para tal só ocorreram a partir da década de 1980 (SHEPEL, 2014).

Uma contribuição ímpar para os resultados alcançados anteriormente ocorreu com os estudos – por durante vinte e cinco anos (1959-1984) – de Davýdov e seus colaboradores. Dentre os objetivos, destaca-se o de determinar o conteúdo e a estrutura da atividade de estudo (DAVÍDOV, 1988).

Os resultados dessas pesquisas se apresentam em diversos textos. Em Davídov (1985) e em Davídov e Márkova (1987), há indicação de que a atividade de estudo tem como “conteúdo os conceitos científicos” e a estrutura é composta por tarefas de estudo, ações de estudos, ação de controle e avaliação. Contudo, em Davídov (1988), bem como em Davídov e Slobódchikov (1991) o “conteúdo consiste nos conhecimentos teóricos” e a ‘estrutura se compõe de necessidades, motivos, tarefas, ações e operações’. No entanto, em Davydov (1998) aparece outra nomenclatura, “atividade de aprendizagem” que, de modo implícito, traz como sendo o seu conteúdo, os conhecimentos teóricos e, de forma explícita, a sua estrutura: necessidades, motivações, problemas, ações e operações de aprendizagem.

A partir da explicitação dos resultados dos estudos de Davýdov e colaboradores, vale destacar que em seus textos Davídov (1985); Davídov e Márkova (1987); Davídov (1988); Davídov e Slobódchikov (1991) e Davydov (1998) percebe-se que aparecem duas estruturas da atividade de estudo, conforme consta no parágrafo anterior.

Dentre todos os textos mencionados, Davídov (1988) é o que mais detalhadamente apresenta o conteúdo e a estrutura da atividade. Como parte da especificidade desse texto, há um exemplo com uma tarefa e seis ações de estudo a serem empregadas na formação do conceito de número.

A preocupação, nas investigações de Davýdov, é com a organização de um ensino que cumpra a finalidade de realmente colocar o estudante em atividade de estudo. Tem, pois, como objetivo fundamental e o principal resultado a atingir a assimilação dos conhecimentos científicos, como condição para o desenvolvimento do pensamento teórico. Em outras palavras, Davídov (1985) considera que atividade de estudo tem um conteúdo extremamente peculiar qual seja: os conceitos científicos, as leis da ciência, bem como os modos gerais de resolver problemas da vida cotidiana.

Essa peculiaridade não é exclusividade da atividade de estudo, mas se apresenta no jogo e trabalho, que também são responsáveis pelo desenvolvimento psíquico do ser humano. Porém, a assimilação cumpre o papel de um produto acessório. Isso porque cada uma delas apresenta sua especificidade. No jogo, a criança se propõe a cumprir o papel que lhe é designado e, por isso, a assimilação das normas de conduta só acompanha a satisfação de seu desejo fundamental. No trabalho, seu objetivo principal é a construção de objetos, que requer a aquisição de habilidades por meio da assimilação, por consequência de algo necessário a construir (DAVÍDOV, 1985).

A importância de compreensão da essencialidade da assimilação na atividade de estudo se justifica porque nela estabelecem “[...] as condições para a sua plena realização, criadas somente na escola, onde se ensina às crianças os fundamentos da ciência e se forma nelas a concepção científica de mundo." (DAVÍDOV, 1985, p. 89).

Mas qual o significado de assimilação? De acordo com Davídov e Márkova (1987, p. 321):

> [...] é o processo de reprodução, pelo indivíduo, dos procedimentos historicamente formados de transformação dos objetos da realidade circundante, dos tipos de relação em direção a eles e o processo de conversão desses padrões, socialmente elaborados, em formas da «subjetividade» individual.

Portanto, a assimilação é processo de compreensão, pelo indivíduo, da experiência socialmente elaborada em suas múltiplas determinações. Não se trata, então, apenas de um ou outro aspecto de uma dada realidade, mas da sua gênese e desenvolvimento. Com base nesse entendimento, Davídov e Márkova (1987) destacam que a atividade de estudo está correlacionada com outros conceitos, dentre eles desenvolvimento e ensino.

O desenvolvimento, para Davídov e Márkova (1987, p. 321), "se realiza por meio da assimilação (apropriação) pelo indivíduo da experiência histórico-social"[11], isto é, dos conhecimentos produzidos historicamente pelo homem. Entendem por ensino "o sistema de organização e os meios em que se transmite ao indivíduo a experiência socialmente elaborada [...]" (DAVÍDOV; MÁRKOVA, p. 322).

Por essa razão, no ensino, se revela a organização e estruturação da experiência socialmente elaborada pela humanidade para que ela seja assimilada pelo estudante. Uma análise da estruturação do ensino para tal finalidade não é simples e nem pode ser superficial, mas é algo complexo ao se admitir que o modo pelo qual se organiza o ensino – a determinação do conteúdo e de um método – é que proporciona o tipo de desenvolvimento psíquico no estudante.

Davídov e Slobódchikov (1991) compreendem a atividade de estudo a partir da sua origem histórica por requerer uma organização plena no contexto escolar, isto é, a estruturação de tal modo do ensino

---

[11] Ao lado da palavra assimilação, em Davídov e Márkova (1987), aparece, entre parênteses, (apropriação). A partir dessa verificação, entendo que, para os autores, a assimilação e a apropriação possuem significados similares.

que possibilite a assimilação dos conhecimentos científicos. A referência à origem histórica se constitui numa forma de evidenciar e evitar equívocos, uma vez que houve prolongados períodos em que a permanência do aluno na aula não era a garantia de que ele estivesse em atividade de estudo.

Davídov e Slobódchikov (1991) preocupam-se com uma organização correta do ensino, a fim de que as crianças não só estejam em aula, mas efetivamente em atividade de estudo, ou seja, que elas assimilem e dominem os conhecimentos científicos. A organização correta da atividade de estudo só ocorre quando se estrutura o processo didático e educativo em conformidade com a necessidade dos estudantes e para o domínio, por eles, das riquezas espirituais peculiares às pessoas: a capacidade da comunicação, os valores morais e as normas jurídicas. Para tanto, eles consideram a *necessidade* como sendo a sua componente fundamental[12], isto é, sem ela a atividade não existe. Além disso, sua ausência inviabiliza que os estudantes entrem em sua peculiar atividade.

Por conseguinte, o conceito de necessidade se vincula ao de atividade. Talizina (2000, p. 58) considera "[...] as necessidades como causa de qualquer atividade [...]". Em outras palavras: "A atividade do sujeito sempre corresponde a alguma necessidade e se dirige para um objeto que pode satisfazer essa necessidade" (TALIZINA, 2000, p. 55). A autora acrescenta: o estudante sem necessidade cognoscitiva não estuda; ou até pode ocorrer que estude, mas por outra necessidade.

Davídov (1988) considera que a necessidade de estudo tem origem na etapa anterior, em específico, no fim do período pré-escolar. Neste, são geradas as suas premissas por meio dos jogos de papéis, que contribuem para a formação da imaginação e da função simbólica. Ambas as características, de acordo com Davídov (1985), constituem-se em aspectos básicos na preparação da criança para a escola.

Antes mesmo de frequentar a escola, conforme Davídov (1985), a criança se acostuma com a ideia de que é necessário estudar, pois o estudo subsidiará na tomada de decisão sobre sua real pretensão, já não mais como nos jogos de papéis – aviador, cozinheiro, motorista.

Desse modo, o conhecimento passa a ter outro sentido para a criança, a saber: algo que tem significado e valor social. Surge e manifesta-lhe a curiosidade e o interesse teórico para o que está ao seu redor. Tal interesse se torna o requisito básico para a aprendizagem,

---

[12]Para Elkonin, citado por Davídov e Márkova (1987), a célula da atividade de estudo é a tarefa de estudo, que também é admitida por Davídov (1988).

formado em decorrência de todo o sistema de sua vida pré-escolar, no âmbito da atividade lúdica intensa (DAVÍDOV, 1985).

Davídov (1988) diz que os jogos de papéis – antecedentes à atividade de estudo – contribuem para o surgimento dos interesses cognoscitivos nas crianças, porém, não as satisfazem completamente. São eles os responsáveis por atuarem “[...] como premissas psicológicas para que na criança surja a necessidade de assimilar conhecimentos teóricos” (DAVÍDOV, 1988, p. 178). Com isso, os conhecimentos até então suficientes, aos poucos não mais satisfazem as crianças. Em outras palavras, Davídov (1988, p. 178) diz que progressivamente, ao se aproximarem do fim da pré-escola, as crianças “[...] começam a necessitar de fontes mais amplas de conhecimento do que aquelas oferecidas pela vida cotidiana e o jogo.”.

Portanto, a atividade do jogo, no fim da pré-escola, é que promove a criação dos interesses cognoscitivos, porém não os satisfaz. Isso ocorrerá, segundo Davídov (1988, p. 178), na próxima atividade principal, o estudo, “[...] a qual oferece um rico material para satisfazer seus interesses cognoscitivos”, formados no período de desenvolvimento marcado pelo jogo.

Isso remete à organização correta da atividade de estudo – estruturação do processo didático e educativo – com base na necessidade de estudo das crianças, ou seja, assimilação de conhecimento que satisfaça os interesses cognoscitivos criados no jogo, mas ainda não atendidos. Davídov (1988) considera como ‘rico material’ os conhecimentos teóricos que, além de ‘conteúdo’ é também a ‘necessidade’ da atividade de estudo.

O conhecimento teórico como a ‘necessidade’ premente da atividade de estudo, traz como condição que a criança, desde o início, experimente real e mentalmente operações com um ou outro objeto, cuja finalidade consiste em separar os aspectos gerais essenciais e particulares externos, além disso, as suas inter-relações. Em seguida, envolver-se em um contexto de representações e modelações próprias dos conceitos (DAVÍDOV; SLOBÓDCHIKOV, 1991).

Vale lembrar que apenas a presença da criança na escola não permite a afirmação de que ela esteja diante de tal necessidade e, consequentemente, em atividade de estudo. Davídov (1988) diz que tal necessidade só se apresenta a partir da organização do ensino que, segundo ele, se constitui de cumprimento das tarefas de estudo, que requerem determinadas ações de estudo, desenvolvidas por meio de tarefas particulares e operações. Subjacente a essa estruturação está o conteúdo, isto é, o conhecimento teórico.

Davídov e Slobódchikov (1991) consideram que as tarefas de estudo trazem outra condição para a organização correta da atividade de estudo: a análise, pelos estudantes, das condições de origem dos conhecimentos e o domínio dos procedimentos generalizadores de sua obtenção. Davídov (1988, p. 178-179) especifica as exigências da tarefa de estudo, aos estudantes:

> 1) a análise do material fático com o fim de descobrir certa relação geral que apresenta uma vinculação sujeita à lei com as diferentes manifestações deste material, isto é, a construção da abstração e da generalização substanciais; 2) a dedução, sobre a base da abstração e generalização, das relações particulares do material dado e sua união (síntese) em certo objeto integral, isto é, a construção de sua 'célula' e do objeto mental concreto; 3) o domínio, nesse processo analítico-sincrético, do procedimento geral da construção do objeto estudado.

Especificamente na estruturação do ensino da Matemática para os anos iniciais do ensino escolar, Davídov (1988, p. 209) define um sistema de tarefas de estudos constituído por:

> 1) introdução dos alunos na esfera das relações entre grandezas: formação do conceito abstrato de grandeza matemática;
> 2) demonstração, para as crianças, da relação múltipla das grandezas como forma geral do número: formação do conceito abstrato de número e da compreensão da inter-relação fundamental entre seus componentes (o número é derivado da relação múltipla das grandezas);
> 3) introdução sucessiva dos estudantes na área dos diferentes tipos particulares de números (naturais, quebrados, negativos): formação dos conceitos sobre estes números como uma das manifestações da relação múltipla geral das grandezas em determinadas condições concretas;
> 4) demonstração aos alunos do caráter unívoco da estrutura da operação matemática (se se conhece o valor dos elementos da operação se pode determinar univocamente o valor do terceiro elemento): formação da compreensão sobre a

> inter-relação dos elementos das ações aritméticas fundamentais.

Com base no estudo das proposições de ensino de Davýdov e seus colaboradores para os anos iniciais do estudo escolar, Hobold (2014) destaca três tarefas de estudo. A primeira se refere ao conceito de número, a segunda diz respeito aos conceitos de adição e subtração e a terceira vincula-se aos conceitos de multiplicação e divisão.

De modo geral, Davýdov (1982) considera como tarefa de estudo para o Ensino Fundamental, em relação à matemática: que o aluno tenha uma compreensão circunstanciada de número e suas operações como relação entre grandezas, isto é, em nível teórico, no campo dos números reais. Cada uma das tarefas de estudo é resolvida, pelos estudantes, por meio de seis ações de estudo:

> transformação dos dados da tarefa com o fim de revelar a relação universal do objeto de estudo;
> modelação da relação diferenciada em forma objetal, gráfica ou por meio de letras;
> transformação do modelo da relação para estudar suas propriedades em 'forma pura';
> construção do sistema de tarefas particulares para resolver por um procedimento geral;
> controle sobre o cumprimento das ações anteriores;
> avaliação da assimilação do procedimento geral como resultado da solução da tarefa de estudo dada. (DAVÍDOV, 1988, p. 181).

As ações de estudo são desenvolvidas por um conjunto de tarefas particulares, que será explicitado no terceiro capítulo, referente ao ensino do conceito de número negativo.

2.2 CARACTERÍSTICAS DO NOVO PENSAMENTO PEDAGÓGICO PARA A ATIVIDADE DE ESTUDO

No então contexto soviético, a formação do novo homem com pensamento socialista, conforme compreendem Davídov e Slobódchikov (1991), conclamava que, na escola, fosse introduzido um novo pensamento pedagógico, com foco para o desenvolvimento do ser humano. Em específico, a conversão do ensino em fator eficiente para a formação da personalidade e da sociedade. Para esse fim, os autores consideram que os objetivos do ensino primassem pela possibilidade de prover os estudantes de: uma posição cívica consciente; preparação para a vida, o trabalho; criatividade social para a participação na autogestão democrática e a responsabilidade pelo destino do país e da civilização.

Davídov e Slobódchikov (1991) destacam algumas características essenciais da referida pedagogia. Primeiramente, demanda uma organização do ensino que se dirija à formação, nos estudantes, de uma personalidade criativa e da individualidade de cada um deles, sem desconsiderar suas vontades e suas aspirações de vida.

Outra característica é a prioridade ao desenvolvimento harmônico do homem, porém contra as tecnologias de ensino e os meios de adaptação formal à sociedade que permitem somente a formação para profissão, um funcionário. Além disso, formar nos estudantes as propriedades da personalidade, tais como o coletivismo e a solidariedade, o companheirismo e a civilidade, entre outras (DAVÍDOV; SLOBÓDCHIKOV, 1991).

Trata-se, pois, de uma educação harmônica fundamentada na premissa de inserção dos indivíduos nas seguintes atividades: jogo, estudo, artística, trabalho, esportiva e social organizativa. São elas que proporcionam a formação das diferentes capacidades humanas, indispensáveis à realização das ações conscientes em situações inesperadas (DAVÍDOV; SLOBÓDCHIKOV, 1991).

Para Davídov e Slobódchikov (1991), a terceira característica da nova pedagogia diz respeito à afirmação da premissa do trabalho do ensino, fundamentada em dois princípios. O primeiro tende à familiarização criadora e ativa na relação do homem com o mundo, que tem por base a atividade do trabalho. Isso pressupõe o emprego dos métodos ativos de educação e ensino que revelem – às gerações em formação – a origem das distintas formas de trabalho. O segundo estabelece a necessária união, em certa idade do estudante e nível de escolaridade, do ensino com o trabalho produtivo[13] em suas formas contemporâneas.

---

[13]O trabalho produtivo a que se refere o texto (DAVÍDOV; SLOBÓDCHIKOV, 1991) é aquele que, num contexto de produção social comum, “[...] o motivo e o produto objetivo do trabalho não são estranhos um ao outro, porque ele [o operário socialista] não trabalha para os exploradores, mas para ele, para a sua classe, para a sociedade.” (LEONTIEV, 2004, p. 144). De outro modo, na sociedade capitalista, o motivo (salário) e o produto objetivo do trabalho são estranhos um ao outro, o operário assalariado “[...] não fia ou não tece para

Contudo, uma característica considerada essencial, para Davídov e Slobódchikov (1991) é a compreensão do ensino como sistema “sócio-estatal” que, ao mesmo tempo, resulta em um novo entendimento da escola. Isso significa dizer que o pensamento pedagógico pode se revelar em duas concepções extremas: o tradicional e o novo.

No extremo tradicional, a escola é considerada uma instituição estatal responsável pelo ensino e a educação dos estudantes. Ao ensino, compete a transmissão dos conhecimentos, habilidades e hábitos que serão úteis ao estudante no futuro. A educação trata da formação das propriedades exigidas pela vida social (DAVÍDOV; SLOBÓDCHIKOV, 1991).

Davídov (1987) atrela a designação “escola tradicional” ao sistema educativo predominante no continente europeu que se formou, predomina e serve aos princípios do modo de produção capitalista. Tem seus fundamentos em pedagogos como Komenski, Pestalozzi, Diesterweg, Ushinski. Seus princípios ainda persistem na atualidade e são basilares para a seleção do conteúdo e os métodos de ensino. As fontes da unidade e a prolongada permanência deste sistema são o caráter comum dos objetivos sociais da educação escolar peculiar ao capitalista, como também o caráter comum das vias e meios para formar as capacidades psíquicas do homem no alcance destes objetivos.

Em contraposição, o novo pensamento pedagógico concebe a escola em conformidade com as leis da vida social que estão em constante transformação. Portanto, não se caracteriza pela transmissão unilateral das ideias, até então formadas pelos adultos sobre o mundo, mas como a instituição responsável pela formação do “homem no homem”, em que são criadas novas formas de vida social, tipos de atividade e valores sociais (DAVÍDOV; SLOBÓDCHIKOV, 1991).

De acordo com Davídov e Slobódchikov (1991), esse novo pensamento pedagógico conclama pela determinação e resolução de tarefas inéditas, referentes às estruturas de sua organização e direção, no âmbito da ciência e da prática pedagógica. Dentre as tarefas, destacam-se:

- organização e desenvolvimento, em condições experimentais, de um novo conteúdo de ensino;

- organização pedagógica com adoção de novos recursos tecnológicos para a criação de disciplinas escolares com uma base integrativa;

---

corresponder às necessidades da sociedade em fio ou em tecido, mas unicamente pelo salário [...]” (LEONTIEV, 2004, p. 131).

- produção de modelos de atividade que incluam a participação dos estudantes, pedagogos e organizadores do ensino;
- produção de formas de coorganização da atividade coletiva de investigadores e estudiosos do ensino;
- introdução de elaborações inovadoras tanto no ensino quanto na educação da escola;
- estabelecimento de critérios referentes ao conteúdo de avaliação da atividade na escola;
- olhar de base científica para as questões de ordem psicológicas, diagnósticas, corretivas e de orientação profissional do ambiente escolar.

Observa-se que, de modo geral, as tarefas trazem um componente pertinente à compreensão de indivíduo como ser que se constitui em atividade. E, como tal, traz um teor de prospectividade, de devir, com princípios que se voltam à cientificidade das produções, à participação coletiva de processos de organização e avaliação de conteúdos tanto do ensino quanto da educação.

Para Davýdov, a elaboração e o desenvolvimento dessas novas tarefas requerem o rompimento dos modos recorrentes àquelas que, historicamente, fundamentaram os sistemas de educação. Por isso, faz um estudo dos princípios da educação tradicional e, ao par, propõe aqueles que ele considera determinantes da nova proposta, os quais serão referências na próxima seção.

2.3 PRÍNCIPIOS DIDÁTICOS

Como anunciado no parágrafo anterior, intrinsecamente ao novo pensamento pedagógico surge a necessidade de novos princípios didáticos, pois aqueles que conduziram a escola soviética por muitos anos foram elaborados por um pensamento pedagógico que não mais correspondia com a formação do novo homem da sociedade em construção (DAVÍDOV; SLOBÓDCHIKOV, 1991). Em outras palavras, inadequado às necessidades da nova sociedade, a socialista, ainda sustentada pela escola tradicional.

A extensa permanência desse modelo de escola, segundo Davídov (1987), atende aos objetivos sociais do período de produção capitalista que, para a educação escolar, consistem em formar no homem apenas aquelas capacidades psíquicas com a finalidade de que satisfaça a esse tipo produção.

Assim, durante vários anos, esse modelo de escola teve como objetivo proporcionar, para grande parte dos filhos dos trabalhadores, apenas aqueles conhecimentos e habilidades – saber escrever, contar, ler

– que sem os quais se tornaria deficiente o exercício da profissão no contexto das relações do modo de produção capitalista (DAVÍDOV, 1987). Nesse sentido, vale ressaltar que a contribuição da escola tradicional primária para atingir tal propósito ocorreu porque

> [...] atuava como etapa primeira e única na educação da maior parte da população; etapa que preparava diretamente as crianças para a atividade de trabalho na qualidade de força de trabalho mais ou menos qualificada ou para a aprendizagem profissional em especialidades relativamente simples (DAVÍDOV, 1987, p. 144).

Tal restrição ao conhecimento atende a um conteúdo e a um método de ensino correspondentes ao utilitário-empírico, que se volta para a prática cotidiana do homem. Ou seja, possibilita-lhe a execução somente de tarefas rotineiras com uso de conhecimentos "[...] acumulados sobre as particularidades e traços externos de objetos e fenômenos isolados da natureza e da sociedade." (DAVÍDOV, 1987, p. 144).

Por consequência, a prioridade é o desenvolvimento, nos estudantes, do pensamento empírico que, de acordo com Davídov (1987) e Davídov e Slobódchikov (1991), atende aos seguintes princípios didáticos da escola tradicional: o caráter sucessivo da aprendizagem, a acessibilidade, o caráter consciente e o caráter visual, direto ou intuitivo.

O 'princípio do caráter sucessivo da aprendizagem' indica que tanto a pré-escola como o nível escolar primário apresentam a mesma organização do ensino, além de enfatizar conhecimentos próximos daqueles obtidos no cotidiano. Isso significa que os conceitos espontâneos das crianças continuam sendo a referência na escola (DAVÍDOV, 1987).

Outra característica desse princípio diz respeito à quantidade e à qualidade do conteúdo de ensino. Prevê que, no decorrer dos anos de estudo, ocorram mudanças na quantidade, entendida como o aumento do volume de conhecimentos a serem apreendidos pelos estudantes. Porém, a qualidade permanece a mesma nos diferentes anos de estudo. Por decorrência, esse modo de tratar o ensino não permite a diferenciação entre os conceitos científicos e cotidianos no contexto escolar (DAVÍDOV; SLOBÓDCHIKOV, 1991).

O princípio da ‘acessibilidade’ diz respeito à restrição, em cada período escolar, somente dos conceitos que os estudantes demonstram possibilidades de apropriação. De acordo com Davídov (1987), uma análise sobre quem e quando se determinou esse caráter de ‘ser acessível’ mostra que considera somente as condições espontâneas das crianças. É, pois, esse o critério de determinação do nível de exigência em cada ano escolar (DAVÍDOV, 1987).

Em outros termos, trata-se de colocar o estudante em situações de ensino e aprendizagem que lhe permitem unicamente a utilização das possibilidades psíquicas até então formadas e presentes. Assim sendo, o ensino não proporciona o desenvolvimento das funções superiores. Davídov e Slobódchikov (1991) advertem que tal princípio descarta a hipótese de que uma possível reestruturação do ensino mudaria o ritmo geral de desenvolvimento psíquico nas diferentes fases de escolaridade.

O princípio de ‘caráter consciente’, de acordo com Davídov (1987), está relacionado à compreensão própria do ensino tradicional de que a apresentação de todo conhecimento ocorre por meio das abstrações verbais, cada qual correspondendo a uma imagem sensorial. O professor, para verificar o grau de compreensão atingido pelos estudantes, adota como procedimento comum o uso de ilustrações. Desse modo, reduz os conhecimentos adquiridos pelo estudante somente à relação dos significados das palavras com as suas imagens sensoriais, intrínseca ao pensamento empírico.

Por fim, o princípio do ‘caráter visual, direto ou intuitivo’ apresenta as seguintes características:

> 1) na base do conceito se encontra a **comparação** da multiplicidade sensorial das coisas: 2) tal comparação leva a separar os traços **parecidos, comuns** destas coisas; 3) a fixação desse comum por meio da **palavra** leva à **abstração** como conteúdo do conceito (as representações sensoriais sobre esses traços externos constituem o verdadeiro significado da palavra); 4) o estabelecimento das **dependências de gênero e espécie** de tais conceitos (segundo o grau de generalidade dos traços) constitui a tarefa fundamental do pensamento, o que interage regularmente com a sensibilidade como sua fonte. (DAVÍDOV, 1987, p. 148-149, grifos do autor).

Os aspectos mencionados, segundo Davídov (1987), permitem que os conceitos se reduzam a seu nível empírico, pois a análise se detém apenas às características externas dos objetos, isto é, aquelas percebidas sensorialmente pelos órgãos dos sentidos.

De acordo com Davýdov (1982), esses princípios da escola tradicional contrastavam, na década de 70 do século XX, com a produção na URSS, em grande parte automatizada, carregada de máquinas e tecnologia que traziam em si o conhecimento mais atual da ciência. Diante disso, exigia-se que o indivíduo tivesse como base um volume considerável de conhecimentos científicos e, consequentemente, um adequado nível de desenvolvimento intelectual.

Esse contexto, segundo Rubinstein (1977), traz exigência ao indivíduo, condizente ao período de desenvolvimento humano caracterizado pela atividade principal de estudo. Para o autor, esta atividade emergiu do aperfeiçoamento e complexificação do trabalho, que requereram novas atividades necessárias à obtenção de conhecimentos e hábitos para o seu próprio desenvolvimento. Portanto, por consequência de um movimento dialético do próprio desenvolvimento do trabalho surgiu a atividade de estudo, com objetivo da apropriação, pelos indivíduos, dos conhecimentos produzidos historicamente que se tornaram convenientes às gerações presentes e futuras.

Essa nova atividade – o estudo – se constitui em um dos períodos da vida do ser humano. O estudo, na sucessiva transformação dos tipos principais de atividade, é posterior ao jogo e anterior ao trabalho. Traz como finalidade a preparação para a futura atividade, o trabalho, e tem como meio para a sua efetivação a apropriação dos conhecimentos produzidos historicamente (RUBINSTEIN, 1977).

Para tanto, o pressuposto de Davýdov (1982) é de que o estudo deveria permitir ao indivíduo a apropriação do conhecimento científico em seu auge atual. Isso significa que o conteúdo e o método empregado no ensino escolar necessitam voltar-se para o desenvolvimento do pensamento que corresponde a esse tipo de conhecimento, o teórico.

Essa centralidade do ensino escolar e, por extensão, da atividade de estudo, revelou-se como preocupação para Davýdov (1982) ao analisar o conteúdo e o método do ensino escolar empregado nas escolas da URSS, antes da revolução científico-técnica. Isso porque não possibilitavam o conhecimento mais atual da ciência, necessário à vida hodierna. Em outras palavras, os princípios da escola tradicional não mais satisfaziam as exigências concernentes ao nível de desenvolvimento atingidos pela humanidade, pois “a orientação unilateral para o pensamento empírico faz com que muitas crianças não recebam, na escola, os meios e procedimentos do pensamento científico, teórico [...]" (DAVÍDOV, 1987, p. 149).

Essa inadequação entre necessidade social e sistema escolar, segundo Davídov (1987, p. 145), ainda se vincula à escola tradicional que apenas "preparava para a produção capitalista, só «um homem parcial» que, como um parafuso, servia para a máquina e atuava como parte subordinada desta". Entretanto, "a situação mudou na sociedade socialista, especialmente na época da revolução técnica, em que uma parte importante das profissões exige uma alta preparação científica e cultural geral" (DAVÍDOV, 1987, p. 145).

Nesse sentido, Davýdov (1982) destaca que uma das tarefas da comunidade socialista era de garantir que o ensino escolar entrasse em plena harmonia com os progressos científicos e técnicos do século XX e, consequentemente, desenvolvesse um tipo de pensamento diferente do empírico, o teórico. São essas limitações promovidas pela escola tradicional – o tipo de pensamento que ela desenvolve não condizente com as exigências da revolução científico-técnica – que Davídov (1987, p. 149) toma como referência para contrapor com sua proposição fundamentada na dialética materialista e histórica. Entende como precariedade que:

> Na escola tradicional, o princípio do caráter científico só se declara. É compreendido em sua forma estreitamente empírica e não em sua verdadeira significação dialética; ou seja, não como procedimento especial de reflexo mental da realidade, isto é, por meio da ascensão do abstrato ao concreto.

Para a efetividade do princípio da cientificidade, Davídov (1987) concebe como necessária a mudança no tipo de pensamento que o sistema de ensino desenvolve: a formação, desde os primeiros anos de estudos, das bases do pensamento teórico. Ao ter como pressuposto que o caráter da cientificidade somente ocorre com a mudança do tipo de pensamento, Davídov (1987) e Davídov e Slobódchikov (1991) propõem novos princípios para escola, a seguir explicitados.

O caráter da sucessão dos conhecimentos continua, porém com mudanças qualitativas, no decorrer do ensino, tanto no conteúdo como no método, pois

> Com o ingresso na escola, a criança deve sentir claramente o caráter novo e a peculiaridade daqueles conceitos que agora recebe, ao contrário da experiência pré-escolar. Trata-se de conceitos científicos [...] (DAVÍDOV, 1987, p. 150).

Davídov e Slobódchikov (1991) destacam que, desde o primeiro ano de estudo, os estudantes estarão verdadeiramente em atividade de estudo se eles se apropriarem dos conceitos com teor científico. Para tanto, substitui-se o princípio tradicional da 'acessibilidade' pelo 'principio da educação capaz de desenvolver'. Tal mudança requer um novo objetivo: organizar o ensino para criar as condições e premissas do desenvolvimento psíquico prospectivamente, isto é, estruturar o ensino com vista para o amanhã do desenvolvimento (DAVÍDOV; SLOBÓDCHIKOV, 1991).

De mesmo modo, em vez do princípio do 'caráter consciente', a nova proposição adota o 'princípio da atividade'. A justificativa é de que a efetividade do 'caráter consciente' só ocorre se o estudante não recebe os conhecimentos prontos. Para tanto, a nova organização do ensino se estrutura de modo tal que contempla 'ações' e 'tarefas' capazes de revelar as condições de origem e desenvolvimento dos conceitos. Isso implica em transformações dos objetos com a finalidade de modelar e recriar as suas propriedades internas, as quais se convertem no conteúdo do conceito (DAVÍDOV; SLOBÓDCHIKOV, 1991).

Davídov (1988), ao discutir a base do seu referencial e apresentar as principais teses da teoria materialista dialética do conhecimento, recorre a Kopnin para argumentar a essencialidade da atividade na formação do pensamento humano: "um processo objetivo da atividade da humanidade, o funcionamento da civilização humana, da sociedade, como verdadeiro sujeito do pensamento" (DAVÍDOV, 1988, p. 115).

Por isso, em contraposição ao 'princípio do caráter visual', direto ou intuitivo da escola tradicional, Davýdov estabelece 'o princípio do caráter objetal', que requer o emprego de ações específicas com o objeto para representar o conteúdo do conceito e produzi-lo em forma de modelos materiais, gráficos ou literais (DAVÍDOV, 1987). A diferença entre ambos está na relação entre o particular e o geral. No visual, se realiza a análise de diversos casos particulares para encontrar o que há de geral neles. De outro modo, o objetal possibilita que os estudantes encontrem primeiro o conteúdo geral do conceito para depois identificar as suas manifestações particulares (DAVÍDOV, 1987).

A adoção desses novos princípios, no ensino, permite indicar as condições para que a formação do pensamento teórico se constitua na norma e não na exceção. Contudo, eles são realizáveis no processo escolar somente se organizados com base em suas consequências previamente vislumbradas (DAVÍDOV; SLOBÓDCHIKOV, 1991).

Davídov e Slobódchikov (1991) alertam que a organização do ensino escolar, alicerçada na generalização teórica, só se realiza se forem considerados os seguintes princípios:

1) Os conceitos de qualquer disciplina escolar não são apresentados no âmbito do ensino escolar de forma pronta. Em vez disso, no processo de apropriação, o estudante é colocado em situação que compreende as suas condições de origem e desenvolvimento.

2) Na apropriação dos conceitos, os aspectos de caráter geral precedem os particulares.

3) Aos estudantes, se deem as condições para se apropriarem da conexão geneticamente inicial que determina todos os conceitos. No caso da Matemática, essa conexão é a relação entre as grandezas.

4) Tal conexão, necessariamente, se expressa em diferentes formas de representação e modelos, inicialmente objetais, seguidos de gráficos e literais. Eles possibilitam o estudo das propriedades dos conceitos em “forma pura”.

5) Desenvolvimento de ações objetais, pois elas permitem que os estudantes tanto revelem no material de estudo quanto reproduzam nos modelos a conexão essencial do objeto. Para o conceito de número, a ação a ser formada é aquela que determina a característica de multiplicidade e divisibilidade das grandezas.

6) Gradativamente, os estudantes criam as condições para passar das ações objetais para a sua realização no plano mental.

Davídov (1987) diz que se dedicou ao estudo sobre as possibilidades desses princípios para que as crianças, mesmo aos sete anos, desenvolvam o pensamento teórico. Para tal intento, realizou investigações envolvendo estudantes do segundo ano escolar, colocados em execução de tarefas que contemplavam os referidos princípios. Os dados obtidos permitiram-lhe afirmar com “esperança a hipótese” (DAVÝDOV, 1982, p. 441) da efetividade desse objetivo para o ensino, mesmo que se dirija aos escolares dos anos iniciais.

Os pressupostos, características e princípios defendidos por Davýdov são referenciais na análise a ser empreendida no próximo capítulo. Para tanto, destaco o conjunto de tarefas particulares que têm como conteúdo o conceito de número negativo, uma das centralidades do ensino da Matemática no sexto ano escolar.

3 OS NÚMEROS NEGATIVOS NA PROPOSIÇÃO DAVYDOVIANA

No presente capítulo, a análise dos dados tem como objetivo responder ao questionamento concernente ao problema de pesquisa, o qual reafirmo: que necessidades se apresentam no âmbito das atividades de ensino e estudo, mais especificamente no modo davydoviano de organização do ensino, referentes às tarefas particulares voltadas ao conceito de números negativos?

Dado que a ‘necessidade’ é uma das questões centrais da presente pesquisa, são imprescindíveis alguns esclarecimentos e definições a seu respeito. Como visto no capítulo anterior, a necessidade constitui-se em um elemento da estrutura de qualquer atividade humana. Ou seja, ela se constitui em algo indispensável para o surgimento de atividade e também move o indivíduo humano na sua execução. Vale dizer que não é a esse tipo de necessidade que se volta a análise central do presente capítulo. Em outros termos, não é aquela que origina a atividade de estudo que, conforme mencionado no capítulo anterior, é gerada na atividade do jogo, qual seja: a busca do conhecimento científico (DAVÍDOV, 1988). Porém, elas emergem no processo de objetivação e dos meios necessários da atividade de estudo, isto é, há uma vinculação entre ambas.

Antes de explicitar o entendimento de necessidade ao qual se refere o presente estudo, parece providencial responder com base teórica o questionamento: o que é uma necessidade?

Para Leontiev (1971 apud TALIZINA, 2000, p. 58) “[...] A necessidade como tal, é só um estado negativo, um estado de desejo, de falta de algo; ela adquire sua característica positiva só como resultado do encontro com o objeto e em sua ‘objetivação’”. Davídov (1988, p. 254), ao abordar os conceitos de atividade e psique nos trabalhos de Leontiev, entende que a “[...] atividade tem sua peculiar premissa: a necessidade como estado de carência e de estimulação do organismo [...]”. Leontiev (1978, p. 341, grifos do autor), ao tratar do conceito geral das necessidades, considera que

> Toda atividade do organismo está dirigida a satisfazer as necessidades daquilo que é indispensável para prolongar e desenvolver sua vida. Tomemos, por exemplo, a necessidade de alimento.

> Quando o organismo está com falta de determinados elementos indispensáveis para a vida, isto se manifesta em que exige estes elementos ou, falando de outra maneira, demanda a satisfação de suas *necessidades*.

Essa citação de Leontiev (1978) possibilita verificar que a exigência da satisfação da necessidade ocorre quando se tem a falta de um elemento que é imprescindível para algo. Portanto, não se trata de algo peculiar ao surgimento das atividades principais.

Talizina (2000, p. 57) considera duas características essenciais referentes às necessidades. A primeira, a mais importante, "é seu caráter objetal (necessitar de algum objeto)." A segunda "[...] é seu caráter dinâmico: elas surgem, mudam seu grau de tensão, desaparecem e depois se reproduzem de novo.".

Leontiev (1978) caracteriza as necessidades com base em quatro traços gerais que as peculiarizam quando a referência são organismos superiores. O traço principal e primeiro de toda necessidade é a existência de um objetivo: se tem necessidade de algo, de um objeto material. O segundo consiste na aquisição de um conteúdo concreto, em conformidade com as condições e a maneira de satisfazê-las. O terceiro traço é que uma necessidade tende a se repetir. Por fim, o quarto é que todas elas se desenvolvem à medida que se ampliam o círculo de objetos e de meios para satisfazê-las.

Para Pilipenko (1958, p. 129, grifos do autor),

> *O materialismo dialético entende por necessidade o que tem causa em si mesmo, o que se desprende inevitavelmente e com força da lei da essência mesma, dos nexos internos das coisas, dos processos e acontecimentos; o que há de suceder, forçosamente, assim e não de outro modo.*

As necessidades abordadas na presente pesquisa são aquelas geradas pela organização do ensino da proposição davydoviana, a partir de suas tarefas particulares para a apropriação do conceito de número negativo. Mais especificamente, requisitam a elaboração de uma nova tarefa para que se mantenha o vínculo entre elas e não se perca de vista detalhes do teor conceitual a ser apropriado pelos estudantes. Nesse sentido vale parafrasear Engels, citado por Pilipenko (1958), ao afirmar que o intercâmbio de substâncias é algo necessário para os seres vivos. Então, diria que há entre as tarefas particulares algo necessário para que ocorram as articulações entre si, bem como um consistente processo de apropriação conceitual em nível teórico de número negativo. Essas necessidades a serem analisadas emergem no âmbito das duas primeiras seções do sexto capítulo – “Números positivos e negativos” – do livro didático do estudante – ГОРБОВ et al. (2007).

Em síntese, as necessidades – base das análises das tarefas particulares que expressam o desenvolvimento conceitual dos números negativos – trazem como fundamento as ideias: um estado de ‘carência’ (DAVÍDOV, 1988); ‘falta de algo’ (LEONTIEV, 1978); o caráter objetal (TALIZINA, 2000); causa, desprendimento inevitável que traz a lei da essência, dos nexos internos das coisas e processos, o imprescindível (PILIPENKO, 1958).

Nesse contexto é que imprimi a análise do objeto e do problema de pesquisa. Mesmo no estudo preliminar sobre o modo de introdução do conceito de número negativo em Горбов et al. (2006) e Горбов et al. (2007), especialmente no sexto capítulo – “Números positivos e negativos” – constatei a primeira necessidade de ordem conceitual: o vetor. Isso demanda outra necessidade: a elaboração de tarefas particulares com teor do referido conceito, a serem desenvolvidas pelos estudantes, como condição para o surgimento e desenvolvimento das ideias essenciais do número negativo e sua inter-relação com os positivos o que caracteriza a noção de relatividade numérica.

No entanto, nessa inserção preliminar também averiguei que no mesmo capítulo não se aborda a introdução do vetor, isso acontece no capítulo cinco – “Deslocamento e vetor”. A partir dessa constatação, considero importante elucidar o que os autores da proposição de ensino em análise entendem por vetor, uma vez que ele é a base para o estudo dos números negativos. No entanto, não focarei a análise nas necessidades emergentes em cada tarefa, pois a intenção é apenas colocar os leitores a par do contexto conceitual de vetor, uma vez que ele é uma das bases do conceito de número negativo.

Nesse sentido, a próxima seção foi dedicada ao tratamento dado pela proposição de ensino em análise ao conceito de vetor. Além disso, para tal entendimento recorri aos fundamentos matemáticos.

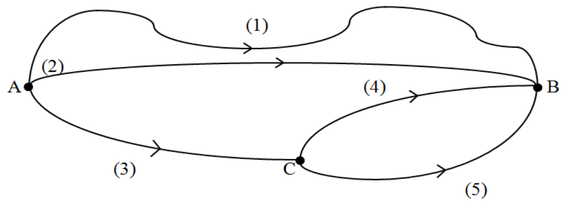
3.1 VETOR: UMA NECESSIDADE CONCEITUAL PARA O SURGIMENTO DO NÚMERO NEGATIVO

Na análise das tarefas que tratam da introdução do vetor foi possível verificar que este conceito tem como base o conceito de deslocamento, do qual trata a primeira tarefa.

Tarefa 1:

A tarefa tem por base a figura 1, que mostra pontos e linhas numeradas conectando-os. As linhas podem mover-se apenas nos sentidos indicados pelas setas (ГОРБОВ et al., 2007). Como observa-se a seguir, a sua resolução é conduzida por questionamentos orientadores para que os estudantes busquem as operações necessárias.

Figura 1: Representação dos caminhos



Fonte: Adaptação de Горбов et al. (2007).

a) Quantos caminhos levam, a partir do ponto C, ao ponto B?

b) Como são os caminhos que levam, a partir do ponto B ao ponto C?

c) Quantos caminhos são mostrados no desenho (figura 1)? Em seguida, para cada um deles, especifique o início e o fim, no quadro:

Caminho	Início	Final

d) Quantos deslocamentos diferentes você pode fazer com esses caminhos?

e) Pense numa maneira de representar, em uma imagem, o deslocamento de um ponto ao outro.

Na situação *a*, há dois caminhos (4 e 5) que permitem sair do ponto C e chegar ao ponto B. Em *b*, os caminhos que conduzem do ponto B ao C são os mesmos daqueles que levam do ponto C ao B; no entanto, o que muda na situação *b* em relação a *a* é que modifica-se o ponto de início e do fim. Em outras palavras, partir do ponto B para chegar a C, significa percorrer o sentido oposto de quando se inicia o deslocamento em C e se termina em B. Assim sendo, o sentido requer a delimitação do início e do fim de um deslocamento.

Contudo, vale lembrar que não se pode percorrer os caminhos de B para C, pois de acordo com o enunciado da tarefa, as linhas permitem a movimentação apenas nos sentidos indicados de acordo com as setas, isto é, de C para B.

A situação *c* trata da especificação do início e do fim de cada um dos cinco caminhos. Isso só é possível, porque existe a indicação do sentido nas linhas, que possibilita o preenchimento do quadro (figura 2), em que constam o início e o término dos cinco caminhos.

Figura 2: Especificação dos caminhos

Caminho	Início	Final
1	A	B
2	A	B
3	A	C
4	C	B
5	C	B

Fonte: Adaptação de Горбов et al. (2007).

Antes de abordar a situação *d*, é importante ressaltar que dois deslocamentos são diferentes quando os seus pontos, de partida e de chegada, não coincidem.

Em *d*, a análise dos diferentes deslocamentos nos cinco caminhos permite a constatação de que: os caminhos um (1) e dois (2) correspondem ao deslocamento que começa no ponto A e acaba em B; o três (3) consiste no deslocamento com origem em A e término em C; o quatro (4) e o cinco (5) incidem no deslocamento com início em C e fim em B. Portanto, nos cinco caminhos há três deslocamentos diferentes.

No que se refere a um modo para representar o deslocamento de um ponto a outro, correspondente à situação *e*, Горбов et al. (2006) consideram que o deslocamento de um ponto A para um ponto B se indica da seguinte forma: $\overline{AB}$, e ele é representado por meio de um segmento orientado (figura 3).

Figura 3: Representação do deslocamento

Fonte: Adaptação de Горбов et al. (2006).

Tal representação é algo realizável pelos estudantes, pois lhes é familiar. Sua introdução ocorre no primeiro ano no contexto do ensino da adição e subtração e resolução de problemas referentes às duas operações, cuja base é a relação parte/todo (ROSA, 2012). Ela se complexifica no segundo ano, no âmbito dos conceitos de multiplicação e divisão, cuja essência é a relação entre as unidades de medidas: básica, intermediária e a grandeza (MADEIRA, 2012).

Observa-se que a tarefa 1 tem como conteúdo o conceito de deslocamento. E, como tal, requer a identificação de dois pontos extremos: partida e chegada, o que implicitamente traz noção de sentido. Para Ramalho Junior et al. (1976, p. 126) "o deslocamento entre dois pontos é uma grandeza vetorial". Nesse sentido, verifica-se que essa grandeza é diferente daquelas com que inicia-se a apropriação do conceito de número no primeiro ano escolar, isto é, o comprimento, a área, o volume, a massa (ROSA, 2012; SOUZA, 2013).

No que diz respeito às grandezas, Winterle (2000) considera que existem dois tipos: as escalares e as vetoriais. As primeiras

> [...] são aquelas que ficam completamente definidas por apenas um número real (acompanhado de uma unidade adequada). Comprimento, área, volume, massa, temperatura, densidade, são exemplos de grandezas escalares. (WINTERLE, 2000, p. 1).

E as vetoriais se caracterizam por serem aquelas

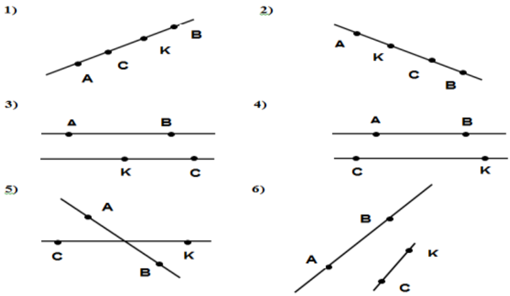
> [...] que não ficam completamente definidas apenas pelo seu módulo, ou seja, pelo número com sua unidade correspondente. Falamos das grandezas *vetoriais*, que para serem perfeitamente caracterizadas necessitamos conhecer seu *módulo* (ou comprimento ou intensidade), sua *direção* e seu *sentido*. Força, velocidade, aceleração, são exemplos de grandezas vetoriais. (WINTERLE, 2000, p. 1, grifos do autor).

Em outras palavras, ao tratar do deslocamento é necessário indicar, além do módulo, a direção e o sentido, o que não ocorre com as grandezas escalares. No que concerne à direção e ao sentido é do que a próxima tarefa trata especificamente.

Tarefa 2:

Compare as instruções dos raios AB e CK – figura 4 (ГОРБОВ et al., 2007):

Figura 4: Representação dos raios AB e CK em diferentes retas



Fonte: Adaptação de Горбов et al. (2007).

O conceito de raio na proposição davydoviana, de acordo com o estudo de Mame (2015), concerne a uma semirreta. Para estabelecê-lo, são necessários dois pontos (A e B, por exemplo), em que o primeiro deles (A) tem como característica a determinação da origem; o segundo (B) indica um ponto presente na semirreta, indicador de sua outra extremidade. Além disso, compreende-se como um segmento em estágio de alcançar um ponto (MAME, 2015).

Na figura 4, é possível destacar que os raios AB e CK pertencem as retas de todas as seis situações. Com relação à reta, cabe dizer que envolve o conceito de direção que, segundo Luz e Álvares (1997, p. 125, grifos dos autores): "[...] tem sua origem na Geometria e é caracterizado por uma reta e por todas as retas paralelas a ela. Em outras palavras, retas paralelas possuem a *mesma direção*.". No mesmo contexto, Winterle (2000, p. 1, grifos do autor) considera que "[...] a noção de direção é dada por uma reta e por todas as que lhe são paralelas. Quer dizer, *retas paralelas têm a mesma direção*.".

Os raios AB e CK das situações 1, 2, 3 e 4 (figura 4) possuem a mesma direção, pois 1 e 2 estão na mesma reta e 3 e 4 em retas paralelas. Quanto aos raios AB e CK dos itens 5 e 6, eles possuem direções distintas, pois não pertencem à mesma reta e nem a retas paralelas.

A constatação de que os raios AB e CK dos itens 1 ao 4 têm a mesma direção possibilita a análise de quando eles possuem o mesmo sentido ou sentido oposto. Tal análise é realizada por meio da posição dos dois pontos do raio, isto é, o de origem e do outro ponto presente na respectiva reta (figura 4).

Assim sendo, na situação 1, o raio AB indica que ele começa em A, passa por B e continua. O raio CK inicia em C, ultrapassa K e prossegue. Ambos os raios, ao passarem pelo segundo ponto, avançam sobre o mesmo lado da reta. Isso, para Горбов et al. (2006), significa dizer que os raios AB e CK possuem o mesmo sentido e eles são representados do seguinte modo: AB ↑↑ CK.

A situação 2 apresenta dois raios com a mesma denominação que no item 1, AB e CK, porém CK ultrapassa o ponto de origem (A) de AB com a não pretensão de passar pelo ponto B. Por consequência, permite a constatação de que o sentido dos raios AB e CK são opostos e eles são indicados do seguinte modo: AB ↑↓ CK, de acordo com Горбов et al. (2006).

Na situação 3, os raios AB e CK, ao estarem sobre duas retas paralelas, permitem a aproximação de ambas para a averiguação de que AB e CK estão em sentidos opostos, pois o raio AB avança para direita da reta em que ele se localiza e o CK prossegue para a esquerda da reta.

Do mesmo modo que a anterior, na situação 4, os raios AB e CK estão sobre duas retas paralelas. A aproximação delas e a consequente verificação de que ambos prosseguem do mesmo lado das duas retas, isto é, para a direita. Por isso, os dois têm o mesmo sentido (AB ↑↑ CK).

No que concerne às situações 5 e 6, vale destacar que não é possível comparar o sentido dos raios AB e CK, pois têm direções distintas, uma vez que estão em retas não paralelas.

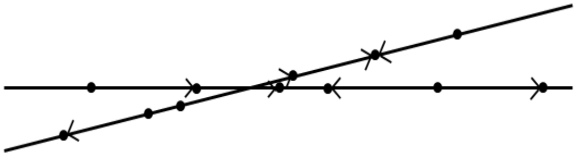
A próxima tarefa permite a verificação da direção e do sentido dos deslocamentos e a introdução do vetor.

Tarefa 3:

Determine quais os deslocamentos que se apresentam na figura 5 com as seguintes características (ГОРБОВ et al., 2007):

a) os mesmos módulos;
b) os mesmos sentidos;
c) os sentidos opostos;
d) os mesmos módulos e sentidos;
e) os mesmos módulos e sentidos opostos.

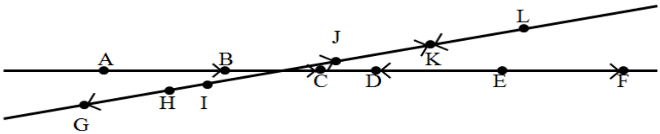
Figura 5: Deslocamentos



Fonte: Adaptação de Горбов et al. (2007).

Como os deslocamentos da figura 5 não apresentam as letras indicadoras do seu início e fim, cria-se a necessidade de uma tarefa similar, que as indiquem (figura 6), com o objetivo de atender à finalidade da tarefa: a introdução do vetor.

Figura 6: Deslocamentos: necessidade do vetor



Fonte: Adaptação de Горбов et al. (2007).

Considerando que a situação *a* solicita o módulo, vale destacar o que ele significa. Para Loreto e Loreto Junior (2014, p. 5), o módulo é "[...] o comprimento de qualquer um dos segmentos orientados [...]".

Dos oito deslocamentos presentes na figura 6, verifica-se que quatro deles, $\overline{AB}$, $\overline{ED}$, $\overline{EF}$ e $\overline{IJ}$, possuem o mesmo módulo, que pode ser denominado de a; os outros, $\overline{BC}$, $\overline{HG}$, $\overline{JK}$ e $\overline{LK}$, têm módulo b.

Pela situação *b* solicitar a comparação do sentido dos deslocamentos, que são representados por segmentos orientados (figura 6), cabe informar que: "só é possível comparar os sentidos de dois segmentos orientados se eles tiverem a mesma direção" (LORETO; LORETO JUNIOR, 2014, p. 2).

Desse modo, não é possível comparar o sentido entre cada um dos oito deslocamentos, visto que há dois grupos com quatro deslocamentos, em retas com diferentes direções. Contudo, é aceita a comparação do sentido dos deslocamentos em cada grupo, pois eles estão sobre uma mesma reta e, por consequência, têm a mesma direção.

No que se refere ao primeiro grupo dos segmentos orientados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{ED}$ e $\overline{EF}$, os que possuem os mesmos sentidos são: $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{BC}$; $\overline{AB}$

$\uparrow\uparrow \overline{EF}$ e $\overline{BC} \uparrow\uparrow \overline{EF}$. No segundo grupo de segmentos orientados, $\overline{HG}$, $\overline{IJ}$, $\overline{JK}$ e $\overline{LK}$, os de mesmos sentidos: $\overline{HJ} \uparrow\uparrow \overline{LK}$ e $\overline{IJ} \uparrow\uparrow \overline{jK}$.

Na situação *c*, do mesmo modo que em *b*, compara-se o sentido dos deslocamentos, porém, opostos. No primeiro grupo, os segmentos orientados que apresentam sentidos opostos são: $\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{ED}$; $\overline{BC} \uparrow\downarrow \overline{ED}$ e $\overline{EF} \uparrow\downarrow \overline{ED}$. No segundo, destacam-se os segmentos orientados de sentidos opostos: $\overline{HG} \uparrow\downarrow \overline{IJ}$; $\overline{HG} \uparrow\downarrow \overline{JK}$; $\overline{LK} \uparrow\downarrow \overline{IJ}$ e $\overline{LK} \uparrow\downarrow \overline{JK}$.

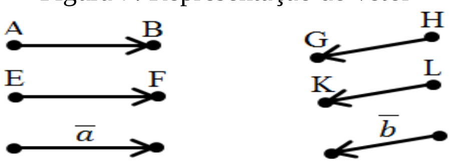
Em *d*, os deslocamentos que se caracterizam por ter os mesmos módulos e sentidos são: $\overline{AB}$ e $\overline{EF}$, bem como $\overline{HG}$ e $\overline{LK}$. Contudo, há também deslocamentos com os mesmos módulos e sentidos opostos (situação *e*), ou seja: $\overline{ED}$ e $\overline{EF}$; $\overline{ED}$ e $\overline{AB}$; $\overline{HG}$ e $\overline{JK}$; $\overline{JK}$ e $\overline{LK}$.

Dentre as situações resolvidas, a *d* se destaca em relação às outras, uma vez que ela permite a introdução do vetor, pois os seus pares de deslocamentos $\overline{AB}$ e $\overline{EF}$ e $\overline{HG}$ e $\overline{LK}$ possuem os mesmos módulos e sentidos. Dado que os referidos pares de deslocamentos possuem o mesmo sentido, eles têm também a mesma direção, visto que os sentidos só podem ser comparados quando se trata de deslocamentos com a mesma direção.

No que se refere ao vetor, Горбов et al. (2006) compreendem-no como a característica de todos os deslocamentos que possuem o mesmo módulo, direção e sentido. Em outras palavras, um vetor representa todos os deslocamentos com mesmos: módulo, direção e sentido.

Desse modo, cada par de deslocamentos $\overline{AB}$ e $\overline{EF}$, $\overline{HG}$ e $\overline{LK}$ é representado por um vetor, conforme a figura 7.

Figura 7: Representação do vetor

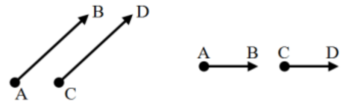


Fonte: Resolução da situação, com base na orientação de Горбов et al. (2007).

De acordo com Loreto e Loreto Junior (2014, p. 4) "um vetor é uma classe de equipolência de segmentos orientados, ou seja, é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a um segmento orientado AB, que foi dado.". Assim sendo, o vetor representa um conjunto de segmentos orientados.

Em relação à equipolência, Loreto e Loreto Junior (2014, p. 3) consideram que “o segmento orientado AB é equipolente ao segmento orientado CD se, e somente se, AB e CD tiverem as mesmas características, isto é, o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido.” (figura 8).

Figura 8: Pares de segmentos orientados que são equipolentes



Fonte: Adaptação de Loreto e Loreto Junior (2014).

A partir da verificação de como ocorre a introdução do conceito de vetor, o foco do estudo passa para a análise das necessidades concernentes às tarefas particulares que se referem ao número negativo.

No processo investigativo das necessidades, em específico, na análise das tarefas particulares, ressalta-se que as três primeiras delas, de acordo com Горбов et al. (2006), têm por objetivo criar premissas para ‘motivar’ a introdução do conceito de número negativo. As demais dizem respeito ao próprio conceito em estudo, bem como a sua representação na reta numérica.

Na seção a seguir, apresento as três primeiras tarefas particulares.

3.2 AS TRÊS PRIMEIRAS TAREFAS PARTICULARES

Na presente seção, analiso as tarefas particulares que passam a se aproximar do conceito número negativo. Basicamente, elas colocam o estudante a perceber as limitações dos números até então estudados, os positivos, pois não possibilitam que se expresse o resultado de uma peculiaridade da operação aritmética de subtração, bem como a solução de um caso específico de equação.

A primeira tarefa particular coloca o estudante em situação de necessidade de extrapolar seus conhecimentos de números positivos aos negativos. Nesse sentido, traz um elemento que é referência em todos os conceitos, desde o primeiro ano: a reta numérica. Nela, a ideia central é o percurso em sentido oposto aos números positivos. Isso ocorre não por um simples movimento de deslocamento, mas mediado pela operação de subtração, isto é, a - b, em que primeiramente o b é menor que o a, mas, por fim, resulta ser maior.

Tarefa 4:

Na reta numérica, conforme a figura 9, identifique o número correspondente ao *s*.

a) Marque sobre a reta numérica o local correspondente aos números que representam: s - 1; s - 2; s - 3; s - 4.

b) Anote os números marcados. (ГОРБОВ et al., 2007).

Figura 9: Subtração sucessiva: geradora da necessidade dos números negativos

Fonte: Adaptação de Горбов et al. (2007).

Observa-se, na figura 9, que a unidade de medida é composta de quatro malhas, pois entre o número zero e o um constam quatro partes. Isso leva à antecipação de que os números positivos e negativos se apresentarão no campo dos reais – com a ideia de medida – e não somente voltada ao número inteiro. Constata-se, ainda, que cada número na reta numérica corresponde a quatro quartos ($\frac{4}{4}$), por exemplo: $1 = \frac{4}{4}$. Do mesmo modo, o número dois consiste em oito quartos ($\frac{8}{4}$), o três em doze quartos ($\frac{12}{4}$) e, assim, sucessivamente.

Nessa compreensão, ao buscar o número *s*, observa-se que ele está entre o número dois e o três. Com o auxílio das partes da malha, verifica-se que se trata do número nove quartos ($\frac{9}{4}$). A identificação do número *s* auxiliará na resolução da questão *b*.

No entanto, a situação *a* consiste em marcar, na reta numérica, o local correspondente às subtrações sucessivas dos números: s - 1; s - 2; s - 3; s - 4. O registro dessas subtrações tem por objetivo permitir que se percorra o caminho de acordo com o sentido: dos números positivos aos negativos. A situação *a* cria a necessidade de apropriação conceitual de que há números que se localizam antes do zero. Sendo assim, o deslocamento, na reta numérica, pertinente às subtrações sucessivas, requer a ultrapassagem para parte anterior ao zero. Isso, segundo Горбов et al. (2006), pode provocar estranheza e rejeição pela maioria dos estudantes ao se depararem com a representação dos números s - 3 e s - 4. Contudo, não se descarta a possibilidade de que alguns deles continuem a marcação. E, por analogia às aprendizagens anteriores, identifiquem o local adequado desses dois números, porém, esse feito, provavelmente, terá um caráter formal; ou seja, os estudantes adotam os procedimentos do movimento na reta, porém sem a compreensão do conceito propriamente dito de número negativo.

A existência de tal possibilidade torna as subtrações sucessivas de unidades do número *s* uma condição conceitual de, na reta numérica, ultrapassar a fronteira do zero e atingir a sua parte esquerda, isto é, a parte que possibilita a representação de novos números: os negativos[14].

Observa-se que a necessidade conceitual vincula-se à questão pedagógica de elaboração da tarefa pertinente com a finalidade de os estudantes perceberem a possibilidade de outra característica do número: ser negativo ou positivo, que se articula com a eliminação das restrições da subtração (só era possível se o subtraendo fosse menor que o minuendo) e o zero como referência para relatividade (ser um número positivo ou negativo). A tarefa propicia que os escolares adentrem num contexto de execução independente de algumas operações promovidas por aprendizagens anteriores – por exemplo, subtrações sucessivas na reta numérica – e enfrentem situações novas, que se caracterizam como dúvida ou impossibilidade. Nessas circunstâncias, ela dá indícios das razões do necessário estudo dos números negativos, que são decorrentes das subtrações $a - b$, em que o número b é maior que a.

Em continuação à situação *a*, a próxima questão consiste em anotar, na reta numérica, os números correspondentes às subtrações: s - 1; s - 2; s - 3; s - 4. Nessa circunstância, a subtração se torna um conceito mediador para o surgimento dos números negativos. Caraça (2010, p. 92) considera a subtração entre dois números reais a e b, a diferença de $a - b$ como um "[...] número relativo, que diremos positivo, nulo ou negativo, conforme for $a > b$, $a = b$, $a < b$.".

A partir desse entendimento de Caraça (2010) sobre os números negativos, é possível admitir que a necessidade de indicação da situação *a* também se caracteriza como de ordem conceitual. Essa compreensão de Caraça (2010) sobre os números negativos leva à busca de uma síntese sobre a trajetória do estudante em termos de apropriação conceitual: os positivos e nulo são estudados desde o primeiro ano escolar na proposição davydoviana. Vale reafirmar que a tarefa1inicia o foco para o relativo negativo, ou seja, aqueles números em que, na diferença de $a - b$, o número a é menor que o número b.

---

[14] A nomenclatura 'negativo', para o estudante, só será apresentada em tarefas mais adiante.

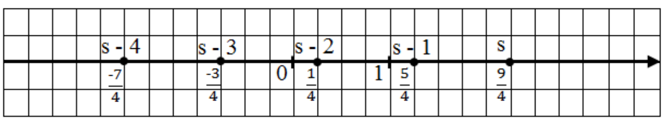
Embora o contexto do estudo se volte ao número relativo negativo, a possibilidade do seu surgimento ser subtração sucessiva, é a mesma que se apresenta – na proposição davydoviana – no primeiro ano escolar referente à introdução do número zero, conforme indicam os estudos de Rosa (2012) e Souza (2013). Contudo, destaco que existe diferença em ambos os processos. Isso porque, no primeiro ano escolar, a subtração sucessiva ocorre no contexto da singularidade numérica dos naturais, do tipo: 4 – 0 = 4, 4 – 1, = 3, 4 – 2 = 2, 4 – 3 = 1 e 4 - 4 = 0. Por sua vez, no sexto ano, a subtração se refere, além da extrapolação para parte anterior ao zero, à singularidade numérica dos racionais, como por exemplo, $\frac{9}{4} - 3 = -\frac{3}{4}$.

Como os estudantes aprenderam nos anos escolares anteriores os números decorrentes das subtrações s - 1 e s - 2, o processo de registrá-los ocorrerá sem dificuldades, uma vez que procedem diretamente na reta numérica, ou então, a partir do valor específico de *s*, subtrair dele um e dois. No entanto, nas tentativas de anotar os dois outros números, s - 3 e s - 4, é provável que os estudantes não tenham sucesso, pois os números, além de negativos, são fracionados (ГОРБОВ et al., 2006).

Com base na dificuldade dos estudantes em relação aos novos números, o professor, ao discutir a tarefa, dirige-se para a parte anterior à origem na reta numérica que antes era inacessível, isto é, os números negativos. O mais importante é a atribuição de um significado específico a esses números, para o qual o estudo se dirige a partir de agora (ГОРБОВ et al., 2006).

No contexto de dificuldades dos estudantes em relação aos números negativos, destaco que o processo de resolução da tarefa referente à situação *a* exige a marcação na reta numérica, do local correspondente às subtrações sucessivas do número *s*: s - 1; s - 2; s - 3; s - 4, isto é, a partir do número *s*, são subtraídas de uma até quatro unidades. Em *b*, são anotados os números também na reta numérica das referidas subtrações sucessivas, realizadas na situação anterior (figura 10).

Figura 10: Representação dos números correspondentes às subtrações sucessivas do *s*



Fonte: Resolução das situações com base na orientação de Горбов et al. (2007).

Essa tarefa, ao propor subtrações, principalmente nos casos em que o minuendo é menor que o subtraendo tem um propósito epistemológico articulado com o pedagógico, pois coloca o estudante diante de uma situação desconhecida e aguçante de possibilidade para um conceito ainda não apropriado.

Isso significa dizer que a obtenção dos dois últimos resultados (*s* - *3* e *s* - *4*) carece de significação conceitual e cria a necessidade de uma tarefa que a explicite ou da intervenção do professor. Em termos conceituais, a necessidade gerada na resolução de parte da referida tarefa é de que falta algo: o número negativo. Trata-se, pois, da ausência de um elemento imprescindível para algo, que demanda a satisfação das necessidades emergentes (LEONTIEV, 1978); no caso, o estudo de um novo conceito matemático no campo numérico.

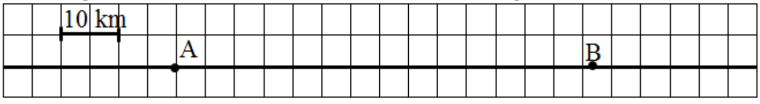
Observa-se, no entanto, que tal direcionamento para a apropriação dos números negativos também se fundamenta nas relações entre grandezas, que é a referência na proposta davydoviana para o ensino dos números. Por isso, a próxima tarefa, de acordo com Горбов et al. (2006), traz como conteúdo a construção de um movimento em linha reta – conforme a figura 11 – que, assim como na tarefa anterior, requer que se atinja a parte da reta situada à esquerda da origem. Porém, o referido movimento traz outro tipo de grandeza, a vetorial, peculiar de deslocamentos.

A grandeza vetorial se constitui, na proposição davydoviana, como o elemento fundamental para o desenvolvimento do pensamento pertinente ao número negativo. Por esta razão, requer um novo significado para a grandeza e, consequentemente, abarca em seu sistema outro conceito: o de vetor.

Tarefa 5:

O carro saiu do ponto A em direção ao ponto B, mas depois de 60 km, virou-se e se movimentou em sentido oposto. A viagem terminou no ponto C, a uma distância de 20 km do ponto A. Mostre o ponto C na figura 11. Qual é a distância percorrida depois que o carro mudou de sentido? (ГОРБОВ et al., 2007).

Figura11: Deslocamento com uma nova grandeza: vetorial

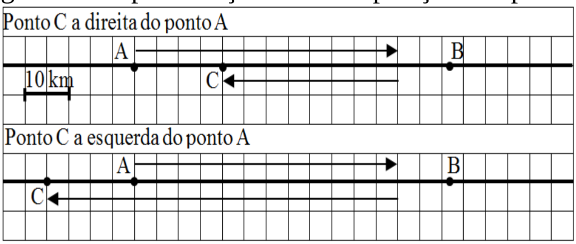


Fonte: Adaptação de Горбов et al. (2007).

Na figura 11, o não estabelecimento da posição do ponto C em relação à origem (ponto A), conforme o enunciado, cria a necessidade de identificá-lo. A localização de C é a condição imprescindível para a indicação da quantidade de quilômetros percorridos após a mudança do sentido inicial do movimento do carro.

No entanto, a tarefa dá possibilidade para admitir duplo posicionamento de C na reta: a distância de 20 km pode ser à esquerda ou à direita do ponto A. Por consequência, há duas soluções, conforme mostra a figura 12. Em uma delas, ao considerar o ponto C à direita de A, o carro percorre 40 km após mudar o sentido da viagem. A outra, ao admitir C à esquerda de A, que implica no aumento da distância percorrida pelo carro para 80 km, depois da mudança do sentido inicial da viagem (ГОРБОВ et al., 2006).

Figura 12: Representação das duas posições do ponto C



Fonte: Resolução da situação com base na orientação de Горбов et al. (2007).

Ao considerar a segunda solução, constata-se que se atinge a parte anterior à origem, como na tarefa 4; porém, de outro modo: por meio da grandeza vetorial de deslocamento. Isso ocorre por consequência da mudança do sentido da referida grandeza e pela distância superior àquela percorrida antes da alteração do seu sentido.

A atenção dada, na tarefa, à representação do deslocamento numa reta, faz a alusão ao contexto histórico de desenvolvimento do conceito de número negativo. Isso porque eles só foram aceitos quando os geômetras compreenderam “[...] que em certas classes de grandezas, como as distâncias sobre uma reta ilimitada ou as durações no tempo, há de se considerar dois sentidos opostos.” (COSTA, 1981, p. 222).

Desse modo, a aceitação dos números negativos está vinculada às grandezas que possuem sentidos opostos. Em outros termos, elas são as vetoriais, visto que se caracterizam por possuir: uma *direção*, que é determinada pela própria reta numérica; um *sentido* que depende de para onde se processará o deslocamento; e um *módulo*, isto é, o comprimento, que dependerá de uma unidade de medida, no caso, corresponde à distância percorrida pelo carro.

A síntese sobre o conteúdo da tarefa 5 é de que a identificação do ponto C em relação ao ponto A requer o uso de uma grandeza vetorial, o deslocamento, que possibilita alcançar a parte da esquerda de uma reta em relação à origem.

Há, pois, uma inter-relação entre as duas tarefas anteriores. A tarefa 4 gerou a necessidade de um novo número, o negativo, por meio da subtração na reta numérica. Por sua vez, a 5 dá indícios de superação ao anunciar com que grandeza é possível chegar na parte anterior à origem numa reta.

No entanto, em ambas, a reta – seja ela numérica ou não – serviu para mostrar dois modos de atingir a sua parte à esquerda em relação à origem: uma pela subtração e outra pela grandeza vetorial, deslocamento. Contudo, na seguinte (tarefa 6), o foco é a adoção de outra forma de introdução dos números negativos, que gera uma nova necessidade.

Tarefa 6:

Selecione a equação que pode ser resolvida e encontre sua solução (ГОРБОВ et al., 2007):

a) $x + 178 = 356$; c) $x \cdot 178 = 356$;
b) $x + 356 = 178$; d) $x \cdot 356 = 178$.

As quatro situações que compõem a tarefa apresentam um teor de avaliação em relação à capacidade dos estudantes de destacar, entre as equações, aquelas cuja resolução ocorre por métodos conhecidos por eles, como também, de chegar às soluções apropriadas (ГОРБОВ et al., 2006). Os autores ainda destacam que, até o momento, os estudantes desenvolveram condições para solucionar as equações das questões *a*, *c* e *d* por meio da relação ‘parte/todo’, pois as operações ainda envolvem somente números positivos. De acordo com Rosa (2012), o desenvolvimento conceitual dessa relação ocorre no primeiro ano escolar – com o foco no sistema conceitual centrado na adição, subtração e equação – em que o ‘todo’ possui a característica de ser um valor composto por outros dois: as ‘partes’.

Na equação correspondente à situação *a*, o uso dos conceitos de parte e todo está relacionado com a operação de subtração que, conforme Rosa (2012), se caracteriza por se conhecer o todo e apenas uma das duas partes. Portanto, seu objetivo consiste em determinar o valor da parte desconhecida. Então, o valor da incógnita *x*, em x + 178 = 356, requer a operação de subtração 356 -178, o que resulta em x = 178.

Nas situações *c* e *d*, as equações expressam duas multiplicações que possuem valores desconhecidos, representados pela incógnita *x*. Para Rosa, Damazio e Crestani (2014), na operação de multiplicação, $a \cdot b = c$, o *a* corresponde ao valor de uma medida intermediária (composta por certa quantidade de unidade de medida básica), o *b* à quantidade de vez que a medida intermediária se repete e o *c* ao total de medidas básicas. Isso significa que o conceito de multiplicação também está vinculado à relação entre grandezas e ela se expressa somente quando não se conhece o total de medidas básicas.

As equações da situação *c* e *d* têm como valor desconhecido a medida intermediária. Isso mostra que a operação é a inversa da multiplicação, a divisão que, segundo Rosa, Damazio e Crestani (2014), é definida quando se tem o total de medida básica e o valor da medida intermediária e se quer determinar a quantidade de vezes da medida intermediária. Essas equações não atendem à definição de multiplicação e tampouco da divisão, pois o valor desconhecido é o da medida intermediária. Nesse contexto, surge um problema: como encontrar o valor da medida intermediária se a divisão apenas permite determinar a quantidade de vezes que ela aparece?

Para a solução do problema, adota-se a propriedade comutativa da multiplicação ($a \cdot b = c$ e $b \cdot a = c$). Por decorrência, as equações *c* e *d* se transformam em: 178 · x = 356 e 356 · x = 178. Assim sendo, o valor desconhecido é a quantidade de vezes da medida intermediária. A adoção da propriedade comutativa não é algo novo para os estudantes, pois é um conhecimento adquirido desde o segundo ano escolar.

x · 178 = 356 → 178 · x =356	x · 356 = 178 → 356 · x = 178

Isso torna possível recorrer à divisão: x = 356:178 e x = 178:356, o que permite identificar que, na equação *c*, a referida quantidade corresponde a duas vezes (x = 2) e em *d* à metade de uma vez ($x = \frac{1}{2}$).

Com isso, é possível esclarecer os componentes da relação parte/todo nas equações *c* e *d*. Na equação *c*, o todo é o 356 e as partes 178 e *x*. Em *d,* o todo é o 178 e as partes 356 e *x*. Observa-se que essa relação ocorre com significações diferentes: na adição e subtração com a ideia aditiva e subtrativa, e na multiplicação traz a ideia de multiplicidade e divisibilidade.

Diferentemente das equações *a*, *c* e *d*, a equação *b* mostra a impossibilidade de solução com os números até então estudados, visto que qualquer número positivo adicionado a 356 resulta que o primeiro membro da equação torna-se maior e não igual ao segundo.

Горбов et al. (2006) dizem que essa equação é passível de rejeição, por parte dos estudantes, com argumento do tipo: "essa igualdade é impossível porque qualquer valor dado a *x* do lado esquerdo é maior do que o direito" e "nós não sabemos como subtrair o maior do menor".

Novamente, detecta-se a necessidade conceitual de um número com uma característica ainda não estudada, isto é, negativo, pois apenas ela permite que a equação x + 356 = 178 tenha uma solução, x = 178 - 356, então, x = - 178.

Vale ressaltar que o resultado da equação *b*, para Горбов et al. (2006), possui apenas um caráter formal (procedimental) e não indica que o estudante ainda tenha alguma noção conceitual dos números negativos. Os autores também não descartam a possibilidade de obtenção do resultado errado, por exemplo, *x* = 178. Isso mostra que a atenção do estudante não se volta ao entendimento da essência da tarefa, mas a executa formalmente, recorrendo aos procedimentos que domina.

O professor enfatizará que a compreensão do significado de equações desse tipo e a busca de uma maneira de resolvê-las é algo emergente e uma das exigências imediatas (ГОРБОВ et al., 2006). Essa ausência conceitual dirigirá o ensino para os números negativos.

A carência do número negativo é o teor da tarefa 6, que solicita a resolução de equações. Em algumas delas, a incógnita *x* há de ser menor que zero para que se obtenha a igualdade entre os dois membros. Nesse caso, há um conceito ainda desconhecido dos estudantes, imprescindível para a resolução da equação. Há uma repetição de mesma necessidade, embora diferente daquela emergente abordada pela tarefa 4. Isso porque, primeiramente, sua gênese foi a subtração e, na tarefa em análise foi a equação. Significa dizer que, na Matemática, não existe apenas uma forma de se chegar aos números negativos.

Do conjunto de tarefas analisadas, é possível dizer que elas, além de criarem expectativas e necessidades, também trazem elementos necessários pertinentes ao conceito de números negativos. Na primeira e na terceira, recorrem ao uso dos conceitos até então apropriados pelos estudantes, tais como o de subtração e o de equação, para a demonstração da necessidade do estudo de novos números, no seu processo de resolução. Relativamente à segunda tarefa, ela elege o uso de uma nova grandeza, a vetorial, que possibilita a obtenção dos números que são conhecidos pelos estudantes e, além disso, permite também chegar aos números desconhecidos.

Na próxima seção, como anunciado no início do capítulo, a análise adentrará nas tarefas, cujo desenvolvimento, pelos estudantes, possibilita a superação das resoluções por procedimentos meramente formais, pois instigam a apropriação das significações essenciais do conceito de número negativo.

3.3 OS NÚMEROS NEGATIVOS

Esta seção se caracteriza pelas tarefas particulares que se referem ao estudo do conceito de número negativo. Nela são analisadas, especificamente as necessidades não só da introdução dos números negativos, mas também do zero e do número positivo.

3.3.1 Introdução dos números negativos

A presente seção tem por objetivo a introdução dos números negativos. Para cumprir tal propósito, a primeira tarefa particular apresenta duas características importantes. Uma delas é que promove a transferência do método usado na medição das grandezas escalares (comprimento, área, volume, massa, etc.) para a medição das grandezas vetoriais, representadas por vetores. A outra estabelece que, ao se medir um vetor, é condição que se tome outro como unidade, desde que tenha o mesmo sentido.

Em se tratando do método usado para a medição de grandezas, recorro a Caraça (2010) ao afirmar que medir consiste na comparação de duas grandezas da mesma espécie: dois comprimentos, dois pesos, dois volumes, entre outras. Nesse processo se destacam três fases vinculadas entre si: a escolha da grandeza tomada como unidade; a comparação da unidade com a grandeza a ser medida; e a expressão do resultado dessa comparação por um número.

De um modo similar, Costa (1866) considera que medir uma grandeza corresponde à determinação de quantas vezes ela contém a outra grandeza de mesma espécie tomada como unidade. Existe, então, uma relação dos números com as grandezas, ou seja: “[...] os números são expressões de medida das grandezas.” (COSTA, 1866, p. 9).

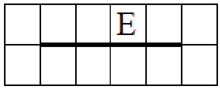
É nesse contexto de medição de grandezas que se inicia o estudo das tarefas particulares referentes à introdução dos números negativos.

Tarefa 7:

a) A partir da unidade E (figura 13), construir um segmento de comprimento:

1) D = E + E; 2) B = E + E + E; 3) C = E + E + E + E.

Figura 13: Comprimento



Fonte: Adaptação de Горбов et al. (2007).

b) Medir o comprimento E, D, B e T, onde T = $\underbrace{E + E + \cdots + E}_{n}$, com a unidade E:

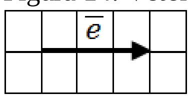
$$\frac{E}{E} = \ ; \frac{D}{E} = \ ; \frac{B}{E} = \ ; \frac{T}{E} = \ .$$

c) De que outra forma é possível registrar os resultados da medição dessas grandezas?

d) Construa os vetores:

1) $\overline{d} = \overline{e} + \overline{e}$; 2) $\overline{b} = \overline{e} + \overline{e} + \overline{e}$; 3) $\overline{c} = \overline{e} + \overline{e} + \overline{e} + \overline{e}$.

Figura 14: Vetor



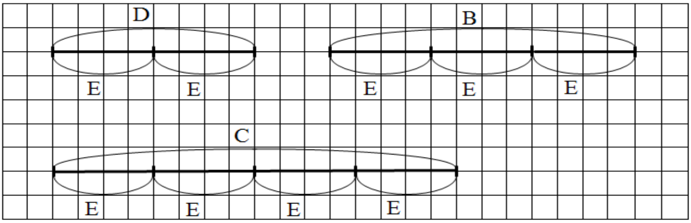
Fonte: Adaptação de Горбов et al. (2007).

e) Seja $\overline{t} = \underbrace{\overline{e} + \overline{e} + \cdots + \overline{e}}_{n}$, como especificar a relação dos vetores $\overline{d}, \overline{b}, \overline{e}$ e $\overline{t}$ com o vetor $\overline{e}$ (ligados por seu módulo e sentido com o módulo e o sentido do vetor $\overline{e}$)? (ГОРБОВ et al., 2007).

O pressuposto é que as situações *a*, *b* e *c* reproduzem o conhecimento apropriado pelos estudantes desde o primeiro ano escolar. Não é demais reafirmar que esse período escolar é marcado pela introdução das grandezas (comprimento, área, volume, etc.), pois o conceito de número se alicerça na relação entre elas.

A situação *a* requer a construção de segmentos, conforme solicitação, nos itens 1, 2 e 3, por meio da unidade E. Nesse caso, os segmentos D, B e C possuem, respectivamente, comprimentos iguais a dois, três e quatro segmentos de E (figura 15).

Figura 15: Representação dos segmentos D, B e C



Fonte: Resolução da situação com base na orientação de Горбов et al. (2007).

Diferentemente da situação *a*, a *b* e *c* solicitam o uso do número como meio de expressar as relações entre as grandezas. Mais especificamente, são adotadas as duas fórmulas que retratam o conceito teórico de número que, para Rosa (2012), são: $\frac{A}{B} = c$ e A = cB (A representa a grandeza a ser medida, B a grandeza tomada como unidade, e *c* o número que manifesta a relação entre as duas grandezas).

Essas fórmulas revelam duas relações entre as grandezas: a de divisibilidade e a de multiplicidade. Na primeira relação, A, ao ser dividido em partes iguais a B, resultará em *c* partes. E, na segunda, A será igual a *c* vezes B (ROSA, 2012).

Ambas as relações se apresentam nas situações *b* e *c*. Em *b*, recorre-se à relação de divisibilidade entre E, D, B e T com a unidade E. Tal relação indica em quantas partes, iguais à grandeza E, é possível dividir E, D, B e T. Após a devida comparação, as respectivas relações são expressas do seguinte modo: $\frac{E}{E} = 1; \frac{D}{E} = 2; \frac{B}{E} = 3; \frac{T}{E} = \text{n}$.

Na situação *c*, o processo comparativo entre as grandezas E, D, B e T, tomada E como unidade, expressa a relação de multiplicidade, ou seja, E = 1E, D = 2E, B = 3E e T = nE.

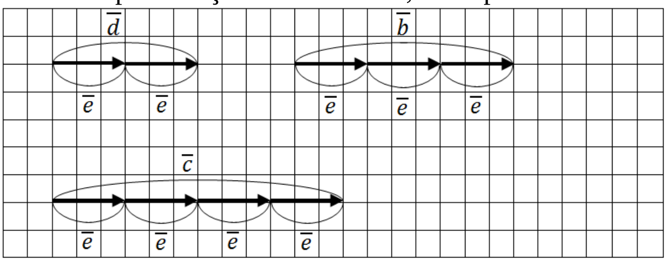
Observa-se que até a situação *c*, as relações se dão entre grandezas de comprimento. A partir de *e*, o vetor passa a ser o objeto. E, como tal, requer a observância de suas características: módulo (comprimento), direção e sentido.

A adoção do vetor como objeto de medida, nas próximas tarefas, permite a constatação de que ocorre a passagem das grandezas escalares para a vetorial. Repete-se, pois, o ocorrido na tarefa 4 que gerou a necessidade do número negativo, bem como na tarefa 5 que explicitou a grandeza a ser usada para atingir a parte anterior à origem da reta referente aos números negativos.

A passagem do estudo da grandeza escalar para as vetoriais requer a representação por vetores. Além disso, é necessário que se esclareça aquilo que é comum e também o que é distinto entre elas. Isso se torna referencial a partir da comparação das situações a, b e c – grandeza escalar de comprimento – com as questões d e e – vetor.

Assim como ocorreu com o comprimento na situação a, em que se identificou a quantidade de vezes que a unidade se repete na grandeza a ser medida, com os vetores ocorre o mesmo procedimento. Isso é possível se verificar na situação d, na qual são construídos os vetores $\overline{d}$, $\overline{b}$ e $\overline{c}$ a partir do vetor unidade $\overline{e}$. Em outras palavras, a determinação de cada vetor ($\overline{d}$, $\overline{b}$ e $\overline{c}$) está atrelada à quantidade de vetor unidade, como mostra a figura 16, ou seja: $\overline{d} = 2\overline{e}$, $\overline{b} = 3\overline{e}$ e $\overline{c} = 4\overline{e}$.

Figura 16: Representação dos vetores $\overline{d}$, $\overline{b}$ e $\overline{c}$ por meio do vetor $\overline{e}$



Fonte: Resolução da situação com base na orientação de Горбов et al. (2007).

Em e, a comparação de dois vetores não se limita apenas ao seu módulo – como ocorria na relação entre duas grandezas de comprimento –, pois exige outra característica: a análise do sentido deles. Isso só é possível se os vetores em comparação têm a mesma direção, Ou seja, se $\overline{e}$ tem uma direção e faz parte dos vetores $\overline{b}$, $\overline{d}$ e $\overline{t}$, significa dizer que eles possuem a mesma direção que $\overline{e}$.

A análise do sentido dos vetores $\overline{e}$, $\overline{b}$, $\overline{d}$ e $\overline{t}$, na situação e, se revela, em termos pedagógicos, com o propósito de gerar uma nova necessidade conceitual: a comparação dos sentidos dos mencionados vetores, vinculada com a introdução dos números negativos.

O fato de os vetores $\overline{t}$, $\overline{d}$, $\overline{b}$ e $\overline{e}$ terem o mesmo sentido da unidade $\overline{e}$ acarreta que a comparação entre eles seja representada pelos mesmos números das situações b e c. Portanto, o resultado de tal comparação é: $\overline{t}$ = n$\overline{e}$; $\overline{d}$ = 2$\overline{e}$; $\overline{b}$ = 3$\overline{e}$; $\overline{e}$ = 1$\overline{e}$.

A necessidade de comparar vetores de mesmo sentido, por si só, não garante o estudo dos números negativos, pois se assim fosse ele se apresentaria na presente situação. O referido propósito requer algo mais, o que surgirá na próxima tarefa.

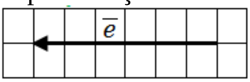
Na tarefa 8, o foco continua na comparação entre vetores, porém em sua situação c, surge um problema: o vetor a ser medido e o vetor unidade estão em sentidos opostos (ГОРБОВ et al., 2006).

Tarefa 8:

a) Construa os vetores:

1) $\overline{d} = \frac{2}{3}\overline{e}$; 2) $\overline{m} = 1\frac{5}{6}\overline{e}$; 3) $\overline{b} = 1{,}5\ \overline{e}$; 4) $\overline{a} = 1{,}5_{(6)}\overline{e}$.

Figura 17: Representação do vetor unidade $\overline{e}$



Fonte: Adaptação de Горбов et al. (2007).

b) Construa um vetor oposto ao vetor $\overline{b}$.

c) Como definir a relação entre o vetor $-\overline{b}$ com o vetor $\overline{e}$ (ligados por seu módulo e sentido)?

$$-\overline{b} = \quad \overline{e}; \qquad \frac{-\overline{b}}{\overline{e}} = \quad .$$

d) Construa os vetores:

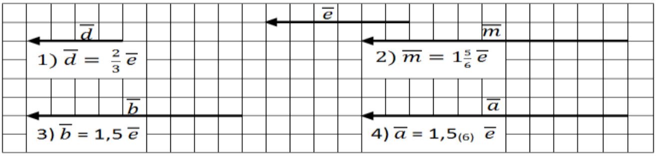
1) $\overline{c} = -0{,}5\ \overline{e}$; 2) $\overline{s} = -2\frac{1}{3}\overline{e}$.

e) Quais são os números expressos na relação dos vetores $\overline{c}$, $-\overline{c}$, $\overline{s}$, $-\overline{s}$ com o vetor $\overline{e}$?

$$\frac{\overline{c}}{\overline{e}} = \qquad \frac{-\overline{c}}{\overline{e}} = \qquad \frac{\overline{s}}{\overline{e}} = \qquad \frac{-\overline{s}}{\overline{e}} =$$

A partir do vetor unidade $\overline{e}$, conforme situação *a*, são construídos os seguintes vetores $\overline{d}$, $\overline{m}$, $\overline{b}$ e $\overline{a}$ (figura 18). Tal construção envolve o conhecimento da singularidade numérica dos racionais (DAVÝDOV, 1982), como também de diferentes bases numéricas.

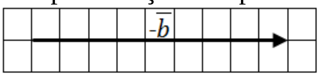
Figura 18: Representação dos vetores $\overline{d}$, $\overline{m}$, $\overline{b}$ e $\overline{a}$ a partir do vetor $\overline{e}$



Fonte: Resolução da situação com base na orientação de Горбов et al. (2007).

O desenvolvimento da situação *b* continua com a construção de vetores, mas com a diferença de que muda o sentido, isto é, o oposto do vetor $\overline{b}$ (figura 19). De acordo com Winterle (2000), o oposto de um determinado vetor é aquele que mantém o mesmo módulo e direção, porém, o seu sentido é contrário.

Figura 19: Representação do oposto do vetor $\overline{b}$



Fonte: Adaptação com base em Горбов et al. (2007).

A partir da abordagem do vetor e seu oposto é que o modo davydoviano de organização do ensino propõe, aos estudantes, a tarefa que traz algo de essencial ao estudo dos números negativos: o sentido oposto de um vetor em relação a outro.

No entanto, vale enfatizar que a introdução desses números somente acontece na resolução da situação *c*. Por essa situação tratar da comparação do vetor oposto -$\overline{b}$ com o $\overline{e}$, ela carece da explicitação das suas características de módulo e sentido. Isso significa o surgimento de outra necessidade: a especificação, não somente do seu módulo, mas essencialmente do seu sentido em relação ao vetor $\overline{e}$.

Nesse estágio de desenvolvimento do pensamento conceitual de um novo número, há de se perguntar: onde está o seu conteúdo aritmético? Coloco no âmbito desse questionamento a afirmação de

Горбов et al. (2006) que esse momento no qual se insere a situação c é marcado por outra necessidade: o registro numérico não só da correlação entre os módulos, mas ao mesmo tempo, dos seus sentidos.

A especificação da comparação dos vetores -$\overline{b}$ e $\overline{e}$ leva à necessária explicitação da relação entre os seus módulos e sentidos. Por se tratar da comparação de duas grandezas da mesma espécie, acarreta na medida do vetor -$\overline{b}$, a partir da unidade vetor $\overline{e}$. Tal medição proporciona que o resultado seja um número. Por consequência, apresenta-se a necessidade do registro numérico das características de módulo e sentido de ambos os vetores.

Com base na comparação necessária à situação c, é possível afirmar que ela só atende em parte a possibilidade de exprimir numericamente a relação entre os vetores -$\overline{b}$ (figura 19) e $\overline{e}$ (figura 17). Tal incompletude advém porque os estudantes até podem analisar o módulo de -$\overline{b}$ em relação a $\overline{e}$ e expressar com números estudados, os positivos, denominados por Горбов et al. (2006) de conhecidos[15]. Porém, eles não consideram que ambos os vetores (a ser medido e o unidade) têm sentidos opostos.

Como meio de superar a referida insuficiência dos números anteriores, Горбов et al. (2006) sugerem a introdução de novos números, os quais expressem não somente a relação entre os módulos dos vetores, mas também os sentidos, necessariamente, opostos.

Nesse contexto, apresenta-se outra necessidade de ordem representativa e de distinção, pois no processo histórico não se criou um signo para os novos números. Por isso, precisa um componente simbólico, sinal, que se acrescentará aos signos para diferenciar daqueles adotados para os números positivos. É esse sinal que caracteriza os números negativos e se vincula ao sentido oposto de dois vetores. Esse componente, segundo Горбов et al. (2006), corresponde ao sinal menos "-", adotado no capítulo anterior (Deslocamento e Vetor), para indicar o deslocamento oposto, porém com a finalidade de representar/indicar os sentidos opostos de dois vetores.

---

[15]Na tradução das orientações referentes à tarefa de introdução dos números negativos, primeiramente consta que esses novos números são opostos aos números já conhecidos (positivos) pelos estudantes. Depois, a expressão 'os já conhecidos' é mencionada como os 'antigos', pois, nessa altura, o estudo é marcado pela introdução de novos números. Assim sendo, adotarei a denominação de 'anterior' para mencionar os números já conhecidos pelos estudantes.

O sinal de menos, portanto, supriu a necessidade de representação dos novos números surgidos da relação entre dois vetores de sentidos diferentes. Como dizem Горбов et al. (2006), "-" é usado para indicar que os novos números são opostos aos até então conhecidos, os anteriores.

Observa-se que as situações de cada tarefa, aparentemente simples, trazem implicitamente questões conceituais e didáticas novas que propiciam tanto a articulação entre si como a vinculação com tarefas do próprio capítulo e anteriores. Contudo, salienta-se a possibilidade que elas trazem para o surgimento de necessidades conceituais que, por sua vez, propõem a elaboração de novas situações ou tarefas. Nelas, a relação de 'vetores opostos' é transferida para 'os números opostos', decorrentes da medição do vetor oposto com o auxílio do vetor unidade. No desenvolvimento de futuras ações e suas correspondentes tarefas particulares, essa relação vetorial, traduzida em representação numérica, será a base para a introdução da adição e subtração de números positivos e negativos (ГОРБОВ et al., 2006).

Vale reafirmar que, somente depois do ensino dessas duas operações, se introduzirá a nomenclatura: "números negativos" e "números positivos". Até então, conforme Горбов et al. (2006), importa que os alunos compreendam a ideia básica caracterizadora do conceito: a relação 'ser oposto'. Por exemplo, o número -2 é o oposto do número 2, e não como um nome próprio de um número negativo, os números com "menos".

Essa referência conceitual (o oposto de) é base para que, na situação *c,* a relação de multiplicidade e divisibilidade – entre o vetor $-\overline{b}$ e o vetor $\overline{e}$ – seja expressa do seguinte modo: $-\overline{b} = -1{,}5\overline{e}$ e $\frac{-\overline{b}}{\overline{e}} = -1{,}5$. Em se tratando da relação de multiplicidade, corresponde que o vetor oposto de b ($-\overline{b}$) é igual a uma vez e meia o vetor $\overline{e}$ e o sentido de ambos é oposto. Na relação de divisibilidade, o vetor oposto de b ($-\overline{b}$), ao ser dividido em partes iguais ao vetor $\overline{e}$, resulta em uma parte e meia e, também, com sentido oposto.

Nota-se que as relações entre grandezas, como base genética essencial do conceito de número, mantêm-se para os negativos, porém, elas envolvem os vetores – representativos das grandezas vetoriais –, mais especificamente, de sentidos opostos. Portanto, eles foram introduzidos num processo cuja organização didática privilegiou a inter-relação das seguintes ideias: a construção dos vetores, a comparação do sentido entre eles e a comparação entre aqueles de sentidos opostos.

A organização das tarefas particulares para a apropriação do conceito de número negativo com o significado de oposto, mediada pela grandeza vetorial (vetor), permite a inferência de que o ensino do referido conceito só é possível porque a mencionada grandeza possui característica diferente das escalares.

As grandezas escalares não apresentam a credencial necessária ao estudo do número negativo, isto é, o sentido. Por isso, a emergência de uma organização que crie as condições didáticas de passagem da grandeza escalar para a vetorial, no estudo dos números, conforme a situação *d* da tarefa 7. É, pois, desta situação que brotam necessidades conceituais que identificaremos a seguir.

O vetor, como condição genética, explica a insuficiência das grandezas escalares para o estudo do número negativo, pois elas não apresentam uma característica essencial a tal finalidade: o sentido. Daí que a situação *d* da tarefa 7 se caracterize como uma necessidade.

A situação *e* (tarefa 7) também motiva a emergência de uma necessidade conceitual, pela exigência de comparar, além dos módulos dos vetores, os seus sentidos, ausentes nas grandezas escalares que são conhecimento predominante dos estudantes.

Pelo fato de o vetor oposto estar ausente no contexto dos números e, ao mesmo tempo, constituir-se como elemento conceitual do número negativo, a sua construção (situação *b* da tarefa 8) se transforma em uma necessidade para a introdução do referido número.

Cabe informar que, para Горбов et al. (2006), é somente no final do sexto ano escolar com o estudo dos negativos que se forma a ideia completa sobre o número real. Porém, ressalta-se que na organização davydoviana do ensino isso se inicia desde o primeiro ano, com os números positivos.

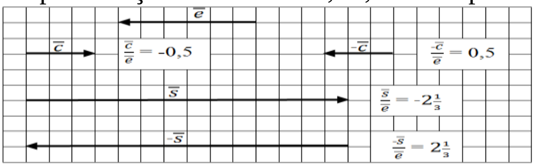
Conforme Rosa (2012), tal proposição inicia com o ensino dos números reais, centrado nos positivos e o zero, decorrentes da relação entre grandezas escalares: comprimento, área, volume, entre outras.

Mais uma vez, vale reportar que o significado de número negativo está relacionado com o conceito de oposto, que será referência nas situações *d* e *e* (tarefa 8). Nesse sentido, a situação *d* propõe a construção dos vetores $\overline{c}$ e $\overline{s}$, conforme a figura 20[16]. Tal construção auxiliará tanto no desenvolvimento da situação *e* como na comparação entre os vetores, uma vez que o seu objetivo consiste em mostrar qual é o oposto de um número oposto. Portanto, a tarefa é anunciativa para as

[16]Na figura 20, foram acrescentados os vetores $-\overline{c}$ e $-\overline{s}$ com o intuito de auxiliar a comparação a ser realizada na questão *e*.

posteriores, que tratarão da formação do pensamento conceitual de quando um número é oposto de si mesmo.

Figura 20: Representação dos vetores $\overline{c}$, -$\overline{c}$, $\overline{s}$ e -$\overline{s}$ a partir do vetor $\overline{e}$



Fonte: Resolução da situação com base na orientação de Горбов et al. (2007).

Em e, ao comparar cada grupo de vetores ($\overline{c}$ e -$\overline{c}$) e ($\overline{s}$ e -$\overline{s}$) com o mesmo vetor unidade $\overline{e}$, verifica-se que os números que representam suas relações são: -0,5, 0,5, -2$\frac{1}{3}$, e 2$\frac{1}{3}$. Em síntese, eles são os opostos (se negativos) ou os anteriores (se positivos), conforme o sentido dos vetores.

A partir desses resultados, constata-se que a comparação entre dois vetores de mesmo módulo, mas de sentidos diferentes em relação a um mesmo vetor unidade, resulta em números opostos. No entanto, essa ideia aparentemente genérica não se aplica a um único número, o zero, como evidenciará a tarefa 10. Por isso, esse número será a referência na próxima tarefa e subseção.

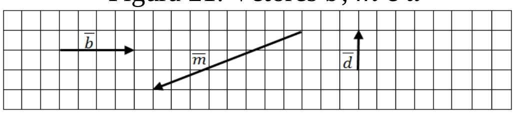
3.3.2 O zero

Esta subseção consta de duas tarefas particulares que têm como finalidade retratar a existência um número, cujo oposto é ele próprio.

Tarefa 9:

Expresse a medida do vetor zero por meio dos vetores unidades $\overline{b}$, $\overline{m}$ e $\overline{d}$, conforme a figura 21 (ГОРБОВ et al., 2007).

Figura 21: Vetores $\overline{b}$, $\overline{m}$ e $\overline{d}$



$$\frac{\overline{0}}{\overline{b}} = \quad . \frac{\overline{0}}{\overline{m}} = \quad . \frac{\overline{0}}{\overline{d}} = \quad .$$

Fonte: Adaptação de Горбов et al. (2007).

O vetor zero, para Winterle (2000), corresponde a um ponto qualquer do espaço com as seguintes características: 1) sua origem coincide com sua extremidade e, consequentemente, ele representa que não houve deslocamento; 2) não possui sentido e direção definidos.

A constatação de que o vetor zero representa um ponto e sem deslocamento, permite concluir que a sua medição, tomando qualquer outro não nulo como unidade, resulta em nenhuma medida. Ou seja, a expressão da comparação do vetor zero por $\overline{b}$, $\overline{m}$ e $\overline{d}$ é nenhuma medida. O zero, no contexto do vetor, determina a relação entre o vetor nulo com qualquer outro vetor que não seja nulo (ГОРБОВ et al., 2006).

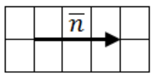
A tarefa a seguir procura atribuir outra característica ao número zero, além da indicação nenhuma medida.

Tarefa 10:

a) Construa os vetores:

1) $\overline{b}$ = -7$\overline{n}$;   2) $\overline{c}$ = 7 (-$\overline{n}$);   3) $\overline{d}$ = 13 $\overline{0}$;   4) $\overline{l}$ = -8 $\overline{0}$

Figura 22: Vetor unidade $\overline{n}$



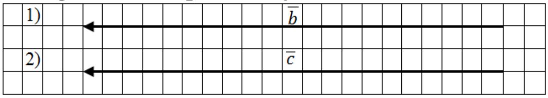
Fonte: Adaptação de Горбов et al. (2007).

b) Compare os vetores:

1) $\overline{b}$ e $\overline{c}$;   2) $\overline{d}$ e $\overline{l}$.

A construção solicitada na situação *a* adota por base dois vetores unidades distintos, sendo um nulo e o outro não. Apesar de os vetores $\overline{b}$ e $\overline{c}$ (figura 23) serem expressos por números diferentes – oposto (-7, no item 1) e anterior (7, no item 2) –, eles possuem o mesmo sentido. Isso porque o vetor $\overline{b}$, por ser igual a menos 7 $\overline{n}$, tem como significado que seu módulo é sete e o seu sentido é oposto (-) ao vetor $\overline{n}$. Assim também, o vetor $\overline{c}$ possui módulo igual a sete, mas nele existe a indicação (-$\overline{n}$) de que o vetor unidade é oposto a ele mesmo.

Figura 23: Representação dos vetores $\overline{b}$ e $\overline{c}$



Fonte: Resolução da situação com base na orientação de Горбов et al. (2007).

A terceira e a quarta situações apresentam vetores ($\overline{d}$ e $\overline{l}$) com sentidos opostos em relação de igualdade estabelecida pela multiplicação de um número por $\overline{0}$, respectivamente, 13 e -8. Observa-se que, ao serem expressos pelo vetor nulo, trata-se apenas de um convite à reflexão, por parte dos estudantes, pois se $\overline{0}$ é unidade de medida, torna-se impossível o processo de medição, isto é, indicar quantas vezes ele se inclui em outro vetor. Em termos aritméticos e algébricos não se verificaria a relação de divisibilidade do modelo universal do conceito de número, ou seja, estaria ocorrendo aquilo que em Matemática não se admite, a divisão por zero.

Contudo, essas duas situações contribuem para a análise de que o oposto do vetor nulo ou zero é ele próprio, pois ao adotá-lo como referência não é possível deslocá-lo em nenhum dos dois sentidos. Qualquer deslocamento, a partir dele, caracteriza necessariamente outro vetor diferente de $\overline{0}$. Por consequência, o zero não é nem negativo, nem positivo (ГОРБОВ et al., 2006).

Assim sendo, essa tarefa supriu a necessidade da existência de um único número que se admite como sendo oposto de si, o zero. Trata-se, então, de uma exceção, uma vez que os demais números também admitem somente um simétrico, que não são os próprios. Por exemplo, um número negativo também tem um único número oposto que é o valor que, na reta, está localizado a tantas unidades quanto ele em relação ao zero, em sentido oposto.

A próxima tarefa também está no contexto do oposto, porém o seu foco é para as determinações dos sinais usados nos números que expressam a comparação de cada um dos dois vetores opostos ($\overline{a}$ e -$\overline{a}$) com outro vetor tomado como unidade ($\overline{e}$) e do número que representa o módulo dos vetores, independentemente se eles tenham sentidos opostos.

3.3.3 O Número positivo

Nesta subseção, analiso o surgimento dos números positivos, agora não mais no contexto conceitual da relação entre grandezas escalares, mas no âmbito genético dos números negativos: por exemplo, por meio de dois conjuntos de vetores opostos a uma mesma unidade, como na tarefa 11. Além disso, é especificada a questão do uso dos sinais de “+” para positivo e “-” para negativo. Subjacentemente está a ideia de relatividade dos números reais, qual seja: ser positivo ou negativo, ao se estabelecer como referência o zero.

Tarefa 11:

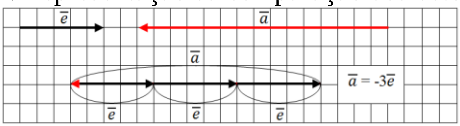
Seja $\overline{a}$ = -3$\overline{e}$. Determine:

1) $\frac{\overline{a}}{\overline{e}}$; 2) $\frac{-\overline{a}}{\overline{e}}$; 3) $\frac{|\overline{a}|}{|\overline{e}|}$; 4) $\frac{|-\overline{a}|}{|\overline{e}|}$.

Qual a diferença dos números que expressam a relação de vetores opostos à mesma unidade? O que elas têm em comum? Como você pode chamar esses números? O que poderia ser chamado de o número do módulo? (ГОРБОВ et al., 2007).

A tarefa toma como indicador a expressão de uma relação (medida) entre dois vetores. Genericamente, pelo modelo universal de número, isto é, o vetor $\overline{a}$ possui comprimento igual a três vetores $\overline{e}$ e os sentidos de ambos são opostos (figura 24).

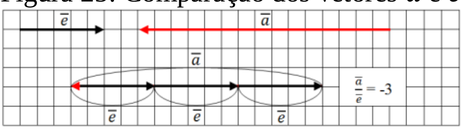
Figura 24: Representação da comparação dos vetores $\overline{a}$ e $\overline{e}$



Fonte: Resolução da situação com base na orientação de Горбов et al. (2007).

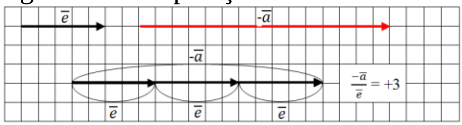
A partir dos vetores $\overline{a}$ e $\overline{e}$ são estabelecidas quatro relações distintas entre eles. Nas situações 1 e 2, as comparações entre os vetores opostos ($\overline{a}$ e -$\overline{a}$) com um mesmo vetor unidade ($\overline{e}$) são representadas por um símbolo numérico e mais um sinal (figuras 25 e 26).

Figura 25: Comparação dos vetores $\overline{a}$ e $\overline{e}$



Fonte: Resolução da situação com base na orientação de Горбов et al. (2007).

Figura 26: Comparação dos vetores -$\overline{a}$ e $\overline{e}$



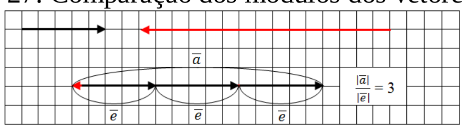
Fonte: Resolução da situação com base na orientação de Горбов et al. (2007).

Tal sinal depende de como são os sentidos dos dois vetores comparados. Mais especificamente, quando os dois vetores possuem sentidos opostos, é indicado com o sinal de menos “-”, mas caso eles tenham o mesmo sentido, é representado por outro sinal, o de mais “+” (ГОРБОВ et al., 2006). No que se refere ao simbólico numérico, ele é o mesmo na comparação tanto do vetor $\overline{a}$, como do -$\overline{a}$, com o $\overline{e}$.

O resultado da comparação dos vetores dos itens 1 e 2 é: o número oposto, negativo, e um número anterior, positivo; cada qual antecedido por sinais distintos. Горбов et al. (2006) consideram que é obrigatório o sinal de menos “-” nos números negativos. Nos números positivos não se faz a exigência da indicação do “+”, visto que sua ausência mostra que o número não é negativo.

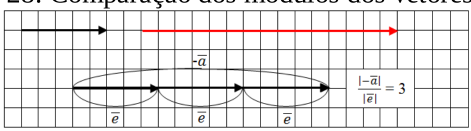
Diferentemente das situações iniciais (1 e 2), 3 e 4 restringem a relação entre dois vetores opostos ($\overline{a}$ e -$\overline{a}$) com um mesmo vetor unidade ($\overline{e}$) para apenas uma das características, o módulo (figuras 27 e 28). Essa restrição possibilita afirmar que a expressão da relação tanto do $|\overline{a}|$ como do |-$\overline{a}$| com o $|\overline{e}|$ é um número positivo. De acordo com Loreto e Loreto Junior (2014, p. 5), “o módulo é um número positivo, se o vetor não é nulo, e zero se o vetor é nulo”.

Figura 27: Comparação dos módulos dos vetores $\overline{a}$ e $\overline{e}$



Fonte: Resolução da situação com base na orientação de Горбов et al. (2007).

Figura 28: Comparação dos módulos dos vetores -$\overline{a}$ e $\overline{e}$



Fonte: Resolução da situação com base na orientação de Горбов et al. (2007).

Em outras palavras, mesmo que na comparação de dois vetores eles tenham sentidos opostos (figura 27), a restrição para somente o módulo desses vetores, isto é, os seus comprimentos, significa que será obtido apenas um número positivo; ou seja: a quantidade de vezes que o vetor unidade cabe naquele a ser medido, independente dos sentidos.

Quanto à diferença dos números (primeira pergunta) tem-se: 1 e 2 abordam os números positivos e negativos; por sua vez, 3 e 4 apenas o positivo. Apesar dessa diferença existe algo comum (segunda pergunta da tarefa) entre os pares (1,2) e (3,4) de vetores opostos em relação a uma mesma unidade, que é o número positivo, que também responde a terceira pergunta. A quarta questão decorre dos itens 3 e 4, referentes exclusivamente ao módulo, em que o número representa o comprimento dos vetores.

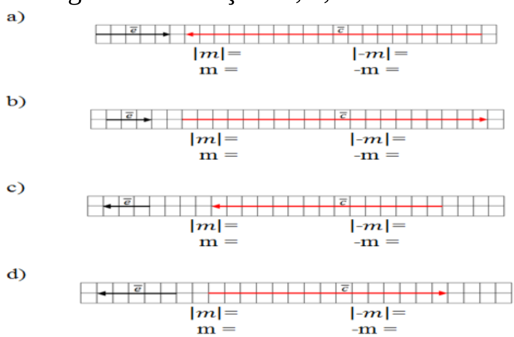
Assim sendo, essa tarefa supriu a necessidade de revelar as duas características dos vetores que originam os números positivos. A essencial é o módulo; mas também o módulo e o sentido com uma condição: os sentidos dos vetores serem os mesmos, pois, se forem opostos o número da comparação é o negativo, e não o positivo.

A tarefa a seguir, em continuidade à anterior, propõe que sejam verificados quais são os módulos e os sinais dos números *m* e *–m* em quatro distintos modos de combinação dos sentidos de dois vetores.

Tarefa 12:

Seja $\frac{\overline{c}}{\overline{e}} = m$. Encontre os módulos e os sinais dos números *m* e *-m*, em conformidade com as situações a, b, c e d da figura 29 (ГОРБОВ et al., 2007):

Figura 29: Situações *a*, *b*, *c* e *d* da tarefa 12



Fonte: Adaptação de Горбов et al. (2007).

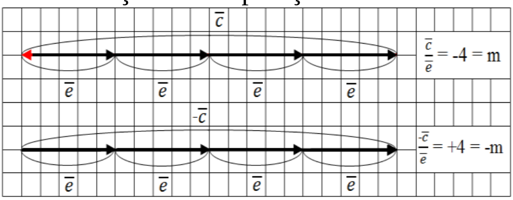
No que se refere aos números *m* e -*m*, eles são decorrentes da relação entre dois vetores. O *m*, de acordo com o enunciado, indica em quantas partes iguais ao vetor $\overline{e}$ foi dividido o $\overline{c}$ ($\frac{\overline{c}}{\overline{e}}$ = m). O -*m* também representa a quantidade de partes iguais em que foi dividido um vetor em relação a outro. Contudo, necessita que um deles ($\overline{c}$ ou o $\overline{e}$) que determina o número *m*, tenha sentido contrário, pois o número -*m* é oposto ao *m*.

Com base nessa necessidade, o vetor que possui sentido oposto para a determinação do número -*m* é o $\overline{c}$. Assim sendo, o número -*m* deriva da divisão de -$\overline{c}$ por $\overline{e}$ ($\frac{-\overline{c}}{\overline{e}}$).

A partir da verificação de como surgem os números *m* e -*m*, a tarefa doze propõe a análise de quais são os módulos e os sinais correspondentes aos referidos números em quatro modos distintos (a, b, c, d) de combinação entre dois vetores. Em outras palavras, significa identificar as características de módulo e sentido dos vetores $\overline{c}$ e -$\overline{c}$ em relação ao $\overline{e}$, porém não inter-relacionadas, ou seja, cada uma de modo independente. Isso que dizer que o módulo está vinculado ao comprimento dos vetores e o sentido ao sinal.

Na situação *a*, ao dividir os vetores $\overline{c}$ e -$\overline{c}$ em partes iguais à unidade $\overline{e}$ (figura 30) e considerar somente essas divisões, estas representam o módulo dos números *m* e -*m* que é igual a quatro (|*m*| = |-*m*| = 4).

Figura 30: Situação *a*: comparação do vetor $\overline{e}$ com $\overline{c}$ e -$\overline{c}$

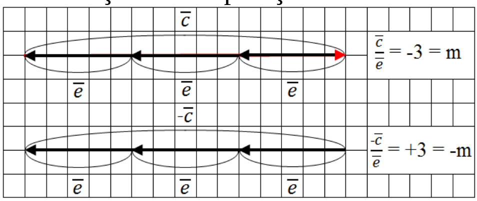


Fonte: Resolução da situação com base na orientação de Горбов et al. (2007).

A igualdade de módulo dos números *m* e –*m* significa que as relações estabelecidas entre os vetores opostos $\overline{c}$ e -$\overline{c}$ com o $\overline{e}$ se limitam apenas ao seu comprimento. Ainda na situação *a*, o sentido é outra característica dos vetores $\overline{c}$ e -$\overline{c}$ em relação ao $\overline{e}$, que se manifesta nos sinais correspondentes aos números *m* e –*m*. O sinal de *m* (-4) é de menos "-", visto que os vetores $\overline{c}$ e $\overline{e}$ possuem sentidos opostos. E o sinal de -m (+4) é de mais "+", ou seja, o contrário de m, uma vez que os vetores -$\overline{c}$ e $\overline{e}$ possuem mesmo sentido.

Passo a analisar a situação *d*, pois os sinais dos números são idênticos ao da situação *a*, m (-3) e -m (+3). Isso acontece porque os vetores $\overline{c}$ e $\overline{e}$, que dão origem ao sinal de m, também têm sentidos opostos. No entanto, os módulos dos vetores presentes em ambas as situações são distintos, pois os vetores são igualmente diferentes. Dessa maneira, ao dividir os vetores $\overline{c}$ e -$\overline{c}$ em partes iguais ao $\overline{e}$ (figura 31), verifica-se que cada um deles resulta em três partes. Em síntese, o módulo concernente aos números m e -m é três ($|m| = |-m| = 3$).

Figura 31: Situação *d*: comparação do vetor $\overline{e}$ com $\overline{c}$ e -$\overline{c}$



Fonte: Resolução da situação com base na orientação de Горбов et al. (2007).

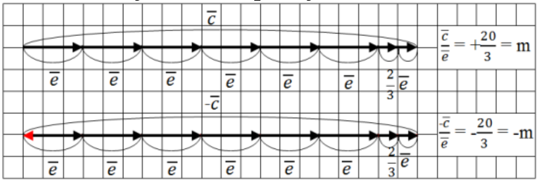
Nas situações *b* e *c*, os sinais dos números m e -m são contrários aos das situações *a* e *d*, pois os vetores $\overline{c}$ e $\overline{e}$ que originam m possuem sentidos iguais. Assim sendo, o sinal do número m é de mais "+" e o do -m é de menos "-".

No que concerne ao módulo das situações *b* e *c*, eles são diferentes. Em *b*, ao dividir os vetores $\overline{c}$ e -$\overline{c}$ em partes iguais ao $\overline{e}$ (figura 32), constata-se que cada um deles resulta em seis partes inteiras; contudo, resta uma porção que é menor que o vetor unidade. Para tanto, recorre-se à divisão de $\overline{e}$ em n partes iguais, com a condição de que qualquer uma delas caiba uma quantidade exata de vezes na porção.

Em outras palavras, o vetor unidade $\overline{e}$ foi divido em três partes iguais, pois cada qual cabe duas vezes na porção restante dos vetores $\overline{c}$ e -$\overline{c}$. Além disso, cada uma das seis partes inteiras de $\overline{c}$ e -$\overline{c}$ cabe três partes das subdivisões, o que resulta num total de dezoito partes.

A divisão dos vetores $\overline{c}$ e -$\overline{c}$ em partes iguais ao $\overline{e}$ não é exata. Isso solicitou que $\overline{e}$ também fosse dividido em três partes iguais, cada qual correspondente a $\frac{1}{3}$. Por conseguinte, constata-se que, em ambas as situações, há vinte partes de $\frac{1}{3}\overline{e}$, ou seja, o módulo dos números m e –m é vinte terços ($|m| = |-m| = \frac{20}{3}$).

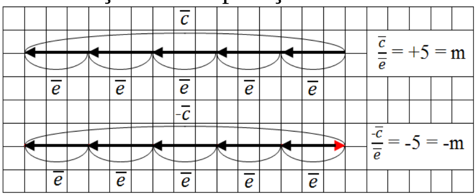
Figura 32: Situação *b*: comparação do vetor $\overline{e}$ com $\overline{c}$ e -$\overline{c}$



Fonte: Resolução da situação com base na orientação de Горбов et al. (2007).

Na situação *c*, a divisão dos vetores $\overline{c}$ e -$\overline{c}$, em partes iguais ao $\overline{e}$ (figura 33), resulta em cinco partes. Dessa forma, o módulo que representa os números *m* e -*m* é cinco ($|m| = |-m| = 5$).

Figura 33: Situação *c*: comparação do vetor $\overline{e}$ com $\overline{c}$ e -$\overline{c}$



Fonte: Resolução da situação com base na orientação de Горбов et al. (2007).

A identificação dos módulos e dos sinais dos números *m* e -*m*, nos quatro modos de combinação entre os vetores, serve de referência para que na tarefa 13 seja analisado o sinal de um número oposto.

Tarefa 13

a) Qual é o sinal do número -n, em que:
1) n — um número positivo;
2) n — um número negativo;
3) n = 0?

b) Qual é o sinal do número n, em que:
1) -n — um número positivo;
2) -n — um número negativo;
3) -n = 0? (ГОРБОВ et al., 2007).

A resolução das situações *a* e *b* depende dos resultados obtidos na tarefa anterior, especialmente, pelos sinais decorrentes das comparações entre os sentidos dos vetores nas situações de *a* até *d*. Vale lembrar que, na tarefa 12, os resultados da comparação entre os vetores foram: para vetores de sentidos iguais (situações *b* e *c*), os números *m* têm sinal de mais "+" e os números -*m* possuem sinal de menos "-"; para vetores com sentidos diferentes (situações *a* e *d*), os sinais dos números *m* são de menos "-" e os sinais dos números -*m* são de mais "+".

A resolução da tarefa 13 envolve o conceito de oposto, pois a partir de um número dado (*n* ou -*n*), busca-se o respectivo sinal contrário (-*n* ou *n*). Na situação *a*, o item 1, ao tomar *n* como positivo (situações *b* e *c* da tarefa 12, figura 32 ou 33), o número -*n* tem sinal de menos, ou seja, representa um número negativo. No item 2 ocorre o contrário: ao considerar *n* como negativo (situações *a* e *d* da tarefa 12, figura 30 ou 31), o número -*n* tem sinal de mais "+", isto é, corresponde a um número positivo.

Em *b*, o item 1, ao adotar -*n* como positivo (situações *a* e *d* da tarefa 12, figura 30 ou 31), o número *n* possui sinal de menos "-", que o torna negativo. No item 2, ao assumir que -*n* é negativo (situações *b* e *c* da tarefa 12, figura 32 ou 33), o número *n* tem sinal de mais "+" e, consequentemente, ele é positivo.

No que diz respeito ao zero, vale recordar que ele é o único número cujo oposto é ele próprio. Além disso, não é positivo e nem negativo; assim sendo, não possui sinal.

As situações *a* e *b* (tarefa 13) abordam implicitamente o conceito de oposto dos três tipos de números: negativo, positivo e zero. A sua solução se restringe à indicação de que o oposto do primeiro é o positivo, o do segundo é o negativo e o do zero é ele mesmo.

As tarefas 11, 12 e 13, mesmo inseridas no âmbito de uma subseção em que o título dirige-se ao número positivo, não se desprendem da ideia central de introdução dos números negativos. Elas proporcionam amarras conceituais integradoras de ambos os números e dão novas significações aos positivos num contexto de relatividade com os negativos. Além disso, a inter-relação positivo/negativo atrai outras particularidades conceituais, entre elas módulo e oposto.

A tarefa 13 é a última de toda a seção (3.3), que se centralizou na introdução do número negativo, conceito referência do presente estudo. Por esse motivo, a título de síntese, retomarei as principais necessidades conceituais que nela foram destacadas. A primeira delas alude à passagem das grandezas escalares para a vetorial, representada por um vetor. Por sinal, ela também se apresentou quando a referência foram os números positivos que, até então, conceberam-se somente como relação entre as grandezas escalares, entendidas como condição suficiente para a sua definição.

Essa mudança de grandeza produz outra necessidade por requerer a observação do sentido dos vetores. O sentido é condição de comparação entre vetores e de indicação se seu resultado será um número positivo ou negativo. No contexto da exigência apontada, outra necessidade conceitual é a presença de um vetor oposto.

Além dessas, outras três foram identificadas, que emergem no âmbito da comparação de dois vetores com sentidos opostos. Na comparação produziu a carência de especificação do módulo e do sentido de um vetor oposto em relação a outro vetor não oposto. Também ocorreu a necessidade de seu registro numérico e de ordem de representação e distinção. Trata-se da atribuição de um sinal, o de menos "-", para representar e diferenciar os números negativos, para os quais se usam os mesmos signos que os dos positivos. Com o referido sinal, os negativos se caracterizam como opostos aos positivos.

A relação opositiva negativo/positivo produz outra necessidade: conceber a existência de um único número, o zero, cujo oposto é ele próprio; por isso, elemento que expressa a ideia de relatividade dos números reais. Advém, ainda, a necessidade de expressar a origem dos números positivos, a partir das grandezas vetoriais, tanto pela comparação somente pelo módulo de dois vetores como de dois vetores com mesmo sentido.

Ademais, no que diz respeito à presente seção, que tratou da introdução do conceito de número negativo, importa mencionar sua relação com a anterior, pois nela foi criada a necessidade desse número. Este, por sua vez, possibilita sua própria inserção na reta numérica que, entre outras finalidades, permite a comparação dele com o positivo, tema da próxima seção.

3.4 A REPRESENTAÇÃO DOS NÚMEROS NEGATIVOS NA LINHA DE COORDENADAS[17]

As tarefas desta seção, de acordo com Горбов et al. (2006), envolvem a representação dos números negativos na reta numérica e a

[17]No título da segunda seção do sexto capítulo – "Números positivos e negativos" – do livro de orientações ao professor (ГОРБОВ et al., 2007), em vez de 'reta numérica', é empregado 'linha de coordenadas'. No entanto, nas orientações dessa mesma seção, é mencionada 'reta numérica' em vez de 'linha de coordenadas', o que se entende que são expressões sinônimas. Os pesquisadores do GPEMAHC adotam o termo 'reta numérica' em suas pesquisas, cuja fonte de analise é a proposição davydoviana.

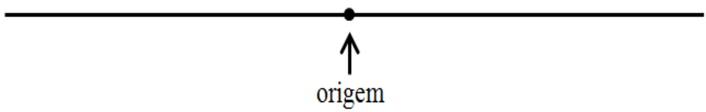
comparação deles com os positivos. A reta numérica tem grande importância no modo davydoviano de organização do ensino da Matemática. Ela é considerada elemento mediador para o processo de apropriação dos conceitos relacionados ao número, suas operações e representações (ROSA, 2012; SOUZA, 2013). Por isso, os estudantes aprendem a construí-la e atribuir-lhe significados desde o primeiro ano escolar, o que torna necessário o desenvolvimento de várias tarefas a ela pertinentes. Um destaque de sua importância é indicado por Rosa (2012): ela incide no lugar geométrico dos números.

No sexto ano, a reta numérica se torna referência para o modo que os números negativos são representados nela, como é possível observar na tarefa a seguir.

Tarefa 14:

a) Como definir o sistema de coordenadas na linha? Defina o sistema de coordenadas na linha e marque sobre ela os pontos concernentes aos números: 0, 1, 3 e 10.

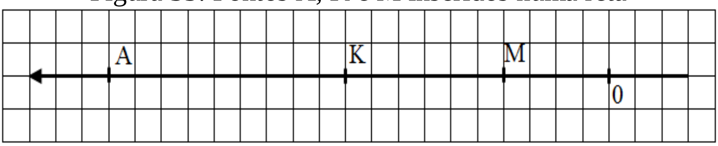
Figura 34: Construção da reta numérica



Fonte: Adaptação de Горбов et al. (2007).

b) Encontre as coordenadas dos pontos A, K e M.

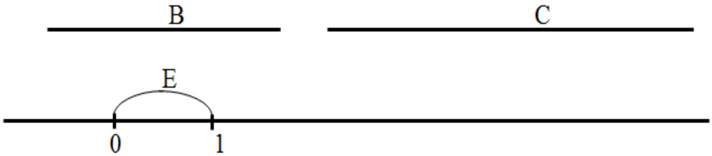
Figura 35: Pontos A, K e M inseridos numa reta



Fonte: Adaptação de Горбов et al. (2007).

c) Anote sobre a linha de coordenadas os números a e m, em que $\frac{B}{E} = a$ e $\frac{C}{E} = m$.

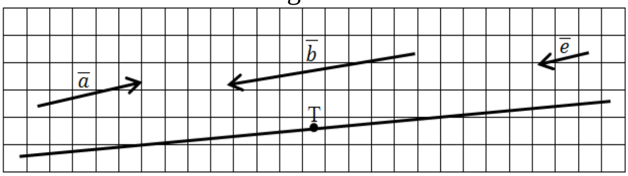
Figura 36: Grandezas B e C e a representação do início de uma reta



Fonte: Adaptação de Горбов et al. (2007).

d) Marque sobre a linha de coordenadas os números 0, 1, -1, 2, -2, n e k, com $\overline{e}$ – vetor unitário, ponto T – origem, $\frac{\overline{a}}{\overline{e}} = n$ e $\frac{\overline{b}}{\overline{e}} = k$ (ГОРБОВ et al., 2007).

Figura 37: Vetores $\overline{e}$, $\overline{b}$ e $\overline{a}$ e uma reta para a introdução dos números negativos



Fonte: Adaptação de Горбов et al. (2007).

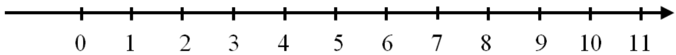
A situação a retoma o processo de construção da reta numérica que, segundo estudos de Rosa (2012) e Souza (2013) inicia-se no primeiro ano escolar. Isso ocorre no âmbito da resolução de algumas tarefas particulares que envolvem a medição da grandeza volume por meio de outra, da mesma espécie, tomada como unidade.

No decorrer da referida medição, registra-se cada medida por meio de um segmento (comprimento) unidade em um sentido, a partir de um ponto de origem que, inicialmente, representa-se por uma bandeira e mais tarde é substituída pelo zero. Abaixo de cada segmento unidade é inserido um numeral (ROSA, 2012; SOUZA, 2013).

Em síntese, no processo de construção da reta numérica, consideraram-se os seguintes elementos: um ponto inicial tomado como sua origem, uma direção, um sentido e uma unidade (passo) – segmento (ROSA, 2012; SOUZA, 2013).

Essa orientação do processo de construção da reta numérica subsidia sua representação na figura 38. Nela, destaca-se a sequência numérica, na qual se incluem os números 0, 1, 3 e 10 propostos na situação a.

Figura 38: Representação da reta numérica



Fonte: Resolução da situação *a* com base na orientação de Горбов et al. (2007).

Em *b*, a reta numérica também está presente, mas diferente da situação *a*, os números positivos se encontram à esquerda do zero.

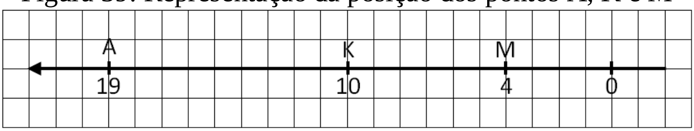
Para encontrar os números que correspondem aos pontos M, K e A (figura 39), Горбов et al. (2006) compreendem que é necessário percorrer na reta uma quantidade determinada de passos a partir do início. Após realizar tal procedimento, verifica-se que os números que correspondem aos pontos M, K e A são: 4, 10 e 19.

Observa-se que a tarefa não requisita atenção à ideia de relatividade. Sua referência ainda é uma grandeza escalar, pois solicita apenas a identificação da quantidade de unidade (comprimento de um segmento) que corresponde ao lugar de cada letra. Por isso, não aparece o número negativo, como convencionalmente se adotaria, uma vez que as letras e os seus respectivos valores estão à esquerda do zero.

Como analisado nas seções anteriores, na proposição de Davýdov e colaboradores a base genética dos números negativos não é a posição (esquerda) em relação ao zero, que toma como referência uma grandeza escalar. Em vez disso, o fundamento é a grandeza vetorial, um vetor, que necessariamente se vincula com seus três componentes básicos: direção, sentido e intensidade (comprimento, módulo).

Ser número negativo ou positivo não é somente resultado de uma observação empírica de estar à direita (depois) ou à esquerda (antes) do ponto de origem. Pelo contrário, o modo davydoviano de organização do ensino, ao visar o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes, requisita o trânsito por elementos conceituais complexos. Portanto, não é somente questão de localização, mas no mínimo a determinação de um vetor e, previamente, de um sentido e de uma intensidade.

Figura 39: Representação da posição dos pontos A, K e M

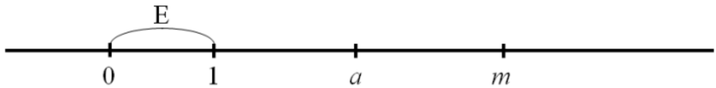


Fonte: Resolução da situação com base na orientação de Горбов et al. (2007).

A situação *c*, também apresenta uma reta numérica, porém nela é necessário marcar os números a e m que resultam, respectivamente, dos comprimentos B e C ao serem divididos em partes iguais à unidade E. Nessa situação, conforme Горбов et al. (2007), E tem duas funções: ser a unidade de medida responsável por determinar os números a e m; ser a unidade da reta numérica usada para a inserção de tais números.

Como o comprimento C é maior que o B, significa que será dividido em quantidade maior de partes com extensão da unidade E, se comparado com B. Assim sendo, o número *m*, proveniente de $\frac{C}{E}$, é maior que o *a*, derivado de $\frac{B}{E}$. Então, na reta numérica, o *m* estará adiante do a e do zero (figura 40), pois de acordo com Rosa (2012), quanto mais distante um número está da origem maior ele é.

Figura 40: Anotação dos números *a* e *m* na reta numérica



Fonte: Resolução da situação com base na orientação de Горбов et al. (2007).

Até a situação *c*, o processo de construção da reta numérica prioriza aquilo que já é de domínio dos estudantes, pois a preocupação é com a inserção dos números positivos e o zero. De acordo com Горбов et al. (2006), como a finalidade dessa tarefa demanda a procura de um lugar para tais números, na reta, a exigência é que os estudantes tenham conhecimentos sobre a sua construção.

A próxima situação, *d*, se desenvolve em contexto conceitual similar a *c*, pois continua com o processo de introdução de números na reta numérica. Porém, com a diferença de que também há inclusão de números negativos.

A situação *d*, ao solicitar que sejam anotados os números 0, 1, -1, 2, -2, *n* e *k* na reta numérica, cria a necessidade[18] de identificar se os números *n* e *k* fazem parte dos positivos e/ou negativos. Para que se satisfaça a referida necessidade, a iniciativa premente é a identificação da origem de tais números. De acordo com o enunciado, eles decorrem

[18]Tal necessidade está relacionada com a resolução da tarefa, porém não é ela que proporciona a introdução do número negativo na reta numérica. Em outras palavras, trata-se de uma necessidade de operação de resolução, em que ela é satisfeita com operações já desenvolvidas pelos estudantes. Operação é um modo de resolver uma tarefa.

da comparação de dois vetores. Especificamente, o n indica em quantas partes de $\overline{e}$ o vetor $\overline{a}$ foi dividido, além disso, são conhecidos os seus sentidos, indicativos que são opostos. Por isso, trata-se de um número negativo. Por sua vez, o k representa em quantas partes iguais a $\overline{e}$ o vetor $\overline{b}$ – ambos de mesmo sentido – foi dividido (figura 37). Essas características dão as credenciais de um número positivo.

Essa constatação a respeito de n e k permite que se encaminhe a marcação deles e dos números 0, 1, -1, 2 e -2 na reta numérica. Contudo, ainda cabe recordar que a referida anotação carece de um local na reta numérica para que se proceda a representação dos números negativos. Em outras palavras, a solicitação de tal marcação gera a necessidade da busca por um lugar na reta numérica para os números negativos.

Nas circunstâncias dessa procura, é importante enfatizar que até o estágio atual do estudo, os números positivos não têm uma posição fixa na reta numérica, ou seja: eles podem estar à direita ou à esquerda da origem, isto é, ocupam apenas um dos sentidos, na reta, em relação ao zero (figuras 38, 39 e 40). Nela, existe um espaço vago que está situado em sentido oposto ao dos números positivos, o que se pressupõe sejam os lugares em que se localizam os números negativos, dado o significado de oposição entre ambos. Assim, supre a necessidade conceitual de um local na reta numérica para os números negativos. Ainda há, porém uma questão à mercê de solução: em que sentido estará os números negativos e positivos na reta numérica?

Conforme Горбов et al. (2006), esse questionamento traz algo conceitualmente novo em relação à tarefa na qual se usou o segmento como unidade para a construção da reta, pois naquela circunstância não era necessário se ater ao sentido dos números positivos, visto que ele estava selecionado. Na ocasião, o uso do segmento como unidade para a construção da reta numérica se restringia à representação do comprimento entre cada unidade. Em outras palavras, ao não ser o indicador do sentido dos números, surge a necessidade de outro elemento que assuma tal função no processo de formação do pensamento conceitual. Como anunciado, o vetor como um segmento orientado (possui um sentido, além de um módulo e uma direção) satisfaz a referida necessidade.

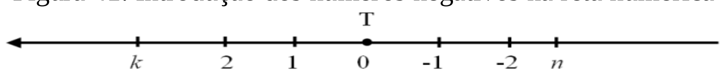
No entanto, só essa condição não é suficiente para a resolução da situação em questão. Ela leva a outro procedimento adquirido, anteriormente, quando do estudo dos números negativos, em que se fizeram necessários dois vetores de sentidos opostos. O mesmo ocorrerá para a introdução dos mesmos na reta numérica, com o acréscimo da especificidade de que o vetor tomado como unidade possui duas características: determinação do número que resulta da comparação com outro vetor de sentido oposto e determinação do lado em que estará o número positivo, bem como o negativo.

De acordo com Горбов et al. (2006), a unidade para a representação dos números na reta numérica passa a ser um vetor, pois ele permite a indicação tanto do comprimento de cada unidade como do sentido dos números positivos e negativos.

Particularmente na situação *d*, a unidade de medida (vetor $\overline{e}$), além de ser responsável pela indicação dos números *n* e *k*, também assume a função de unidade da reta numérica para a inserção dos demais números: 0, 1, -1, 2, -2. Se, na reta, os números positivos estiverem situados à direita da origem e os negativos à sua esquerda, isso ocorre porque o sentido do vetor unidade é para a direita. No entanto, se os números positivos estão à esquerda do zero e os negativos à sua direita, é resultado do sentido do vetor unidade ser para a esquerda.

Como o sentido do vetor unidade indica o local dos números positivos e negativos em relação à origem da reta, então, na situação *d*, o vetor unidade ao ser o $\overline{e}$ e possuir sentido para a esquerda, demanda que os números positivos, dentre eles o *k*, estejam à esquerda da origem, pois o sentido dos vetores $\overline{b}$ e $\overline{e}$ são iguais. De outro modo os negativos, incluindo *n*, estão situados à direita do ponto T, uma vez que o sentido dos vetores $\overline{a}$ e $\overline{e}$ são opostos (figura 41).

Figura 41: Introdução dos números negativos na reta numérica



Fonte: Resolução da situação com base na orientação de Горбов et al. (2007).

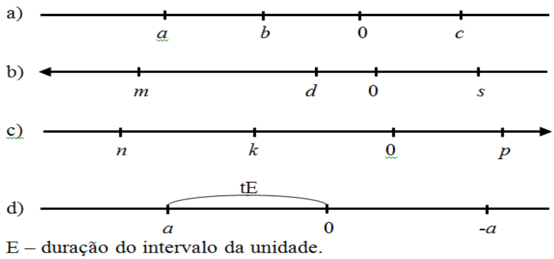
Sobre a reta numérica, não se pode esquecer que a seta indica a localização dos números positivos em relação à origem (figura 39).

Essa tarefa, além da introdução dos números negativos na reta numérica, também possibilita que, nela, se comparem os números positivos com os negativos. No entanto, a comparação exige um método, que é o foco das próximas tarefas. Antes, porém, importa verificar quando uma reta permite que se determine o módulo de um número, como na tarefa a seguir.

Tarefa 15:

Encontre o módulo dos números marcado na linha de coordenadas (ГОРБОВ et al., 2007).

Figura 42: Situações *a*, *b*, *c* e *d* da tarefa 15



Fonte: Adaptação de Горбов et al. (2007).

No que diz respeito ao módulo de um número, Reis e Silva (1984, p. 9) consideram que “geometricamente, podemos interpretar $|x|$ como sendo a distância do ponto *P*, correspondente a *x*, à origem *O*, isto é, o comprimento do segmento *OP*.”. Enfim, na reta numérica, o módulo de um número corresponde à distância dele ao zero.

A ausência da seta na reta da situação *a*, não permite a indicação do sentido dos números positivos. Além disso, significa que o não uso de uma unidade, por si só, garante o descumprimento de um padrão para a introdução dos números na reta, isto é, a distância entre um e outro pode não ser a mesma. De acordo com Горбов et al. (2006), essa incerteza do uso de uma unidade gera a impossibilidade de se determinar o módulo de *a*, *b* e *c*.

Em *b* e *c*, a presença da seta na reta indica a posição dos números positivos e, consequentemente, dos negativos. A indicação pressupõe o uso de uma unidade (vetor), que subsidia a constatação de que houve um padrão na colocação dos números em tais retas.

A tarefa passa a ser a determinação do módulo dos números *m*, *d*, *s* e *n*, *k*, *p*, isto é, a distância que cada um deles está em relação ao zero, na reta numérica. Em *d*, apesar de não constar uma seta na reta, existe a indicação do uso de uma unidade (E), garantia de um padrão entre os números presentes na reta e, consequentemente, a possibilidade de indicação do seu módulo.

Assim também o módulo de *a* e –*a* incide na distância que cada um se encontra do zero. Por –*a* ser oposto de *a*, o módulo de ambos é o mesmo, isto é, *t* vezes a unidade E (ГОРБОВ et al., 2006).

O desenvolvimento das quatro situações subsidia a afirmação de que essa tarefa gerou a necessidade de análise de quando numa reta é possível a determinação do módulo dos seus números. Isso porque a ausência de um padrão, na inserção dos números na reta, impossibilita a comparação dos seus respectivos módulos.

As próximas quatro tarefas têm como finalidade a busca de um método que permita a comparação dos números positivos e negativos, na reta numérica (ГОРБОВ et al., 2006).

Tarefa 16:

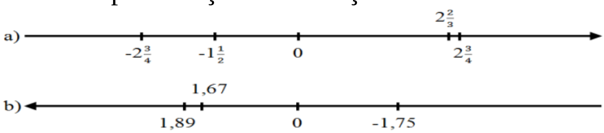
Marque sobre a linha de coordenadas os seguintes números:

a) $2\frac{3}{4}$, $-2\frac{3}{4}$, $2\frac{2}{3}$, $-1\frac{1}{2}$;   b) 1,89; -1,75; 1,67.

Quais deles você sabe como comparar? Compare estes números (ГОРБОВ et al., 2007).

A partir da marcação dos números positivos e negativos das situações *a* e *b* na reta numérica (figura 43), a tarefa recomenda que os estudantes comparem os números.

Figura 43: Representação das situações *a* e *b* na reta numérica



Fonte: Resolução da situação com base na orientação de Горбов et al. (2007).

Com base na recomendação acima, recorro ao estudo de Rosa (2012) referente ao primeiro ano escolar para revelar que na proposição de Davýdov, neste período, os estudantes se apropriam da comparação dos números positivos. Mas, no que concerne à comparação dos números negativos, essa é a primeira tarefa com tal finalidade.

Verifica-se, então, que ainda inexiste o conhecimento sobre a comparação dos números negativos. Como consequência, nessa tarefa somente é possível a comparação dos números positivos o que, segundo Rosa (2012, p. 170), resulta na síntese conceitual: "[...] quanto mais adiante está o número na sequência ou reta numérica, maior ele é.". No mesmo contexto, outra síntese é aceita: quanto mais próximo um número positivo está do zero na reta numérica, menor é ele.

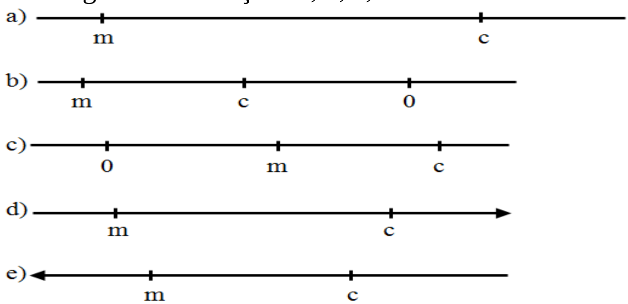
Ambas as sínteses permitem a identificação de quais são o maior e o menor número positivo nas situações *a* e *b*. Em *a*, o maior é o dois inteiros e três quartos ($2\frac{3}{4}$), e o menor corresponde ao dois inteiros e dois terços ($2\frac{2}{3}$). Em *b*, o maior é um inteiro e oitenta e nove centésimos (1,89); o menor, o um inteiro e sessenta e sete centésimos (1,67).

Essa tarefa, portanto, se caracteriza por permitir a constatação de que, na proposição davydoviana, até esse período de estudo (sexto ano) não foi oportunizado, aos estudantes, o acesso ao conhecimento sobre a comparação dos números negativos. Essa oportunidade é proporcionada pela próxima tarefa com base em dois métodos de comparação, na reta numérica, dos números positivos extrapolam os negativos.

Tarefa 17:

Compare os números positivos:

Figura 44: Situações *a, b, c, d* e *e* da tarefa 17

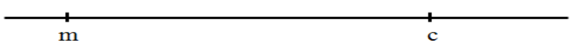


Fonte: Adaptação de Горбов et al. (2007).

Especifique os dois métodos para a comparação de dois números positivos na linha de coordenadas (ГОРБОВ et al., 2007).

O objetivo dessa tarefa consiste na comparação dos números positivos. Para que ela ocorra, é indispensável um dos seguintes elementos na reta numérica: o ponto de origem ou a seta. Essas características estão ausentes na reta da situação *a* (figura 45), o que impossibilita a comparação dos números positivos *m* e *c*, pois sem tais elementos não se pode determinar qual dos dois é o maior ou o menor.

Figura 45: Situação *a* da tarefa 17



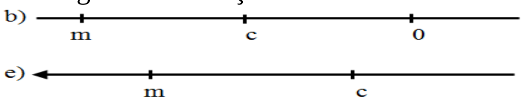
Fonte: Adaptação de Горбов et al. (2007).

A falta da origem e/ou uma seta na reta numérica da situação *a* cria a necessidade de uma operação de resolução. Nas demais situações (*b*, *c*, *d* e *e*), diferentemente da *a*, constam um dos elementos, na reta numérica, necessários à comparação dos números, como: o ponto de origem, zero, (*b* e *c*) ou a seta (*d* e *e*). Por isso, torna-se possível identificar a posição dos números *m* e *c* em relação à origem, nas respectivas retas e, também, o estabelecimento da relação maior-menor entre eles, por meio dos dois métodos usados para a comparação de números positivos (ГОРБОВ et al., 2006).

O primeiro método considera a posição que os números ocupam em relação ao ponto de origem na reta numérica: o maior número é aquele que está mais distante do zero, e o menor, o mais próximo (ГОРБОВ et al.,2006).

A análise dos números positivos *m* e *c*, das situações *b* e *e* (figura 46), com base no primeiro método, leva à conclusão de que estão localizados à esquerda do zero, portanto, *c* é o menor número positivo; consequentemente, *m* o maior.

Figura 46: Situações *b* e *e* da tarefa 17



Fonte: Adaptação de Горбов et al. (2007).

O segundo método consiste no movimento de passagem de um ponto ao outro na reta numérica, ou seja: do menor para o maior, se o sentido for o mesmo do vetor unidade; do maior para o menor, caso o referido sentido seja oposto (ГОРБОВ et al.,2006).

Em síntese, em conformidade com esse método: ao adotar o mesmo sentido que o do vetor unidade para um deslocamento na reta numérica, ocorre a passagem de um número menor para outro maior; no entanto, ao tomar o sentido oposto ao do vetor unidade, sucede o contrário, ou seja, passa-se do número maior para o menor em tal reta. Porém, essa dupla possibilidade de passagem de um número menor para um maior ou vice-versa dá margem para o questionamento: em que consiste um número ser menor ou maior que outro?

Para Lima et al. (2006, p. 80), “tem-se $x < y$ se, e somente se, a diferença $d = y - x$ é um número positivo. Noutras palavras, vale $x < y$ se, e somente se, existe um número real positivo d tal que $y = x + d$.”. Desse modo, um número real x é menor que outro y quando a diferença entre eles for um número real positivo (d). Pode-se dizer, também, que tal diferença (*d*) é aquele número positivo que acrescentado a *x* torna-se igual a *y*. Nesse sentido, Lima (1999, p. 13, grifos do autor) considera:

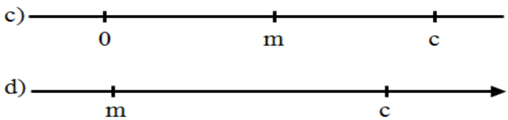
> Escreve-se $x < y$ e diz-se *x é menor do que y* quando $y - x \in R^+$, isto é, $y = x + z$ onde *z* é positivo. Neste caso, escreve-se também $y > x$ e diz-se que *y é maior do que x*.

Essa citação realça que: se *x* é menor que *y*, o *y* é maior que *x*. Contudo, vale destacar que o *y* só é maior que *x* quando existe um número real positivo (diferença) que subtraído de *y* resulta em *x*, ou seja, $y - d = x$.

Nas situações *b* e *e*, ao passar do ponto *c* para o *m*, o sentido é análogo ao do vetor unidade: significa que o número positivo *m* é maior que o *c* ($m > c$). Portanto, *m* é maior que *c*, pois é necessário adicionar um número real positivo *z* ao *c* para chegar a *m*. Mas, ao percorrer o sentido oposto em relação ao do vetor unidade (do ponto *m* para *c*), constata-se que o número *c* é menor que o *m* ($c < m$). Isso ocorre uma vez que de *m* subtrai-se um número real positivo *z* que resulta em *c*.

Nas situações *c* e *d*, diferentemente de *b* e *e*, os números positivos estão localizados à direita da origem na reta numérica (figura 47). Assim sendo, pelo primeiro método (posição), o número positivo *m* é menor que o *c* ($m < c$), pois ele está mais próximo da origem, bem como o *c* é maior que o *m* ($c > m$) por estar mais distante do zero.

Figura 47: Situações *c* e *d* da tarefa 17



Fonte: Adaptação de Горбов et al. (2007).

Pelo segundo método (sentido), os números positivos, ao estarem situados à direita da origem, indicam que o sentido do vetor unidade é para a direita. Ao passar do ponto *m* para o *c*, sentido igual ao do vetor unidade, significa se chegará a um número maior que o *m*. Para tal, é como que se acrescentasse um número real positivo *z* ao *m*, que resulta no *c* ($m + z = c$). Mas, ao mudar o sentido da passagem dos referidos pontos para o oposto do vetor unidade, isto é, de *c* para *m*, o deslocamento se faz de para um número menor, visto que, de *c*, subtrai-se um número real positivo *z* que deriva em *m* ($c - z = m$).

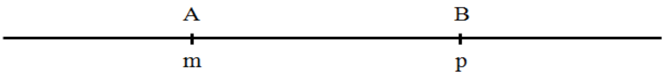
Os dois métodos de comparação dos números positivos, abordados nessa tarefa, se revestem de importância na busca de um modo que possibilite a comparação entre números positivos e negativos, conforme será visto na tarefa 19. Antes, porém, eles ainda são referência (tarefa 18) para que ambos sejam adotados simultaneamente em uma mesma situação. Trata-se de comparações entre o sentido de um deslocamento e um vetor, bem como do módulo dos números m e p. Especificamente, elas permitem a análise da relação maior-menor dos números m e p.

Tarefa 18:

Sejam m e p, números positivos, e $m > p$ (ГОРБОВ et al., 2007).

a) Compare o sentido do vetor unidade $\bar{e}$ com o sentido do deslocamento $\overline{AB}$ (figura 48).

Figura 48: Representação do deslocamento $\overline{AB}$ e dos números m e p



Fonte: Adaptação de Горбов et al. (2007).

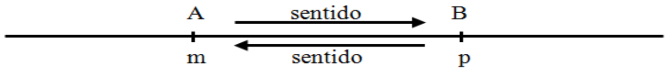
b) Compare os módulos dos números m e p.

$$\overline{AB} \qquad \bar{e} \qquad |m| \qquad |p|$$

A afirmação, no enunciado, que o número positivo m é maior que o p, e o modo de ambos se situarem na reta numérica, permite a constatação de que o sentido do vetor unidade $\bar{e}$ é para a esquerda da origem, pois m, ao ser maior que p, significa que ele está mais distante do zero em relação ao p.

No que se refere ao sentido do deslocamento $\overline{AB}$, convém destacar que, para Caraça (1957), a ordem dos pontos num segmento orientado indica a sua origem e o seu término, isto é, a primeira letra representa o início e a segunda o fim. Então, o deslocamento $\overline{AB}$ tem origem em A e término em B, ou seja, possui sentido para a direita. Logo, o vetor unidade $\bar{e}$ e $\overline{AB}$ são opostos, $\overline{AB} \uparrow\downarrow \bar{e}$ (figura 49).

Figura 49: Sentido do movimento $\overline{AB}$ e do vetor unidade $\overline{e}$



Fonte: Resolução da situação com base na orientação de Горбов et al. (2007).

Os dois sentidos opostos, na reta da figura 49, possibilitam a abordagem da relação maior-menor entre os números positivos m e p, pois a adoção de um dos sentidos significa passar de um número a outro.

Ao tomar o sentido do vetor unidade $\overline{e}$, a passagem do número p ao m incide na adição de um número real positivo z a p, que o torne igual ao m. Então, o número p é menor que o m. Mas, ao adotar o sentido do deslocamento $\overline{AB}$, a passagem do número m ao p consiste em subtrair de m um número real positivo z que o deixe igual ao p. Com tal subtração, constata-se que o número m é maior que o p.

Na situação *b*, o fato de o número m ser maior e estar à esquerda de p permite a identificação que o zero está à direita de p e, ao mesmo tempo, auxilia na comparação dos módulos de m e p, pois se percebe a distância que estão da origem, na reta numérica.

Como o número m está mais distante da origem que o p, isso acarreta que o seu módulo é maior que o de p ($|m| > |p|$). Desse modo, a comparação entre dois números positivos também pode ser realizada por meio de seus módulos.

A próxima tarefa continua com a comparação de números positivos por meio dos dois métodos estudados na tarefa anterior, porém ela é direcionada para a análise da validade destes para os números negativos. Trata-se, pois, da análise referente à possibilidade de transferência dos métodos usados na comparação dos números positivos para os negativos (ГОРБОВ et al., 2006).

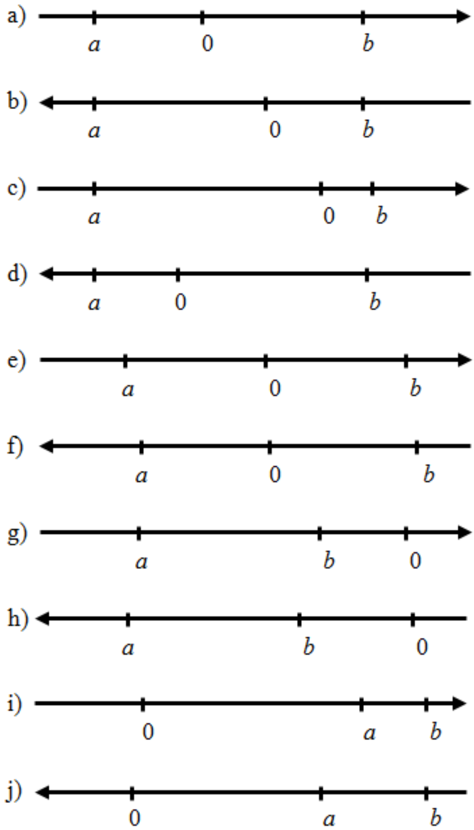
Tarefa 19:

Verifique se ambos os métodos de descrever os mesmos números da posição *a* e *b*[19] na linha de coordenadas não se restringem aos números positivos.

---

[19] As letras *a* e *b* na tarefa 19 correspondem a números, por isso decidi representa-las em itálico. No entanto, tais letras (a e b) voltam a se apresentar, no contexto das dez situações. Sendo assim, as letras **a, b, c, d, e, f, g, h, i** e **j,** referentes às situações, estarão em negrito.

Figura 50: Situações **a, b, c, d, e, f, g, h, i e j** da tarefa 19

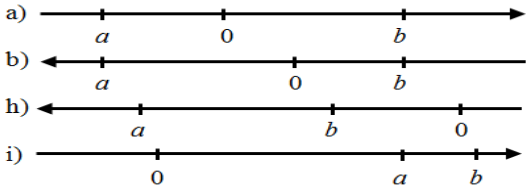


Fonte: Adaptação de Горбов et al. (2007).

Quais dos dois métodos é ideal para a comparação de números (positivos e negativos)? Explique o porquê (ГОРБОВ et al., 2007).

Observa-se, nas dez situações, a presença da origem e da seta na reta, que indica o lado em que estão os números positivos em relação à origem. No que concerne ao primeiro método de comparação dos números positivos (posição de tais números em relação à origem na reta numérica), ele é válido somente para as situações **a, b, h** e **i** (figura 51), visto que, nelas, o ponto mais distante da origem diz respeito a um número positivo.

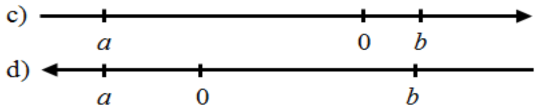
Figura 51: Situações **a, b, h** e **i** da tarefa 19



Fonte: Adaptação de Горбов et al. (2007).

Nas situações **c** e **d** (figura 52), como os números negativos *a* (**c**) e *b* (**d**) estão mais distantes do zero, o primeiro método de comparação dos números positivos estaria indicando que tais números são maiores que os positivos *b* (**c**) e *a* (**d**).

Figura 52: Situações **c** e **d** da tarefa 19



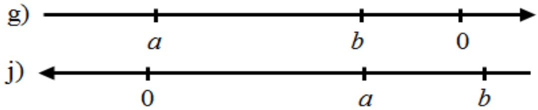
Fonte: Adaptação de Горбов et al. (2007).

Contudo, com uma análise pelos fundamentos matemáticos (Lima et al., 2006) – referentes à relação maior-menor entre dois números não iguais, ou seja, quando um deles é maior ou menor que outro – constata-se que os números negativos *a* (**c**) e *b* (**d**) não são maiores que os positivos *b* (**c**) e *a* (**d**). Para que assim fosse, as diferenças *a* - *b* (**c**) e *b* - *a* (**d**) teriam que ser um número real positivo, mas em cada uma das duas situações trata-se de negativo.

Assim sendo, **c** e **d** levam a uma contradição conceitual no que se refere ao primeiro método de comparação dos números positivos, pois um número negativo, ao estar mais distante da origem na reta numérica em relação a outro número (positivo ou negativo), não pode ser o maior; pelo contrário, é o menor (ГОРБОВ et al., 2006). Isso significa, portanto, que tal método não é generalizável para a comparação de todos os tipos de números, restringe-se apenas à comparação dos números positivos.

As limitações do primeiro método de comparação dos números positivos também se verificam nas situações **g** e **j** (figura 53) por abordarem apenas os números negativos, pois, quanto mais afastados ou próximos da origem esses números se encontram, serão, respectivamente, menores e maiores.

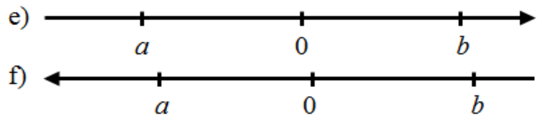
Figura 53: Situações **g** e **j** da tarefa 19



Fonte: Adaptação de Горбов et al. (2007).

Nas situações **e** e **f** (figura 54), posto que os números negativos e positivos *a* (**f**) e *b* (**e**) estão localizados a mesma distância da origem, não é possível o emprego do primeiro método para determinar qual número é maior, uma vez que não existe um número mais afastado que outro em relação à origem. Então, significa que os números *a* e *b* são iguais em ambas as situações?

Figura 54: Situações **e** e **f** da tarefa 19



Fonte: Adaptação de Горбов et al. (2007).

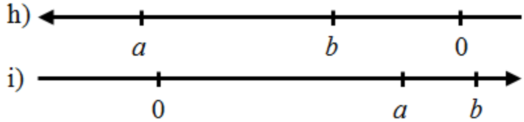
Pelo contrário, os números são distintos pela existência de uma relação maior-menor, isto é, os números *b* (**e**) e *a* (**f**) são maiores que os *a* (**e**) e *b* (**f**), o que se justifica pela diferença entre ambos resultar num número real positivo. Trata-se, então, de mais uma fragilidade do primeiro método.

A constatação de que o primeiro método de comparação dos números positivos não é válido para os negativos, leva à análise com adoção do segundo método, que corresponde ao sentido da passagem de um ponto a outro na reta numérica.

As situações **h** e **i** (figura 55), ao se restringirem aos números positivos, possibilitam que se retome o modo de comparação dos dois referidos números. Em **h**, ao se admitir que tenha o mesmo sentido que o do vetor unidade, ocorre a passagem do número *b* ao *a*, ou seja, a *b* acrescenta-se um número real positivo *c* que determina *a* ($b + c = a$). Desse modo, o número *a* é maior que o *b*.

No entanto, se a opção é pelo sentido oposto do vetor unidade, passa-se do número *a* para o *b*, isto é, de *a* subtrai-se um número real positivo *c* que origina o *b* ($a - c = b$). Tal deslocamento na reta numérica permite afirmar que o número *b* é menor que o *a*.

Figura 55: Situações **h** e **i** da tarefa 19

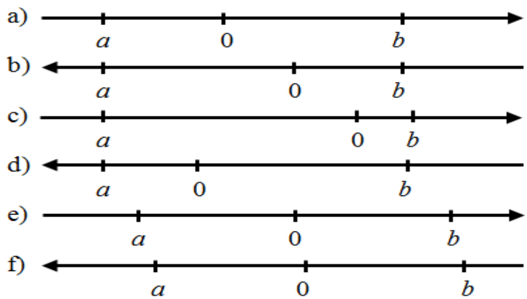


Fonte: Adaptação de Горбов et al. (2007).

Em atendimento ao segundo método, a situação **i** solicita duplo deslocamento: o primeiro correspondente ao do vetor unidade (para a direita), o que se conclui que *a* é menor porque está mais próximo do zero, consequentemente, o *b* é maior que *a*; o segundo com sentido oposto ao vetor unidade (para a esquerda), isso significa que o ponto de partida é *b* (o maior) para chegar em *a* (menor). Portanto, a relação em ambos os casos é: $a < b$ ou $b > a$.

Quanto as situações **a, b, c, d, e** e **f** (figura 56), por envolver além dos números positivos, os negativos, cabe questionar: o segundo método é válido para tais números?

Figura 56: Situações **a, b, c, d, e** e **f** da tarefa 19



Fonte: Adaptação de Горбов et al., (2007).

Em **b, d** e **f,** o sentido do vetor unidade determina que os números positivos estejam situados à esquerda da origem e os negativos à sua direita, o que serve de base para a análise da relação maior-menor, de acordo como segundo método.

Tomar o mesmo sentido do vetor unidade para comparar os números *a* e *b* significa sair de *b* e chegar em *a*, ou seja, acrescenta-se a *b* um número real positivo *c* que resulta em *a* ($b + c = a$). Desse modo, o número positivo *a* é maior que o negativo *b*.

No mesmo contexto, mas adotando o sentido oposto ao do vetor unidade (partir de *a* e chegar em *b)*, acarreta na subtração de um número real positivo *c* de *a*, que origina *b* (*a* - *c* = *b*). Assim sendo, o número negativo *b* é menor que o positivo *a*.

Na comparação de números positivos e negativos das situações analisadas, verifica-se que o sentido adotado para a passagem de um ponto ao outro na reta numérica não leva a uma contradição na relação maior-menor entre dois números.

O mesmo acontece nas situações **a, c** e **e** (figura 56). No deslocamento em dois sentidos – o mesmo que o do vetor unidade e o seu oposto – entre os números *a* e *b*, averígua-se que o número *a* é o menor e o *b* é o maior.

Apesar de o segundo método (sentido da passagem de um ponto ao outro na reta numérica) ser válido quando envolve um número positivo e um negativo, falta analisar sua adequação à relação maior-menor de dois números negativos, como nas situações **g** e **j** (figura 53).

Em **g**, o sentido do vetor unidade determina que os números positivos estejam à direita da origem e os negativos à sua esquerda. Se a referência for sentido que resulta em sair de *a* e chegar em *b*, ao número negativo *a* acrescenta-se o número real positivo *c*, que resulta no negativo *b* (*a* + *c* =*b)*. Então, o número negativo *b* é maior que o também negativo *a*.

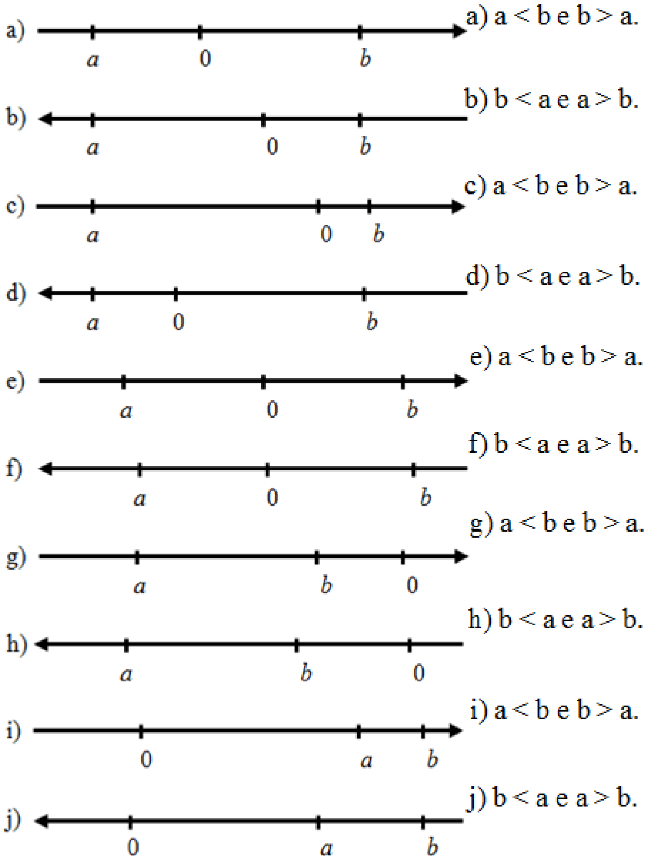
No entanto, ao tomar o sentido oposto do vetor unidade, isto é, partir de *b* e chegar em *a*, ocorrerá que do número negativo *b* será subtraído um número real positivo *c* que resulta no número negativo *a* (*b* - *c* = *a*). Assim sendo, o número *a* é menor que o *b*.

Na situação **j**, a passagem entre os números negativos *a* e *b* em dois sentidos em relação ao vetor unidade, possibilita a elaboração da conclusão de que o *b* é o menor e *a* é o maior.

O término da análise das dez situações permite algumas considerações. A mais salutar é de que o segundo método de comparação dos números positivos é abrangente e generalizável, pois também é válido para a análise da relação maior-menor entre os números negativos, na reta numérica. Como dizem Горбов et al. (2006), o segundo método não é contraditório nas comparações que envolvam os números negativos.

No contexto das considerações sobre a tarefa 19, vale trazer uma tarefa (figura 57) similar à figura 50, com a diferença que apresentará os resultados da relação maior-menor entre os números *a* e *b* contidos nas dez situações.

Figura 57: Síntese das Situações **a, b, c, d, e, f, g, h, i** e **j** da tarefa 19



Fonte: Adaptação de Горбов et al. (2007).

Nesse âmbito, a tarefa 16 tem sua importância por apontar a falta de conhecimento sobre a comparação dos números negativos. Significa, então, que ela gerou a necessidade de algo para a referida deficiência, ou seja, um método com a condição de possibilitar a comparação tanto dos números negativos como dos positivos, indistintamente, um modo geral que resolva situações desta natureza conceitual.

Por sua vez, a tarefa 17 mostrou dois métodos que permitem a comparação dos números positivos. Contudo, somente o segundo – o sentido da passagem de um ponto a outro – é admitido para os números negativos, pois diferentemente do primeiro método (posição), ele não é contraditório.

Assim sendo, o segundo método de comparação dos números positivos também é válido para os negativos, isso significa dizer que ele supriu a necessidade conceitual verificada na tarefa 16.

As próximas duas tarefas se dirigem ao estabelecimento de uma regra para o processo comparativo de dois números, *a* e *b*, em três casos: *a* e *b* negativos, *a* e *b* positivos e para *a* negativo e *b* positivo.

Na primeira, a seguir, é proposta a comparação de dois números, a fim de indicar o módulo, nas seguintes situações: em *a*, um número *m* é negativo; em *b*, é zero; em *c*, é positivo.

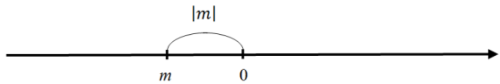
Tarefa 20:

Encontre o módulo e determine o sinal do número *m*, em que:
a) $m < 0$ b) $m = 0$ c) $m > 0$ (ГОРБОВ et al., 2007).

Como visto em tarefas anteriores, o módulo de um número corresponde à sua distância em relação à origem, na reta numérica, e os sinais de "+" e "-" indicam se tal número é positivo ou negativo.

Na situação *a*, o fato de o número *m* ser menor que zero significa que ele é negativo e o seu sinal é de menos "-". Em outras palavras, *m* só é menor que zero, porque a diferença entre zero e *m* resulta num número real positivo *z* ($0 - m = z$).Quanto ao seu módulo, consiste na distância em que ele se encontra da origem (zero), na reta numérica (figura 57).

Figura 58: Representação do número negativo *m* e seu módulo na reta

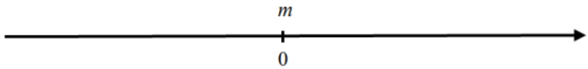


Fonte: Resolução da situação com base na orientação de Горбов et al. (2007).

Nessa situação, admite-se que se considere o *m* uma variável, pois ele representa qualquer número negativo sem especificá-lo. Para Caraça (2010, p. 120), a variável é "[...] o símbolo da vida coletiva do conjunto, vida essa que se nutre da vida individual de cada um dos seus membros, mas não se reduz a ela". Por *m* representar qualquer número negativo, significa que qualquer valor atribuído a ele é menor que zero (Горбов et al., 2006).

Em *b*, *m* igual a zero impõe a condição conclusiva de ser o único número que não é nem negativo, nem positivo e, por decorrência, não apresenta nenhum sinal. Por ele coincidir com o ponto de origem da reta, a sua distância em relação ao zero é nenhuma; logo, seu módulo é zero (|0|= 0), visto que ele é a própria origem (figura 58).

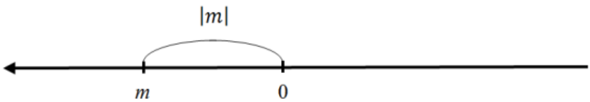
Figura 59: Representação do número *m* como zero na reta numérica



Fonte: Resolução da situação com base na orientação de Горбов et al. (2007).

Na situação *c*, o número *m* > 0 significa que ele é positivo e o seu sinal é de mais “+”. A relação entre os números *m* e zero também é aceita como: o número zero é menor que o *m*. O zero somente é menor que *m* uma vez que a diferença entre *m* e ele resulta num número real positivo *z* (*m* - 0= *z*). Nesse caso, o módulo de *m* corresponde à distância que ele esteja do zero, na reta numérica (figura 59).

Figura 60: Representação do número positivo *m* e seu módulo na reta



Fonte: Resolução da situação com base na orientação de Горбов et al. (2007).

Do mesmo modo que na situação *a*, em *c* o *m* também é admitido como uma variável, representativa de qualquer número positivo. Também torna-se aceita a afirmação: qualquer número positivo é maior que zero (ГОРБОВ et al., 2006).

Essa tarefa traz, implicitamente, uma das propriedades da relação de ordem *x* < *y* nos números reais, a da tricotomia, isto é, dados dois números reais *x* e *y*, ocorre exatamente uma das alternativas, *x* = *y*, *x* < *y*, ou *y* > *x* (LIMA, 1999). Especificamente nessa tarefa, a tricotomia se manifesta ao se ter um dos números reais o zero e como outro o *m*, o que possibilita três alternativas: *m* ser negativo (*m* < 0), *m* ser positivo (*m* > 0) ou *m* ser zero (*m* = 0).

A próxima tarefa também se apresenta no contexto da comparação de dois números em três casos, porém, diferentemente da tarefa 20, eles se referem a *a* e *b* negativos ou ambos positivos, bem como *a* negativo e *b* positivo.

Tarefa 21:

Quando um número a é menor que outro número b, se:

a) ambos os números são negativos;
b) ambos os números são positivos;
c) os números têm sinais diferentes? (ГОРБОВ et al., 2007).

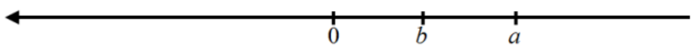
De acordo com Lima et al. (2006), um número é menor que outro, por exemplo, $a < b$, quando a diferença entre b e a consiste num número real positivo z. Ou, um número a é menor que outro número b quando a a adiciona-se um número real positivo z e a soma dos dois números, a e z, passa a ser igual ao b.

Esse entendimento de Lima et al. (2006) – da condição conceitual científica de um número ser menor que outro – será usado para a análise das situações a, b e c. Também recorro à reta numérica – por entender, assim como Rosa (2012), que ela é o lugar geométrico dos números – ao uso do segundo método, uma vez que na tarefa 19 foi visto que ele é válido para a comparação dos números negativos, além dos positivos.

Na situação a, um número negativo a é menor que outro negativo b. Essa relação entre os números a e b, para Lima et al. (2006), só ocorre se a a for adicionado um número real positivo c que torne a referida adição igual a b ($a + c = b$). Essa operação é análoga ao segundo método de comparação dos números, na reta numérica, quando se adota o sentido do vetor unidade para passar de um ponto ao outro.

Na reta numérica (figura 60), a passagem do ponto a para o b corresponde a adicionar um número real positivo c a a para atingir o b. Por consequência, o número negativo a é menor que o negativo b.

Figura 61: Comparação de dois números negativos



Fonte: Resolução da situação com base na orientação de Горбов et al. (2007).

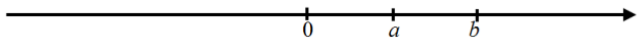
Tal relação entre os números negativos a e b também admite a avaliação pelos seus módulos. Assim, tanto o módulo de b quanto o de a incide na distância que cada um dos dois números se encontra do zero. Conforme a figura 60, essa distância é maior para a do que para b.

A verificação dos módulos de a e b permite duas constatações entre os dois números negativos. A primeira consiste em que, entre eles, o menor é aquele que possui maior módulo. A segunda corresponde que o maior tem o menor módulo (ГОРБОВ et al., 2006).

A situação **b** também envolve dois números em que um é menor que outro, mas diferentemente do que acontece em **a**, eles são positivos. Novamente, retoma-se a condição de que um número positivo *a* seja menor que outro positivo *b*; ele permitirá a adição de um número real positivo *c*, tal que $a + c = b$. Do mesmo modo que ocorreu na situação anterior (a), a referida adição é compatível com o segundo método de comparação dos números na reta numérica, quando se toma o sentido do vetor unidade para passar de um ponto ao outro.

Na reta numérica (figura 61), a passagem do ponto *a* para o *b* consiste em adicionar um número real positivo *c* a *a* para chegar ao *b*. Isso caracteriza o número positivo *a* como sendo menor que o também positivo *b*.

Figura 62: Comparação de dois números positivos



Fonte: Resolução da situação com base na orientação de Горбов et al. (2007).

A mesma relação entre os números positivos *a* e *b*, assim como ocorreu quando eram negativos, é passível de avaliação por meio dos respectivos módulos. Sendo o de *b* maior que o de *a*, uma vez que o número *b* está mais distante do *a* em relação ao zero. Essa análise permite duas constatações relativamente à comparação entre dois números positivos: 1) o maior deles é aquele que possui maior módulo; 2) o menor dentre eles é o de menor módulo (ГОРБОВ et al., 2006).

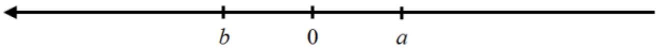
A situação **c**, assim como **a** e **b,** requer a análise de dois números, *a* e *b,* distintos em termos de relatividade, pois um é negativo (*a*) e o outro, positivo (*b*). Qual dos dois números é o menor? O positivo *b* pode ser menor que o negativo *a,* ou o negativo *a* ser menor que o positivo *b*?

Na primeira delas ($b < a$), ao examinar a diferença entre o *a* e o *b* ($a - b$), constata-se que ela pertence aos reais negativos e não aos positivos. Desse modo, o número positivo *b* não é menor que o negativo *a*, pois, para que assim fosse, tal diferença, de acordo com Lima et al. (2006), deveria ser um número real positivo.

A segunda delas ($a < b$) – investigação da diferença de *b* com o *a* ($b - a$) –, averígua que ela pertence aos reais positivos, isto é, o número negativo *a* é menor que o positivo *b*. Em outras palavras, o número *a* permite que a ele seja adicionado um número real positivo *c*, e essa adição o torna igual ao *b* ($a + c = b$).

A mencionada adição incide no segundo método de comparação dos números na reta numérica, quando é adotado o sentido do vetor unidade para passar de um ponto ao outro. Na reta numérica (figura 62), a passagem do ponto *a* para o *b* consiste em adicionar um número real positivo *c* a *a* para chegar a *b*. Consequentemente, torna possível afirmar que *a* é menor que *b*.

Figura 63: Comparação de um número negativo *a* com um positivo *b*



Fonte: Resolução da situação com base na orientação de Горбов et al. (2007).

Por *a* ser menor que *b* e ambos constituírem-se em variáveis representativas de quaisquer números negativos (*a*) e positivos (*b*), é possível, novamente, as afirmações: 1) um número negativo é sempre menor que um positivo; 2) *b* é maior que *a*; 3) um número positivo é sempre maior que um negativo.

Como decorrência da segunda e terceira afirmações, não é possível estabelecer a relação de *a* e *b* por meio do módulo, que somente é adotado como instrumento para comparação quando os dois números são de mesma natureza.

As sínteses elaboradas no desenvolvimento da tarefa em foco nesse processo de análise permitem dizer que ela realmente cumpriu com sua finalidade, como previram Горбов et al. (2006), que foi o estabelecimento da regra de comparação de quaisquer números negativos ou/e positivos. São elas:

- Entre dois números negativos o maior é o que tem menor módulo.

- Entre dois números positivos o maior é o que possui maior módulo.

- Um número positivo sempre é maior do que um negativo.

Essas sínteses se configuram como generalizações do processo de comparação de números, independentemente da sua natureza (positivo ou negativo e singularidades (inteiro, racional e irracional). Vale reafirmar que, na proposta de Davýdov, o processo de comparação não é peculiaridade do currículo escolar do currículo de matemática do sexto ano. Pelo contrário, iniciou com os números positivos no primeiro ano escolar (ROSA, 2012) e, como visto, no estágio ao qual se voltou a análise do presente estudo, passa-se a comparar também os negativos. Tal comparação ocorre, em determinado momento, entre dois números que não são iguais. Isso significa dizer que, entre eles, há uma relação de desigualdade, maior-menor, que permite a identificação da existência de uma diferença entre os referidos números. Rosa (2012), em consonância com os pressupostos de Davýdov (1982), considera essa diferença a base geneticamente inicial das operações de adição e subtração e suas representações na reta numérica.

Com a introdução dos números negativos na reta numérica, é possível operá-los em termos de adição e subtração (Essas operações não são objeto desta dissertação). No entanto, para que elas se efetivem, surge à necessidade de saber qual dos dois números comparados é o maior ou o menor. Isso é suprido no desenvolvimento da tarefa 21, que promoveu a elaboração da regra explicitada anteriormente para a comparação dos três casos possíveis entre números positivos e negativos.

Essa tarefa, além de ser a última da seção que corresponde à representação dos números negativos na reta numérica, também encerra o processo de análise referente ao objeto delimitado para estudo da dissertação. Entendo conveniente um retorno às ideias centrais que moveram e se explicitaram em sua resolução. Para a introdução dos números negativos na reta numérica, foram geradas algumas necessidades: um local e uma unidade (vetor) que possibilitam a indicação da posição dos números positivos e negativos, pois o segmento de reta somente permitia a representação do comprimento entre cada unidade.

Ao demandar um vetor como unidade para a introdução dos números negativos na reta numérica, ocorreu a mesma exigência de quando se iniciou o estudo desses números na seção anterior, isto é, uma grandeza vetorial em vez de uma escalar de comprimento.

A constatação de que os estudantes não comparariam os números negativos porque se tratava de uma nova ideia conceitual caracterizou a ausência de um conhecimento, isto é, carência de algo para a concretização de tal comparação. Tal necessidade é satisfeita com um método que serve tanto para os números positivos quanto aos negativos: método do sentido, da passagem de um ponto ao outro. Com isso, formula-se uma regra que permite expressar os três casos de comparação entre dois números, sejam eles negativos e/ou positivos.

Como é característica da proposta de Davýdov, toda tarefa – além de estreitamente articulada com a anteriormente desenvolvida – gera expectativa de um novo conceito ou ideia em estado latente de apropriação, por parte dos estudantes (ROSA, 2012, MADEIRA, 2012, SOUZA, 2013). É nesse contexto que os métodos de comparação acenam para o estudo das operações de adição e subtração com os números negativos, além dos positivos, na reta numérica.

Por sinal, o desenvolvimento das operações com números negativos vislumbram futuras investigações. Porém, vale antecipar que elas se alicerçam na carência de saber qual é o menor ou o maior entre dois números. É a identificação deles que permite chegar à diferença entre ambos e, consequentemente, definir se a operação é a adição ou a subtração. Isso significa dizer que elas têm como condição de surgimento a regra construída na tarefa 21, por satisfazer a necessidade de identificação, entre dois números reais, qual é o maior e o menor. Por decorrência, virá à tona a necessidade de analisar, na reta numérica, a possibilidade de determinar o módulo que, dos três casos da regra construída, dois estão a ele relacionados.

Os dois métodos e a regra (em suas três condições) de comparação culminam com a satisfação das necessidades emergentes para o surgimento dos números negativos. Vale destacar que o processo de introdução desses números no ensino, conforme propõem Davýdov e colaboradores, é caracterizado por um conjunto de tarefas particulares que criam as condições, tanto para o surgimento quanto para a superação, das carências (necessidades) conceituais e pedagógicas peculiares ao desenvolvimento do referido conceito.

Portanto, trata-se de um modo de organização do ensino de matemática que não consiste somente de exercícios repetitivos. Caso assim fosse, não propiciaria a explicitação das necessidades apontadas durante o processo de análise no presente capítulo. Em vez disso, segundo Devlin (2009), deixaria muito mais estudantes à margem dos conhecimentos matemáticos do que aqueles que somente dominam os rudimentos dos números com teor de contagem.

Tratar da introdução dos números negativos, no enfoque de Davýdov, é questão de referência a uma singularidade numérica, uma vez que desde o primeiro ano escolar tem-se o número real como básico, que advém da relação entre grandezas, até então as escalares, com certa suficiência para significar os positivos. O diferencial que se apresenta no sexto ano escolar é que uma nova grandeza, a vetorial, se constitui em necessidade essencial para que se apresentem os negativos, mas também com abrangência aos positivos. Do mesmo modo, no que faz menção a representação, ambos (positivo e negativo), ao se tratar da especificidade de ser inteiro e racional, são somente pontos particulares na reta numérica real.

O movimento que produz essa dinamicidade emerge das necessidades que, concomitantemente, criam as condições para o surgimento de outras delas. Por consequência, elaboram-se novas tarefas particulares, que explicitam novos conceitos e significações conceituais que aprofundam e qualificam a ideias essenciais de números negativos em relação com os positivos.

Essas necessidades se constituem em conteúdo das próprias necessidades e motivos da atividade de estudo que, segundo Davídov e Slobódchikov (1991), orientam os estudantes na apropriação de conhecimentos, como resultado da própria atividade transformadora. As transformações dizem respeito às revelações, no material de estudo, das relações internas, essenciais, que emergem da análise das tarefas que orientam os estudantes a acompanhar a origem de todas as manifestações pertinentes ao objeto de estudo. A necessidade do estudo é, pois, a carência do estudante de experimentar um ou outro objeto, real ou mentalmente, com a finalidade de, nele, separar os aspectos gerais essenciais e particulares externos, bem como suas inter-relações (DAVÍDOV; SLOBÓDCHIKOV, 1991).

Como diz Libâneo (2004), o resultado disso é que os estudantes aprendem a pensar teoricamente sobre um determinado objeto de estudo, consequência de sua apropriação em bases teóricas. E, por extensão, conseguem adotá-lo em situações que se apresentam na vida.

Conforme Davídov (1987), um ensino que tem como fundamento a generalização teórica que se caracteriza pela: análise autônoma dos dados da tarefa; separação das conexões essenciais; consideração de que cada tarefa é uma variante de outra, resolvida anteriormente por procedimentos que evidenciam teor teórico.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No fechamento desta dissertação resta-me a manifestação de algumas reflexões a respeito do modo de organização do ensino de matemática que, assim como a literatura recente, considero algo extremamente não convencional. Na impossibilidade de abarcar todos os conceitos matemáticos delimitei para o estudo do número negativo que, no ensino brasileiro, é marcado por dificuldades, e os resultados no que concerne à sua aprendizagem têm sido bastante insatisfatórios (BRASIL, 1998). Embora os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) denunciem problemas no ensino e na aprendizagem do referido conceito, sua proposta não traz avanços extremos em relação ao método e ao conteúdo, pois se aproxima daquilo que Davýdov (1982) denomina de ensino tradicional. Isso significa dizer que a organização do ensino brasileiro para o desenvolvimento conceitual do número negativo apresenta problemas.

Por isso, recorri a outra organização de ensino, a proposição davydoviana que, segundo Schmittau (2004), Devlin (2009), Libâneo (2004) e Rosa (2012), traz algo novo em relação às diversas propostas que se veiculam nas produções científicas ou se adotam nos contextos escolares, mundialmente. Para tanto, estabeleci como finalidade a análise das necessidades que se apresentam no âmbito das atividades de ensino e estudo, mais especificamente, no modo davydoviano de organização do ensino, referente às tarefas particulares voltadas ao conceito de números negativos.

Com base em Davídov (1988), poder-se-ia dizer que a organização de sua proposta de ensino da Matemática apresenta a seguinte estrutura: tarefa geral de estudo, composta por ações de estudos, cada qual requer uma série de tarefas particulares que trazem à tona os conceitos a serem apropriados pelos estudantes. Foram para as tarefas particulares – referentes à introdução do conceito dos números negativos, no sexto ano escolar – que dirigi a atenção, no presente estudo. Em especial, dediquei-me ao entrelaçamento entre elas, tendo por base as necessidades prementes dos seus surgimentos com o objetivo de colocar o estudante em atividade de estudo e, por consequência, em processo de desenvolvimento do pensamento teórico relativo ao conceito de número negativo.

Então, cumpre-me recuperar as questões centrais que caracterizaram as análises empreendidas sobre o objeto e as questões da pesquisa. Nesse sentido, importa dizer que, na proposição davydoviana, as tarefas particulares iniciais – em especial, a primeira e a terceira –

têm a especificidade da geração da necessidade do estudo de um novo conceito: o de número negativo. O contexto de manifestação de tal necessidade é que, até então, a resolução de subtrações e equações nem sempre era possível, pois se restringiam apenas aos números positivos. Com isso, defrontava-se com a impossibilidade da subtração $a - b$ em que o número a fosse menor que o b. O mesmo ocorria em equações, caso se apresentasse a inferioridade do valor da incógnita x em relação ao zero para satisfazer a igualdade entre os seus dois membros. Em ambos os casos, são necessários os números negativos.

Davídov (1987) considera que os conceitos matemáticos teóricos têm por base as grandezas e suas relações e, entre eles, destaca o de número. Este, quando se trata de positivo – central no currículo escolar do primeiro ao quinto ano – vincula-se às grandezas escalares. Contudo, se a referência for o estudo do conceito de número negativo, ao ser compreendido como número oposto ao positivo, requer algo novo conceitualmente que se refere a um novo tipo de grandeza, a vetorial, que lhe dá a significação peculiar.

Desse modo, uma das necessidades que se apresentaram para o estudo do número negativo, contemplada em tarefas particulares da proposição davydoviana, é a passagem da grandeza escalar para a vetorial. Apresenta-se, pois, um processo transformativo, em meio a novos conceitos: vetor, para representar todos os deslocamentos e, com ele, módulo, direção e sentido. Com isso, complexifica ainda mais o sistema conceitual de número que traduz o pressuposto histórico-cultural:

> É muito estreito e interessante o vínculo entre os diversos conceitos. A recíproca inter-relação e transferência dos conceitos, que são um reflexo da recíproca transferência e vinculação dos fenômenos da realidade, trazem por conseqüência que, cada conceito, surge relacionado com todos os restantes e, uma vez formado, vem determinar, por assim dizer, seu lugar no sistema de conceitos anteriormente conhecido. (VYGOTSKI, 1996, p.71).

No âmbito do sistema do conceito de número, a nova grandeza – vetorial – tem em sua especificidade uma mesma característica que a grandeza escalar: comprimento. Porém, não fica por aí, pois assume uma nova nomenclatura, o módulo, que se associa aos conceitos de direção e sentido, que não se apresenta em nenhuma grandeza escalar.

A trama conceitual emergente das necessidades de desenvolvimento do conceito de número negativo traz uma nova significação ao processo de comparação de grandezas. Sem perder a característica de que a relação entre elas seja da mesma espécie – como ocorre com as escalares (comprimento com comprimento, área/área, volume/volume, massa/massa) que determinam o número positivo – a relação entre dois vetores só possível com inclusão da observação de sentido, direção e módulo (comprimento).

O módulo se caracteriza na relação entre dois vetores ao se tomar um deles como unidade para expressar a medida do outro. Mas, na comparação entre dois vetores isso não é suficiente e surge a necessidade de considerar a direção e o sentido. No que concerne à direção, as tarefas particulares propõem a construção de vetores a partir de outro vetor tomado como unidade, com a condição da ocorrência de paralelismo; isso lhes acarreta ter a mesma direção. Quando se comparam dois desses vetores – um deles, unidade de medida – de mesmo sentido, o resultado obtido é um número positivo. Assim sendo, para que surja o número negativo se faz necessário algo a mais, outra significação: um vetor oposto. Observa-se que, nesse caso, não basta a indicação apenas do módulo, mas também a especificação do sentido no registro numérico correspondente ao resultado da relação entre os dois vetores. Essa necessidade ocorre porque a representação, tanto dos números positivos quanto dos negativos, é feita com a adoção dos mesmos signos. Daí, um sinal que diferencie esses novos números dos positivos: o menos (-), indicativo de sentidos opostos de dois vetores.

O termo ‘oposto’ dá outro significado aos números positivos, pois cada um deles tem um número oposto, o negativo, e vice-versa. Contudo, há uma exceção em urgência de ser estudada: o número zero. Nesse sentido, as tarefas particulares são elaboradas para que os estudantes concluam que o zero apresenta algumas peculiaridades: ele é tanto o módulo quanto o oposto de si próprio. Por tais características, ele se torna: 1) origem das ‘linhas de coordenadas’ (ГОРБОВ et al., 2006), reta numérica; 2) referência da relatividade (ser positivo e negativo ou oposto) quando vinculado ao sentido.

Nesse estágio de desenvolvimento conceitual, se concretiza a ideia de que o número negativo resulta da grandeza vetorial, e que ela possibilita o seu estudo, com também o zero e os positivos. Concomitantemente, é possível que se apresente outra necessidade, caso não explicitem as características dos vetores que originam os números positivos: apenas o módulo ou o módulo e o sentido, com a condição de que dois vetores tenham o mesmo sentido.

Observa-se que, na proposição davydoviana, uma necessidade conceitual gera outra. É nessa confluência que o conceito de oposto, em certo momento, torna-se o foco, assim como, a introdução do número negativo, na reta, em que se originam algumas necessidades: 1) a identificação de um local na reta numérica; 2) o estabelecimento de uma unidade (vetor), indicadora da posição dos números positivos e negativos.

A introdução do número negativo na reta numérica, o lugar geométrico dos números (ROSA, 2012; SOUZA, 2013), é algo novo para os estudantes, o que caracteriza uma carência de tal conhecimento. Para suprimi-la urge um método que permitia a comparação de todos os tipos de números (positivos e negativos) bem como dar sentido à passagem de um ponto ao outro.

Da mesma forma, é anunciado que as operações de adição e subtração, na reta numérica, carecem de algo que identifique a relação maior-menor, que permite a diferença entre os dois números. Para tanto, constrói-se a regra que indica, dentre dois números positivos e/ou negativos, qual deles é o maior e, consequentemente, o menor. Vale destacar que, dos três casos da referida regra, dois deles envolvem o módulo, o que gera a necessidade de verificar quando, numa reta com números, é possível determiná-lo.

Esse esforço de síntese sobre as necessidades emergentes no processo de estudo da introdução do número negativo dá subsídios para uma afirmação: a proposição davydoviana para o ensino do referido conceito se distingue das orientações brasileiras e catarinenses, conforme os PCNs (BRASIL, 1998) e a PCSC (SANTA CATARINA, 1998). Uma diferença se explicita nas recomendações oficiais de iniciar o ensino do número negativo restrito aos inteiros relativos. Só posteriormente abrangerá as outras singularidades numéricas do negativo: o racional e o irracional. Na proposição davydoviana, a questão da relatividade numérica se apresenta no contexto dos reais, isto é, positivo e negativo.

Nesse sentido, vale referenciar a PCSC por também se fundamentar na Teoria Histórico-Cultural. Em seus encaminhamentos, alude que o estudo do referido número decorre de uma necessidade e diz: “o professor criará situações que possibilitem ao aluno perceber as limitações dos Números Naturais e a necessidade de ampliação dos conjuntos numéricos.” (SANTA CATARINA, 1998, p. 110). No entanto, a diferença, em relação ao proposto por Davýdov, está na própria citação ao mencionar os números naturais. Em vez disso, a proposição davydoviana, segundo Rosa (2012), inicia o estudo do conceito de número pelos reais. Isso possibilita confirmar que a necessidade para o número negativo é diferente daquela da PCSC. Como dito anteriormente, a necessidade para o número negativo decorre da resolução de casos específicos de subtrações e equações.

Não é só nos elementos conceituais que a proposição de Davýdov se diferencia daquelas que ele denomina de tradicional, mas também nas questões de ordem pedagógica. Cada tarefa particular é cuidadosamente elaborada para que se articule com as antecedentes e, concomitantemente, gere dupla necessidade: do surgimento da precedente que, por sua vez, aponta para outro conceito ou significação pertinente ao sistema de número negativo.

Essa duplicidade se constitui em credencial para outra afirmação: o modo davydoviano de organização do ensino de números negativos imprime um movimento dialético pedagógico e, como tal, em permanente estado de devir. Isso significa que a articulação entre as tarefas particulares é marcada, não por rompimento de uma com a outra, mas de superação caracterizada por: 1) permanências conceituais e de elementos estruturais da própria organização das tarefas; 2) acréscimos de algo novo que complexifica o sistema conceitual e seu processo de elaboração, por parte dos estudantes.

A dialética da organização das tarefas particulares só é possível pela própria base genética de que é tomada para o desenvolvimento do conceito de número negativo: a grandeza vetorial (vetor), pelo seu teor teórico, que requer um novo método de ensino, como o que propõe Davýdov (1982). Portanto, há diferença extrema com outros modos de organização de ensino tidos como inovadores. Por exemplo, aquele citado por Damazio (2001), em que a referência para o ensino dos números relativos toma por base situações do cotidiano, ligadas a grandezas escalares, como o registro de temperatura, da posição do elevador nos andares de prédio, de pontos ganhos e perdidos de equipes participantes de um campeonato e de movimentação bancária. O autor conclui que essas situações prendem a atenção dos estudantes quando as discussões dizem respeito a elas mesmas. Porém, se tornam obstáculos no momento em que remetem para as questões conceituais. Por consequência, os conceitos permanecem em nível cotidiano, que somente desenvolve o pensamento empírico (DAMAZIO, 2001).

Como observa Libâneo (2004), o posicionamento de Davýdov afasta ideias pedagógicas presentes no contexto educativo brasileiro, galgadas em concepções que sobrepõem o desenvolvimento social e emocional ao cognitivo, a atividade prática ao pensamento teórico ou, ainda, reavivam o espontaneismo na educação escolar.

Com respeito às situações cotidianas referenciadas por Damazio (2001) como fonte de apropriação do conceito de número negativo, surge questionamento do tipo: será que a temperatura possibilita compreensão, por exemplo, desse número como oposto?

O currículo de Davydov enfatiza o conceito científico, desde o início, a partir da relação geral com envolvimento da grandeza vetorial, pois entende que:

> aprender matemática, usando o enfoque científico do geral ao particular, leva a um melhor entendimento e melhores resultados, em matemática, do que com o enfoque de concepção espontânea. Sua justificativa se fundamenta em que as crianças, desde a infância, começam aprendizagem da matemática por meio da abstração, para que elas estejam preparadas para usar as abstrações formais nos anos escolares posteriores, e que seu pensamento se desenvolverá, de forma tal, que poderá enriquecer suas capacidades para dominar matemática mais avançada (DEVLIN, 2009, p. 6).

Assim, a trama conceitual em nível científico, teórico, para a introdução do sistema conceitual de número negativo, também é fator de diferenciação em relação às indicações dos PCNs (BRASIL, 1998) e da PCSC (SANTA CATARINA, 1998). O conjunto de necessidades – que propiciaram elaborações de novas tarefas particulares e, nelas, a emergência de outros conceitos do referido sistema – se inserem em um contexto mais amplo: a necessidade de estudar para o desenvolvimento intelectual em nível teórico e, no caso específico, de números relativos (positivo e negativo).

A compreensão de que – no modo davydoviano de organização do ensino – o número negativo tem o significado teórico de oposto é síntese que me permite fechar a presente dissertação. Porém, ainda predomina o sentimento de incompletude e o desejo de continuidade por incentivo de questionamentos emergentes do próprio estudo. Um deles é: como se manifesta o significado de oposto nas operações de adição, subtração, multiplicação e divisão que envolvem os números negativos?

Mas não é só isso. Há, também, uma vontade de aprofundar o conceito de necessidade para categorizar seus diferentes tipos, com base em seu conteúdo e âmbito de seu surgimento (atividade ou tarefa). Penso que uma investigação dessa natureza traria contribuições não só para a satisfação de interesse pessoal, mas para a própria reflexão sobre as diversas atividades humanas, principalmente a pedagógica.

REFERÊNCIAS

ALEKSANDROV, A. D. Visión General de la Matemática. In: ALEKSANDROV, A. D. et al. **La Matemática: su contenido, métodos y significado.** 1. ed. 2ª reimpresión. Madrid: Alianza Universidad, 1976, p. 17-91.

AMORIM, S. R. C. **Números inteiros:** Panorama de Pesquisas Produzidas de 2001 a 2010. 2012. 128 f. Dissertação (Mestrado profissional em ensino de matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.

AFANASIEV, V. **Fundamentos de filosofia**. Rio de Janeiro: Civilização brasileira, 1968.

BERBESHKINA, Z.; ZERKIN, D.; YAKOVLEVA, L. ¿**Que es el materialismo histórico?** Moscú: Progreso, 1986.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática. Brasília, DF, 1997.

______. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática. Brasília, DF., 1998.

______. **Lei nº 11274,** de 6 de janeiro de 2006. O Ensino Fundamental obrigatório, com duração de 9 (nove) anos**.** Disponível em:<http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2004-2006/2006/Lei/L11274.htm>. Acesso em: 02 jul. 2014.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** 7. ed. Lisboa: Gradiva, 2010.

______. **Cálculo Vectorial.** 2. ed. Lisboa: Sá da Costa, 1957.

CHEPTULIN, A. **A dialética materialista:** categorias e leis da dialética. São Paulo: Alfa-Omega, 2004. Trad. Leda Rita Cintra Ferraz.

COSTA, J. M. C. **Tratado de Arithmetica.** Lisboa: Imprensa nacional, 1866.

COSTA, M. A. A evolução histórica da noção de número. In: COSTA, Manuel Amoroso (Org.). **As idéias fundamentais da matemática e outros ensaios.** 3. ed. São Paulo: Convívio, 1981. p. 217-224.

DAMAZIO, A. Elaboração de Conceitos Matemáticos: Abordagem Histórica Cultural. In: **Anais 29ª Reunião Anual -** Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, 2006, Caxambu. Associação Nacional de Pós Graduação e Pesquisa em Educação. Caxambu, p. 1-19. 2006.

______. Mathematical Cognition in the Class-room: A Cultural-historical Approach. In: HEDEGAARD, M. (Org.).**A Cultural-Historical Approach Learning in Classrooms.**1ª ed. Aarhus: Aarhus University Press, 2001, p. 191-210.

DAMAZIO, A.; ROSA, J. E.; EUZÉBIO, J. S. O ensino do conceito de número em diferentes perspectivas. **Educação Matemática Pesquisa,** São Paulo, v.14, n. 1, p. 209-231, 2012.

DAVÝDOV, V. V. **Tipos de generalización en la enseñanza.** 3 ed. Habana: Pueblo y Educación, 1982.

DAVÍDOV, V. V. Desarrollo psíquico en el escolar pequeño. In: PETROVSKI, A. V. (Org.). **Psicología evolutiva y pedagógica.** 2. ed. Moscú: Progreso, 1985. p. 80-119.

DAVÍDOV, V.; MÁRKOVA, A. La concepción de la actividad de estudio de los escolares. In: SHUARE, M. (Comp.). **La psicología evolutiva y pedagógica en la URSS.** Moscú: Progreso, 1987. p. 316-337.

DAVÍDOV, V. Análisis de los principios didácticos de la escuela tradicional y posibles principios de enseñanza en el futuro próximo. In: SHUARE, M. (Comp.). **La psicología evolutiva y pedagógica en la URSS.** Moscú: Progreso, 1987. p. 143-154.

______. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico.** Moscú: Progreso, 1988.

DAVÍDOV, V. V.; SLOBÓDCHIKOV, V. I. La enseñanza que desarrolla en la escuela del desarrollo. In**: La educación y la enseñanza:** una mirada al futuro. Progreso, Moscú, p. 118-144, 1991.

DAVYDOV, V. V. La renovación de la educación y el desarrollo mental de los alumnos. **Revista de Pedagogía,** Santiago, n. 403, p. 147-150, jun. 1998.

DEVLIN, K. ¿Habrá otro modo de iniciar la enseñanza de las matemáticas, que no sea contando? (Traducida y anotada por Diego Pareja Heredia. Universidad del Quindío). In: **MAA,** Enero de 2009, Disponível em: <http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/Filosofia/Devlin01.09.pdf>. Acesso em: 02 jan. 2015.

DUARTE, N. **Vigotski e o "aprender a aprender":** crítica às apropriações neoliberais e pós-modernas da teoria vigotskiana. 2. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2001.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil. **Zetetiké**. Ano. 3, n. 4, nov., p. 1-37. Campinas, SP, 1995.

GALPERIN, P.; ZAPORÓZHETS, A.; ELKONIN, D. Los problemas de la formación de conocimientos y capacidades en los escolares y los nuevos métodos de enseñanza en la escuela. In: SHUARE, M. (Comp.). **La psicologia evolutiva y pedagógica en la URSS.** Moscú: Progreso, 1987. p. 300-315.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GLAESER, G. Epistemologia dos números relativos. **Boletim GEPEM,** Rio de Janeiro, n. 17, p. 29-124, 1985.

HOBOLD, E. S. F. **Proposições para o ensino da tabuada com base nas lógicas formal e dialética.** 2014. 201f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2014.

ILIENKOV, E. V. La ascensión de lo abstracto a lo concreto en principios de la lógica dialéctica. In: JIMÉNES, A. T. **Teoría de la**

construcción del objeto de estudio. México: Instituto Politécnico Nacional, p. 151-200, 2006.

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

KOSIK, K.; TORÍBIO, A. **Dialética do concreto.** 2. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1995.

LEFEBVRE, H. **Lógica Formal e Lógica Dialética**. Tradução de Carlos Nelson Coutinho. 5. ed. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1991.

LEONTIEV, A. N. Las necessidades y los motivos de la actividad. In: SMIRNOV, A. A. et al.(Org.). **Psicologia.** 4. ed. México: Grijalbo, 1978. p. 341-354.

LEONTIEV, A. N. Uma contribuição à teoria do desenvolvimento da psique infantil. In: VIGOTSKII, L. S.; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. (Org.). **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem.** 11. ed. São Paulo: Ícone, 2010. p. 59-83.

LEONTIEV, A. **O desenvolvimento do psiquismo.** 2. ed. São Paulo: Centauro, 2004.

LIBÂNEO, J. C. A didática e a aprendizagem do pensar e do aprender: a Teoria Histórico-Cultural da atividade e a contribuição de Vasili Davydov. **Revista Brasileira de Educação**. Rio de Janeiro, n.27, p. 5-24. 2004.

LIBÂNEO, J. C.; FREITAS, Raquel A. M. M. Vasily Vasilyevich Davydov: a escola e a formação do pensamento teórico-científico. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (Org.). **Ensino desenvolvimental:** vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. Uberlândia: EDUFU, 2013. p. 315-350.

LIMA, E. L. **Análise Real**, **volume 1.** 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1999.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio – volume 1.** 9. ed. Rio de janeiro: SBM, 2006.

LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. Apresentação. In: ______. (Org.). **Ensino desenvolvimental:** vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. Uberlândia: EDUFU, 2013. p. 9-14.

LORETO, A. C. C.; LORETO JUNIOR, A. P. Segmentos orientados e vetores. In: ______. **Vetores e geometria analítica.** 4. ed. São Paulo: LCTE, 2014. p. 1-31.

LUZ, A. M. R.; ÁLVARES, B. A. Vetores – Movimento Curvilíneo. In: ______. **Curso de Física.** 4. ed. São Paulo: Scipione, 1997. p. 123-170.

MADEIRA, S. C. **"Prática":** uma leitura histórico-crítica e proposições davydovianas para o conceito de multiplicação. 2012. 168 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2012.

MAME, O. A. C. **Os conceitos geométricos nos dois anos iniciais do Ensino Fundamental na proposição de Davýdov.** 2015. 160 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2014.

PILIPENKO, N. V. Necesidad y casualidad. In: ROSENTAL, M. M.; STRAKS, G. M. (Org.). **Categorias del materialismo dialectico.** México: Grijalbo, 1958. p. 124-155.

PRESTES, Z.; TUNES, E.; NASCIMENTO, R. Lev Semionovitch Vigotski: um estudo da vida e da obra do criador da psicologia histórico-cultural. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (Org.). **Ensino desenvolvimental:** vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. Uberlândia: EDUFU, 2013. p. 47-65.

RAMALHO JUNIOR, F. et al. Vetores e grandezas vetoriais. In: ______. **Os fundamentos da física.** 2. ed. São Paulo: Moderna, 1976. p. 124-169.

REIS, G. L.; SILVA, V. V. **Geometria Analítica.** Rio de Janeiro: S. A., 1984.

ROSA, J. E. **O desenvolvimento de conceitos na Proposta Curricular de Matemática do Estado de Santa Catarina e na Abordagem**

Histórico-Cultural: um estado de relações. 2006. 111 f. Dissertação (Mestrado em Educação: Educação Matemática) **-** Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2006.

ROSA, J. E. **Proposições de Davydov para o ensino de matemática no primeiro ano escolar:** inter-relações dos sistemas de significações numéricas. 2012. 244 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

ROSA, J. E.; DAMAZIO, A. O ensino do conceito de número: uma leitura com base em Davydov. **Unión** (San Cristobal de La Laguna), n. 30, p. 81-100, 2012.

ROSA, J. E.; DAMAZIO, A.; ALVES, E. S. B. Adição e Subtração em Davýdov. **Boletim GEPEM,** Rio de Janeiro, n. 62, p. 61-75, jan./jul. 2013.

ROSA, J. E.; DAMAZIO, A.; CRESTANI, S. Os conceitos de divisão e multiplicação nas proposições de ensino elaboradas por Davydov e seus colaboradores. **Educação Matemática Pesquisa,** São Paulo, v. 16, n. 1, p. 167-187, 2014.

ROSA, J. E.; DAMAZIO, A.; SILVEIRA, G. M. O sistema de numeração nas tarefas propostas por Davýdov e colaboradores para o ensino da matemática. **Bolema,** Rio Claro (SP), v. 28, n. 50, p. 1135-1154, dez. 2014.

ROSENTAL, M. M.; STRAKS, G.M**. Categorías del Materialismo Dialéctico.** Tradução de Adolfo Sanchez Vazquez e Wenceslao Roces. México: Grijalbo, 1965.

RUBTSOV, V. A atividade de aprendizado e os problemas referentes à formação do pensamento teórico dos escolares. In: GARNIER, Catherine et al. (Org.). **Após Vygotsky e Piaget:** perspectiva social e construtivista. Escola russa e ocidental. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 129-137.

RUBINSTEIN, S. L. **Princípios de Psicologia Geral.** 2. ed. Lisboa: Estampa, 1977.

SANTA CATARINA, Secretaria de Estado da Educação e do Desporto. **Proposta Curricular de Santa Catarina:** matemática. Florianópolis: COGEN, 1998.

SANTA CATARINA. Secretaria de Estado da Educação. **Proposta Curricular de Santa Catarina:** formação integral na educação básica. 2014.

SCHMITTAU, J. Vygotskian theory and mathematics education: Resolving the conceptual procedural dichotomy. In: **European Journal of Psychology of Education**, 2004, V. XIX, No. 1, p.19-43. Instituto Superior de Psicologia Aplicada: Lisbon, Spain.

SHEPEL, E. L. Atividade de estudo: a psicologia e a pedagogia do agir. **Ensino em Re-Vista,** Uberlândia, v. 21, n. 1, p. 71-75, jan./jun. 2014.

SILVA, M. A. **Elaborações de estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental sobre números inteiros e suas operações.** 2012. 123 f. Dissertação (Mestrado em ciências exatas e tecnologia) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2012.

SOUZA, M. B. **O ensino do conceito de número:** objetivações nas proposições davydovianas e formalista moderna. 2013. 237 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2013.

TALIZINA, N. F. **Manual de Psicologia Pedagógica.** San Luis Potosí: Facultad de Psicologia Universidad Autónoma de San Luis Potosí, 2000.

WINTERLE, P. **Vetores e Geometria Analítica.** São Paulo: Makron Books, 2000. p. 1-17.

VYGOTSKI, L. S. **Obras escogidas IV:** Incluye Paidologia del Adolescente, Problemas de la Psicología Infantil. Madrid: Visor Distribuciones, 1996.

ГОРБОВ, С. Ф.; ЗАСЛАВСКИЙ, В. М.; ЗАХАРОВА, О. А.; МОРОЗОВА, А. В.; ТАБАЧНИКОВА. Н. Л. **Обучениематематике. 6класс:**Пособиедляучителя (Система Д. Б. Эльконина — В. В. Давыдова). М.:Бита-Пресс, 2006, 64с. GORBOV, S. F.; ZASLAVSKY, V. M.; ZAKHAROV, O. A.; MOROZOV, A. V.;

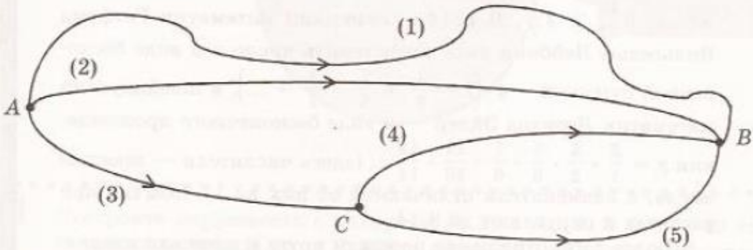
TABACHNIKOVA, N. L. **Aprender matemática. 6 ano:** Guia do Professor (Sistema D.B. Elkonin – V.V. Davydov). Moscou: Vita-Press, 2006. 64 p.

ГОРБОВ, С. Ф.; ЗАСЛАВСКИЙ, В. М.; ЗАХАРОВА, О. А.; МОРОЗОВА, А. В.; ТАБАЧНИКОВА. Н. Л. **Математика**: Учеб. пособиедля6классаобщеобразоват. учрежд. (Система Д. Б. Элькснжна — Б. В. Давыдова). 2-е изд. М.:Вита-Пресс, 2007. 80 с. GORBOV, S. F.; ZASLAVSKY, V. M.; ZAKHAROV, O. A.; MOROZOV, A. V.; TABACHNIKOVA, N. L. **Matemática:** livro didático. 6 ano (Sistema D.B. Elkonin – V.V. Davydov). 2. ed. Moscou: Vita-Press, 2007. 80 p.

ANEXOS

ANEXO A: Tarefa 1

92 На чертеже изображены точки и соединяющие их линии, которые пронумерованы. Двигаться по линиям можно только в направлениях, указанных стрелками.



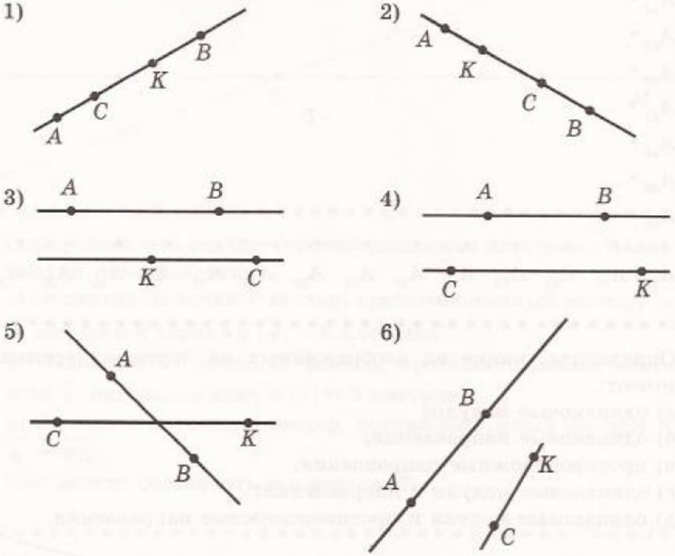
а) Сколько путей ведет из точки C в точку B?
б) Сколько путей ведет из точки B в точку C?
в) Сколько всего путей изображено на чертеже? Для каждого из них укажите начало и конец.

Путь	Начало	Конец

г) Сколько различных перемещений можно совершить этими путями?
д) Придумайте способы обозначения и изображения на чертеже перемещения из одной точки в другую.

ANEXO B: Tarefas 2 e 3

104 Сравните направления лучей AB и CK:



107 Определите, какие из изображенных на чертеже перемещений имеют:

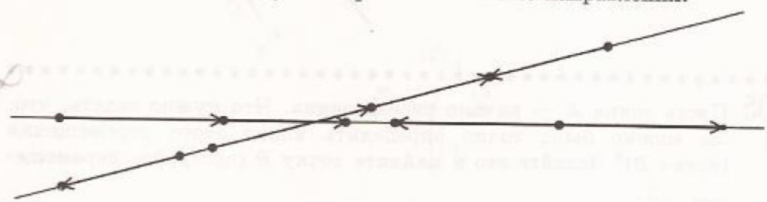
а) одинаковые модули;

б) одинаковые направления;

в) противоположные направления;

г) одинаковые модули и направления;

д) одинаковые модули и противоположные направления.



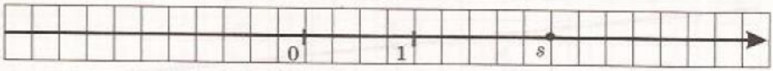
ANEXO C: Tarefas 4, 5 e 6

● **Задание 1**

На числовой прямой показано число s.

а) Отметьте на этой же числовой прямой те из чисел, которые можете:

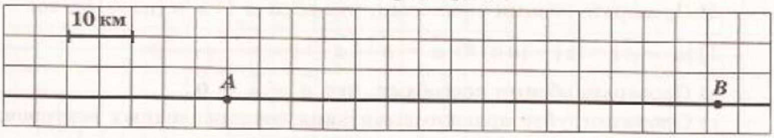
$$s - 1;\ s - 2;\ s - 3;\ s - 4.$$



б) Запишите отмеченные числа.

● **Задание 2**

Автомобиль выехал из пункта A в направлении пункта B, но, проехав 60 км, развернулся и поехал в противоположном направлении. Поездка закончилась в пункте C, находящемся на расстоянии 20 км от пункта A. Покажите на чертеже пункт C. Какое расстояние проехал автомобиль после разворота?



● **Задание 3**

Выберите уравнения, которые можете решить, и решите их:

а) $x + 178 = 356$;

б) $x + 356 = 178$;

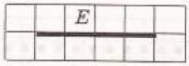
в) $x \cdot 178 = 356$;

г) $x \cdot 356 = 178$.

ANEXO D: Tarefas 7 e 8

128 а) Используя единицу E, постройте отрезок длиной:

1) $D = E + E$; 2) $B = E + E + E$; 3) $C = E + E + E + E$.



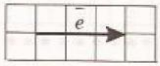
б) Измерьте длины E, D, B и T, где $T = \underbrace{E+E+\ldots+E}_{n}$, единицей E:

$\frac{E}{E} =$; $\frac{D}{E} =$; $\frac{B}{E} =$; $\frac{T}{E} =$.

в) Как еще можно записать результаты измерения этих величин?

г) Постройте вектор:

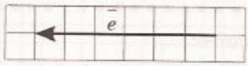
1) $\bar{d} = \bar{e} + \bar{e}$; 2) $\bar{b} = \bar{e} + \bar{e} + \bar{e}$; 3) $\bar{c} = \bar{e} + \bar{e} + \bar{e} + \bar{e}$.



д) Пусть $\bar{t} = \underbrace{\bar{e}+\bar{e}+\ldots+\bar{e}}_{n}$. Как задать отношения векторов $\bar{d}$, $\bar{b}$, $\bar{e}$ и $\bar{t}$ к вектору $\bar{e}$ (как связаны их модули и направления с модулем и направлением вектора $\bar{e}$)?

129 а) Постройте вектор:

1) $\bar{d} = \frac{2}{3}\bar{e}$; 2) $\bar{m} = 1\frac{5}{6}\bar{e}$; 3) $\bar{b} = 1{,}5\bar{e}$; 4) $\bar{a} = 1{,}5_{(6)}\bar{e}$.



б) Постройте вектор, противоположный вектору $\bar{b}$.

в) Как задать отношение вектора $-\bar{b}$ к вектору $\bar{e}$ (как связаны их модули и направления)?

$-\bar{b} =$ $\bar{e}$; $\frac{-\bar{b}}{\bar{e}} =$.

г) Постройте вектор:

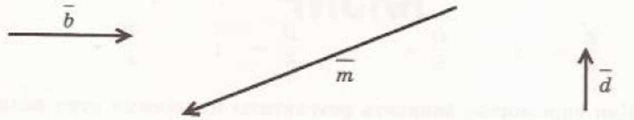
1) $\bar{c} = -0{,}5\bar{e}$; 2) $\bar{s} = -2\frac{1}{3}\bar{e}$.

д) Какими числами выражаются отношения векторов $\bar{c}$, $-\bar{c}$, $\bar{s}$, $-\bar{s}$ к вектору $\bar{e}$?

$\frac{\bar{c}}{\bar{e}} =$ $\frac{-\bar{c}}{\bar{e}} =$ $\frac{\bar{s}}{\bar{e}} =$ $\frac{-\bar{s}}{\bar{e}} =$

ANEXO E: Tarefas 9, 10 e 11

130 Выразите вектор $\bar{0}$ через векторы $\bar{b}$, $\bar{m}$, $\bar{d}$.

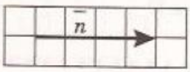


$\frac{\bar{0}}{\bar{b}} = \quad .$ $\qquad \frac{\bar{0}}{\bar{m}} = \quad .$ $\qquad \frac{\bar{0}}{\bar{d}} = \quad .$

131 а) Постройте вектор:

1) $\bar{b} = -7\bar{n}$; $\qquad$ 3) $\bar{d} = 13\bar{0}$;

2) $\bar{c} = 7(-\bar{n})$; $\qquad$ 4) $\bar{l} = -8\bar{0}$.



б) Сравните векторы:

1) $\bar{b}$ и $\bar{c}$; 2) $\bar{d}$ и $\bar{l}$.

132 Пусть $\bar{a} = -3\bar{e}$. Найдите:

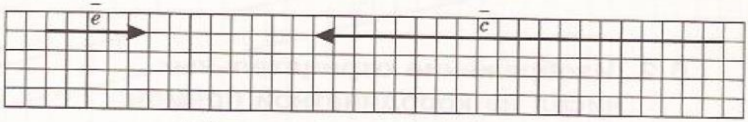
1) $\frac{\bar{a}}{\bar{e}}$; $\qquad$ 2) $\frac{-\bar{a}}{\bar{e}}$; $\qquad$ 3) $\frac{|\bar{a}|}{|\bar{e}|}$; $\qquad$ 4) $\frac{|-\bar{a}|}{|\bar{e}|}$.

Чем отличаются числа, которые выражают отношения противоположных векторов к одной и той же единице? Что у них общего? Как можно назвать такие числа? Что можно назвать модулем числа?

ANEXO F: Tarefas 12 e 13

133 Пусть $\frac{\bar{c}}{\bar{e}} = m$. Найдите модули и знаки чисел m и $-m$, если:

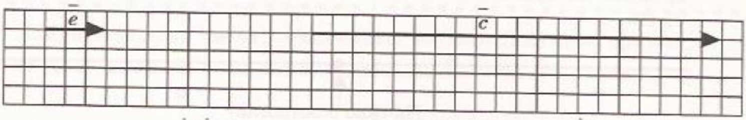
а)



$|m| =$ $\qquad$ $|-m| =$

$m =$ $\qquad$ $-m =$

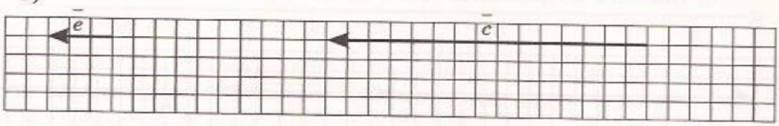
б)



$|m| =$ $\qquad$ $|-m| =$

$m =$ $\qquad$ $-m =$

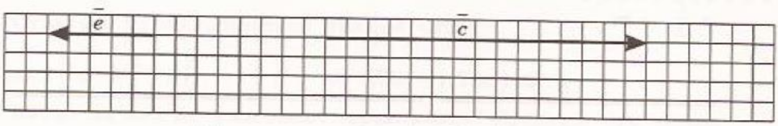
в)



$|m| =$ $\qquad$ $|-m| =$

$m =$ $\qquad$ $-m =$

г)



$|m| =$ $\qquad$ $|-m| =$

$m =$ $\qquad$ $-m =$

134 а) Какой знак имеет число $-n$, если:

1) n — положительное число;
2) n — отрицательное число;
3) $n = 0$?

б) Какой знак имеет число n, если:

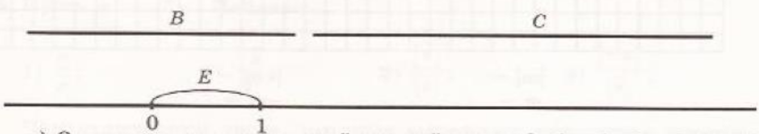
1) $-n$ — положительное число;
2) $-n$ — отрицательное число;
3) $-n = 0$?

ANEXO G: Tarefa 14

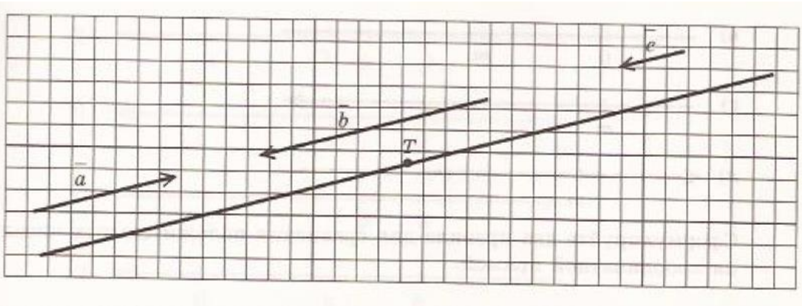
135 а) Как задать систему координат на прямой? Задайте систему координат на прямой и отметьте на ней точки с координатами 0, 1, 3, 10.

б) Найдите координаты точек A, K, M.

в) Отметьте на координатной прямой числа a и m, если $\frac{B}{E} = a$ и $\frac{C}{E} = m$.

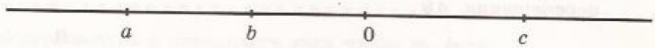


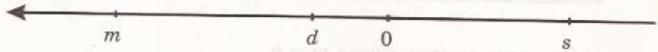
г) Отметьте на координатной прямой числа 0, 1, −1, 2, −2, n и k, если $\bar{e}$ — единичный вектор, точка T — начало координат, $\frac{\bar{a}}{\bar{e}} = n$ и $\frac{\bar{b}}{\bar{e}} = k$.

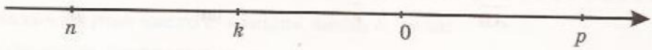


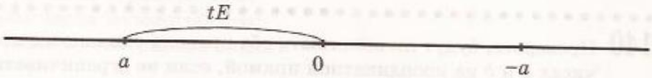
ANEXO H: Tarefas 15, 16 e 17

136 Найдите модуль чисел, отмеченных на координатной прямой.

а) 

б) 

в) 

г) 

E — длина единичного отрезка

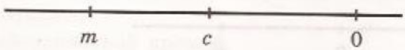
137 Отметьте на координатной прямой числа:

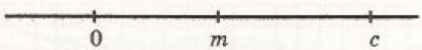
а) $2\frac{3}{4}$, $-2\frac{3}{4}$, $2\frac{2}{3}$, $-1\frac{1}{2}$; б) 1,89; −1,75; 1,67.

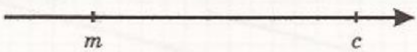
Какие из них вы уже умеете сравнивать? Сравните эти числа.

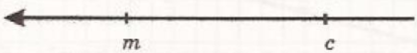
138 Сравните положительные числа:

а) 

б) 

в) 

г) 

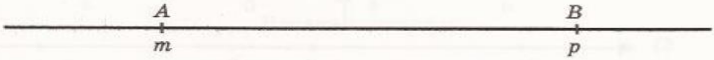
д) 

Сформулируйте два правила для сравнения положительных чисел на координатной прямой.

ANEXO I: Tarefas 18 e 19

139 Пусть m и p — положительные числа и $m > p$.

а) Сравните направление единичного вектора $\bar{e}$ с направлением перемещения $\overline{AB}$.

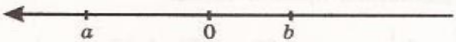


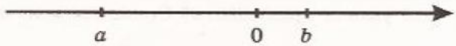
б) Сравните модули чисел m и p.

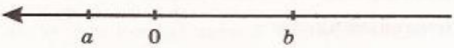
$\overline{AB}$ $\bar{e}$ $|m|$ $|p|$

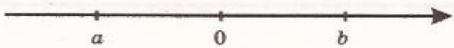
140 Проверьте, будут ли описывать оба правила одинаковое положение чисел a и b на координатной прямой, если не ограничиваться только положительными числами.

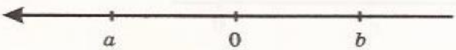
а) 

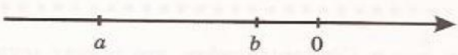
б) 

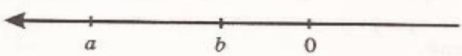
в) 

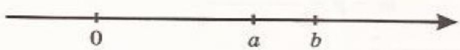
г) 

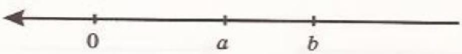
д) 

е) 

ж) 

з) 

и) 

к) 

Какое из двух правил надо принять для сравнения чисел (как положительных, так и отрицательных)? Объясните, почему.

ANEXO J: Tarefas 20 e 21

141 Найдите модуль и определите знак числа m, если:

а) $m < 0$; б) $m = 0$; в) $m > 0$.

142 В каком случае число a меньше числа b, если:

а) оба числа отрицательны;

б) оба числа положительны;

в) числа имеют разные знаки?