UNIVERSIDADE DO EXTREMO SUL CATARINENSE – UNESC
UNIDADE ACADÊMICA DE HUMANIDADES, CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MESTRADO EM EDUCAÇÃO

OSVALDO AUGUSTO CHISSONDE MAME

OS CONCEITOS GEOMÉTRICOS NOS DOIS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL NA PROPOSIÇÃO DE DAVÝDOV

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade do Extremo Sul Catarinense, Estado de Santa Catarina, Brasil, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Educação.

Orientador: Prof. Dr. Ademir Damazio

CRICIÚMA
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

M264p Mame, Osvaldo Augusto Chissonde.
Os conceitos geométricos nos dois anos iniciais do ensino fundamental na proposição de Davydov /Osvaldo Augusto Chissonde Mame; orientador: Ademir Damazio. – Criciúma, SC : Ed. do Autor, 2014.
150 p. : il. ; 21 cm.

Dissertação (Mestrado) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Programa de Pós-Graduação em Educação, Criciúma, SC, 2014.

1. Ensino de matemática. 2. Geometria – Estudo e ensino (Ensino fundamental). 3. Proposição Davydoviana. I. Título.

CDD. 22ª ed. 372.7

Bibliotecária Rosângela Westrupp – CRB 14º/364
Biblioteca Central Prof. Eurico Back - UNESC

OSVALDO AUGUSTO CHISSONDE MAME

"OS CONCEITOS GEOMÉTRICOS NOS DOIS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL NA PROPOSIÇÃO DE DAVYDOV"

Esta dissertação foi julgada e aprovada para obtenção do Grau de Mestre em Educação no Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade do Extremo Sul Catarinense.

Criciúma, 17 de setembro de 2014.

BANCA EXAMINADORA

Joselia E. da Rosa

Prof. Dr. Ademir Damazio
(Orientador – UNESC)

Profa. Dra. Josélia Euzébio da Rosa
(Membro – UNISUL)

Prof. Dr. Vidalcir Ortigara
(Membro - UNESC)

Prof. Dr. Alex Sander da Silva
(Suplente – UNESC)

Osvaldo A. Ch. Mame

Prof. Dr. Vidalcir Ortigara
Coordenador do PPGE-UNESC

Osvaldo Augusto Chissonde Mame
Mestrando

DEDICATÓRIA

À ilustre Prof.ª Maria Fernanda (minha mãe), por ter me mostrado o caminho certo desde os primeiros anos de vida.
A Neusa, minha paciente esposa, e aos meus filhos, Elzany e Osvalneusio Mame, por aceitarem as minhas constantes ausências por causa do Mestrado.
Aos meus irmãos, José, Orlando e Jujuina, pela dedicação e companheirismo que temos um pelo outro e o sentido especial que damos à nossa vida.
Ao Prof. Ademir Damazio, pela sensibilidade ao me receber como orientador, por sua sabedoria, ética, generosidade e ensinamentos e por não ter desistido de mim, apesar de minhas fraquezas, principalmente as teóricas.

AGRADECIMENTO

A aprendizagem é a nossa própria vida, desde a juventude até a velhice, de fato quase até a morte; ninguém passa dez horas sem nada aprender.
Paracelso (1951).

A conclusão desta dissertação só foi possível graças ao contributo de pessoas comprometidas com o processo de humanização da sociedade. Estas – com simplicidade, ética e generosidade – foram me ajudando a enxergar o mundo sob um ângulo diferente daquele que eu estava acostumado, isto é, de acordo com o próprio contexto. Assim, ao terminar esta etapa – que na verdade marca o início de meus estudos –, resta-me agradecê-los e, também, incluir todos que direta e indiretamente contribuíram para que este fato acontecesse.

Desse modo, meus agradecimentos são dirigidos especialmente ao Professor Ademir Damázio, orientador desta dissertação e Líder do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: Uma Abordagem Histórica Cultural.

Aos Professores Doutores, Vidalcir Ortigara e Josélia Euzébio da Rosa, por examinarem este trabalho e proporcionarem reflexões relevantes para o seu enriquecimento durante a banca de qualificação.

Aos meus familiares, amigos e colegas, pelo companheirismo ao longo dos dois últimos anos.

Aos integrantes do GPEMAHC (Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: uma Abordagem Histórico-Cultural), pelo acolhimento e pelos momentos de estudo, reflexões durante a investigação e materiais bibliográficos disponibilizados (Prof. Dr. Ademir, Prof.ª Dr.ª Josélia, Lucas Sid, Lucas Lemos, Gisele, Cristina, Sandra, Josiane, Julian, Alexander, Eloir, Juliana, Willian, Iuri, Felipe, Milaine, Daiane, Valdirene, Beatriz, Suzana, Ana e Ediséia).

Aos Professores do Programa de Pós-Graduação em Educação (PPGE) da UNESC, pelas contribuições e discussões nas disciplinas cursadas.

A Vanessa, secretária do PPGE, pela dedicação em seu trabalho e preocupação com os mestrandos.

Ao INAGBE e ao ISP-UJES, pela dispensa e auxílio financeiro para que eu pudesse frequentar o mestrado.

“*A educação é única ferramenta mais poderosa que podemos utilizar para mudar o mundo*”.

Nelson Mandela

RESUMO

Na presente dissertação, investigou-se o contexto – matemático e pedagógico – em que ocorre o desenvolvimento de conceitos geométricos no primeiro ano do Ensino Fundamental, no modo de organização de ensino de Davýdov e seus colaboradores. A hipótese apresentada é que a investigação sobre uma nova proposta dirigida ao ensino de matemática, da educação escolar primária, subsidie decisões e efetivação de ações para evitar os problemas com os quais os alunos se defrontam, atualmente, quando ingressam no ensino superior. Trata-se de uma investigação qualitativa, de base bibliográfica, que tem como referência quatro obras que expressam a objetivação e orientação do modo davydoviano de organização do ensino de matemática e, por extensão, de geometria. Traz como fundamentos, mais especificamente, a psicologia pedagógica de base teórica histórico-cultural, porém sem perder de vista sua matriz, o Materialismo Histórico e Dialético. O modo de organização do ensino, elaborado e adotado por Davýdov, expresso no conjunto de tarefas particulares voltadas à geometria, possibilita que as crianças entrem em atividade de estudo, desde que o professor consiga atender a todas as orientações e criar novas, caso seja necessário. Outras minúcias conceituais de referência são as unidades constituídas por ponto, reta e segmento, elementos conceituais científicos da geometria – trazidos à tona desde Euclides – que são apropriados pelas crianças, não como algo estático e independente, mas interligados e em movimento. Isso porque cada tarefa se apresenta com novas significações em processo de apropriação que, simultaneamente, explicita os conceitos elaborados e acena para a necessidade de outros. Ademais, fica evidente que partindo das unidades ponto, linhas (abertas, fechadas e curvas) e segmentos, desenvolvem-se outros conceitos geométricos, tais como: quadriláteros (paralelogramo, retângulos, quadrados e losango), triângulos, ângulo, círculo, circunferência paralelepípedo, pentágono, hexágono e heptágono. Em termos pedagógicos, a proposta atende aos princípios de uma educação integral, desenvolvimental, ao sugerir que o objetivo da educação escolar, hoje, não seja apenas entregar mais conhecimentos aos alunos, mas sim ajudá-los a encontrar seu próprio caminho para a formação científica e outros tipos.

Palavras-Chave: Geometria, Ensino, Fundamental, Proposta, Matemática, Davýdov.

ABSTRACT

In this dissertation, we investigate the context-mathematical and pedagogical-that is the development of geometric concepts in the first year of elementary school, in Davýdov teaching mode of organization and his collaborators. Our hypothesis is that research on a new proposal directed to the teaching of mathematics, primary school education, subsidize decisions and gross actions to avoid the problems faced by students who currently enter higher education. This is a qualitative research bibliographic database, having as reference four works that express the focus and orientation of mathematics teaching organization Davydoviano and, bay extension, of geometry. It brings as foundations, more specifically, the pegagogical psychology of historical-cultural theoretical basis, but without losing sight of its matrice, the Historical and Dialectical Materialism. The organization of teaching mode, prepared and adopted by Davýdov, expressed in the particular set of tasks focused on geometry, enable children to enter in the study of business, provided that the teacher can meet all the guidelines and create new if necessary. Other conceptual minutiae of references is a unit consisting of point, line and segment, scientific conceptual elementes of geometry-brought up Euclides- that are appropriate for children, not as something static and independent but interconnected and in a moving process. This is because each task is presented whith new significations in the process appropriation that simultaneously explain the elaborate concepts and point to the need of others. Moreover, it is evident that that from the drive point, lines (open, closed and curves) and segments, they develop other geometric concepts such as quads (parallelogram, rectangle, square and diamond), triangle, circle, cobblestone, pentagon, hexagon and heptagon. In pedagogical terms, the proposal complies with the principles of comprehensive education, developmental, suggesting that the purpose of education today, and not only deliver more knowledge to students, but to help them find their own path to scientific training and other types.

Word-key: Geometry, Education, Elementary, Proposal, Mathematics, Davydov.

LISTAS DE ILUSTRAÇÕES

LISTAS DE ABREVIATURAS E SIGLAS

UNESC- Universidade do Extremo Sul Catarinense.
UJES - Universidade José Eduardo dos Santos.
ISP- Instituto Superior Politécnico do Huambo.
URSS- União das Repúblicas Soviéticas Socialistas.
HBO – Huambo.
GPEMACH – Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: uma Abordagem Histórico-Cultural.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Vale dizer que a temática e o objeto de estudo desta dissertação são algo recente, uma vez que o autor deste estudo os desconhecia antes de seu ingresso no Programa de Pós-Graduação em Educação da UNESC. Isso significa dizer que se trata de uma expressão de superação das percepções que se tinha sobre educação e, mais especificamente, de Matemática e seu ensino.

Os anseios que trouxeram o pesquisador para o curso de Mestrado estavam voltados para o ensino de Matemática em nível universitário, mas, com sua imersão em leituras e reflexões compartilhadas – propiciadas pelas ações curriculares do PPGE/UNESC –, isso lhe proporcionou a formulação de questionamentos que o direcionaram ao estudo da organização do ensino nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Sua imersão em estudos sobre a proposta de ensino de Davýdov e um grupo de colaboradores, uma das temáticas de investigação do Grupo de Pesquisa do qual era integrante, o GPEMAHC, contribuíram para tal decisão.

Muitas questões de investigação poderiam ser elencadas, porém delimitou-se o modo davydoviano de organização de ensino, especialmente o ensino de geometria nos dois anos iniciais do Ensino Fundamental.

Para tanto, organizou-se a dissertação em quatro capítulos. O primeiro trata da contextualização e problematização do objeto e problema de pesquisa, bem como das indicações referentes à metodologia. O segundo capítulo trata das concepções e pressupostos teóricos e metodológicos da proposta davydoviana. O terceiro se destina à análise do objeto de estudo, propriamente dito, pois foca nas tarefas que tratam do ensino de geometria no primeiro e no segundo ano do ensino fundamental. Por fim, o quarto capítulo tece considerações, as quais são uma síntese do estudo, com foco para o movimento que inter-relaciona questões epistemológicas e pedagógicas referentes ao ensino dos conceitos geométricos na proposta davydoviana.

1 CONTEXTUALIZAÇÃO

Ensinar matemática no ensino superior – na Universidade José Eduardo dos Santos, de Angola – nos últimos quatro anos, tem sido para o pesquisador uma atividade bastante complexa, a qual se justifica pelas fragilidades que os alunos trazem quando chegam ao ensino superior. A dificuldade maior se apresenta na determinação de tarefas, ações e operações (DAVÝDOV, 1999a; LEONTIEV, 1978) – pertinentes à referida atividade – que subsidiem no enfretamento didático-pedagógico da falta, por parte dos estudantes, de conhecimentos elementares de matemática, os quais servem de base para a apropriação dos conceitos pertinentes à disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Como consequência, o pesquisador afirma que tem se deparado com um índice de reprovação nunca inferior a 30% (ISP-HBO, 2012) nos cursos de engenharias aos quais está vinculado.

Assim, tem se questionado sobre quais seriam as possibilidades de estabelecer ações imediatas para, pelo menos, minimizar o índice de reprovação, que tanto o deixa aflito no exercício da atividade docente. E, concomitantemente, tem se perguntado sobre quais abordagens metodológicas, em educação, melhor respondem as razões da gritante situação e também propiciam uma formação mais humana dos estudantes.

Recém-chegado ao Brasil para cursar o mestrado na Universidade do Extremo Sul Catarinense e no envolvimento requerido pelo Programa de Pós-Graduação, deparou-se, então, com algumas disciplinas que o influenciaram na decisão por uma delimitação e abordagem de sua temática de estudo: Teoria da Atividade e Psicologia Histórico-Cultural, Perspectivas Atuais em Educação Matemática e Formação Humana na Perspectiva Materialista Histórica: Implicações Pedagógicas. Elas possibilitaram ao pesquisador o contato com várias tendências que norteiam o processo de ensino e aprendizagem e, particularmente, o ensino da matemática.

Tais perspectivas levaram-no à percepção de que a possibilidade de resolução dos problemas acima referidos é mais complexa do que vislumbrava, pois não se trata de algo pontual e imediato relacionado às questões exclusivamente de metodologia de ensino. Logo, optou-se por um estudo voltado ao modo de organização do ensino para os primeiros anos escolares, movidos pelo pressuposto de que nesse limiar da educação escolarizada se apresentam as bases das questões relacionadas ao ensino e à aprendizagem. Contudo, não significa que a questão problemática relacionada ao conhecimento matemático dos estudantes que ingressam no curso superior de engenharia foi abandonada. A hipótese é que a investigação sobre uma nova proposta dirigida ao ensino de matemática da educação escolar primária[1] subsidie decisões e efetivação de ações para o referido problema. Para tanto, foi decisivo o estudo da proposta de ensino do psicólogo russo Vasili Vasililievich Davýdov e seus colaboradores, seguidores de Lev Vygotsky, precursor da Psicologia Histórico-cultural. Por sinal, o sistema de ensino davydoviano é objeto de estudo do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: uma abordagem histórico-cultural do qual o pesquisador faz parte a convite de seu coordenador, o professor e pesquisador Ademir Damázio.

Davýdov, doutor em psicologia, nasceu em 1930 e faleceu em 1998. Fez parte da terceira geração – após Lúria, Leontiev, Rubinstein, Zapórozhets, Elkonin, Galperin, Zancov e outros – de estudiosos soviéticos da Psicologia Histórico-Cultural que teve como líder Vygotsky (ROSA, 2012).

Sua proposta despertou a atenção por ser considerada, por alguns pesquisadores, a mais atual e por proporcionar aos estudantes a assimilação de conceitos teóricos. Portanto, não prioriza conceitos empíricos como enfatizam os sistemas educacionais em vigor que, como consequência, são os causadores das fragilidades mencionadas anteriormente, as quais os estudantes apresentam ao iniciar o ensino superior. De acordo com Libâneo (2013, p. 323):

> Davýdov não apenas aprimorou a teoria pedagógica dentro da teoria histórico-cultural como levou a consequências práticas a relação entre educação e desenvolvimento formulado por Vygotsky. Seus biógrafos reconhecem seu papel determinante na criação de um sistema singular de educação para o desenvolvimento, conhecido como sistema Elkonin-Davýdov, posto em prática em escolas russas com sua supervisão direta, até sua morte.

Outro pressuposto de Davýdov (1998), que despertou a atenção, é que o objetivo da educação escolar, hoje, não é apenas entregar mais

---

[1] No sistema educacional de Angola, o ensino primário divide-se em dois ciclos: o primeiro corresponde aos seis primeiros anos de escolaridade (que no sistema de ensino brasileiro vai do primeiro ao sexto ano); o segundo, aos três finais (do sétimo ao nono ano).

conhecimentos aos alunos, mas sim ajudá-los a encontrar seu próprio caminho para a formação científica e outros tipos de formação. Isto significa que à educação escolar compete a promoção de um ensino que desenvolva no estudante um pensamento moderno, isto é, condizente com o estágio atual da humanidade. Neste âmbito, para que os alunos desenvolvam o pensamento teórico por meio dos conceitos científicos, em vez do pensamento empírico, faz-se necessário ocorrer na estruturação do ensino tanto a mudança do conteúdo quanto do método. Isto quer dizer, de acordo com Rosa (2012), que, ao entrar na escola, a criança deve se sentir em um ambiente novo, caracterizado pelo teor científico dos conceitos em processo de apropriação. Ou seja, leva o estudante à percepção da diferença do lugar que ocupa em relação à experiência pré-escolar.

Em se tratando de mudança de conteúdo, vale antecipar que Davýdov (1982) estabelece, como uma das tarefas essenciais da escola, que os conceitos matemáticos sejam apropriados pelos alunos desde os primeiros anos de escolaridade, com ideia de **número real** que tem como fundamento o conceito de **grandeza**. Desse modo, descaracteriza a ênfase aos números naturais, dada pelas propostas de ensino tradicionais (DAVÝDOV, 1982). Esse autor entende que tanto os números naturais quanto os reais são singularidades do objeto matemático geral, a medida de grandezas.

Em relação ao método, Davýdov (1988) propõe e organiza o ensino por meio de **tarefas**, as quais requerem determinadas **ações,** cada qual desenvolvida por um conjunto de **tarefas particulares,** cuja execução demanda algumas **operações,** isto é, procedimentos de execução. Salienta-se que esse modo de organização do ensino demanda que as tarefas particulares possibilitem a explicitação das múltiplas relações entre grandezas e que as crianças as identifiquem e as representem nas formas objetal, gráfica e literal. Tais representações têm algo em comum: trazem a ideia de medida – relação de comparação entre grandezas de mesma espécie – caracterizadora do conceito de número real e base genética dos conceitos teóricos matemáticos, para os quais necessariamente se volta o ensino escolar.

De acordo com Rosa e Damazio (2012), a proposta de Davýdov e seus colaboradores supera o divórcio existente entre aritmética, álgebra e geometria no ensino escolar de matemática. Os autores afirmam que Davýdov, em concordância com Vygotsky, entende que o domínio da álgebra eleva ao nível superior o pensamento matemático, o que possibilita uma visão mais livre, abstrata e generalizada. A álgebra liberta o pensamento da criança das dependências numéricas empíricas e o eleva a um nível generalizado.

No entanto, o ensino que segue o movimento da aritmética para a álgebra corresponde às “etapas fundamentais da história empírica” da matemática. Segue, pois, o seguinte movimento: “no princípio, os números eram o objeto fundamental (aritmética), depois as transformações idênticas e as equações (álgebra), mais tarde veio o cálculo diferencial (análise matemática), seguida das operações de conjuntos e as estruturas matemáticas” (DAVÝDOV, 1982, p. 109-110, apud ROSA; DAMAZIO, 2012, p. 83). A adoção dessa ordem no sistema de ensino, conforme os autores, gera a convivência com o risco de pôr em supremacia o desenvolvimento, por parte dos estudantes, do pensamento empírico, que depende de uma atividade de estudo escolarizada.

Essas precauções, acrescidas de uma identificação com a base teórica histórico-cultural, colocaram o pesquisador diante dos estudos brasileiros sobre a objetivação da proposta davydoviana. Como decorrência, observa-se que tais pesquisas têm se voltado para o conceito de número e suas operações matemáticas (ROSA, 2012; ROSA; DAMAZIO, 2012; DAMAZIO; ROSA; EUZEBIO, 2012; MADEIRA, 2012; MATOS, 2013; SILVEIRA, 2013; DORIGON, 2013; CRESTANI, 2013; ALVES, 2013), predominantemente desenvolvidas pelos componentes do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: uma abordagem histórico–cultural. As discussões no interior do GPEMAHC apontavam para outros objetos de investigação necessários para o entendimento da proposta de Davýdov, dentre eles aqueles referentes à Geometria. As possibilidades eram amplas, o que requereu delimitações que levaram à definição do seguinte problema de pesquisa: **Em que contexto de ordem pedagógica e epistemológica a Geometria aparece na proposta de ensino de Davýdov?** Propôs-se, pois, investigar o contexto − matemático e organizacional do seu ensino – em que ocorre o desenvolvimento de conceitos geométricos no primeiro ano do Ensino Fundamental.

A geometria chamou a atenção do pesquisador, pois alguns estudos – como os de Pavanello (1993), Meneses (2007), Cardoso (2012), Lorenzato (1995; 2006) – mostram que, apesar de os Parâmetros Curriculares Nacionais colocarem as três áreas da Matemática (aritmética, álgebra e geometria) no mesmo plano, na prática, a geometria tem sido a última a ser abordada. Isso decorre da dificuldade por parte dos professores de lidar com os referidos conteúdos, bem como de consequências oriundas do Movimento da Matemática Moderna, surgido na década de 1970.

Além disso, a decisão pelo referido problema de estudo foi instigada pela indicação de Davýdov (1982) de que sua proposta de ensino evita a tricotomia entre as três áreas que caracterizam o conhecimento matemático. Rosa (2012) confirma isso por meio da seguinte afirmação:

> Há muito tempo, no processo histórico de evolução da Matemática, os números adquiriram sua verdadeira natureza na inter-relação das suas significações aritméticas, algébricas e geométricas. Uma forma de elucidar essa gênese é observarmos sua expressão na sequência numérica (significação aritmética), sua localização na reta numérica (significação geométrica) e seu valor genérico, privado de uma expressão concreta (significação algébrica).

Na inter-relação, aritmética e geometria, conforme Aleksandrov (1976), não só se aplicam uma à outra, como também são fonte de outros métodos, ideias e teorias gerais. Ambas são raízes que proporcionaram o crescimento de toda a matemática por influência mútua, desde suas origens. O simples ato de medir uma linha traduz a fusão da geometria com a aritmética. Pode-se tomar como exemplo a medição da longitude de um objeto. Esta requer uma unidade de longitude e significa determinar quantas vezes é possível repetir esta operação. Nesse ato humano, o primeiro passo (aplicação) tem um caráter geométrico, enquanto o cálculo expressa seu caráter aritmético. Essa inter-relação entre geometria e aritmética é de grande importância para a formação dos diversos conceitos de número: reais, negativos e complexos (ALEKSANDROV, 1978).

Portanto, existiu, pois, um conjunto de razões geradoras do presente estudo, que tem como base a necessidade de uma organização de ensino de Matemática. Assim, o problema de pesquisa se constituiu no seguinte movimento:

1) inicialmente, preocupações da prática docente pela ansiedade de resolver o problema das limitações do conhecimento matemático dos estudantes ingressantes nos cursos de engenharia;

2) as leituras sobre a teoria histórico-cultural, decisivas para o entendimento de que as questões desanimadoras em relação à aprendizagem da matemática são culturais e históricas e que se atrelam aos modos humanos de produção;

3) pelo engajamento no GPEMAHC e, consequentemente, em

seus projetos de pesquisa voltados à proposta davydoviana;

4) e, por extensão, pelas possibilidades abrangentes da referida proposta para todos os níveis de ensino.

Mas a questão que se apresenta é: Quais os encaminhamentos teóricos e procedimentais que devem ser adotados no desenvolvimento da pesquisa? Discorrer-se-á sobre tal preocupação na seção que segue.

1.1ENCAMINHAMENTOS TEÓRICOS E PROCEDIMENTAIS DO ESTUDO

Partiu-se do pressuposto de que o estudo da geometria no contexto da organização proposta por Davýdov requer a busca por algo que explicite sua objetivação, a fim de serem extraídos os elementos necessários para a análise do objeto de estudo. Dadas as condições que se apresentaram, quatro obras se constituíram como referência:

1. Livro de orientação metodológica para professor, destinado ao primeiro ano do Ensino Fundamental, organizado por S.F. Gorbov, G.G. Mikulina e O.V. Savieliev, 2ª edição, publicado pela Editora Vita-Press, Moscou, em 2008.

   Referência:

   ГОРБОВ С. Ф.; МИКУЛИНА Г. Г.; САВЕЛЬЕВА О. В. **Обучение математике. 1 класс: Пособие для учителей начальной школы** (Система Д. Б. Эльконина – В.В. Давыдова). 2-е ида, перераб. - М.: ВИТА-ПРЕССб 2008. 128р

2. Livro didático para os estudantes da primeira série do Ensino Fundamental, de autoria de V.V. Davýdov, 3ª edição, publicação da Editora Vita-Press, Moscou, 2012.

   Referência:
   ДАВЫДОВА, В.В; ГОРБОВ, С. Ф; МИКУЛИНА, Г. Г.; САВЕЛЬЕВА, О. В. **Математика: Учебник для 1 класс начальной школы**. 3 иэд. М.: ВИТА- ПРЕСС, 2012.

3. Livro de orientação metodológica para professor, destinado ao segundo ano do Ensino Fundamental, organizado por S.F.

Gorbov, G.G. Mikulina e O.V. Savieliev, 3ª edição, publicado pela Editora Vita-Press, Moscou, em 2009.

Referência:

ГОРБОВ С. Ф.; МИКУЛИНА Г. Г.; САВЕЛЬЕВА О. В. **Обучение математике. 2 класс: Пособие для учителей начальной школы** (Система Д.Б. Эльконина – В.В. Давыдова). 3-е ида, перераб. - М.: ВИТА-ПРЕССб 2009.

4. Livro didático para os estudantes da segunda série do Ensino Fundamental, de autoria de V.V. Davýdov, 2ª edição, publicação da Editora Vita-Press, Moscou, 2012.

Referência:

ДАВЫДОВА, В.В; ГОРБОВ, С. Ф; МИКУЛИНА, Г. Г;САВЕЛЬЕВА, О. В. **Математика: Учебник для 2 класс начальной школы.**2 иэд. М: ВИТА- ПРЕСС, 2012.

As referidas obras foram traduzidas da língua russa para o português por solicitação do GPEMAHC (Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: Uma abordagem Histórico-Cultural da UNESC), pela Professora Elvira Kim, que ministra a disciplina de Língua Russa no Centro de Línguas e Interculturalidade (CELIN) da Universidade Federal do Paraná. Vale salientar que a elaboração dos quatros livros segue os pressupostos da Teoria Histórico-Cultural, que sustenta a proposta de Davýdov, e tem no Materialismo Histórico e Dialético a sua base filosófica.

De posse das referidas obras, adotou-se os seguintes procedimentos:

1. Leitura dos livros do professor e didático.
2. Identificação das tarefas a serem analisadas. Para isso, foi necessário:

a) Observar, com base nas ilustrações e enunciados das tarefas, a possibilidade de referência a algum conceito de geometria;

b) Identificar, nas tarefas selecionadas, os conceitos de geometria;

c) Identificar o(s) elemento(s) que articula(m) os conceitos de uma tarefa com a outra.

3. Identificação das ideias, propriedades, princípios referentes aos conceitos de geometria dos quais tratam cada tarefa ou conjunto delas. Em outras palavras, o estudo centrou-se nas significações

conceituais que serão apropriadas pelos estudantes. Foi nessa etapa que dois grupos de tarefas, por conterem algumas especificidades em comum, foram identificados:

a) como elementos geométricos básicos que se voltam para o movimento pedagógico conceitual do ensino de geometria e priorizam as figuras geométricas para analisar as características perceptíveis visualmente: cor, forma, tamanho, posição. Essas ideias se apresentam antes mesmo de se tratar dos conceitos numéricos com base nas relações entre grandezas que apresentam e desenvolvem os conceitos geométricos (pontos, segmentos, linhas retas e curvas, comprimento, linhas fechadas e abertas, limites das figuras, área, volume e capacidade, raio, ângulos e polígonos regulares).

4. Busca dos princípios pedagógicos inerentes à articulação entre as tarefas, com vista ao desenvolvimento da capacidade da criança. Trata-se, pois, da identificação dos elementos que permitem o envolvimento do estudante na execução das tarefas com certa independência e com o auxílio do professor, conforme indica Davýdov (1982), além de ensiná-lo a procurar novos caminhos, inventar seus próprios meios para atingir os objetivos de aprendizagem. Portanto, diferencia-se dos modelos tradicionais que expõem a criança à observação das aparências dos dados de uma tarefa, as quais são dadas imediatamente aos órgãos dos sentidos, sem a necessidade de se estabelecer relações. Em vez disso, atende apenas ao requisito da associação. Esse procedimento da pesquisa foi estabelecido em conformidade com o pressuposto de Davýdov (1982) de que é função da escola atual criar as condições para que o estudante, desde o primeiro ano escolar, adquira e domine a ideia de número real, como estudo das relações entre grandezas de diversas ordens (contínuas e discretas), de modo que articule as significações aritméticas, algébricas e geométricas.

Esses procedimentos e a própria concepção de pesquisa do pesquisador permitiram a escolha de uma investigação qualitativa, por estabelecer um diálogo entre os livros – que expressam a objetivação e orientação do modo davydoviano de organização do ensino de matemática, com olhar para a geometria nesse contexto –, seus fundamentos, mais especificamente a psicologia pedagógica de base teórica histórico-cultural. Porém, não se perdeu de vista sua matriz, o Materialismo Histórico e Dialético.

Entende-se por Materialismo Histórico a ciência filosófico-sociológica que estuda as leis mais gerais e as forças motrizes do desenvolvimento da sociedade (BERBESHKINA; ZERKIN; YAKOVLEVA, 1986, p. 8). O Materialismo Dialético é a base filosófica do marxismo e, como tal, busca explicações concebidas como coerentes, lógicas e racionais para os fenômenos da natureza, da sociedade e do pensamento. Dentre as categorias do Materialismo Histórico, far-se-á referência ao *histórico* e ao *lógico*.

O método, segundo Kopnin (1978), é um meio de obtenção de determinados resultados no conhecimento e na prática. Todo método compreende o conhecimento das leis objetivas. As categorias *histórico* e *lógico* são de grande importância para a compreensão da essência do conhecimento, a fim de captar o processo do conhecimento da realidade e abordar, em profundidade, alguns problemas lógicos do método marxista de investigação (ROSENTAL; STRAKS, 1958, p. 324).

Por histórico, de acordo com Kopnin (1978), subentendem-se o processo de mudança do objeto, as etapas de seu surgimento e desenvolvimento. Atua como objeto do pensamento, o reflexo do histórico, como conteúdo. O lógico é o meio pelo qual o pensamento realiza essa tarefa, mas é o reflexo do histórico em forma teórica, ou seja, a reprodução da essência do objeto e da história do seu desenvolvimento no sistema de abstrações. O histórico é primário em relação ao lógico; este, porém, reflete os principais períodos da história (KOPNIN, 1978, p. 183-184).

É nessa perspectiva que também se insere a *Psicologia Pedagógica,* que aborda o desenvolvimento humano em atenção à articulação necessária com o processo educacional. Este é concebido por Vygotski (2010) e seus colaboradores como vinculado ao compromisso com a sociedade determinada por relações de produção, galgada por princípios que possibilitam a formação de indivíduos solidários, plenamente humanos e comprometidos com o seu tempo.

Essa base teórica referente ao método e aos procedimentos anunciados anteriormente serviu como subsídio para a determinação de dois focos de análise do objeto da pesquisa, os quais tratam da geometria nas proposições davydovianas. Os focos ou categorias de análise são: 1) As bases epistemológicas da geometria; 2) A base pedagógica.

Ao voltar para o que se denomina de epistemologia da geometria, procura-se trazer à tona explicitações e reflexões sobre o que Davýdov entende por conceitos científicos de geometria ao contemplá-los nas tarefas escolares a serem desenvolvidas pelas crianças. Para tanto, recorreu-se aos autores (CARAÇA, 1946; ALEKSANDROV et al., 1976; entre outros) que tratam dos fundamentos da Matemática, com o olhar para a especificidade da geometria, a fim de abstrair o que eles consideram como bases do conhecimento geométrico. Nesse sentido, a atenção também foi dada ao movimento histórico e lógico.

No que diz respeito ao segundo foco – base pedagógica –, foram contemplados outros elementos que a teoria davydoviana considera como essencial em sua proposta, quais sejam: 1) as características e princípios inerentes à proposta; 2) o papel ativo da criança no desenvolvimento da atividade de estudo; 3) os valores (coletivismo, solidariedade, companheirismo, iniciativa e independência) que em sua subjacência a proposição pretende desenvolver nos estudantes.

Os fundamentos desse foco serão tratados no próximo capítulo, o qual está dividido em duas seções. Na primeira, a pesquisa centrou-se nas premissas da atividade de estudo; na segunda, no modo de organização do ensino em conformidade com Davýdov.

Quanto às bases teóricas referentes ao foco da geometria, estas serão explicitadas no próprio processo de análise, no terceiro capítulo, ou serão constituídas no terceiro capítulo. Desse modo, consequentemente, a análise comporá o quarto capítulo.

2 CONCEPÇÃO TEÓRICA E METODOLÓGICA DA PROPOSTA DAVYDOVIANA

No presente capítulo, tratar-se-á dos fundamentos da proposta de ensino de Davýdov. Vale ressaltar que o foco da pesquisa é o ensino da geometria na referida proposição pedagógica. Nesse sentido, convém salientar que Davýdov, ao se inserir no contexto da Psicologia Histórico-Cultural, adota como matriz teórica o Materialismo Histórico e Dialético. Nesse âmbito, admite que a escola tenha por finalidade elevar o estudante ao seu segundo nível de desenvolvimento, isto é, atividade de estudo. Em outras palavras, a organização do ensino deve ser de modo tal que promova o desenvolvimento da criança para além do seu pensamento pré-escolar, cuja base e atividade principal são o jogo (DAVÝDOV, 1982).

Assim sendo, no capítulo em causa serão focadas, inicialmente, as premissas básicas referentes à atividade de estudo. Posteriormente, as bases da organização da proposta de ensino davydoviana.

2.1 ATIVIDADE: BASE FUNDAMENTAL PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO INTELECTUAL DA CRIANÇA

De acordo com Davídov (1988), um dos problemas fundamentais da psicologia é o estudo da origem do processo de formação da atividade consciente do homem tanto historicamente como em sua ontogênese. O autor entende que a categoria filosófica de atividade é uma abstração teórica de toda prática humana universal, por isso tem um caráter eminentemente histórico-social. O pressuposto básico é de que todos os tipos de atividades dos indivíduos têm como forma inicial a prática histórico-social do gênero humano. Mais especificamente, a atividade laboral coletiva, com base sensório-objetal, que promove um processo de transformação das pessoas. É na atividade que a universalidade do sujeito humano se apresenta e é apropriada pelos indivíduos singulares (DAVÍDOV, 1988).

A atividade humana consciente tem finalidades e se caracteriza como um processo tão objetivo como todos os que se referem à natureza. Sua essência é investigada no processo de análise de conceitos inter-relacionados, tais como: trabalho, organização social, universalidade, liberdade, consciência e determinação de uma finalidade, entendidos como próprios do sujeito genérico (DAVÍDOV, 1988).

O conceito filosófico-pedagógico de atividade significa a transformação criativa das pessoas e, por extensão, da realidade atual. A forma original desta transformação é o trabalho. Todos os tipos de atividade material e espiritual do homem são derivados do trabalho e carregam em si um traço principal: a transformação criativa da realidade e, concomitantemente, do homem (DAVYDOV, 1999a).

Segundo Leontiev (1978, p. 79), o trabalho é um processo com um fim determinado que se desenvolve sobre a natureza. Por meio dele, os homens transformam a natureza segundo sua necessidade; portanto, ao transformá-la, modifica a si mesmo. O trabalho, diz o autor, é o fator primeiro e principal pelo qual se formou o homem e sua consciência.

O trabalho é, segundo Marx (2013, p. 255), um processo entre o homem e a natureza, em que o homem, por sua própria ação, estabelece mediações, regula e controla seu metabolismo com a natureza. Ele se confronta com a matéria natural como uma potência dada. A fim de se apropriar da matéria natural de uma forma útil para a sua própria vida, o homem põe em movimento as forças naturais pertencentes à sua corporeidade (braços, pernas, cabeça e mãos). Sua ação sobre a natureza externa modifica-a por meio desse movimento e, simultaneamente transforma a si próprio.

Esses pressupostos de Marx são referências para que Leontiev desenvolva a teoria da atividade que explica o desenvolvimento do psiquismo e da consciência do homem. Por sua vez, é assumida por Davídov (1988, p. 28) para expressar o caráter objetal de toda atividade humana, por isso, constitui-se o núcleo da teoria psicológica da atividade. No entanto, o objeto não é compreendido com existência em si mesmo e que atua sobre o sujeito. Em vez disso, "como aquele que está dirigido ao ato, quer dizer como algo com que o ser vivo se relaciona, isto é, o objeto da sua atividade, seja esta externa ou interna" (LEONTIEV apud DAVÍDOV, 1988, p. 28).

Em psicologia, segundo Davýdov, mesmo que ambas tenham a mesma estrutura, existe uma diferença entre atividade objetal externa e a atividade interna. Para Leontiev, citado por Davídov (1988), a atividade interna é secundária, pois se forma no processo de interiorização da atividade objetal externa. Porém, Davídov (1988) chama a atenção mostrando que o processo de interiorização não consiste em uma simples transposição ou troca de atividade externa ao plano interior da consciência, mas sim a formação deste próprio plano. A atividade interna desenvolve condições para o sujeito solucionar tarefas não realizáveis no plano da atividade externa. Assim, em termos genéticos, a atividade externa é primária da qual deriva a atividade interna. No entanto, entre elas também se conserva a vinculação funcional, expressa em passagens e em transformações mútuas (DAVÍDOV, 1988).

Leontiev (1978b), ao se debruçar sobre o estudo da estrutura da atividade no processo de formação do psiquismo, considera-a uma unidade molecular não aditiva da vida do sujeito corporal e material. Trata-se de um sentido mais estreito, ou seja, uma unidade mediatizada pelo reflexo psicológico, cuja função real consiste na orientação do sujeito no mundo objetivo. Em outras palavras, a atividade não é uma reação nem um conjunto desta, mas um sistema que tem sua estrutura caracterizada por transições e transformações internas e desenvolvimento (LEONTIEV, 1978b).

Nuñez (2009) considera atividade como resultado de todas as influências sociais e que é um processo essencial na transformação da personalidade. De outro modo, ao considerá-la em nível psicológico, advoga-a como uma unidade da vida mediatizada pelo reflexo psicológico com a função de orientar o sujeito no mundo dos objetos.

Segundo Davidov (1999a), Leontiev e seus alunos, ao investigarem a construção concreta da atividade humana, determinaram seus componentes, que são: as necessidades e os motivos, os objetivos, as condições e meios de seu alcance, as ações e operações. Porém, Davidov inclui nessa estrutura o desejo. Segundo o autor, não é possível estudar a estrutura da atividade somente no âmbito psicológico, mas sim interdisciplinar. Por isso, se estuda somente alguns de seus aspectos na psicologia (DAVIDOV, 1999b).

Neste ponto de vista, Davidov (1999b) apresenta a estrutura da atividade composta por: desejos, necessidades, emoções, ações, motivos para as ações, meios usados para as ações, planos (percentual, mnemônico, pensamento criativo) que têm como referência a cognição e a vontade.

Leontiev (1978a) considera a necessidade como condição primeira de toda a atividade. Porém, ela em si, não determina a orientação concreta de uma atividade, pois é somente no objeto que encontra a sua determinação. Nessa confluência entre necessidade e objeto é que se apresenta o motivo da atividade, aquilo que estimula.

Segundo Leontiev (1978, p. 341), toda a atividade está dirigida a satisfazer as necessidades em aquilo que é indispensável para o prolongamento e desenvolvimento da vida, por exemplo, o alimento. Este se traduz em necessidade para todos os organismos vivos e, portanto, do homem. As necessidades do organismo se manifestam numa ‘excitabilidade’ ascendente, em conformidade com algumas influências, tanto direta como incondicionadas, mas capazes de mudar o estado do organismo para a direção necessária (LEONTIEV, 1978).

De acordo com o autor, nos organismos superiores existem quatro pontos gerais e comuns em todas as necessidades. O principal e primeiro é a existência de um objetivo, isto é, a necessidade sempre se refere a algo, que pode ser um objeto material, um resultado ou alguma coisa de uma atividade. O segundo ponto consiste na existência de um conteúdo concreto, em conformidade com as condições de satisfazê-la. O terceiro é sua possibilidade de repetição, isto é, observável, sobretudo quando se fixa naquelas elementares. Por exemplo, alimento, movimento, entre outras, que se apresentam em intervalos determinados, têm um ciclo mais ou menos manifesto em consonância com as modificações do estado do organismo ou do meio ambiente. O quarto ponto geral se refere ao próprio desenvolvimento da necessidade à medida que se amplia o conjunto dos objetos e meios para satisfazê-la, que, de início, mantém e desenvolve a vida dos indivíduos ou da espécie. Sobre esta base se enriquece e se desenvolve, bem como se constitui a lei mais geral do desenvolvimento das necessidades (LEONTIEV, 1978).

As necessidades do homem, subjetivamente, se manifestam como desejos e tendências que, simultaneamente, assinalam o aparecimento ou o anúncio que uma delas foi satisfeita. Além disso, regulam a atividade do homem, o que motiva a aparição e o crescimento ou o desaparecimento das mesmas. A existência de uma necessidade e sua manifestação na forma de desejo ou tendência não é a garantia para a realização de uma atividade, pois é indispensável um objeto correspondente que a estimule a atuar numa direção concreta, um fim. No homem, os objetivos que o estimulam a atuar podem refletir-se nas seguintes formas: de imagem ou representações, de pensamentos ou de conceitos e, também, de ideias morais (LEONTIEV, 1978, p. 345-46).

Blagonadezhina (1978) entende que a origem das emoções e dos sentimentos está na realidade prática objetiva. Para a autora, o sujeito tem uma atitude emocional até frente aos objetos e fenômenos do mundo real e o sente de distinta maneira, segundo as suas relações objetivas particulares. Tratam-se, pois, das formas em que o mundo real se reflete no homem (BLAGONADEZHINA, 1978, p. 355). A mesma autora defende que o surgimento das vivências emocionais, positivas ou negativas, depende da satisfação ou não das necessidades e das exigências da sociedade. Esta divisão não se atrela ao valor que o homem atribui às vivências, mas àquilo que unicamente caracteriza a relação entre as causas que as produzem, as necessidades e as exigências sociais. As vivências emocionais estão estreitamente ligadas à atividade e à conduta do sujeito.

As emoções, de acordo com Blagonadezhina (1978), expressam o êxito da realização dos atos, como também influenciam na decisão do sujeito sobre qual deles executará. Além disso, elas contribuem para a regulação da atividade e da conduta do sujeito. Enfim, somente os fins para o qual o indivíduo humano tem uma atitude emocional positiva é que motiva uma atividade criadora, a qual requer entusiasmo e alegria. As dificuldades da criação adiantam que as emoções têm grande importância no alcance dos fins propostos da atividade prática. Similarmente, as emoções e sentimentos têm grande significação na atividade cognoscitiva do homem, classificada em: ativa e passiva. Ela é ativa quando aumenta a atividade vital do homem e, inversamente, passiva se diminui ou debilita a atividade vital do sujeito.

É nesse âmbito que Leontiev (1978, p. 346) define o motivo da atividade como aquilo que reflete no cérebro do homem e que tanto lhe instiga; como aquilo que o dirige para atuar em busca da satisfação de uma necessidade. Existe uma variedade de motivos que se diferenciam uns dos outros: 1) pelos tipos de necessidades a que correspondem e são divididos em naturais e superiores, entre os quais há os materiais e os espirituais; 2) pela forma que se manifesta o seu conteúdo, isto é, forma de imagem, conceito, pensamento, ideia, etc. Além disso, eles apresentam distinta relação com a possibilidade de realização da atividade que os origina. Para que um motivo gere realmente uma atividade e resultado efetivo é necessária: a existência das condições que permitam, ao sujeito, a apresentação do fim correspondente e a atuação para alcançá-lo. Sua ação se manifesta ao aparecer uma reação de orientação no meio ambiente o que, algumas vezes, origina uma atividade imaginativa em forma de ilusão (LEONTIEV, 1978).

Outro conceito da estrutura da atividade é a ação, que Leontiev (1978) define como processo subordinado à representação que se tem do resultado a atingir, isto é, se volta a algo consciente. Assim, o motivo se correlaciona com conceito de atividade e o fim se vincula com a ação. Esta é executada por determinados meios denominados de operações. Há, pois, diferenças essenciais entre elas, uma vez que a não coincidência de ambas aparece de maneira particularmente evidente em ações com uso de instrumentos, os quais são os responsáveis pela cristalização dos procedimentos, as operações. Elas têm distinta origem, dinâmica e destino. A gênese da ação reside nas relações de intercâmbio de atividades; por sua vez, toda operação resulta da metamorfose da ação por sua inclusão em outra ação e sobrevém sua tecnificação (LEONTIEV, 1978).

Até o momento, procurou-se apresentar o conceito de atividade e seus componentes. No entanto, vale reafirmar, com base em Karl Marx, Leontiev e Davýdov, que o homem, ao entrar em atividade, ele e a natureza transformam-se reciprocamente e, consequentemente, o homem promove o desenvolvimento da sua consciência. Esta, segundo Davýdov (1988, p. 33) é referência para a análise do conceito de atividade.

O posicionamento de Marx (2013), Leontiev (1978), Davýdov (1988 e 1999) sobre o aparecimento da consciência é também abordado por Cheptulin (2004, p. 88), que diz o seguinte:

> O aparecimento da consciência é condicionado pelo desenvolvimento do sistema nervoso, do cérebro. Entretanto, esse desenvolvimento nunca é insuficiente para que apareça a consciência. O aparecimento da consciência está ligado a fatores exteriores à fisiologia da atividade nervosa superior. Como propriedade da matéria altamente organizada, a consciência é, ao mesmo tempo, o produto humano, o resultado do desenvolvimento social. Um sistema nervoso altamente desenvolvido cria apenas a possibilidade real do aparecimento da consciência; mas, a transformação dessa possibilidade em realidade está ligada ao trabalho. Visto que foi precisamente sob ação do trabalho que a forma psíquica do reflexo, própria aos ancestrais animais do homem, transformou-se progressivamente em consciência, em reflexo consciente da realidade.

Nesse contexto é que se apresenta a pergunta: como se processa o desenvolvimento intelectual ou psíquico da criança? A resposta é dada nos trabalhos de Leontiev, Davýdov, Rubisnstein e outros autores, sobre os quais o pesquisador discorrerá nos parágrafos subsequentes.

Para Davýdov (1982), a base de todo o conhecimento humano é a atividade objetal-prática, produtiva: o trabalho. Por isso, a análise da origem e do desenvolvimento do pensamento começa, necessariamente, pelas particularidades da vida laboral humana. Nesse sentido, Leontiev (1978) diz que o pensamento, na criança, surge da estreita ligação com a atividade prática. Os atos racionais iniciais se manifestam nos primeiros contatos da criança com objetos – que estão ao seu redor –, pois estes despertam a sua atenção; alguns deles não são conscientes, supõem uma generalização das relações e conexões correspondentes entre eles e os fenômenos reais. A princípio, tal generalização não é consciente.

Esses atos racionais têm sua origem na infância pré-escolar, período da vida em que o mundo da realidade humana que cerca a criança abre-se cada vez mais para ela (LEONTIEV, 2010). Em toda sua atividade e, sobretudo em seus jogos, que ultrapassa agora os estreitos limites da manipulação dos objetos que a cercam, a criança penetra num mundo objetivo mais amplo, assimilando-os de forma eficaz e, ao mesmo tempo, reproduzindo ações humanas com eles. Durante esse período da vida de uma criança, o mundo ao seu redor se decompõe em dois grupos. Um deles consiste em pessoas bem próximas a ela, cujas relações estabelecidas determinam as demais com todo o resto do mundo. Essas pessoas, diz Leontiev (2010), são sua mãe, seu pai, ou aquelas que ocupam lugares junto à criança. Um segundo círculo, mais amplo, é formado por todas as demais pessoas, em que as relações são mediadas por aquelas que ela estabeleceu no primeiro círculo, mais estreito.

A transição do período pré-escolar da infância para o estágio subsequente do desenvolvimento da vida psíquica ocorre em conexão com a presença da criança na escola (LEONTIEV, 2010). Assim, a escola oferece as condições para a criança desenvolver a sua psique, ao propiciar as relações não mais eminentemente por meio do jogo ou da brincadeira, mas de outro modo, com a atribuição de responsabilidade por parte do professor, que coloca a criança na obrigação de apresentar resultados de seus estudos perante a sociedade e a família.

No entanto, outro fator que influi diretamente sobre o desenvolvimento da psique infantil é a sua própria vida e seus processos reais, ou seja: a atividade da criança, quer aparente ou interna. Mas tal desenvolvimento depende das condições reais de sua vida. Nesse sentido, Leontiev (2010) chama a atenção sobre o tipo de atividade, denominada de principal, que se deve ter em conta no processo de desenvolvimento da criança. Tal atividade governa as mudanças mais importantes nos processos psíquicos e nos traços psicológicos da personalidade da criança em um peculiar estágio de seu desenvolvimento (LEONTIEV, 2010).

Nesse período em que a criança se insere num processo de ensino, apesar de outras, durante a sua permanência na escola a atividade principal é o estudo. Ela começa a assimilar os rudimentos das formas mais desenvolvidas da consciência social, ou seja, a ciência, a arte, a moral, o direito, que estão ligados ao pensamento teórico. A assimilação dos rudimentos de formas da consciência social e as formações espirituais correspondentes pressupõem que as crianças estejam em atividade humana adequada historicamente encarnada nelas: atividade de estudo (DAVIDOV, 1988, p. 158).

No processo de estudo, como atividade própria da idade escolar, as crianças reproduzem não só os conhecimentos e habilidades correspondentes aos fundamentos das formas de consciência social, anteriormente assinaladas, como também as capacidades humanas, surgidas historicamente, que estão na base da consciência e do pensamento teórico: a reflexão, as análises e o experimento mental (DAVIDOV, 1988).

Para Davídov e Slobódchikov (1991 apud ROSA, 2012), a atividade de estudo, se corretamente organizada, propicia as bases de todas as formas de consciência e, consequentemente, o desenvolvimento multilateral da personalidade criativa. Uma das capacidades humanas que constitui o fundamento da personalidade é a estruturação automática e transformação de modo criativo de sua própria atividade vital.

Segundo Davídov (1988), a organização da atividade de estudo das crianças requer a elaboração e a introdução de novas formas e meios para realizá-la. Não bastam os hábitos culturais gerais de leitura, escrita e cálculo, mas também a preparação para um prolongado estudo. Isto significa que as crianças precisam da obtenção do indispensável desenvolvimento psíquico geral e uma boa capacidade para estudar.

Rosa (2012), ao se referir à atividade de estudo, afirma que ela não é inata, isto é, as crianças não chegam à escola sabendo estudar. Pelo contrário, ocorre por um processo de apropriação previamente organizado. A autora diz que Davidov e Markova alertam: se nos anos iniciais as crianças desenvolverem a capacidade para estudar e operar com conceitos teóricos, então estarão preparadas para um prolongado período de estudo. Porém, para que os estudantes possam entrar em atividade de estudo, tal como advogam Davidov e Markova, é necessário que os professores apresentem tarefas de estudos bem estruturadas e organizadas. A tarefa de estudo – outro componente da estrutura da atividade – contempla a união do objeto com a ação e das condições para o seu alcance (ROSA, 2012).

Davýdov (1988, p. 179) diferencia essencialmente a tarefa de estudo das diversas tarefas particulares, meios de atingir aquela, que são organizadas de modo tal que propiciam aos estudantes o domínio tanto dos procedimentos gerais como particulares para a devida solução. Para o autor, a assimilação desses procedimentos viabiliza a passagem do pensamento do particular ao geral. Ao desenvolver as tarefas de estudos, a criança domina, inicialmente, o procedimento geral de solução de tarefas particulares (DAVYDOV, 1988, p. 179).

A solução das tarefas de qualquer ordem se reveste de extrema importância, pois elas são responsáveis para que o pensamento do escolar se mova do geral ao particular. Uma tarefa de estudo tem por missão estimular o pensamento dos estudantes a fim de explicar o que ainda desconhecem, como também se apropriarem de novos conceitos e procedimento de ação (DAVÝDOV, 1982).

Para o ensino da matemática, Davýdov (1988) define quatros tarefas principais para os primeiros anos do Ensino Fundamental que são propostas às crianças para que se apropriem do conhecimento científico, seguindo o movimento do geral ao particular. Cada uma delas traz o indicativo de sua finalidade em contexto, no qual o estudante e o conceito por ele formado devem ser inseridos, conforme apresentado no quadro que segue.

Quadro 1 - Tarefas principais para os primeiros anos do Ensino Fundamental.

TAREFAS DE ESTUDO	
Contexto de inserção do estudante	Conceito a formar
Propício ao estabelecimento de relações entre as grandezas matemáticas.	Grandezas matemáticas abstratas.
Demonstração de relação entre grandezas como a forma geral de número.	Abstração e compreensão de número como relação múltipla das grandezas.
Introdução dos diferentes tipos de números (naturais, fracionários e negativos).	Diferentes números como uma das manifestações da relação múltipla geral das grandezas em condições concretas.
Demonstração do caráter unívoco estrutural da operação matemática, ou seja, ao se conhecer o valor dos elementos da operação é possível determinar o valor do terceiro elemento.	Compreensão da inter-relação dos elementos em ações aritméticas fundamentais.

Fonte: Elaborado pelo autor.

De acordo com Rosa (2012), na relação tarefa de estudo, ações e tarefas particulares são o que se pode considerar fundamental para a organização do ensino. Em sua proposta de ensino de matemática, Davídov (1988) estabelece, para cada tarefa de estudo, seis ações de estudo, a seguir anunciadas.

a) Primeira ação – Transformação dos dados da tarefa com a finalidade de explicitar a relação universal do objeto em estudo;
b) Segunda ação – Modelação da relação universal na unidade de três formas: objetal, gráfica e literal;
c) Terceira ação – Transformação do modelo da relação universal com vistas ao estudo de suas propriedades em forma pura;
d) Quarta ação – Dedução e elaboração de um sistema de tarefas particulares, cuja resolução requer um procedimento geral;
e) Quinta ação – Controle do processo de desenvolvimento das ações anteriores;
f) Sexta ação – Avaliação referente à apropriação do procedimento geral, consequência do desenvolvimento da tarefa de estudo dada.

Cada uma dessas ações requer um sistema de tarefas particulares detalhadamente planejadas pelo professor e desenvolvida de modo ativo pelos estudantes. Deste modo, seguindo os pressupostos davydovianos, entende-se que a implantação correta das quatro primeiras ações de estudos e, posteriormente, a aplicação das demais, proporcionará a aquisição dos conceitos científicos e o desenvolvimento do pensamento teórico. Caso contrário, a tendência é que as crianças fiquem vulneráveis ao pensamento totalmente empírico.

Importa antecipar que tanto o pensamento empírico como o teórico são níveis do movimento do pensamento. A diferença entre eles se explicita pela maneira e pelo aspecto em que neles é dado o objeto; pelo modo como é conseguido o conteúdo básico do conhecimento, o que serve como forma lógica de expressão deste; por último, pela sua importância prática e teórica (KOPNIN, 1978, p. 152). Uma maior caracterização desses dois tipos de pensamento será tratada na próxima seção.

2.2 PENSAMENTOS EMPÍRICO E TEÓRICO E SUAS PARTICULARIDADES

Partindo do pressuposto histórico-cultural de que é papel da escola promover o desenvolvimento dos conceitos científicos como condição para o desenvolvimento do pensamento teórico, a presente seção dedica-se a apresentar aquilo que é considerado como suas principais características, em contraposição ao pensamento empírico. Davýdov (1982), ao tratar dessa temática, coloca-a no contexto das teses principais da Dialética Materialista.

Tal como foi mencionado anteriormente, a correta aplicação ou o inverso das ações de estudos proporcionará um tipo de pensamento: teórico ou empírico. Neste caso, o que pode ser chamado de pensamento teórico e empírico? Antes de avançar nesta questão, importa a conceituação prévia de pensamento. Este, conforme Kopnin (1978), é um meio de atitude racional do homem em face da realidade, por criar ideias cuja manifestação prática constitui um passo com vista à criação de um mundo condizente com a essência e a necessidade do ser do homem. Entretanto, o pensamento surge e se desenvolve em base sensório-material (KOPNIN, 1978).

Davýdov (1982) diz que, em filosofia, chama-se pensamento a modificação do projeto da coisa, com base na experiência das suas transformações práticas, que engendra o tipo de atividade subjetiva do homem. Para o autor, pensar significa inventar, construir na mente o projeto idealizado do objeto real que há de resultar do suposto processo laboral. O pensamento está atrelado à variação de um projeto ideal e esquema idealizado de atividade − transformação da imagem inicial do objeto de trabalho em outro.

Essa transformação das imagens ocorre tanto no plano das representações sensoriais como em atividade verbal-discursiva àquelas relacionadas. Em ambos os casos, têm importância essencial os meios de expressão simbólica e significativa das imagens ideais, ou seja, padrões discursivos e materiais que descrevem e representam os objetos e os métodos de produção dos mesmos (DAVÝDOV, 1982).

Assim, em resposta ao questionamento anteriormente levantado, é possível dizer que, ao representar o objeto pelas suas relações e manifestações exteriores acessíveis à contemplação viva, estar-se-á convivendo com o pensamento empírico. A forma lógica do empírico é constituída pelo juízo tomado isoladamente, que constata o fato, ou por certo sistema deles que descreve um fenômeno. A aplicação prática do conhecimento empírico é restrita e, no sentido científico, um ponto de partida qualquer para a construção da teoria (KOPNIN, 1978).

Este tipo de pensamento, de acordo Davídov (1988), surge da influência da lógica formal e se efetiva com a ajuda das abstrações e generalizações. Desse modo, uma das particularidades do pensamento empírico é a universalidade abstrata baseada no princípio da repetitividade. Sendo assim, constitui-se como forma transformada e expressada verbalmente da atividade dos órgãos dos sentidos, ligados à vida real. Deriva, pois, diretamente da atividade objetal-sensorial das pessoas (DAVÍDOV, 1988).

Davídov (1988) entende que o pensamento empírico tem um caráter direto. No entanto, concorda com Naúmenko, que diz:

> O empírico não é só o conhecimento direto da realidade, mas sim também o que é mais importante, o conhecimento do imediato na realidade, justamente do aspecto que se expressa por categoria de existência, existência presente, de quantidade, qualidade, propriedade e medida. (DAVÍDOV, 1988, p. 123).

Com outras características, o pensamento teórico reflete o objeto no aspecto das relações internas e leis do seu movimento que são cognoscíveis por meio da elaboração racional dos dados do conhecimento empírico. Sua forma lógica é constituída pelo sistema de abstrações que explica o objeto. Se a referência é o conhecimento teórico, vale o destaque para a quase ilimitada aplicação prática. Em seu sentido científico, a construção da teoria se manifesta como um resultado final, como conclusão do processo de conhecimento (KOPNIN, 1978).

Para Davídov (1988, p. 125), “o conteúdo do pensamento teórico é a existência mediatizada, refletida, essencial”. Além disso, reflete o processo de idealização de um dos aspectos da atividade objetal-prática, qual seja: a reprodução que, por sua vez, expressa as formas universais das coisas. Isso significa dizer que tem uma base experimental objetal-sensorial que é a atividade laboral das pessoas. Porém, tem uma perspectiva cada vez mais cognoscitiva, que permite, com o tempo, a realização dos experimentos mentalmente.

No que se refere aos seus níveis, o empírico vincula-se à imediatez da experiência sensorial, conteúdo primeiro do pensamento. A sua racionalidade está na forma de conhecimento e nos conceitos implícitos na linguagem, em que são expressos os resultados do conhecimento pertinente a ele. Por sua vez, o teórico se atrela ao conhecimento com característica realmente universal e procura explicitar o conteúdo da verdade buscada em toda a concreticidade e objetividade (KOPNIN, 1978).

Quanto ao conteúdo, as duas formas de pensamento se diferenciam, uma vez que o pensamento empírico se apresenta verbalmente como resultado das observações sensoriais. Destas, extrai-se uma classe de dependências que se repetem nos objetos, distintas umas das outras. As diferenças e a classificação se apresentam como funções de representações gerais dos conceitos. Por sua vez, no pensamento teórico, o conceito reúne as coisas dessemelhantes, multifacetadas, não coincidentes, e assinala seu peso específico. Como consequência, o conteúdo específico do conceito teórico traz a relação objetiva do universal e o singular, o diferente (DAVÍDOV, 1988).

Portanto, diferentemente do empírico, não ocorre a inclusão de algo igual, dado pelos órgãos dos sentidos (cor, por exemplo), que une os objetos de uma classe. Em vez disso, identificam as inter-relações de objetos que constituem um todo, dentro do sistema de sua formação.

Sobre a comparação e diferença dos tipos de conhecimentos e formas de pensamentos que se relacionam com os termos empírico e teórico, Davídov e Márkova (1987, p. 178) apresentam a seguinte síntese:

1. A elaboração do conhecimento empírico tem por base a comparação de objetos e as representações pelas quais se separam as propriedades iguais e gerais. Diferentemente, o surgimento do conhecimento teórico tem sua base na análise do papel que uma determinada função desempenha na relação entre as coisas que constitui um sistema.
2. O conhecimento e o pensamento na forma empírica têm como característica essencial: a comparação. Por meio dela, extrai-se a propriedade geral, que permite incluir objetos individuais numa determinada classe, porém, sem a necessária dependência entre si promovida por algo que extrapole as percepções obtidas pela aparência externa. De outro modo, a análise, peculiaridade do conhecimento e pensamento teórico, centra-se na relação real e especial entre as coisas que servem, simultaneamente, como base genética de outras manifestações do sistema. Esta relação atua como forma geral ou essencial de tudo o que é reproduzido mentalmente.
3. Ao ter base na observação, o conhecimento empírico apoia-se somente em representações visuais. Desse modo, explicita apenas as propriedades externas dos objetos. Contrariamente, o conhecimento teórico surge sobre a base da transformação dos objetos, o que possibilita o reflexo das suas relações e ligações internas. A reprodução do objeto em forma de conhecimento teórico permite que o pensamento extrapole os limites das representações sensoriais.

4. A propriedade geral e as propriedades particulares dos objetos, no conhecimento empírico, estão num mesmo plano. No entanto, quando a referência é o conhecimento teórico, a preocupação é com a conexão entre a relação geral e suas diferentes manifestações. Em outras palavras, a conexão do geral ao particular.
5. A concretização do conhecimento empírico se expressa na possibilidade de se estabelecer as ilustrações, as quais se tornam exemplos que pertencem a uma determinada classe. A especificidade da concretização do conhecimento teórico está na necessária conversão em uma teoria desenvolvida por meio da dedução, como também da explicação das manifestações particulares do sistema com base na sua fundamentação geral.
6. A palavra-termo é forma de fixação do conhecimento empírico. O conhecimento teórico se expressa por meio de procedimentos da atividade mental e de diferentes sistemas simbólicos e signos. Destacam-se os meios da linguagem artificial e natural. Desde o seu surgimento, é possível que o conceito teórico expresse o procedimento que possibilita a separação do singular do geral.

Com essa síntese, conclui-se a discussão sobre o pensamento empírico e teórico e suas particularidades. Na seção a seguir, discutir-se-á sobre as bases da organização da proposta de ensino davydoviana.

2.3 AS BASES DA ORGANIZAÇÃO DA PROPOSTA DE ENSINO DAVYDOVIANA

Para Davídov (1988), a missão da escola é proporcionar aos estudantes a apropriação de conhecimentos mais ricos, produzidos e elaborados historicamente pela humanidade. Faz-se necessário, então, que os programas escolares estejam organizados para atender tal demanda que concorre para o desenvolvimento, por parte dos alunos, dos conceitos genuinamente teóricos como elementos indispensáveis para tornar esses estudantes ativos e participantes da política social de seu país.

Tal preocupação também é expressa nos Parâmetros Curriculares Nacionais Brasileiros (BRASIL, 1997) e na Proposta Curricular de Santa Catarina (SANTA CATARINA, 2005) para o Ensino Fundamental, os quais apontam como meta da educação ajudar o aluno a enfrentar o mundo atual como cidadão participativo, reflexivo e autônomo, bem como conhecedor de seus direitos e deveres.

No que se refere à matemática, o documento oficial brasileiro prevê para o estudante um desempenho de forma equilibrada e indissociavelmente na formação de capacidades intelectuais; estruturação do pensamento; agilização do raciocínio dedutivo do aluno; sua aplicação a problemas, situações da vida cotidiana e atividades do mundo do trabalho; e no apoio à construção de conhecimentos em outras áreas curriculares (BRASIL, 1997).

Essas preocupações são subsidiadoras para o questionamento e o entendimento dos motivos que levaram, por exemplo, os intelectuais do Estado de Santa Catarina, sobretudo no Município de Criciúma, na elaboração das respectivas propostas curriculares, a tomar como fundamento a Teoria Histórico-Cultural, cuja matriz é o Materialismo Histórico e Dialético. Particularmente na rede municipal de ensino de Criciúma, nas últimas reuniões de formação continuada dos professores, o foco para o ensino da matemática teve por base as proposições de Davýdov e como referência o estudo de Rosa (2012). Vale ressaltar que as referidas proposições trazem a preocupação de que, na escola, o aluno se aproprie dos conceitos em nível científico como condição para o desenvolvimento do pensamento teórico. Ou seja, que ao ingressar na escola, a criança sinta claramente a novidade e a peculiaridade dos conhecimentos, os quais se diferenciam daqueles obtidos na experiência pré-escolar. Ademais, defende a ideia de que nos primeiros anos de escolaridade, deve-se formar nas crianças uma atividade especial, **“a atividade de estudo”,** que possibilita a assimilação não de conceitos empíricos, mas de conceitos científicos (DAVÍDOV; SLOBÓDOCHIKOV, 1991).

No âmbito das reformas curriculares realizadas pela União Soviética – década de 1960 do século XX –, Davýdov, Galperin, Talízina, Zankov e outros se preocuparam com o estudo de um sistema de ensino que proporcionasse o desenvolvimento intelectual dos alunos.

Segundo Galperin, Zaporózhets e Elkonin (1987), os métodos de ensino escolar da época – “ensino tradicional” – não eram suficientemente eficazes e provocavam uma grande desigualdade entre os alunos em relação ao êxito dos seus estudos. Simultaneamente, criavam – tanto para os melhores como para os piores alunos – um ritmo desfavorável, provocado por produções pedagógicas defeituosas. O referido ensino sustentava a ideia de que a escola era uma instituição estatal, local em que se ensina e educa os jovens com base na transmissão direta de conhecimentos, habilidades e hábitos. Estes seriam úteis para o futuro, de um lado e, por outro, com a formação de propriedades que respondem às diferentes exigências da vida social. Em geral, a escola era considerada uma megamáquina peculiar que, ao inserir-se nela, o aluno adquiriria, predominantemente, a base técnica e intelectual necessária à força de trabalho, porém, mais ou menos polida ideologicamente para entender o mundo e seu funcionamento social como já formado e relativamente estável (DAVÍDOV; SLOBÓDOCHIKOV, 1991).

Vale dizer que as reformas levadas a cabo na URSS – no final do século XIX e no século XX – contra a educação tradicional não ficaram indiferentes em outros países do mundo, como Europa, América do Norte; posteriormente, atingiram a América Latina, com o advento das chamadas teorias não críticas (escolanovismo e tecnicismo) e as teorias críticas reprodutivistas (teoria do sistema de ensino como violência simbólica, teoria da escola como aparelho ideológico de Estado e teoria da escola dualista) (SAVIANI, 2009).

Em relação à matemática, surge no mesmo período, concretamente na década de 50 e 60 do século XX, o movimento da nova matemática ou movimento da matemática moderna. Este movimento traz a crítica à educação tradicional e propõe uma organização do currículo do ensino da matemática com a seguinte composição conceitual: teoria de conjuntos, estruturas com ênfase na álgebra (grupo, anel e corpo), espaços vetoriais, cálculo diferencial e integral, matrizes, álgebra de Boole, funções, bases de sistemas de números. Deixa, pois, a geometria em último plano (KLINE, 1976). Desta forma, entende-se que vários foram os esforços para a superação do ensino tradicional. Porém, nenhuma delas conseguiu substancialmente esse propósito, apesar de algumas dessas pedagogias proporem a mudança do currículo. No entanto, não possibilitaram a promoção do desenvolvimento cognitivo e intelectual da criança, em particular, e do cidadão de modo geral. De acordo com Davýdov (1982), para que se alcance tal finalidade, é necessário que se mude tanto os conteúdos quanto os métodos de ensino.

Para Davídov e Slobódochikov (1991), o novo pensamento pedagógico teria por essência e finalidade o envolvimento ativo como um dos fatores para o desenvolvimento das capacidades gerais, genéricas do homem, bem como a aquisição de procedimentos universais da atividade. O propósito é o desenvolvimento da personalidade e da criatividade social, a preparação para a vida coletiva e para o trabalho; bem como para a participação na gestão democrática e responsabilidade pelos destinos do país.

Para a organização do novo pensamento pedagógico, Davídov e Slobódochikov (1991) estabelecem, além do desenvolvimento do pensamento teórico, outras características essenciais:

1) que esteja orientada para a formação, nos estudantes, da personalidade criativa e da individualidade, consoantemente com sua plena vontade e aspirações vitais. Também admita a criança como um sujeito ativo, na vida escolar, com condições para adquirir um potencial relativo às diferentes atividades (artística, laboral, de estudo, desportiva, organizativa, social, etc.).

2) que priorize o desenvolvimento harmônico do homem em função das diferentes tecnologias. Promova, pois, a instrução que considera as diferentes informações e meios formais. Porém, de modo que permita a formação não apenas de um profissional para o setor produtivo, no caso da então URSS, para o sistema administrativo burocrático. O verdadeiro ensino, diz Davídov e Slobódochikov (1991), é aquele que aponta para educação, dos meninos e jovens, das propriedades de personalidade, tais como: o coletivismo e a solidariedade, o companheirismo e a civilidade, o caráter firme e vontade, amor no trabalho e firmeza, combinados com a iniciativa e independência.

3) que vise à construção do modo socialista de vida, para o qual são definidos dois princípios autênticos de ensino. Um deles vincula-se com a familiarização criadora e ativa do homem com o mundo, por meio da atividade laboral. O outro princípio refere-se à unidade do ensino com as diversas formas contemporâneas do trabalho produtivo.

No entanto, a mais importante característica do novo pensamento pedagógico – no contexto da URSS – é a compreensão do ensino como sistema socioestatal, que funciona em condições de ampla democratização e é dirigido por conselhos sociais de distintos níveis (DAVÍDOV; SLOBÓDOCHIKOV, 1991).

Porém, para que as características mencionadas tenham funcionalidade e promovam uma "pedagogia de colaboração", Davídov e Slobódochikov (1991) revogam os **princípios** contemplados na estruturação das disciplinas na escola (primária) tradicional, a seguir descritos:

a) Princípio da **sucessão** que prima pela relação entre conhecimentos cotidianos e correntes, adquiridos antes de ingressar na escola. Essa mesma característica se mantém nos níveis primários, o que não permite a distinção de maneira clara das particularidades das apropriações precedentes dos novos conceitos. Isso, segundo Davídov (1987), é verificável por meio dos guias didáticos, que nos graus médios de ensino aumentam o volume e complexificam os conceitos a serem apropriados pelos estudantes, porém não há diferença essencial entre os conceitos científicos e cotidianos. Portanto, não se observa mudanças internas do conteúdo e as formas de ensino, o que não promove uma distinção entre os conhecimentos adquiridos nos primeiros anos de escolaridade e os níveis subsequentes, por exemplo, entre o quarto e décimo ano. Por consequência, há uma aproximação estreita entre uma autêntica compreensão e uma simples informação sobre a realidade.

b) Princípio da **acessibilidade** que expressa o cuidado para que, em cada nível de escolaridade, se ensine aos estudantes somente aquilo que atendam às capacidades de assimilação já desenvolvidas ou em conformidade com a sua idade. Davýdov (1987) apresenta uma crítica a este princípio, por ele ser considerado uma espécie de norma social, sem as devidas credenciais científicas, mas que mesmo assim predetermina o tipo de educação e o nível de exigência intelectual para as crianças em idade escolar: a educação empírico-utilitária e de pensamento empírico-classificador. Essas são as exigências estabelecidas por autoridade da psicologia evolutiva e didática. Por consequência, atualmente, em cada etapa do ensino, a criança convive com conhecimentos que estão ao seu alcance imediato de compreensão. Isso significa que se volta apenas às condições de domínio e nível de pensamento já desenvolvido (DAVÍDOV, 1987).

c) Princípio do **caráter consciente** que, de acordo com Davídov e Slobódochikov (1991), tem sua importância à medida que se posiciona contra a memorização mecânica dos estudantes, o formal e a tese escolástica de que se aprende e se compreende aquilo que se aprende (DAVÍDOV, 1987). Davídov (1987), no entanto, questiona sobre o entendimento do ensino tradicional a respeito da palavra compreender, uma vez que toda a sua tecnologia cumpre os fundamentos e põe o seguinte conteúdo:

1) Todo o conhecimento se apresenta como abstrações verbais claras e sequencialmente organizadas;

2) Necessariamente, o estudante correlaciona a abstração verbal com uma imagem sensorial completamente definida e precisa.

De acordo com o autor, mesmo admitindo o caráter consciente, o ensino tradicional reduz os conhecimentos adquiridos pelos estudantes, ao transitar entre os significados das palavras e seus correlatos sensoriais, e ainda constitui um dos mecanismos internos do pensamento empírico-classificador. Além disso, revela outro paradoxo, pois a escola separa o conhecimento de seu emprego.

d) **Visual e concreto –** Davídov (1987) e Davídov e Slobódochikov (1991) dizem que esse princípio é simples e se banalizou nos sistemas escolares. Por isso, promove um trágico desenvolvimento mental. Isso porque que os fundadores e defensores do caráter visual concreto, acima de tudo, priorizam: 1) a comparação da multiplicidade sensorial das coisas como sendo a base do conceito; 2) esse tipo de comparação só destaca as características semelhantes, comuns das coisas; 3) a palavra como expressão da fixação comum conduz à abstração como conteúdo do conceito; em outros termos, o verdadeiro significado da palavra são as representações sensoriais sobre estas características externas; 4) o estabelecimento das dependências de gênero e espécie de tais conceitos constitui a tarefa fundamental do pensamento, o que interatua regularmente com a sensibilidade como sua fonte.

Em síntese, o princípio do caráter visual toma a base sensorial do conceito e o reduz ao seu nível empírico, próprio do pensamento racionalista discursivo-empírico, classificador, cujo fundamento é o reflexo das propriedades externas, sensorialmente dadas do objeto (DAVÍDOV, 1987).

Davídov e Slobódochikov (1991) alertam que a adoção desses princípios tem como consequência a formação de obstáculos para a constituição de bases de uma escola moderna, que promova o desenvolvimento intelectual dos estudantes. Outra restrição aos princípios tradicionais é que eles orientam para a formação do pensamento empírico. Por extensão, deixam à margem muitas crianças, impedindo-as de assimilar os meios e procedimentos do conhecimento científico, que promove o desenvolvimento do pensamento teórico.

Em contrapartida, os autores estabelecem novos princípios: **cientificidade, educação capaz de desenvolver, atividade e caráter objetal.** O pressuposto é de que eles possibilitam a determinação dos traços mais característicos da escola futura. Além disso, assinalam as condições em que a formação do pensamento teórico se converte em norma e não exceção, como se observa na escola tradicional.

1) **Princípio da cientificidade**: está relacionado à necessária mudança – em relação ao ensino tradicional – do tipo de pensamento que todo o sistema de educação pretende formar nas crianças, desde os primeiros anos escolares, qual seja: o contato com os fundamentos do pensamento teórico que se encontra como base da atitude criadora do homem sobre a realidade. Para Davídov (1988), a estruturação do ensino segue o método de exposição dos conhecimentos científicos,

que se caracteriza pelo procedimento de ascensão do abstrato ao concreto. O autor parte do pressuposto de que:

> O pensamento dos estudantes, em processo de atividade de estudo, tem algo comum com o pensamento dos cientistas, ao expor os resultados de suas investigações por meio de abstrações e generalizações substanciais e os conceitos teóricos que funcionam em processo de ascensão do abstrato ao concreto (DAVÍDOV, 1988, p. 173).

2) **Princípio da educação capaz de gerar desenvolvimento**: que se caracteriza pela organização do ensino, de tal forma que considere os ritmos, os conteúdos e as capacidades da personalidade dos alunos com vistas não às possibilidades atuais, mas que gere o desenvolvimento. Em outras palavras, criar condições e premissas do desenvolvimento psíquico ainda não atingido pelas crianças. Esse princípio tem por base o conceito vigotskiano de zona de desenvolvimento proximal, indicadora das possibilidades futuras do estudante (VYGOTSKI, 1993).

3) **Princípio da atividade**: que passa a ser fonte, meio e forma de estruturação, conservação e utilização dos conhecimentos (DAVÍDOV; SLOBÓDOCHIKOV, 1991). Trata-se, de acordo com Davídov (1987), de uma objeção ao princípio de caráter consciente do ensino tradicional. A negação se expressa ao predizer a necessária extrapolação dos conhecimentos vistos como tendo o mesmo conteúdo dos conceitos empíricos, para atingir aqueles que revelam as condições de sua origem, os conceitos teóricos. Essa possibilidade ocorrerá somente se os alunos efetuarem transformações específicas com objetos, bem como modelarem e recriarem as propriedades internas do objeto que se converte em conteúdo do conceito. Essas ações propiciam a revelação e a criação da conexão essencial e geral dos objetos, que são fontes para abstrações, generalizações e conceitos teóricos (DAVÍDOV, 1987).

Portanto, o princípio da atividade em educação supera o sensualismo unilateral, o nominalismo e também o associacionismo, presentes em outras propostas ou sistemas de ensino. Sendo assim, evita-se a dicotomia entre o conhecimento e sua aplicação. Trata-se, pois, de priorizar a apropriação dos verdadeiros conceitos científicos, que refletem a essência, as qualidades internas dos objetos e garante que os indivíduos se orientem por eles durante a solução de tarefas práticas (DAVÍDOV, 1987).

4) **Princípio do caráter objetal**: o qual entende que algumas ações específicas com objetos são indispensáveis como forma de revelar o conteúdo do futuro conceito e de sua representação em modelos conhecidos, que podem ser materiais, gráficos e verbais (DAVÍDOV, 1987).

Portanto, constata-se a seguinte diferença: enquanto o princípio do caráter visual concreto da escola tradicional expressa que em educação a passagem é do particular ao geral, o princípio do caráter objetal:

> Fixa a possibilidade e a conveniência de que os alunos descubram o conteúdo do geral de certo conceito como base ulterior para a identificação de suas manifestações particulares. Assim se afirma a necessidade da passagem do geral ao particular. O geral se compreende como conexão geneticamente inicial do sistema estudado, o que em seu desenvolvimento e diferenciação gera o caráter de sistema concreto. Este conceito do geral deve diferenciar-se da igualdade formal, implícita no conceito empírico. A exigência de separar o geral e de construir sobre sua base, no processo educativo, o sistema concreto é a consequência do princípio de caráter objetal, que altera radicalmente as possibilidades na organização e ensino das disciplinas escolares. Segundo o autor, estas podem construir-se em correspondência com o conteúdo e a forma que implanta os conceitos em uma ou outra área científica (DAVÍDOV, 1987, p. 152).

O autor entende que a aplicação multilateral dos novos princípios psicodidáticos é condição para a definição das características essenciais da escola futura. Nisso, o mais importante é que eles estabeleçam as condições para que a formação dos meios de pensamento teórico-científico se constitua em regra e não em excepcionalidade, como se observa na escola atual.

3 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DAS PROPOSIÇÕES DAVYDOVIANAS REFERENTES AO OBJETO DE ESTUDO

Como anunciado anteriormente, a proposta de ensino organizada por Davýdov e seus colaboradores estabelece que, desde o primeiro ano de escolaridade, o ensino deve voltar-se prioritariamente ao desenvolvimento nos alunos do pensamento conceitual científico. Este ponto de vista é partilhado por Vygotski (1993), ao afirmar que o ensino deve orientar-se não para o ontem, mas sim para o amanhã do desenvolvimento infantil. Para o autor, "o ensino é unicamente válido quando precede ao desenvolvimento" (VYGOTSKI, 1993, p. 243).

No entanto, para a materialização desse desígnio, exige-se dos professores uma organização do ensino que contemple as tarefas de estudo com um caráter problemático, isto é, com teor investigativo. Em outras palavras, as tarefas são elaboradas de modo tal que instigam os alunos a estarem em permanente atividade de estudo. Esta aponta para a apropriação de conhecimentos em processo de solução autônoma das tarefas, desde que permita que as crianças identifiquem as condições de origem do conhecimento (DAVÍDOV, 1988).

Sobre essa questão, Горбов, Микулина е Савельева[2] (2008) salientam que, ao se organizar a aprendizagem em sua forma ampla, não é possível introduzir a lógica conceitual como modelos prontos, como é a característica do sistema de educação tradicional. Em vez disso, sua identificação se dará pelos próprios estudantes.

É com esta lógica que, neste capítulo, focar-se-ão a análise do contexto matemático e a organização do seu ensino, mais especificamente para o desenvolvimento de conceitos geométricos. Como mencionado na seção 1.2, a referência de análise é constituída por quatro fontes. Sendo as duas primeiras os manuais do primeiro e segundo ano das proposições davydovianas para o professor (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008; ГОРБОВ МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2009); e as outras duas os livros didáticos (ДАВЫДОВА[3] et al., 2012; ДАВЫДОВА[4] et al., 2012) adotados pelos estudantes.

A adoção dessas referências é justificada por serem aquelas que expressam o modo davydoviano de organização do ensino, com o

---

[2] Gorbov, Mikulina e Savieliev.

[3] Livro didático destinado aos estudantes do primeiro ano.

[4] Livro de didático destina aos estudantes do segundo ano.

objetivo de formar os conceitos matemáticos nos alunos, o que nega a abordagem que prevalece no ensino tradicional de apenas desenvolver o saber prático. Para tal, a ênfase é dada à assimilação do conceito de número real, com base no conceito de valor. Por isso, até o número natural ensinado na escola fundamental é tratado como relação entre valores de medidas (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Davýdov (1982), ao admitir a grandeza com elemento geral da matemática, contempla a ideia de número real que, assim com os demais (natural, racional e irracional), é aspecto singular deste objeto matemático mais geral (DAVÝDOV, 1982).

Conforme Rosa (2012), Madeira (2012), Souza (2013), Silveira (2012), Goulart (2013), Matos (2013), Alves (2013), Crestani (2013), entre outros, é esse objeto geral que permeia todos os conceitos matemáticos nas proposições de Davýdov. É com tal referência que se passará à análise do contexto em que os conceitos geométricos são tratados nos livros anteriormente citados, base desta pesquisa. Para tanto, dividiu-se o capítulo em três seções, assim denominadas: 3.1 - A evidência das formas na introdução do ensino da matemática; 3.2 - Os conceitos geométricos em sua essência, apresentados no primeiro ano; 3.3 - Os conceitos geométricos em sua essência, apresentados no segundo ano. Em cada uma das seções, o pesquisador centrou-se nos dois focos descritos no primeiro capítulo (1.2): as bases epistemológicas da geometria e a base pedagógica.

3.1 A EVIDÊNCIA DAS FORMAS NA INTRODUÇÃO DO ENSINO DA MATEMÁTICA

Na presente seção, a análise se volta para o movimento pedagógico conceitual do ensino de geometria proposto por Davýdov (1982). Parte-se do pressuposto de que esse movimento expressa as características conceituais gerais do objeto da matemática: a grandeza. Pedagogicamente, isso se traduz na distinção de algumas especificidades de objetos ou figuras. Para essa finalidade, as tarefas propostas às crianças, por Давыдова et al. (2012), em vez de explorar diversas gravuras (como normalmente procedem os livros didáticos), priorizam as figuras geométricas, a fim de analisar as características perceptíveis visualmente: cor, forma, tamanho, posição. Não se trata de uma redução dos conceitos geométricos ao campo perceptível, visual imediato, da criança, mas de uma organização desses elementos de modo que expressem a lógica histórica do movimento conceitual da geometria. Isso, de início, leva ao entendimento de dupla justificativa para que

Davýdov e colaboradores assim procedessem. A primeira é de cunho epistemológico da geometria que, segundo Aleksandrov (1976, p. 41), tem “como objeto as formas espaciais e as relações dos corpos reais, eliminando deles as restantes propriedades, considerando-as de um ponto de vista puramente abstrato”[5]. A segunda tem o propósito de manter seu pressuposto de que as crianças, ao chegarem à escola, trazem uma bagagem de conhecimento que não compete à escola repetir, mas colocar em movimento de ascensão com qualificação de conceitos científicos.

Segundo Kalmykova (1991), a base psicológica necessária para uma correta formação dos conceitos é uma assimilação tal que permita a criação das condições entre as componentes abstratas e concretas do pensamento, entre a palavra e a imagem. Desse modo, durante a atividade educativa, o professor necessariamente recorre ao material visual como base para a formação de conceitos; caso contrário, dar-se-á uma assimilação puramente formal das noções. Ademais, alerta que se deve evitar o prolongamento demasiado no uso do material visual, mesmo que o concreto físico, palpável, possibilite a aprendizagem inicial do conhecimento matemático (KALMYKOVA, 1991).

Uma melhor formação dos conceitos também depende da diversidade do material usado. Quanto mais variações de visualizações, tanto mais possibilidade de atingir o processo de abstração, porém, com a precaução de não submeter os estudantes a uma experiência sensorial com todos os objetos. Em vez disso, adotar métodos que desenvolvam as capacidades para ampliarem o conceito em estudo (KALMYKOVA, 1991). Contudo, a apresentação e o uso dos materiais devem ser organizados de modo que suas características não essenciais variem para pôr em relevo as especificidades fundamentais do conceito em processo de apropriação (KALMYKOVA, 1991).

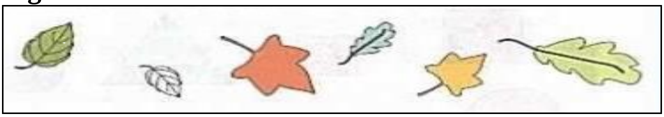
Essas precauções de ordem pedagógica são consideradas por Davýdov e colaboradores ao organizar o ensino de matemática para o primeiro ano escolar, contexto em que os conceitos de geometria se apresentam aos estudantes. Em consonância com o “princípio de caráter objetal” (DAVÍDOV, 1987), desde a primeira tarefa particular que as

---

[5]Sobre a abstração em geometria, Aleksandrov (1976) diz que ela conduz necessariamente ao método geométrico puramente teórico, pois como não é possível realizar experimentos com linhas retas sem largura com formas puras, a única possibilidade é fazer uso de raciocínio lógico, derivando umas conclusões de outras. Um teorema geométrico deve ser provado mediante o raciocínio, pois, de outro modo, não opera com formas puras, não pertence à geometria.

crianças desenvolvem, há um forte chamamento para a análise de situações didáticas que requerem o manuseio e observações de objetos ou figuras familiares para análise de características como: **cor, forma**, **tamanho e posição**. Destacar-se-á, a seguir, que mesmo nessas relações e diferenciações de objetos, Davýdov e colaboradores (ДАВЫДОВА et al., 2012) apelam para tarefas que destacam elementos geométricos, principalmente a forma.

Figura 1: Tarefa introdutória.



Fonte: Давыдова et al., (2012, p. 3)

No processo de análise das características das folhas, possivelmente as crianças as agruparam de acordo com a ilustração abaixo (Figura 2), isto em relação à forma. Porém, no livro de orientação metodológica do professor (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008), a orientação é para que se discutam as variantes erradas. Isto é, levando-se em consideração as particularidades das crianças.

Figura 2: Possível desenvolvimento da tarefa introdutória.

Fonte: Adaptado de Давыдова et al (2012)

Ao promover a discussão anunciada, de forma instigante, há possibilidade de as crianças identificarem que mesmo que os pares de folhas tenham mesma **forma**, são totalmente diferentes umas das outras em relação à **cor** (Figura 2). Como é possível observar, as folhas não têm as formas geométricas bidimensionais que, normalmente, constituem conceitos a serem desenvolvidos nos programas escolares: quadrado, triângulo, círculo, trapézio, losango, paralelogramo, bem como os demais polígonos. No entanto, a hipótese é que elas trazem um componente lógico histórico do desenvolvimento da geometria.

Assim, subjacente à análise das características **forma e cor**, estão outras determinações existentes na natureza. Recorreu-se a Aleksandrov (1976) quando diz que os primeiros homens chegaram às formas geométricas por meio da natureza. Nela, porém, os olhos raramente encontram linhas autenticamente retas, nem com triângulos ou quadrados perfeitos. Para o referido autor, a principal razão que levou o homem a conceber, gradualmente, as figuras foi a sua observação ativa da natureza, no sentido de satisfazer suas necessidades. Isso lhe exigia a manufaturação de objetos cada vez mais regulares em sua forma.

Em termos pedagógicos, a tarefa 1 tem como objetivo fazer com que os estudantes se familiarizem com as operações da atividade de estudo que preconizam o encaminhamento para a conceituação matemática. Além disso, expressa a compreensão davydoviana de que, inicialmente, ao atingir o seu período de desenvolvimento caracterizado pela atividade de estudo, a criança deva romper com a fase anterior marcadamente pela atividade do jogo, própria do período pré-escolar. Davýdov (1982) propõe que, ao entrar na escola de Ensino Fundamental, o estudante deve perceber algo novo em relação às experiências anteriores no que diz respeito ao conteúdo e ao método de estudo. Porém, não de forma abrupta, mas num processo que priorize gradativamente as relações essenciais, próprias dos conceitos teóricos da matemática.

Nesse sentido, psicologicamente, a tarefa 1 também expressa outra compreensão da Teoria Histórico-Cultural de que as relações entre objetos, por meio de alguns nexos (no caso, cor e forma), é uma peculiaridade do segundo estágio do desenvolvimento do pensamento conceitual: conceitos em complexos. Conforme Damazio (2006, p. 2), com base nos estudos de Vygotski (1993), esse estágio de formação de conceito se caracteriza pelos vínculos entre objetos; estabelecimento de relações entre diferentes impressões concretas; direcionamento à unificação e generalização de objetos particulares; como também ordenamento e sistematização de toda experiência da criança.

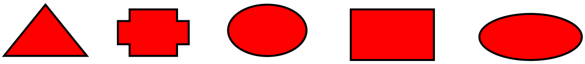
Com o exposto, passar-se-á a apresentar algumas tarefas iniciais das proposições davydovianas, que colocam os alunos em atividade investigativa, com destaque em duas características: **cor e forma**.

Neste sentido, Горбов, Микулина e Савельева (2008) sugerem a valorização das perguntas feitas pelas crianças – direcionadas ao professor, em primeiro lugar, e depois dirigidas aos demais colegas e a si mesmo –, ligadas a uma estratégia de investigação racional.

Partindo do pressuposto em estudo, "**cor e forma**", a tarefa a seguir (Figura 3) toma por base algumas figuras, não mais dadas pela natureza, mas produções históricas da humanidade que se constituem no que se denomina de formas geométricas planas, como os quadrados triângulos, círculos, etc. Para tanto, não se focaliza nas suas definições conceituais científicas, mas apenas no nome genérico para identificá-las e indicar a posição de uma delas em relação às demais.

Para a execução da tarefa, colocam-se no quadro figuras de papel da mesma cor e com superfícies de formas diferentes (Figura 3):

Figura 3: Tarefa introdutória da ação investigativa, com destaque em duas características: cor e forma.



A B C D E

Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

A orientação de Горбов, Микулина e Савельева (2008) é de que o professor proponha às crianças para adivinharem, dentre as figuras expostas, aquela pensada por ele. No entanto, podem fazer qualquer pergunta. Segundo os autores, no processo de investigação da figura, provavelmente, os alunos irão citá-las de modo afirmativo: *superfície circular, quadrada, etc.*

No entanto, caberá ao professor instigá-los no sentido de elaborarem perguntas em vez de afirmações: *É de superfície circular? É de superfície quadrada, etc.*

A probabilidade é da elaboração de cinco perguntas. Porém, o professor descarta as quatro primeiras e marca com traços cada uma delas, como forma de evidenciar que serão necessárias muitas perguntas, cinco, para indicar com certeza a figura. Torna-se decisiva a participação do professor para desafiá-los na formulação de apenas uma "boa ou ideal pergunta" que dê conta de obter a resposta desejada. Mesmo assim, podem ocorrer tentativas como: É o círculo?

No entanto, o professor impõe outra condição: só poderão fazer mais uma indicação. Esse estreitamento de possibilidade coloca-os diante de uma única alternativa: Como é essa figura? O que dá margem para o professor recorrer à outra opção de não chegar ao acerto: é de papel, pois todas têm essa característica. Também se constituiria em questão sem sentido: Qual a cor da figura? Pois todas são vermelhas. Esse processo de esgotamento de possibilidades é proposital para que os estudantes façam a pergunta ideal: Que forma tem a figura que você pensou?

Num segundo momento, apresenta-se uma tarefa inversa à anterior, em que todas as figuras têm a mesma forma. O objetivo é investigar a figura que foi pensada, fazendo somente uma pergunta. Nessa situação, a pergunta sobre a forma da figura fica sem sentido. Logo, a pergunta a ser feita *é: Qual é a cor desta figura*? (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Figura 4: Tarefa que propõe a elaboração de perguntas boas em relação à forma e à cor.

Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

No contexto do processo da análise sobre a forma e cor das figuras, é importante antecipar que várias tarefas podem ser apresentadas para colocar a criança em ação investigativa. A introdução de um significante número de tarefas não serve apenas para motivar as crianças, mas para o desenvolvimento do autocontrole e entendimento completo da execução das tarefas.

De acordo com Горбов, Микулина e Савельева (2008), neste processo, as primeiras tarefas devem levar o aluno a entender o processo operacional das mesmas, para lembrá-las posteriormente. Para tanto, deve existir uma participação ativa do aluno na identificação das figuras pensadas pelo professor ou por outro colega, a fim de entender as determinações propostas para a análise da figura.

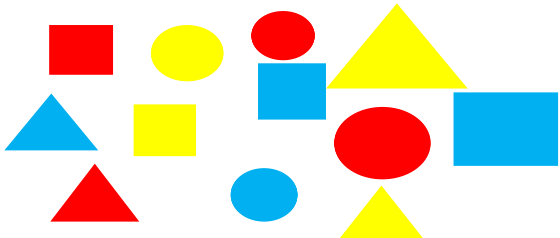
O caráter ativo do processo de apropriação da experiência socialmente significativa é condição essencial para o surgimento das neoformações do desenvolvimento intelectual em todos os níveis de ensino (Fundamental, Médio e, posteriormente, Ensino Superior). Só assim o estudante passa das transformações objetais à análise ativa de sua experiência prática, o que proporciona a assimilação das relações entre os fins, os meios e as condições da atividade (DAVÍDOV; MÁRKOVA, 1987, p. 189).

Para formar o pensamento teórico na idade escolar, é indispensável envolver a criança em atividades de estudo como sistema de transformações objetais. Estas conduzem à reflexão sobre os meios com que se realizam as transformações. Para que surja a auto-organização dos processos intelectuais, o mais produtivo é organizar o estudo como atividade conjunta (DAVÍDOV; MÁRKOVA, 1987, p.

190).

A preocupação de colocar as crianças em ação investigativa, condição inconteste da atividade de estudo, a tarefa a seguir acrescenta uma nova característica para a análise dos objetos: o **tamanho**. Requer a comparação de dois objetos de mesma forma, com a distinção “grande-pequeno”. Assim como anteriormente, a investigação volta-se para a identificação da figura em que professor pensou, com a formulação mínima de perguntas (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Figura 5: Tarefa que propõe a elaboração de perguntas boas em relação ao tamanho.



Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

Para a realização desta tarefa, será necessário que o professor pense em uma das duas superfícies triangulares amarelas, superfícies quadradas azuis ou ainda em uma das duas figuras circulares vermelhas. Logo, as crianças devem identificar qual delas o professor pensou. Nesse caso, as perguntas relacionadas com a cor e a forma são indispensáveis. Por exemplo, se a escolha do professor for uma superfície triangular, então as questões a serem dirigidas a ele necessariamente são: Qual é a forma? Qual é cor?
As respectivas respostas, que incidem na possibilidade de uma nova intervenção das crianças, são: superfície triangular amarela. Ao observar as características das figuras, a boa pergunta investigativa é: Qual é o tamanho que você pensou?

Vale destacar uma peculiaridade nessas primeiras tarefas, se for feita uma comparação com outras proposições de ensino – por exemplo, do movimento da matemática moderna, conforme mostra Souza (2013) – que, ao tratar da temática em foco (cor, forma, tamanho, posição) adotam como referência objetos ou gravuras representativas de algo do cotidiano. As tarefas davydovianas, sem desprezar essa mesma preocupação, dão ênfase às formas geométricas.

Novamente se expressa a hipótese de que tal deferência às formas tratadas pela geometria é fruto da interlocução de Davýdov (1982) com os estudiosos da Matemática. Cita-se Aleksandrov (1976) para quem a geometria opera com corpos e figuras para estudar as relações mútuas desde o ponto de vista da grandeza e a posição. Mas um corpo geométrico não é senão um corpo real considerado unicamente do ponto de vista de sua forma (dimensão) espacial, desde que se elaborem as abstrações de todas as propriedades, tais como: densidade, cor ou peso (ALEKSANDROV, 1976).

Rosa (2012), tendo como referência os estudos de Davídov (1988), afirma que as tarefas relacionadas à solução de problemas geométricos, conduzidas, por exemplo, pela posição e forma das figuras, favorecem o desenvolvimento, nas crianças, das representações espaciais elementares e da capacidade de raciocinar.

É justamente **a posição** de corpos geométricos que a tarefa a seguir traz como critério de distinção em relação a outros. Para tal, os procedimentos a serem seguidos são as relações “acima-abaixo”, “à esquerda-à direita” e “fica entre” (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

O professor coloca no quadro sete superfícies quadradas de tamanhos iguais, alinhadas verticalmente. Entre elas, quatro são de cor azul, que se alternam com as três de cores diferentes (vermelha, amarela e verde). Como em momentos anteriores, novamente o professor tem por missão pensar em uma das figuras; para o caso, uma das azuis. É permitido às crianças fazerem um número considerável de perguntas no sentido de identificarem a figura que o professor pensou, mas não podem apontá-la e dizer “É esta? ”.

Figura 6: Tarefa que propõe a elaboração de perguntas boas em relação à posição na vertical.

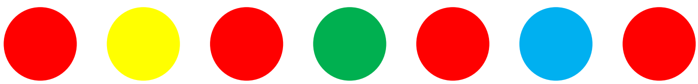
Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

Nessa situação, não são boas interrogações que aventam a forma e o tamanho, pois a única característica que diferencia as superfícies é a cor. Assim sendo, a pergunta a ser feita é: *De que cor é a superfície quadrada?* Para qual, o professor responde: azul. Mesmo assim, a finalidade da tarefa não é cumprida, o que coloca os estudantes em situação de busca e dúvida, pois existem quatro possibilidades azuis. De acordo com Горбов, Микулина e Савельева (2008), as limitações que se apresentam às crianças levam-nas à nova pergunta do tipo: *De que modo vamos saber qual delas foi pensada?*

Este questionamento expressa a insuficiência de conhecimento das crianças para a identificação da figura pensada. Resta, pois, o critério relacionado à **posição**, o que conduz à elaboração de perguntas que envolvam as expressões: acima de, abaixo de, mais acima, mais abaixo, em cima, em baixo, entre. Por exemplo: *Onde fica esta superfície quadrada, acima ou abaixo da superfície quadrada vermelha?*

Uma tarefa similar à anterior é analisada, porém apresenta características diferentes em relação à posição, pois em vez de as figuras (círculos, não mais quadrados) estarem dispostas verticalmente, posicionam-se na horizontal.

Figura 7: Tarefa que propõe a elaboração de perguntas boas em relação à posição na horizontal.

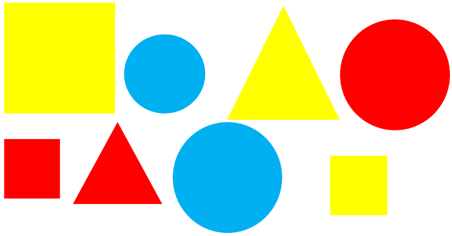


Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

Essa disposição, para Горбов, Микулина e Савельева (2008), direciona para a elaboração de perguntas com a adoção da linguagem: à direita de, à esquerda de, mais à direita, mais à esquerda e entre.

A fim de avaliar o nível de apropriação de conhecimentos pelos estudantes – referentes ao estudo sobre cor, forma, tamanho e posição –, propõe-se uma nova tarefa que contemple todas as características externas. As figuras são organizadas horizontalmente, no quadro, e diferem-se pela forma, cor e tamanho.

Figura 8: Tarefa que propõe a elaboração de perguntas boas em relação à posição entre.



Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

Горбов, Микулина е Савельева (2008) orientam para que as crianças se responsabilizem pela descrição das figuras, em conformidade com a sua posição. Ao professor cabe a proposição de algumas perguntas, como, por exemplo:

a) Quais são as figuras que ficam à direita do grande círculo azul?
b) Quais são as figuras que ficam entre o grande triângulo amarelo e o grande círculo azul?
c) Quais são as figuras que ficam à esquerda do círculo azul pequeno?

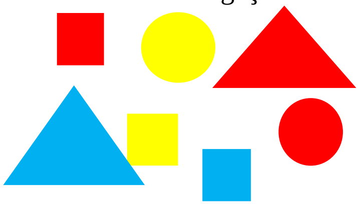
Como dito anteriormente, a tarefa executada tem como objetivo analisar o nível de apropriação adquirido pelas crianças das diversas propriedades estudadas até o momento. Além disso, é anunciadora da introdução discreta de outros conceitos matemáticos a serem estudados, por exemplo: o sucessor de, o antecessor de, etc.

Segundo Davídov (1988), a introdução de novos conceitos e ideias, no ensino primário, pressupõe a elevação do papel dos conhecimentos teóricos de modo tal, que permite a racionalização e, em parte, a aceleração do estudo, a fim de promover a função da educação geradora de desenvolvimento.

A seguir uma nova tarefa investigativa é introduzida, **a negação,** sem o rompimento definitivo com as propriedades estudadas anteriormente.

Para a realização da tarefa, colocam-se figuras no quadro, dispostas aleatoriamente, que também estão sob a carteira do aluno. Elas se diferem pela cor e pela forma (superfícies: quadrada azul, vermelha e amarela; circular amarela e vermelha; triangular vermelha e azul). Desse modo, as perguntas boas se direcionam para a cor e a forma, mas na forma negativa.

Figura 9: Tarefa que propõe a elaboração de perguntas boas envolvendo a negação.



Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

Novamente, ação investigativa se posiciona de maneira que as crianças identifiquem a figura pensada com o menor número possível de perguntas, as quais são respondidas negativamente pelo professor. Por exemplo, os estudantes interrogam: De que forma é esta figura? Para a qual terão como resposta: Ela não é o quadrado. Por isso, os quadrados são excluídos do conjunto de figuras disponíveis. Isso promove a continuidade do diálogo com outra interpelação: De que cor é a figura? Cujo, retorno docente é: Ela não é vermelha. Do mesmo modo, são retiradas as peças que têm essa cor. Em consequência dessas exclusões, permanecem duas figuras: a de superfície circular amarela e a triangular azul.

Figura 10: Desenvolvimento final da tarefa da figura 9.

Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

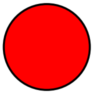
E, assim, resta a possibilidade da pergunta sobre a cor ou a forma. Por extensão, a resposta, negativa ou afirmativa, indicará a figura em questão.

Este procedimento pode ser adotado, porém com a inversão de papéis: os alunos pensam na figura e o professor investiga, com a obtenção de respostas na forma negativa ou afirmativa dos estudantes.

Durante a realização da ação investigativa, aconselha-se a ênfase para as noções de tamanho, o que exige a comparação de um objeto com outro. Ou seja, um objeto só será pequeno caso exista um grande ao seu lado. Além disso, existe uma relatividade das suas propriedades (espessura, comprimento, altura).

Segundo Горбов, Микулина e Савельева (2008), a diferenciação dos objetos pelo seu tamanho significa determinar qual deles é maior e qual é menor. Para execução da tarefa, o professor desenha no quadro uma figura circular vermelha. E, em seguida, questiona os alunos da seguinte maneira: *De que cor é esta figura? De que forma é? Qual é o tamanho dela?*

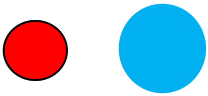
Figura 11: Tarefa que propõe a elaboração de perguntas boas em relação à característica tamanho.



Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

Durante a ação investigativa, concluir-se-á que os estudantes não terão dificuldades quanto à identificação da cor e da forma, visto que já se apropriaram destas características. No entanto, é impossível se posicionarem em relação ao tamanho, visto que a figura está isolada. Para tanto, o professor acrescenta, ao lado da anterior, uma figura circular com tamanho maior e questiona: *E agora, qual é tamanho da figura circular vermelha?*

Figura 12: Acréscimo no desenvolvimento da tarefa anterior.

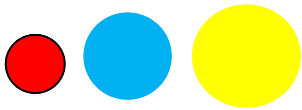


Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

A conclusão a ser elaborada pelos estudantes é: a figura circular vermelha é pequena em relação à azul. Mas o professor continua com outro questionamento, por exemplo: *Por que a figura vermelha é pequena em relação à azul?* Estes questionamentos e outros, que hão de surgir no desenvolvimento da tarefa, possibilitam às crianças o desenvolvimento da capacidade de análise dos objetos e argumentação das suas respostas.

Conforme sugestão de Горбов, Микулина e Савельева (2008), à medida que as crianças emitem suas respostas, o professor acrescenta mais figuras circulares para que as crianças se obriguem a mudar suas perguntas, isto é, torná-las mais precisas. Por extensão, avalia-se até que ponto os alunos se apropriaram do conteúdo da tarefa. Neste caso, inclui a figura circular amarela, com interrogações do tipo: *Qual é o tamanho da figura inicial em relação às demais?* Ou, *qual o tamanho da figura em comparação com as outras?*

Figura 13: Complexificação no desenvolvimento da tarefa 11.



Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

A conclusão é que a figura circular azul é maior que a vermelha e menor que a amarela. Além disso, produz-se a síntese com respeito à impossibilidade de dizer se a figura é grande ou pequena quando se encontra isolada. Enfim, o tamanho se explicita num contexto de comparação de uma e outra figura.

Concluindo esta primeira parte o livro de orientação, vale reafirmar que no desenvolvimento das tarefas, Davýdov, Elkonin e seus colaboradores propõem a organização das atividades de tal forma que seja possível mostrar aos alunos as propriedades básicas das relações matemáticas: forma, cor, posição e tamanho. Estas servem de base ou ponto de partida para o estudo das grandezas, que fundamentam com maior rigor os conceitos matemáticos. Essa referência inicial e sua articulação com o que virá posteriormente constituem, segundo Rosa (2012), numa singularidade das proposições davydovianas no desenvolvimento do sistema de tarefas. Isso significa que cada tarefa é introduzida no sistema de outras tarefas que inter-relacionam diferentes propriedades. A preocupação é para que, na execução das tarefas, as crianças compreendam a complexidade das relações entre figuras ou objetos, em seu aspecto geral. Por extensão, aos poucos, apropriam-se dos conceitos científicos e, consequentemente, do pensamento teórico.

Além disso, outras duas sínteses são passíveis de explicitação com base na análise da presente seção. Uma delas diz respeito ao significado de “participação ativa” dos estudantes subjacente à proposta de Davýdov. Não se trata, pois, de uma compreensão em que basta a criança se movimentar ou se envolver em atividades de grupo marcadamente por jogos, brincadeiras, dramatizações, manipulações de materiais didáticos e situações do cotidiano, como advogam os métodos ativos propostos pelas tendências de ensino que Fiorentini (1995) denomina de “empírico-ativista” e “construtivista”. Davídov e Slobódochikov (1991) entendem que essas não são as condições suficientes para colocar a criança em atividade de estudo. Exige-lhe muito mais: que esteja em permanente atividade investigativa, o que requer não só o movimento físico externo, mas principalmente a atividade intelectual interna, o pensamento.

Outra síntese se refere à base do conhecimento, mesmo em seu modo introdutório. Nesse sentido, vale destacar que essas tarefas iniciais, ainda com foco nos aspectos externos das figuras e objetos, produzem o efeito investigativo entre os estudantes, porém com um cuidado extremo para não colocar as crianças diante de concepções conceituais errôneas em relação à forma ou tamanho, como é visto nas propostas que contemplam o construtivismo e a matemática moderna. Equívocos como esses são observados em Dienes (1975) ao induzir os estudantes a pensarem, por exemplo, que a figura plana quadrado tenha a espessura (grosso ou fino) ou cores diversas ao tomar como material didático os “blocos lógicos”.

Acima de tudo, como as tarefas apresentadas são dirigidas a crianças do primeiro ano, Davýdov e colaboradores atentam para os pressupostos dos teóricos e filósofos da Matemática que alertam: “A evidência dos conceitos básicos de geometria, seu métodos de raciocínio e a certeza de suas conclusões têm a mesma origem que a aritmética” (ALEKSANDROV, 1976, p. 41).

Em relação às especificidades da proposta de Davýdov e seus colaboradores, na próxima seção, a atenção será dada para o modo como os conceitos geométricos propriamente ditos são tratados no conjunto das tarefas particulares que os estudantes do primeiro ano precisam desenvolver. Vale salientar que elas se apresentam no âmbito da finalidade de ensino referente à apropriação do conceito de número.

3.2 OS CONCEITOS GEOMÉTRICOS EM SUA ESSÊNCIA, APRESENTADOS NO PRIMEIRO ANO

Nessa seção, será explanado sobre o modo como as proposições davydovianas introduzem e desenvolvem os conceitos geométricos, inicialmente, no primeiro ano escolar. Eles serão tratados na ordem em que aparecem nas tarefas: pontos, segmentos, linhas retas e curvas, comprimento, linhas fechadas e abertas, limites das figuras, área e volume. Porém, vale esclarecer que eles se apresentam nas tarefas de forma tal que se inter-relacionam, pois constituem o que Vygostski (2010) denomina de sistema conceitual.

Importa reafirmar que, nas tarefas particulares a serem analisadas, serão enfatizados os conceitos geométricos. No entanto, eles aparecem no modo de organização de ensino davydoviano, no contexto da "primeira tarefa de estudo" que tem a finalidade de criar as condições necessárias para que as crianças desenvolvam o pensamento *conceitual de número* – por extensão de operações e propriedades matemáticas – *como relações entre grandezas*. Por consequência, os conceitos trazem um teor fortemente aritmético de medida, e inter-relacionado, de modo implícito ou explícito, com ideias geométricas e algébricas. Estas, em determinadas tarefas, são desenvolvidas como condições prévias para o surgimento de uma base conceitual ou para o desenvolvimento do segundo tipo de representação[6] do resultado da comparação das grandezas. E, nessa confluência, atingem-se as significações algébricas de número.

Enfim, é forte o componente 'medir' sem as pretensões de estabelecer as relações de ordem geométrica entre as dimensões dos lados ou arestas das figuras. Por exemplo, os estudantes não chegarão ainda ao nível de apropriação das fórmulas de cálculos das áreas das figuras planas (quadrado, retângulo, triângulo, círculo, paralelogramo, trapézio, losango), dentre outras: $A = l^2$; $A = b.h$; $A = b.h/2$; $A = \pi r^2$.

No modo de organização de ensino davydoviano, tais modelos construir-se-ão em síntese, nos anos subsequentes, como decorrência do movimento de elaboração conceitual, que se inicia no primeiro ano com a ideia central de medida, isto é, relação entre grandeza de mesma espécie.

Reiteradas vezes tem-se explicitado sobre a importância das relações entre grandezas como elemento essencial geral dos conceitos matemáticos. Por isso, recorreu-se a Costa (1866, p. 9), que traz a definição, ainda atual, de "grandeza como tudo que é suscetível de aumento ou diminuição, por exemplo: a extensão, o tempo, o peso e o movimento". As grandezas distinguem-se em incomensuráveis e comensuráveis (quantidades). Estas são objeto das ciências matemáticas, que podem ser: contínuas (aumentam ou diminuem por graus tão pequenos quanto possível, como a extensão) e descontínuas (não permitem o aumento e diminuição por graus tão pequenos quanto se

[6]No modo davydoviano de organização do ensino, a própria representação de resultados das medições (indicação das relações de maior, igual e menor) são desenvolvidas gradativamente em três níveis: 1) objetal, com apresentação de duas fichas (iguais ou diferentes, dependendo do resultado da comparação das grandezas); 2) gráfica (por meio de segmentos) e 3) literal (com letra).

queira). No entanto, é com base em grandezas descontínuas que se chega à ideia de número (COSTA, 1866).

Segundo Rosa (2012), as grandezas constituem-se em elemento central do processo de formação do pensamento teórico da matemática. Por isso, a ênfase de Davýdov (1982) na afirmação de que no processo de formação do pensamento existe a possibilidade de as crianças assimilarem com bastante detalhe os conhecimentos sobre as grandezas. Para tal, faz-se necessária a presença dos objetos físicos, não para explicitar as características externas, mas de modo que permitam a familiarização e apropriação de suas propriedades fundamentais.

Como será visto mais adiante, o estudo das grandezas no contexto das tarefas particulares propostas por Davýdov e colaboradores, que introduzem a geometria, considera os seguintes entes geométricos: pontos e reta que se atrelam aos conceitos de linhas (retas e curvas, fechadas e abertas), segmentos, comprimento, limites das figuras área e volume. Tanto Davýdov (1982) quanto Talizina (2001) consideram importante que estudantes convivam de forma imediata com os conceitos de "ponto, linha reta, etc.", ao iniciarem o estudo da geometria. Mas, posteriormente, eles terão acesso ao estudo de um sistema de conceitos relacionados com diferentes tipos de objetos geométricos (linhas, ângulos e triângulos, etc.).

Essa possibilidade para os estudantes, mesmo no primeiro ano escolar, é referência, como será apresentado adiante, para que Davýdov lhes apresente tarefas particulares com teor científico desses conceitos geométricos. Sendo assim, implícita ou explicitamente, essas tarefas contemplam as ideias conceituais de sua base genética, bem como aquelas que permeiam o seu desenvolvimento em todo o percurso histórico. No que diz respeito, por exemplo, ao conceito de linha reta, Aleksandrov (1976) afirma que seu surgimento é decorrente da necessidade do homem de manufaturar milhões de objetos com bordas retas, tecer milhões de cordas, desenhar sobre o solo, etc.

Portanto, conforme Aleksandrov (1976, p. 41-42), "as propriedades dos conceitos geométricos foram abstraídas do mundo que nos rodeia". É consequência dos desenhos de muitas linhas retas, feitos pelos homens, que se aceita, na atualidade, o axioma da geometria de que por dois pontos quaisquer distintos só é possível desenhar uma linha reta.

Essas especificidades do processo de produção do conhecimento geométrico refletem o pressuposto da dialética materialista histórica, de acordo com Cheptulin (2004), de que a prática social é fator determinante do conhecimento. Para esse autor, o conhecimento começa, funciona, desenvolve-se, realiza-se e se explicita na e pela prática. Nesta se formam as categorias nas quais são refletidas e fixadas as ligações e as formas universais do ser. “Desenvolvendo-se com base na prática, o conhecimento representa um processo histórico, no decorrer do qual o homem penetra cada vez mais profundamente no mundo dos fenômenos” (CHAPTULIM, 2004, p. 57).

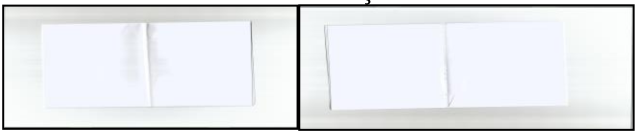
A partir desses fundamentos, Davýdov (1982) e Elkonin (1987) pressupõem que a divisão do sistema educativo e a organização do ensino propiciem o envolvimento do estudante em tarefas de estudo e particulares, com base em experiência prática caracterizada por fundamentos científicos, que proporcionam as condições para o desenvolvimento psíquico.

Assim sendo, durante o processo de ensino, o professor, como responsável por favorecer de forma direta e intencional a apropriação completa dos conceitos, não pode transmiti-los aos alunos de forma acabada e brusca. Ao invés disso, deve criar condições didáticas para colocá-los em ação investigativa, no sentido de identificarem as determinações internas e externas dos conceitos, mediadas pela relação com os objetos. Desse modo, evita-se o formalismo que, em sua essência, até leva os alunos à reprodução correta das definições dos conceitos e a terem consciência dos conteúdos, porém não saberão utilizá-los durante a orientação de sua atividade, bem como na resolução de problemas que requerem a aplicação dos mesmos (TALIZINA, 2001).

É com fundamentos nesse conjunto de pressupostos que Davýdov e colaboradores envolvem os estudantes do primeiro ano escolar no desenvolvimento de tarefas particulares – a seguir analisadas – para a apropriação das primeiras noções dos conceitos essenciais da geometria.

Ao introduzir o conceito de reta, conforme a figura 14, não perde de vista a ideia de que sua origem foram as atividades práticas e os problemas da vida cotidiana. Conforme orientação de Горбов, Микулина e Савельева (2008), para a realização da tarefa, entregam-se às crianças duas folhas de papel sulfite. O professor pede que dobrem uma delas de acordo com o modelo que ele mostra. A intenção é que o diálogo necessário à análise da situação leve as crianças à conclusão de que a dobra forma uma linha reta (Figura 14).

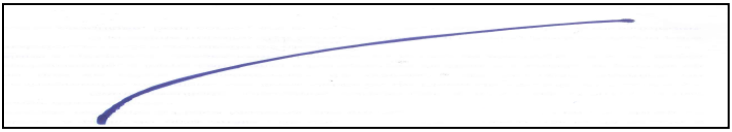
Figura 14: Tarefa introdutória da noção de reta.



Fonte: Autor, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

Na outra folha, os estudantes são orientados a desenhar a linha reta, porém sem o uso de instrumentos. O propósito dessa condição é levar os alunos a perceberem que a linha desenhada à mão livre é torta ou curva (Figura 15).

Figura 15: A primeira iniciativa de representação da reta.

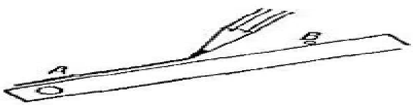


Fonte: Autor, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

Nesse contexto, Горбов, Микулина e Савельева (2008), com base na figura anterior, sugerem que se faça o seguinte questionamento: *Como fazer para desenhar uma linha reta?* Isso incita a ação investigativa propiciada pela tarefa em questão, que conduz algumas possibilidades de sínteses pertinentes ao conceito.

Uma delas é que, para desenhar uma linha reta, pode-se utilizar a folha dobrada ou qualquer outro objeto com os lados retos. A segunda é a dificuldade ou desconforto para desenhar à mão livre uma linha reta. A terceira a necessidade de um instrumento especial para cumprir tal finalidade – a régua.

Figura 16: A régua com instrumento necessário à representação da linha reta.

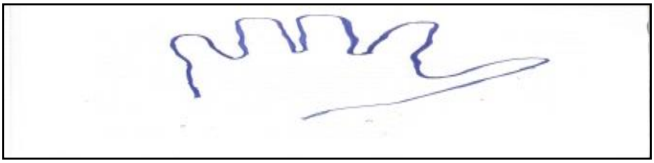


Fonte: Pogorélov (1974, p. 18).

No âmbito da formação e desenvolvimento dos conceitos, tal como referido anteriormente, as tarefas requerem a atenção do professor para que a apropriação conceitual das crianças não seja de forma pronta.

Uma característica no momento de introdução dos conceitos geométricos é a preocupação com a unidade constituída de distintos conceitos: linha e suas particularidades (curva e reta). Se na tarefa anterior o foco foi a reta, a tarefa a seguir (Figura 17) retoma a linha curva ao solicitar que as crianças contornem a palma da mão.

Figura 17: O desenho da mão como expressão de linha curva.



Fonte: Adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

Posteriormente à conclusão do desenho, a tarefa volta-se ao professor, que questiona as crianças: *Que tipo de linha foi desenhada na folha?* Assim, considerando a característica da linha desenhada na folha, a conclusão será que não se trata de linha reta, mas sim uma linha curva.

A tarefa tem um teor histórico e traz aspectos peculiares à gênese dos conhecimentos geométricos: a necessidade de desenhar e a própria ação manufatureira (ALEKSANDROV, 1976). Nesse sentido, Rosa (2012), com base em Davídov (1987), também afirma que, no desenvolvimento histórico da humanidade, os conhecimentos foram se fixando nas formas de atividade objetal.

Para tanto, o órgão principal foi a mão, pela sua capacidade de realizar movimentos interativamente com os demais órgãos dos sentidos. Esses órgãos adquiriram, historicamente, a função de orientação no mundo objetal e a capacidade para observar e separar, nos objetos, as propriedades e relações que eram importantes para um determinado fim.

Desse modo, após a realização das tarefas introdutórias, o professor pode apresentar algumas linhas retas e curvas para os alunos e incentivá-los a identificar as mesmas.

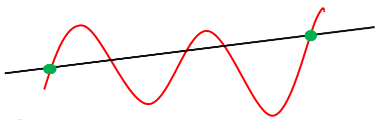
Figura 18: Identificação e diferenciação de linhas retas e curvas.

Fonte: ДАВЫДОВА et al (2012, p. 7-8)

Segundo Горбов, Микулина e Савельева (2008), diferentemente do conceito de linha reta, a linha curva não será o objeto central nesse início de estudo. No entanto, ela se apresenta como elemento para diferenciar linhas retas das não retas, isto é, com a finalidade de comparação. Por isso, não há necessidade de expor a diferença das linhas retas e curvas de forma rígida (em nível conceitual). A justificativa é que, na matemática, a linha curva basicamente é assumida como a linha em geral. Nesse contexto conceitual, a linha reta é uma particularidade, entendida como linha com curvatura zero.

Contudo, na tarefa seguinte, os dois tipos de linha se apresentam conjuntamente como base para o surgimento de outro conceito ou outro ente geométrico: o ponto. Para tanto, o professor propõe às crianças que desenhem nos seus cadernos uma linha curva e, em seguida, com o apoio da régua, tracem uma reta de forma que passe próximo das extremidades da curva (Figura 19). Finalmente, solicita que eles marquem os locais nos quais as duas linhas se cruzam.

Figura 19: O ponto como intersecção.



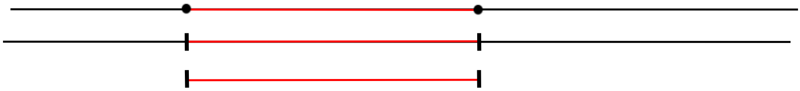
Fonte: Autor, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

Observa-se que a expressão ‘marquem os locais’ que aparecem na orientação da tarefa é referencial para a formação da ideia conceitual de ponto. Este não surge de forma isolada, mas articulado com os conceitos de linha e traz um significado como elemento de intersecção. Subjacente a tal ideia está o primeiro indício para a formação do pensamento conceitual de que a linha (reta ou curva) é constituída por pontos. Com tal finalidade, as crianças concluem, com a orientação do professor, que os locais de intersecção das linhas chamam-se pontos.

O conceito de ponto, nas tarefas dovydovianas, contempla o entendimento dos fundamentos da geometria expresso em Aleksandrov (1976, p. 41): “ponto é o conceito abstrato final de uma linha, de uma posição definida com um máximo de precisão, porém não é composto de parte” (ALEKSANDROV, 1976).

A tarefa a seguir, figura 20, estabelece que as crianças desenhem, com o auxílio da régua, uma linha reta. Para tanto, o professor pede que nela sejam marcados dois pontos e, posteriormente, destacada a parte que une estes pontos com um lápis de outra cor. Após a feitura, o professor esclarece que a parte destacada chama-se segmento. E acrescenta que, algumas vezes, as suas extremidades são os pontos ou marcadas com os riscos, como se fosse a linha de corte (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Figura 20: Introdução do conceito de segmento.



Fonte: Adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

Observa-se que o segmento é apresentado num contexto conceitual, o qual as crianças passam a entender quando inserido numa linha reta, onde são estabelecidos dois, e com destaque para o intervalo entre eles, que justamente os caracteriza. Além disso, há outro modo de representá-los que, em vez de indicar suas extremidades somente por pontos, adota dois traços perpendiculares à reta.

Durante o processo de apropriação de conhecimentos, de modo que permita o desenvolvimento intelectual das crianças e, consequentemente, a formação conceitual – no caso em estudo, de conceitos matemáticos “geométricos” –, torna-se importante a análise de vários procedimentos que possam contribuir para a solução ampla dos problemas matemáticos que estiverem disponíveis no dia a dia dos alunos.

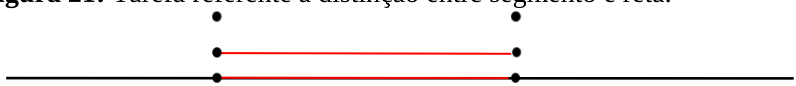
Para tanto, a assimilação da geometria pressupõe não só o domínio de sistemas de conceitos geométricos senão, também, de uma série de habilidades diferentes que são peculiares do pensamento matemático, como, por exemplo, a demonstração (BUTKIN, 2001, p. 151). Esta, no início da escolaridade, não se trata da aplicação formal do método axiomático de provar um determinado teorema em consideração à sua hipótese e tese. Em vez disso, a criança expressa as articulações de um conceito com os demais do sistema conceitual. Por exemplo, o conceito de segmento não é dado em si mesmo de forma isolada, ele requer a existência de uma reta, do estabelecimento de dois pontos (independentemente da forma que se represente a pequena superfície circular ou traço) e a existência de intervalo que justamente o define. Em outras palavras, a demonstração diz respeito à elucidação das condições de existência do conceito, porém sem a explicitação da distinção se necessária ou suficiente.

Neste contexto, apresentar-se-á uma tarefa similar à anterior. A diferença está no modo de organização, pois exige uma participação intelectualmente mais ativa das crianças, que colocarão o pensamento conceitual em movimento, de modo que articulem as suas apropriações com as novas aquisições possibilitadas pela própria tarefa. Isso porque ainda contempla a unidade de um sistema conceitual constituído por ponto, linha e segmento, porém expande para outras significações. Por exemplo, o ponto passa a ser determinante, tanto para definir o segmento (sua origem e extremidade) quanto para a linha reta. Mas, sua marca se dá justamente pelas primeiras noções sobre finito e infinito.

Para tanto, o professor solicita que as crianças marquem dois pontos fora da linha e, em seguida, una-os com um segmento. Elas, posteriormente, são orientadas a tomar uma régua e prolongar os segmentos em ambos os sentidos. O diálogo entre o professor e estudantes se estabelece, marcadamente, por perguntas como: *Qual o tipo de linha? O quanto ela pode ser estendida? Ela teria fim ou não?* As discussões, conforme Горбов, Микулина e Савельева (2008), são decisivas para que as crianças percebam que há possibilidade de continuar a linha ilimitadamente, porém com impossibilidade de representação pela própria extensão da folha de papel ou do quadro de escritas da sala de aula. Além disso, estabelecer algumas diferenças em termos conceituais.

Por exemplo, a linha reta não tem extremos determinados, porque é possível continuá-la sempre, passando por todos os seus pontos, além dos dois que propiciou a sua definição. O segmento, como sendo uma parte da linha reta, é limitado por dois de seus pontos

Figura 21: Tarefa referente à distinção entre segmento e reta.



Fonte: Rosa 2012, p. 89, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева, 2008.

Outro destaque para o modo de elaboração das tarefas, por Davýdov e seu grupo de estudiosos, é a atenção detalhada para que as crianças dominem os procedimentos socialmente elaborados próprios para a apropriação conceitual. Para tal, toma como referência a tese do Materialismo Histórico e Dialético de que o ponto de partida para o desenvolvimento das capacidades humanas é a atividade objetal (DAVÝDOV, 1982). A ação com os objetos – no caso das tarefas anteriores com o uso da régua, lápis, folhas – coloca as crianças como membros da sociedade, pois requerem suas forças intelectuais, cognoscitivas e físicas, peculiares da generacidade humana, adquiridas até o momento de sua existência. Entretanto, de acordo com Elkonin (1987), tanto para o menino como para os adultos (professor, pais e outros) envolvidos diretamente com o processo organizativo do ensino, as circunstâncias para aprendizagem e, por extensão, para o desenvolvimento, se apresentam antes de tudo como ampliação da esfera e elevação do nível de domínio das ações com os objetos.

No entanto, vale reiterar que tal elevação e domínio só ocorrerão se, na organização do ensino, contemplarem ações que coloquem os alunos em atividade de estudo que apresenta duas características essenciais: a assimilação de conhecimentos por parte dos estudantes e sua direção constituem o objeto fundamental do ensino. Só assim ocorre uma intensa formação das forças intelectuais e cognoscitivas dos estudantes (ELKONIN, 1987).

Esses pressupostos são referências no sistema de ensino de Davídov e Elkonin e seus colaboradores, como evidenciado na análise das tarefas anteriores, que apresentam as primeiras ideias sobre a geometria. Nelas, inter-relacionam-se as noções conceituais geométricas ponto, linha reta e segmento.

Como fora dito, o modo como Davýdov e seu grupo de pesquisadores organizam o ensino de matemática é direcionado pelo seu conteúdo geral, as relações entre grandezas. Vale lembrar que a análise em processo se refere apenas às tarefas iniciais do primeiro ano escolar. Portanto, tratam de colocar os estudantes em atividade de estudo para a apropriação das referidas relações que são base para o desenvolvimento do pensamento teórico, de início voltado ao conceito de número e das operações matemáticas. Todas as tarefas estão interconectadas para atingir tal finalidade. Às vezes, tem-se a impressão de que algumas delas quebram esse vínculo, como é o caso das tarefas (14 a 21) referentes à introdução dos primeiros conceitos da geometria, pois não focavam a medida. Mas, não é bem isso, uma vez que elas se apresentam como algo necessário, com um componente conceitual que se inclui no sistema até então constituído, o que torna as elaborações mentais mais complexas. Em outras palavras, formam um pensamento teórico e, conforme as teses do Materialismo Dialético e Histórico (DAVÝDOV, 1982), concreto, por se tratarem de algo apropriado, pensado.

Serão ilustradas essas articulações – relação entre grandezas e conceitos geométricos – aparentemente não explícitas com algumas tarefas voltadas para a medida de comprimento.

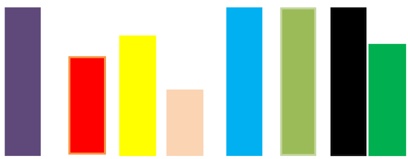
3.2.1 Comprimento

É no âmbito desse processo formativo minuncioso que se apresentam as próximas tarefas. Após a discussão centrada nos entes geométricos – **ponto, segmentos, linhas retas e curvas** –, considerados como os primeiros conceitos teóricos da geométria, tratados na proposição davydoviana, voltar-se-á à análise de tarefas referentes ao estudo de uma especificidade de grandeza, o comprimento. Este, segundo Горбов, Микулина e Савельева (2008), é a primeira especificação da ideia de tamanho.

Em relação ao comprimento, Rosa (2012), baseando-se nos estudos de Freudenthal (1975) e Eves (2007), afirma ser a mais matemática das grandezas e um dos conceitos fundamentais da geometria. Além disso, considerada a unidade básica entre todas as grandezas, pois é referência para estabelecer as unidades para as demais grandezas.

Essa centralidade é o que trata a tarefa (Figura 22) em que o professor dispõe e também coloca à disposição das crianças um *kit* com recortes de papel de tamanhos e cores diferenciados.

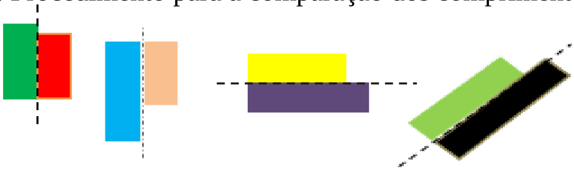
Figura 22: Recortes a serem comparados.



Fonte: Elaboração com base em Горбов; Микулина; Савельева (2008)

Sugere-se comparar esses recortes pelo comprimento, tendo como referência o lado maior (considerado como altura) deles, local que as crianças percorrem com o dedo. Seguidamente, o professor mostra dois recortes, um em cada mão, que se posicionam bem longe um do outro. A questão lançada é: *Como vamos fazê-lo?* As crianças apresentam suas sugestões sobre os procedimentos de aproximação, os recortes. O professor executa vários modos de comparação, até que elas escolham os modos certos e dispensem os errados. Depois, recomenda-se que as crianças selecionem os recortes iguais aos seus e executem a tarefa por completo.

Figura 23: Procedimento para a comparação dos comprimentos.



Fonte: Elaboração com base em Горбов; Микулина; Савельева (2008)

No decorrer deste trabalho, as crianças aprendem, de um lado, o modo correto de comparação dos comprimentos; de outro, a linguagem específica: o recorte verde é maior que o recorte vermelho pelo comprimento da altura, etc. (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008). Por eliminação, chega-se à conclusão de que o recorte preto é o maior em relação à altura.

Observa-se que, além da relação de comparação com base no comprimento, a tarefa induz, implicitamente, ao pensamento geométrico, ao trazer a ideia de altura que, por sua vez, nesse caso, remete à noção de segmento. Parece que a escolha da própria forma do material – recorte de superfícies retangulares – é algo intencional para que as crianças elaborem pensamentos de que o retângulo tem duas dimensões que podem ser medidas (comprimento da altura e comprimento da largura), as quais, mais tarde, serão entendidas, respectivamente, como base e altura. Vale atentar que a preocupação não é nomear os recortes como retângulos, conforme procedem as propostas de ensino tradicionais (DAVÝDOV, 1982), mas inserir os conceitos no contexto de medidas e, consequentemente, de relações.

Este tipo de tarefa proporciona aos alunos não apenas a aprendizagem sobre o cumprimento, mas também o entendimento de determinações externas e internas, produzidas historicamente em relação a uma especificidade conceitual, o tamanho. Por isso, a preocupação com o direcionamento por parte do professor, para que as crianças não fiquem somente no nível das aparências detectadas pelos órgãos dos sentidos. Por exemplo, as crianças observam somente com o olhar os recortes e, por ensaio e erro, indicam qual deles é o maior. Outro destaque, nessa tarefa, é que a ideia de segmento é levada implicitamente com uma pré-finalidade para a elaboração do entendimento de dimensões das figuras planas. Isso se caracteriza quando é solicitado à criança deslocar o dedo pelo comprimento da altura. Ou seja, trata-se de uma noção física de um segmento, pois tem extremidades identificadas. Além disso, como em tarefas anteriores, poderia ser traduzida graficamente com um lápis, tendo como suporte (régua) o próprio recorte.

Esse modo de organizar o ensino propicia que as crianças se apropriem tanto dos conceitos científicos como de um dos modos humanos que os produziram. Sendo assim, não se trata de uma concepção empírica de obtenção/produção do conhecimento, é base para o ensino, como entendem e defendem alguns autores. Entre eles Lorenzato (2006), ao afirmar que a descoberta é fundamental no ensino da matemática para a superação do medo que a referida disciplina inspira nos alunos. E, mais ainda, o autor atribui à descoberta a fonte propulsora de inspiração do gosto pela aprendizagem e o caminho mais eficiente para tal. Portanto, atua tanto na área cognitiva como afetiva. Isso se expressa na seguinte afirmação:

> A descoberta geralmente vem como desfecho do processo de experimentação, de procura, de pesquisa e se expressa por um sorriso que simboliza a alegria de um desafio vencido, de um sucesso alcançado, de um novo conhecimento adquirido; por isso, a descoberta causa, também, um forte reforço à autoimagem. (LORENZATO, 2006, p. 81-82).

Esses pressupostos se contradizem em relação aos defendidos pela Teoria Histórico-Cultural e aos princípios do ensino desenvolvimental. Nessa perspectiva teórica, não é o procedimento em si – no caso indicado por Lorenzato do experimento que leva à descoberta – que produz os sentimentos e os estados emocionais humanos, mas a atividade. Para Davýdov (1999a), o desejo, a vontade e as emoções são produções humanas, portanto históricas, e se inserem na estrutura da atividade, conjuntamente com a necessidade, o motivo, os fins, as condições para atingir os objetivos, as tarefas, as ações e as operações.

Assim sendo, a alegria, a tristeza ou outro sentimento e emoções em relação à aprendizagem da matemática não são consequência de sucesso e insucesso de um desafio no desenvolvimento de experimento e de uma descoberta, como afirma Lorenzato (2006), mas do envolvimento do estudante na atividade de estudo. Mas, para tal, as tarefas de estudo, as ações e as operações são estabelecidas e elaboradas de modo que o estudante esteja em ação investigativa. Isso significa dizer que ele está permanentemente em estado de devir, isto é, perceber-se em constante estágio de possibilidades. Ou, como compreende Vygotski (1993), em processo de constituição da zona de desenvolvimento proximal. Trata-se de um ‘bom ensino’, ou seja, aquele que se adianta para ao desenvolvimento (PUENTES, 2013, p. 177-178).

É somente no âmbito dessa trama teórica que é possível analisar o conjunto de tarefas particulares da proposta davydoviana referentes aos conceitos geométricos. A atenção se volta para a compreensão da assimilação que elas proporcionam aos estudantes. A próxima tarefa estabelece que o professor coloque no quadro duas tiras de papel do mesmo comprimento e proponha aos estudantes que eles as comparem pelo comprimento (Figura 24).

Figura 24: Medidas de figuras com dimensões iguais.

Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

Ao emparelhá-las, as crianças respondem que as tiras são iguais, tanto pelo comprimento da largura quanto da altura. Em seguida o professor pega uma das tiras e corta um pedaço, diminuindo-a pela largura. Por exemplo:

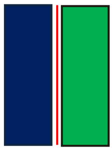
Figura 25: Medida de figuras de mesma altura e base desigual.

Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

A direção, pelo professor, das discussões ocorre a partir da seguinte pergunta: *E agora ela tem o mesmo comprimento que a outra tira que está no quadro?* As respostas das crianças são averiguadas com a aproximação das duas tiras. O mesmo procedimento de ação ocorre no processo de movimento de resolução da tarefa que imprime a operação de, no mínimo duas vezes, diminuição da largura da tira. As crianças emitem suas opiniões e as comprovam a fim de elaborar a síntese: mesmo com os sucessivos cortes, o comprimento da altura da tira permanece o mesmo.

Tal conclusão não significa a finalização da tarefa. Em vez disso, ela se torna condição para a complexificação, própria do processo de apropriação conceitual e do processo de formação do pensamento teórico. Por isso, a atenção se volta à *representação* do resultado. Para tanto, o professor pede para as crianças desenharem o comprimento único para as duas tiras de referência. A pergunta-guia é: *Como é possível fazê-lo?* As crianças podem apresentar suas tentativas, que desencadeiam a discussão entre o grupo, com base em seus argumentos. A participação do professor se torna premente de modo que as crianças concluam que a melhor representação é desenhar um segmento entre as tiras (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА 2008), conforme figura 26.

Figura 26: O segmento como representação do comprimento das tiras.



Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

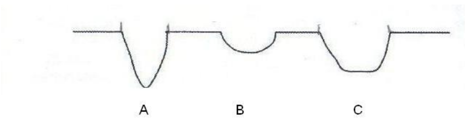
O destaque da presente tarefa é seu objetivo – vinculado à ideia geral definidora da essência dos conceitos matemáticos, a relação entre grandeza – de colocar os estudantes em ação investigativa para criar a necessidade de representação do resultado da comparação. No seu desenvolvimento, ela se revela como justificativa da aparente quebra de sequência das tarefas anteriores que tratavam dos entes primitivos geométricos (linha, ponto e segmento), em vez da ideia de comparação, que até então era o foco. As referidas tarefas, portanto, se revestiram de importância, pois o conceito de segmento, delas decorrentes, passa a assumir, na presente, uma nova significação: a de elemento de representação.

No ato de adotá-lo como instrumento de representação, o segmento agrega outra abstração essencial, isto é, a propriedade de figura com uma só dimensão. Isso se revela sutilmente, na tarefa (Figura 26), no momento de traçá-lo entre as duas tiras, assumidas como possuidoras, no mínimo, das dimensões altura e largura (base) dada a centralidade, até então, nos seus comprimentos. Por sua vez, ao se traçar o segmento com um traço de lápis, explicita-se apenas um comprimento, da sua extensão, o que produz a ideia de sua unidimensionalidade, pois não faz sentido cogitar que nele exista uma largura e profundidade, como nas tiras.

Sendo assim, a tarefa referente à representação da medida de comprimento, por meio de segmento, se constitui em meio para pensar sobre outra noção conceitual: a dimensão. Portanto, conduz à apropriação das bases essenciais como aquelas expostas por Aleksandrov (1976) de que uma figura geométrica é um conceito mais geral, pois é possível abstrair também a extensão espacial. Assim, uma superfície tem duas dimensões, uma linha somente uma dimensão, e um ponto nenhuma.

Na sequência, apresentar-se-á uma nova tarefa que introduz a ideia de uma nova dimensão: a profundidade. O professor relata aos estudantes que alguém fez três buracos e os desenha num esquema, no quadro (Figura 27). Posteriormente, sugere para que eles comparem os tamanhos dos buracos:

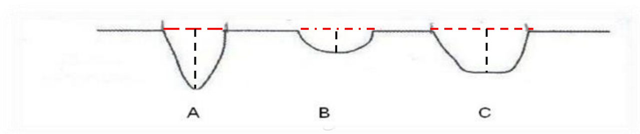
Figura 27: Comparação de profundidades.



Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

O esquema é propício para identificar dois tipos de extensões das regiões curvas: a profundidade (comprimento vertical) e a largura (comprimento horizontal). As crianças são convidadas para, espontaneamente, irem ao quadro representar esses comprimentos por meio de segmentos com cores diferentes para profundidade e largura (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008), conforme figura 28.

Figura 28: Medição de profundidades e larguras por meio de segmentos.



Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

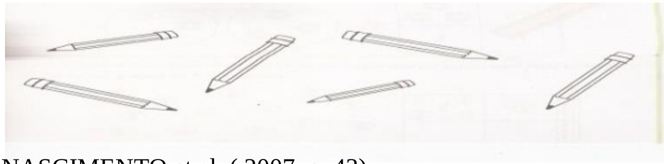
Posteriormente, faz-se a comparação dos buracos pela profundidade e pela largura. As crianças perceberão que, pelo desenho, ficam mais evidentes as diferenças entre as três profundidades do que entre as suas larguras. Ou seja, A é mais profundo do que B e C, assim como C do que B. Enquanto que os segmentos que representam a largura permitem fazer comparação apenas aproximadamente.

Verifica-se na organização do ensino, seguindo as proposições davydovianas, que a prioridade não está na (re)descoberta, na aquisição de habilidades, nas capacidades, na solução rápida e prazerosa dos problemas matemáticos. Em vez disso, volta-se para algo mais abrangente: o desenvolvimento das funções psíquicas superiores, que requerem a aquisição de ações num movimento dialético do pensamento de transformações mútuas externo-interna. Na subjacência desse processo, estão as questões essenciais dos conceitos teóricos que propiciam o movimento de uma série de funções – entre elas as habilidades e capacidades – ainda não desenvolvidas no estudante (VYGOTSKI, 1993). No entanto, importa salientar que a boa organização do ensino não é condição suficiente, nem necessária, para atingir o desenvolvimento mental das crianças, mas sim se deve considerar um elemento fundamental no processo de ensino: a boa comunicação entre o professor e a criança e, desta, com seus colegas. Nesse sentido, Puentes (2013, p.184) afirma:

> O desenvolvimento na criança de determinadas funções mentais em sala de aula depende da comunicação com os adultos e com os colegas, da atividade conjunta e da natureza, do conteúdo, do tipo de estrutura e da especificidade dessa atividade.

Porém, há modos de organização do processo e práticas educativas que não possibilitam à criança atingir um estágio de desenvolvimento que lhe permite o estabelecimento de relações pertinentes ao modo de sociabilidade existente e exigente em nosso tempo, isto é, em nível de pensamento teórico (DAVÝDOV, 1982). Um exemplo de tal fragilidade é a proposição angolana de Nascimento et al. (2007), ao proporem, no estudo do comprimento, que as crianças apenas pintem de vermelho os lápis de mesmo comprimento (Figura 29). Portanto, não orienta para as relações de comparação, suas representações e nexos conceituais, bastando somente a observação por meio de um dos órgãos do sentido, a visão, e tem como finalidade apenas a identificação com teor eminentemente empírico dos lápis idênticos.

Figura 29: Proposição que não contempla os princípios davydovianos.



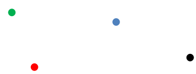
Fonte: NASCIMENTO et al. (2007, p. 43)

3.2.2 Linhas fechadas e abertas

A próxima tarefa retoma o estudo de linhas fechadas e abertas tratado anteriormente, relativo, principalmente, às figuras 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21. Porém, não se direciona exclusivamente aos entes geométricos em si, mas, a partir da conexão entre eles, serão introduzidas novas significações às linhas fechadas, sejam elas quebradas ou curvas (ROSA, 2012).

Para o início da ação investigativa, o professor marca no quadro quatro pontos de diferentes cores, de modo que três deles não fiquem em linha reta. De igual modo, as crianças marcam os pontos nos seus cadernos, de acordo com o modelo no quadro (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА 2008), situação similar à figura 30.

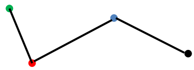
Figura 30: Linhas quebradas.



Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

Em seguida, unem-se os pontos por meio dos segmentos, na ordem dada pelo professor, por exemplo: o ponto verde com o vermelho, este com o azul e, finalmente, ao preto. Como consequência, surge a linha composta de segmentos, porém não é reta. Pode ser traçada com uma linha reta, entre dois pontos, porém como não estão alinhadas, elas se quebram nesses lugares (Figura 31). O professor acrescenta: uma linha desse tipo chama-se **linha quebrada** ou, simplesmente, **quebrada**.

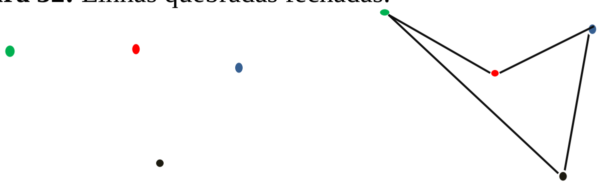
Figura 31: Formação de linhas quebradas.



Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

Na sequência, outra tarefa é proposta com a característica idêntica à anterior. No entanto, o objetivo da ação investigativa traz um novo componente conceitual: a construção de uma linha fechada. O professor coloca novamente quatro pontos de diferentes cores no quadro e orienta as crianças a copiarem isso em seus cadernos. Em seguida, elas devem unir os pontos de acordo com a ordem indicada, incluindo aqueles que de início foram considerados como os extremos. Por exemplo, o ponto verde com o vermelho, este ao azul, que é unido ao preto e, finalmente, as extremidades verdes e pretas. Deste movimento obtém-se uma linha quebrada que não tem começo e fim especificados (Figura 32). Compete ao professor dizer que esse tipo denomina-se **fechada** (ГОРБОВ; МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008).

Figura 32: Linhas quebradas fechadas.



Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

As tarefas correspondentes às figuras 31 e 32 trazem um novo conteúdo pré-anunciativo para novos conceitos, quais sejam: figuras planas. Segundo Rosa (2012, p. 95), o conceito de linha quebrada fechada, em formação nessas duas tarefas, no decorrer do processo escolar, generaliza-se, independentemente da quantidade de segmentos que compõem a linha. Porém, receberão denominações diferentes: com três segmentos: será um triângulo; com quatro, um quadrilátero; cinco, um pentágono e, assim sucessivamente.

Para finalizar esse conjunto de tarefas referentes ao conceito de linhas fechadas, apresentar-se-á uma que apresenta características diferentes das duas últimas (Figuras 31 e 32). A diferença cinge-se em seu objetivo que é determinar uma linha fechada não quebrada. Nela, é previsto que o professor desenhe no quadro dois pontos e as crianças façam o mesmo em seus cadernos. A indicação/orientação é que elas unam os pontos com duas linhas. O debate necessário para que se atinja a finalidade prevista para a situação apresentada é de tal modo, que leva à conclusão de que se trata de uma linha curva fechada (Figura 33).

Figura 33: Linha curva fechada, a partir de dois pontos.

Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

Vale lembrar que todas estas tarefas são realizadas de forma ativa, participativa e num ambiente colaborativo entre o professor e o aluno. O objetivo primordial é a elevação do nível de compreensão dos alunos com base em questões externas e internas que envolvem o estudo das linhas fechadas e abertas, bem como outras determinações correlacionadas ao estudo conceitual da geometria.

No entanto, compreender como se resolve um problema nem sempre significa saber resolvê-lo. Por isso, só é possível falar sobre os conhecimentos dos alunos à medida que estes sejam capazes de realizar determinadas ações fundamentadas em pensamento conceitual (TALIZINA, 1987, p. 14 apud ROSA, 2012, p. 96).

3.2.3 Limites das figuras

Nas tarefas a seguir, far-se-á referência ao estudo de linhas fechadas. Porém, estas trazem novos componentes conceituais: limite das figuras, pontos e regiões que se constituem em antecipação para o estudo da grandeza área, cuja discussão acontecerá mais adiante.

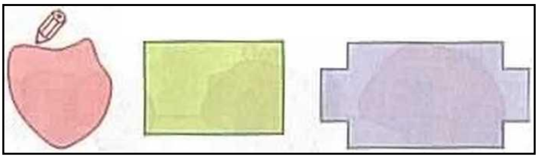
Na tarefa introdutória da temática em foco, as crianças são motivadas a fazerem várias figuras com o auxílio de um arame macio e, a partir delas, a desenharem as linhas fechadas que as limitam, com a condição de que não passem pelo ponto dado. A análise, com base nas variantes de posição da linha e do ponto, possibilita a observação de que em algumas figuras, o ponto ficou no interior e, em outras, na região externa (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008). Um exemplo dessa representação é a figura 34:

Figura 34: Curva fechada como delimitação da região interior e exterior.

Fonte: ГРЕМАНС, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

Na sequência, uma nova tarefa é investigada, e tem como objetivo levar os estudantes à identificação de um tipo de linha. O professor apresenta alguns recortes de papel com cores e formas diferentes (Figura 35). Posteriormente, orienta os alunos para que estes os contornem e menciona o tipo de linha. No decorrer da análise, conclui-se que as linhas são fechadas, sendo que a primeira é uma linha curva fechada e as duas últimas são linhas quebradas fechadas.

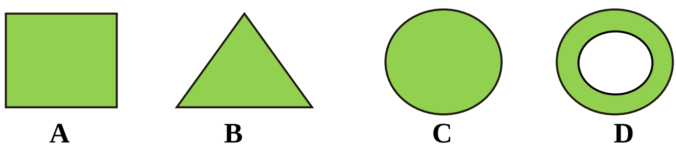
Figura 35: Linhas fechadas distintas.



Fonte: ДАВЫДОВА et al.(2012, p. 15)

Para a tarefa subsequente, as crianças recebem um kit contendo recortes de papel grosso (Figura 36). Elas precisam contornar cada figura e, em seguida, indicar o tipo de linha obtida (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Figura 36: Kit de recortes de papel grosso



Fonte: ГРЕМАНС, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

Essa tarefa enfatiza o contorno das figuras de forma articulada à preocupação, para que os estudantes voltem a diferenciar os tipos de linhas que, por sua vez, se atrelam à dupla significação limitadora e definidora de uma determinada forma geométrica plana. Nesse contexto de interconexão conceitual, ocorre a probabilidade de indicação por

parte das crianças, depois que estas contornaram os recortes e obtiveram – por exemplo, da figura A – um quadrado. No entanto, o professor nega tal afirmação, mas sugere que digam o nome da linha e não da figura.
Logo, elas concluem que de A se obtém uma linha quebrada fechada composta por quatro (4) segmentos (Figura 37). Observa-se que a intervenção do professor é proposital para evitar que as crianças se prendam às percepções empíricas e as adotem como referência para a elaboração do conceito das figuras planas. Implicitamente, a tarefa traz uma das ideias essenciais do conceito de quadrado, isto é, como uma região interna delimitada por uma linha quebrada constituída de quatro segmentos.

Figura 37: Linha quebrada fechada composta por quatro segmentos.

Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

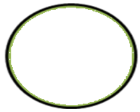
O recorte referente à figura B (Figura 38) é identificado pelas crianças como uma linha quebrada fechada composta por três segmentos. Tal conclusão decorre do questionamento do professor: *Que tipo de linha forma o recorte da figura B?* Assim, as crianças passam a apreender as primeiras ideias teóricas de triângulo como determinado por três segmentos que constituem uma linha curva fechada.

Figura 38: Linha quebrada fechada composta por três segmentos.

Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

A análise da figura C gera a apreensão, por parte dos estudantes, de que o contorno da figura C representa uma linha curva fechada. E o professor acrescenta: denominada de circunferência (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Figura 39: Circunferência como linha curva fechada.



Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

Por fim, a referência é o contorno da figura D (Figura 40), para a qual o professor dirige a atenção da criança a fim de identificarem as duas circunferências. Além disso, informa que podem chamá-las de anel (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Figura 40: Anel como determinação de duas circunferências.

Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

Vale lembrar que essas referências aos conceitos de quadrado, triângulo, círculo, circunferência, entre outros, dizem respeito às suas primeiras significações teóricas. As demais se apresentarão no decorrer dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Isso porque uma concepção teórica dessas figuras geométricas inclui outros conceitos (número de pontos e segmentos, ângulo, condição ou não de paralelismo e perpendicularismo, entre outros).

Por exemplo, Горбов, Микулина e Савельева (2008) dizem que a diferenciação entre círculo e circunferência ocorrerá com tarefas próprias que ainda não condizem com as possibilidades pertinentes ao primeiro ano. Davýdov entende que tais conceitos se constituem de um nível elevado de articulações, que estão além das capacidades já adquiridas pelas crianças dessa fase escolar. Por isso, requer uma organização sequencial de tarefas que, aos poucos, desenvolvam as condições necessárias para as devidas apropriações. Para Davýdov (1982, p. 303, grifo do autor), uma definição deve expressar “a causa do s*urgimento* da coisa dada e o *método* de sua estruturação". Ele exemplifica essa articulação – e, ao mesmo tempo, expõe sua concordância do que seja uma base teórica do conceito de círculo – com a definição dada por Spinoza: “O círculo tem que ser definido assim: é uma figura descrita por uma linha qualquer, em que um dos extremos está fixo e o outro é móvel" (SPINOZA apud DAVÝDOV, 1982, p. 83).

[298a, pág. 352]. Enfatiza que tal definição não só descreve a essência do conceito e a descrição do seu traçado, como também do seu método que requer um instrumento de trabalho, o compasso. Isso significa um caráter ativo do estudante, pois a forma do referido conceito requer a idealização literal de todo esquema de uso do instrumento, ou seja, da atividade estruturadora do objeto que revela as suas características substanciais e gerais (DAVÝDOV, 1982).

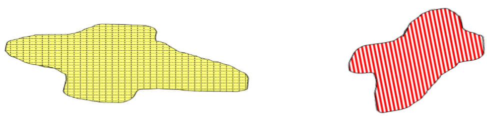
Portanto, essas últimas tarefas analisadas direcionam para a análise dos aspectos relacionados com o limite das figuras, porém trazem elementos que constituirão, aos poucos, um complexo sistema de conceitos. Além de aglutinar seus peculiares conceitos aos desenvolvidos anteriormente, formam um todo, que são base para novas apropriações.

3.2.4 Área

Volta-se a reafirmar que a organização do ensino de Matemática adotada por Davýdov tem como foco as relações entre grandezas que produzem uma concepção teórica de número real. Assim, o conceito de área se apresenta como uma grandeza passível de medição, porém ainda sem pretensão imediata de atingir um modelo ou fórmula que, como dito anteriormente, ocorrerá em anos subsequentes. Nesta tarefa, retomam-se as ideias sobre tamanho com acréscimo de mais um parâmetro de comparação, a área de regiões delimitadas por linhas fechadas, sejam elas quebradas ou curvas (ROSA, 2012). Isso não significa que o conteúdo em destaque seja o cálculo da área com a adoção de unidade de medida. Em vez disso, a questão conceitual em destaque é a identificação dos comprimentos, por exemplo, da largura e da altura, principalmente de figuras inicialmente irregulares.

Para a ação investigativa, as crianças têm como referência a análise de duas figuras (41) de mesmo formato, bastante irregulares, de tal modo que fica complexa a identificação da altura, da largura e do comprimento e mesmo da superfície (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

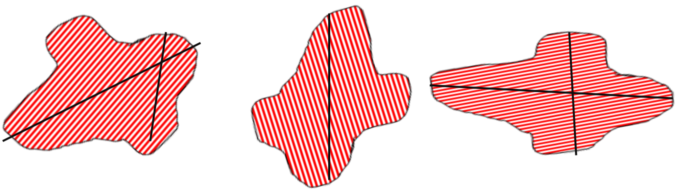
Figura 41: Determinação de tamanho de figuras com superfícies irregulares.



Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

O professor sugere comparar os recortes pelos diferentes parâmetros. Detecta-se que as duas figuras são iguais pela forma, porém diferentes em relação à cor. Mas a questão a discutir se refere ao tamanho, que não é tão simples de identificar – se iguais ou diferentes. As crianças formulam e apresentam suas hipóteses, por exemplo, a figura amarela é maior que a vermelha. O professor concorda, porém as instiga a desenvolver processos de demonstração. Por isso, solicita que especifiquem o tipo de tamanho a que se referem. Ele problematiza a situação ao girar os recortes – por exemplo, a vermelha (Figura 42) – de modo a não lhes permitir a identificação, com facilidade, da posição de referência para a indicação do comprimento da altura e da largura, com base em segmentos (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

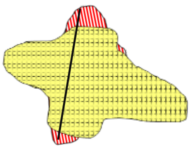
Figuras 42: Movimento giratório dos recortes.



Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

Num segundo momento, o professor sobrepõe os dois recortes (Figura 43) de modo que se torne perceptível que, à primeira vista, o comprimento da altura da figura vermelha é maior que o da amarela (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

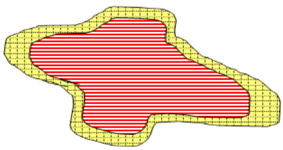
Figura 43: Sobreposição dos recortes que expressa a maior altura em relação à posição dada inicialmente.



Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

A condução das discussões pelo professor ocorre de maneira tal, que leva as crianças a apresentarem uma contestação referente à posição dos recortes. Logo, o professor sugere que elas mesmas coloquem as figuras, a seus modos, para identificarem se alguma delas é maior. Uma conclusão esperada de demonstração é colocar uma figura sobre a outra em mesma posição. Nesse movimento (Figura 44), percebe-se que a vermelha fica completamente dentro da amarela, que é maior. O professor concorda com esta análise, porque os recortes são comparados pela área e não por algum comprimento isolado (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008). Observa-se que as tarefas 40 a 44 dão início à formação do pensamento conceitual referente à área. Volta-se a salientar que ainda não está em questão o cálculo de área, tendo como referência uma medida padrão quadrada, um estágio superior do processo de formação do pensamento conceitual que ocorrerá mais tarde. O destaque nessas tarefas iniciais é dado para a ideia de área como relacionada ao tamanho da superfície. Portanto, a preocupação é com a grandeza, área, como algo que pode ser medido.

Figura 44: Sobreposição indicativa do maior e menor recorte.



Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

Uma nova tarefa é introduzida. Nela, sugere-se a comparação, pela área, de dois recortes de superfície retangular, com base no comprimento da altura e da largura. Em cada caso, pede-se para que as crianças fiquem atentas ao modo de comparação. Para tanto, que emparelhem uma figura ao lado da outra, mantendo o foco no comprimento da largura e da altura (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Surge, então, a demonstração peculiar de identificação de qual superfície retangular – entre duas – é a maior, menor ou se ambas são iguais, sem recorrer ao procedimento da sobreposição (Figura 45).

As crianças emparelham as peças (vermelha e azul) tomando como referência o comprimento da altura e concluem que são iguais nessa dimensão. Em seguida, elas adotam o mesmo procedimento em relação ao comprimento da largura, o que possibilita identificar que na largura as figuras são desiguais. Finalmente, expressam a conclusão com base nos resultados anteriores, ou seja: se ambas têm o mesmo comprimento da altura, mas a vermelha apresenta uma medida maior na largura, logo a medida da sua superfície, área, também é maior. Por consequência, a figura azul é menor.

Figura 45: Comparação de superfícies retangulares a partir das relações do comprimento da altura e da largura.

Fonte: Adaptação de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

Uma nova tarefa, cujo objetivo é a comparação entre dois recortes iguais de superfície quadrangular, é proposta. De forma visível aos alunos, o professor corta uma parte próximo à extremidade da região de um deles (Figura 46). As discussões se dirigem para a identificação de que nem todas as dimensões se alteraram, por exemplo: o comprimento da altura e da largura. A conclusão principal é que, mesmo assim, a área ficou menor (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Figura 46: Diminuição de área com a conservação do comprimento da altura e da largura.

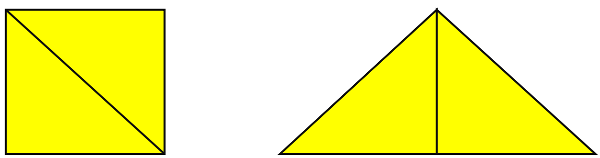
Fonte: Adaptado de Rosa (2012, p. 104).

Segundo Rosa (2012), a questão central nessa tarefa é que a alteração da grandeza área não interfere nas duas outras, o comprimento da largura e da altura. Essa coexistência – variação e conservação das grandezas – se explica pela possibilidade de transformação do real, objetos (recortes). Porém, isso poderia não acontecer se o sistema de tarefas não focasse as propriedades dos objetos com relativa autonomia, mas somente na sua imediatez. Sobre esta base, a autora busca subsídios em Galperin, que entende tal comparação como expressão do "princípio da conservação de quantidade" (GALPERIN, 1987, p. 138).

Subsequentemente, novas tarefas são introduzidas. A primeira apresenta características idênticas à anterior, apesar de tratar somente do recorte de superfície quadrada que, no movimento da ação investigativa, os estudantes transformarão em recortes de superfícies triangulares. No entanto, Горбов, Микулина e Савельева (2008) alertam que elas apresentam novos elementos de apropriação durante a análise. Para tanto, é possível que surjam dificuldades, porém nada que seja insuperável, porque as crianças já adquiriram a noção conceitual de área. O importante é que o professor propicie um ambiente colaborativo e participativo para as crianças.

A análise tem como referência uma peça de superfície quadrada que está com as crianças e com o professor. Marca-se no quadro a letra T como sendo a sua área. Em seguida, recorta-se a peça na diagonal, obtendo-se duas superfícies triangulares que, posteriormente, são reorganizadas para se transformarem em uma peça de superfície triangular (Figura 47). Na sequência, o professor questiona: *E agora, como temos que marcar a área da figura?* A conclusão é que os recortes com superfícies triangulares obtidos, quando juntos, permanecem com a área T. Isso acontece pelo destaque, no processo de análise, dado à figura anterior que foi cortada, recomposta em outra forma, mas nada se adicionou ou subtraiu das duas partes. Consequentemente, a figura nova tem a mesma área, diferido da original apenas pela forma.

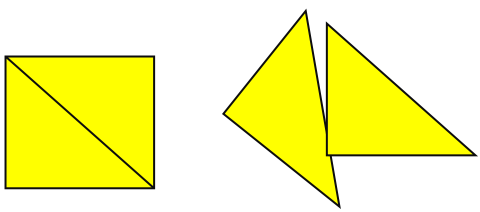
Figura 47: Transformação de uma superfície quadrada em triangular.



Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

Na outra tarefa (Figura 48), propõe-se novamente que se modifique a forma da figura, isto é, que ocorra uma nova disposição das duas peças. Além disso, também foi pedido para indicarem com um gesto sua área, de modo a revelar que aquela área é a mesma de antes, ou seja, T (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Figura 48: Transformação da figura com permanência da área.

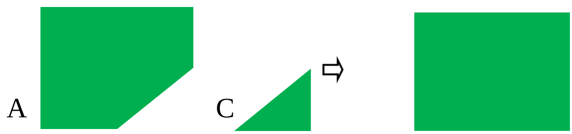


Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

Esse tipo de tarefa prenuciou um novo objetivo, que será atingido nas tarefas referentes às figuras 49 e 50, qual seja: possibilitar que alunos desenvolvam a ideia de que as diversas variações da figura não determinaram alterações na medida da área das novas superfícies formadas, o que Горбов et al. (2008) denominam de 'permanência de valores'.

Para tal finalidade, o professor mostra um recorte de superfície quadrada. Em seguida, em comum acordo com as crianças, escolhe-se a letra para marcar a medida da área A. Corta-se um canto da figura e separa-se a nova peça, cuja área deve ser marcada com outra letra (C, por exemplo). Posteriormente, o professor coloca novamente o canto cortado no seu lugar (Figura 49), voltando ao valor de A. A evidência necessária é para o movimento assim caracterizado: uma dada superfície inicial, ao sofrer a retirada de uma parte, diminui sua área, posteriormente, se recolocada, retoma a medida original. (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008). Portanto, esta tarefa trata da significação algébrica comentada anteriormente.

Figura 49: Permanência de valores de área.



Fonte: Adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

No quadro, o professor faz o registro do movimento dos recortes da seguinte forma: primeiro **A → C** e, posteriormente, **A→C→A**. Trata-se, pois, de um modo de representação para o qual se adotam as flechas indicativas dos estágios de trasnformação das superfícies. Ou seja, a ação toma forma de representação. Conforme Davídov (1988), na base da formação do pensamento teórico está a reflexão, a análise e a experiência mental, pelas quais o homem constantemente examina tanto os aspectos da "atividade objetal-prática", como de suas formas universais de representação.

O professor faz uma nova alteração (Figura 50) ao anexar o recorte triangular numa outra posição em A. Pergunta: *Qual é a área que temos agora?* Isso pode deixar alguns alunos confusos, o que se constitui em possibilidade de novos questionamentos e orientações para que eles percebam que a situação é similar à anterior. Enfim, que a área é a mesma que a do recorte inicial, apesar de sofrer alterações em relação à forma (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Figura 50: Transformação das figuras com permanência de valores.

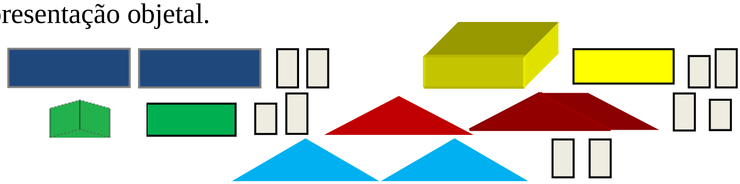
Fonte: Adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

3.2.5. Volume e capacidade

A ideia de tamanho, medida, continua sendo a base das tarefas particulares no processo de as crianças se apropriarem dos conceitos científicos e desenvolverem o pensamento teórico matemático. Ao detalhamento da ideia de tamanho, revela-se um parâmetro novo de comparação dos objetos, o volume. Isso significa que tal conceito vem carregando tanto a significação geométrica quanto a aritmética e algébrica. É no estudo dessa grandeza que a representação dos resultados começa a ser evidenciada, organizada, sistematizada. As crianças começam a fixar as relações das grandezas com a ajuda de tiras de papel, o que lhes permite dar o primeiro passo para atingir o conceito abstrato do referido conceito (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

O início deste estudo traz a premissa de articulação entre os conceitos anteriormente desenvolvidos e as possibilidades de surgimento de outro, um novo. Por isso, foca-se, num primeiro momento, na diferença entre as figuras planas e os corpos. Para tal propósito, cada criança tem três tiras iguais quanto à cor, duas das quais têm o mesmo comprimento, e a outra é mais curta. O professor apresenta a elas duas figuras de cada vez (Figura 51), para que comparem e expressem o resultado da relação igualdade ou desigualdade. Inicialmente, a tarefa é desenvolvida em silêncio. Ao apresentar as duas figuras de superfícies quadradas azuis da figura 51, as crianças mostram as duas tiras de mesmo tamanho, pois elas têm a mesma cor, forma, tamanho e espessura. O mesmo ocorre com o último par de peças – superfícies triangulares azuis. O contrário ocorrerá com os outros três pares, em que as crianças mostrarão uma tira maior e a outra menor. Isso porque as figuras apresentam algumas características iguais, mas se diferem explicitamente pela dimensionalidade, uma tem duas dimensões e a outra três. Ou, uma é grossa e a outra é fina (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Figura 51: Introdução da ideia de volume em concomitância com a representação objetal.



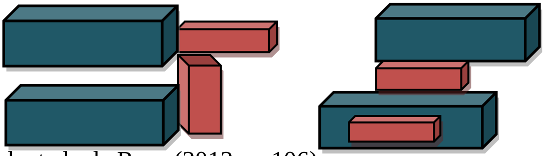
Fonte: Adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

Durante as manipulações de objetos pelo professor, é possível que algumas crianças não percebam o movimento na comparação das figuras com espessuras diferentes e mostrem tiras de papéis iguais. Por isso, o professor conduz a discussão de modo que as crianças compreendam que as figuras que não são planas, são chamadas de corpos, são prismas. Também podem discutir outras formas com nomes especiais como: cone, cubo, esfera, etc., objetos que na vida real apresentam-se como corpos. Portanto, não existe a necessidade de as crianças lembrarem os nomes dos corpos, porque o objetivo neste momento é formar a ideia de corpo como tal, ligada ao conceito do volume (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Se a tarefa anterior provocou o surgimento da ideia de corpo, na presente (Figura 52) introduzirá o conceito de volume dele. O professor apresenta duas caixas em forma de paralelepípedo, de modo que uma delas cabe dentro da outra. A comparação se dará pelo tamanho que, dependendo da posição ou referência (faces, arestas), a mesma caixa em relação à outra, pode ser: mais alta ou mais baixa, mais comprida ou mais curta e mais larga ou mais estreita. Isso requer a aproximação, emparelhamento, em conformidade com uma determinada grandeza preestabelecida. Observa-se que a tarefa cria perturbações, pois a aparência é de que as caixas têm tamanhos diferentes. Porém, nas comparações realizadas, elas não apresentam resultado único, tudo irá depender de como as caixas serão colocadas uma contra a outra. Ou seja, a caixa menor pode ser maior que a maior se a comparação ocorrer pelo seu comprimento com a largura da outra (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Portanto, cria-se a necessidade de as crianças buscarem um modo de comparar as caixas em sua totalidade e não apenas pelas suas dimensões separadas. Tal possibilidade é colocar uma caixa dentro da outra, isto é, a pequena dentro da maior, uma vez que a mesma cabe por inteiro e ainda sobra espaço. Nesse momento, o professor indica que esse tamanho geral das caixas é denominado de 'volume' (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

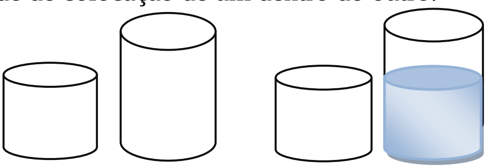
Figura 52: Modo de comparação da caixa e a ideia de volume.



Fonte: Adaptada de Rosa (2012, p. 106)

Na sequência, o professor apresenta dois recipientes cilíndricos que se diferem somente pela altura (Figura 53). A comparação tem como referência o volume e a indicação do resultado com a ajuda das tiras. Tendo em conta que as crianças percebem claramente que o volume do recipiente mais alto é maior, dá-se espaço a elas para verificarem a impossibilidade de o recipiente menor (mais baixo) ser colocado dentro do recipiente maior (mais alto), pois ambos têm bases iguais. No decorrer da análise, concluem que existe a possibilidade de encherem com água, grãos ou com areia o recipiente menor e, depois, transferir o conteúdo para o recipiente mais alto, uma vez que nele sobrará espaço (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Figura 53: Comparação dos volumes de recipientes com impossibilidade de colocação de um dentro do outro.

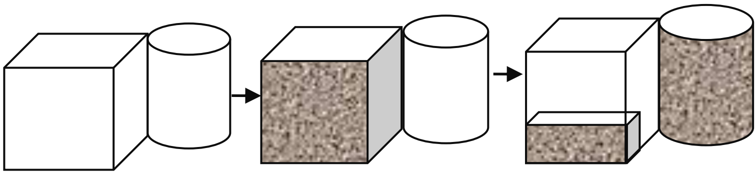


Fonte: GPEMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

Nesse caso, surge uma nova nomenclatura como decorrente da possibilidade de um recipiente absorver maior ou menor quantidade de líquido. Desse modo, o professor assim se expresserá: a **capacidade** do recipiente mais alto é maior que a do mais baixo. Por consequência, o **volume** de líquido do recipiente mais baixo, que ocupa todo o seu espaço, não encherá o mais alto (ROSA, 2012).

A tarefa seguinte (Figura 54) se assemelha à anterior em termos procedimentais de resolução. A diferença está na forma dos recipientes, de modo que isso torna impossível a identificação, com um simples olhar, do maior volume. Tal impedimento, no entanto, não é superado ao se reportar ao desenvolvimento da tarefa precedente na qual se utilizou como medida o líquido ou outro material, que se transfere de um ao outro recipiente. Mas a tarefa apresenta outra sutileza, pois a situação se inverte em relação à tarefa anterior, uma vez que o ato de transferência do líquido se dá do maior recipiente – completamente cheio – para o menor, o que implica em sobras de líquido (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Figura 54: Relação da capacidade de volume em recipiente de formas diferentes.



Fonte: Adaptação de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

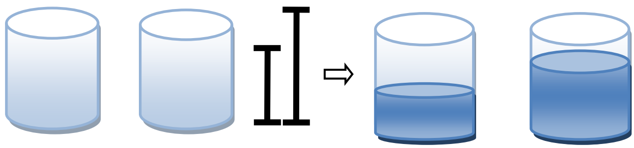
As condições dadas pela tarefa propícia a indicação pelos estudantes de que a capacidade do recipiente primástico é maior que o do cilíndrico e, consequentemente, absorve maior volume de líquido.

Novamente, vale o destaque para o aspecto pedagógico, isto é, para o modo de organização do ensino. Observa-se que uma tarefa em relação à subsequente tem sempre uma pecularιedade, ou seja, elas se aproximam e ao mesmto tempo oferecem as condições para avanços em termos de desenvolvimento do pensamento conceitual. Assim, na presente tarefa, referente à figura 54, esta está vinculada à anterior pelo objeto conceitual, capacidade e volume, e pelo procedimento de execução: identificação e demonstração do maior ou menor. No entanto, impõe o desafio de mudança da forma do recipiente e o movimento contrário de transferência do líquido do maior para o menor.

Essas interfaces caracterizam a introdução de novas tarefas. Por exemplo, a figura 55, nova referência para a ação investigativa, apresenta a mesma base, quanto ao conteúdo em estudo, mas traz algo diferente em relação à análise. Isso porque resgata o estudo de segmentos, abordado nas seções anteriores, passando a assumir uma nova função e significação: elemento de representação no ato de comparação dos recipientes (com maior e menor volume ou capacidade).

Na mesa do professor, estão dois recipientes iguais e, no quadro, o desenho de dois segmentos de comprimentos diferentes (Figura 55). O professor explica aos alunos, que os segmentos representam o volume do líquido que devem colocar dentro dos recipientes. Também aponta o menor segmento e diz que ele é o indicador do volume de líquido do primeiro recipiente e, posteriormente, coloca-se o líquido no recipiente maior, que corresponde ao outro segmento (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Figura 55: Medida de volume, a partir da indicação da representação por segmentos.



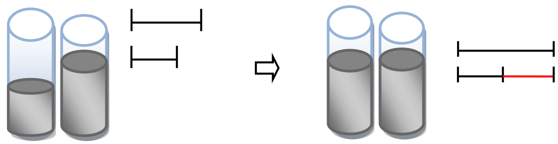
Fonte: GPMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

Para cumprir essas orientações, no decorrer da análise, a tarefa estabelece que dois estudantes, um em seguida do outro, dirijam-se até a mesa e coloquem o líquido nos recipientes conforme estabelecem os segmentos. Enquanto isso, os demais observam atentamente se a manipulação está sendo feita de forma adequada. Nesse desenvolvimento, eles percebem que o importante não é a quantidade de líquido colocado em cada um dos recipientes, mas a condição dada pelo comprimento dos dois segmentos: que o volume do líquido, no primeiro recipiente, seja menor que o no segundo.

Observa-se que esta tarefa coloca o pensamento dos estudantes em movimento, não mais dado diretamente, mas pela situação em si de lidar com líquido e os recipientes, a fim de elaborar conclusões sobre o maior ou menor volume e, por extensão, a capacidade. Agora, para atingir tal finalidade, é apresentado um elemento mediador eminentemente geométrico – os segmentos –, o que dá um teor abstrato na orientação da execução da tarefa. Ou seja, a essência do desenvolvimento da tarefa é determinada pelo comprimento dos segmentos.

Esse mesmo teor configura a tarefa correpondente à figura 56, cuja especificidade está no objetivo de igualar valores. Outra vez o professor coloca dois recipientes iguais, mas com diferente volume de líquido. Os estudantes notam tal diferença e a representam por meio de segmentos, tanto no quadro, como nos seus cadernos (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008). Feita a representação, o professor explica aos alunos que se faz necessário fazer com que o recipiente de menor volume de líquido se iguale ao maior. As crianças dizem que basta adicionar uma quantidade de líquido, o que é executado. Mas a questão primordial da tarefa é a representação dessa operação no segmento. Há, pois, um vínculo entre o ato de lidar com o líquido e o do uso dos segmentos. Para tanto, há uma referência, a maior, tanto em relação ao recipiente quanto em relação ao segmento, que não sofre ação direta na grandeza do volume (recipiente) como no comprimento (segmento). Por sua vez, essas mesmas grandezas se alteram ao se considerar a menor, de modo que se estabeleça uma igualdade em relação às duas situações. Isso significa que o aumento do volume acarreta na necessidade de acréscimo no segmento. Porém, não é algo aleatório nem indicado verbalmente pelo professor ou algum estudante, mas determinado pelo segmento de referência.

Figura 56: Movimento de igualar o volume pelo aumento de uma situação.

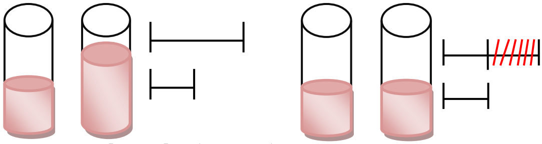


Fonte: GPMAHC, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

A percepção dessa determinação pelos estudantes só ocorre por causa do modo de organização do ensino, que os levam às apropriações necessárias. Aquilo que em uma determinada tarefa era ação para apropriação de uma determinada ideia conceitual, em outra se constitui em operação para novas elaborações (LEONTIEV, 1978). Esse processo transformativo faz com que o teor geométrico de segmento e volume cada vez mais incorpore ou conclame por significado aritmético. Há um prenúncio para buscar formas de dizer o quanto aumenta ou diminui e as operações necessárias, ou seja, número e as operações de adição e subtração.

Esta última operação é prenunciada na próxima tarefa (Figura 57), cujo objetivo se diferencia da anterior apenas por prever que se iguale o valor maior ao menor. Desse modo, implicará na diminuição do líquido ou material do recipiente com maior volume; o mesmo ocorrerá em relação ao segmento (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Figura 57: Movimento de igualar o volume pela diminuição de uma situação.



Fonte: ГРЕМАНС, adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

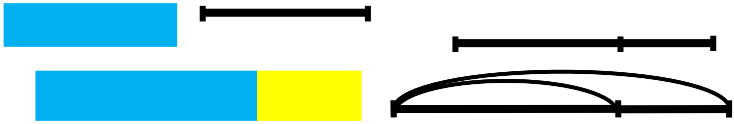
Para a análise da tarefa, recomenda-se diminuir do valor maior, o que não deve ser feito de qualquer forma, mas por meio da subtração ou eliminação da diferença. No segmento maior, a demonstração será feita com riscos de uma parte do segmento maior até atingir o comprimento do menor (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Importa salientar que a demostração das relações existentes entre os volumes e capacidade, por meio de tiras e segmentos, marca o início da modelação das relações entre grandezas, que, gradativamente, serão reproduzidas na forma gráfica e literal (ROSA, 2012). Tais relações se convertem em "objeto das ações" das crianças e suas leis em objeto de apropriação (GALPERIN; ZAPORÓZHETS; ELKONIN, 1987, p. 311 apud ROSA, 2012, p. 107).

As articulações promovidas pelas tarefas que levam à confluência de significações geométricas e aritméticas levam, mais tarde, as crianças a acrescer outro elemento geométrico na representação de resultados: a sobreposição de arcos (linha curva) ao segmento de reta.

Esse elemento traduz um movimento em duplo sentido gerador de uma concepção das operações de adição e subtração que traz como fundamento a relação parte/todo. A título de ilustração do papel do arco como elemento de representação, apresentar-se-á uma tarefa particular, (Figura 58), que tem por base a grandeza área. O professor mostra um recorte (superfície azul da figura 58) e desenha no quadro um segmento que, em seguida, é aumentando. Algumas crianças, mais atentas ao movimento feito, dizem que a área do recorte será aumentada. Então o professor acrescenta ao recorte outro, de menor largura e cor diferente (amarela). Solicita que as crianças mostrem nos recortes retangulares e no desenho (sequência de segmentos) qual foi a área inicial. As crianças mostram com duas mãos a parte de cada recorte retangular e o respectivo segmento. O gesto no desenho é substituído pelo arco. Da mesma maneira, mostra-se primeiro com o gesto, depois com o arco, a área final do retângulo (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Figura 58: Representação gráfica assume uma nova caracterítica com a inclusão de arcos.



Fonte: Adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

Tal como mencionado anteriormente, esta tarefa apresenta uma característica diferente das demais. Isso se explicita no seu desenvolvimento e na sua análise, pois os alunos, para além de focarem no movimento de acréscimo da área da figura plana (superfície retangular azul acrescida da amarela), entram em contato com um modo de representação (uso de segmentos e arcos) do tamanho da superfície – inicial-acréscimo-final. Apesar de a representação dos resultados das grandezas não ser o foco para o presente estudo, vale dizer que – nessa altura do processo de elaboração do conceito de número como relacionado ao com a ideia de grandeza – os conceitos de segmento e linha curva (arco) passam ser tanto um conceito geométrico como um meio de representação.

3.2.6 A reta numérica

Na análise das últimas tarefas, procurar-se-á evidenciar que algumas referências geométricas se vinculam ao conceito de grandeza (comprimento, área e volume) e, portanto, têm componente aritmético. Significa dizer que as tarefas não separam as significações aritméticas das geométricas, isto é, uma contribui para apropriação da outra. Em determinado momento desse processo de 'estar em atividade de estudo', voltada à aprendizagem da matemática, as representações dos conceitos geométricos, como segmento e curvas (arco), são elementos de expressão do resultado de uma medição.

No âmbito desse movimento conceitual e pedagógico é que a reta passa a constituir-se, em termos conceituais, em uma 'construção geométrica específica' com a denominação de 'reta numérica' (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008). Essa inserção ocorre com as tarefas que possibilitam a discussão dirigida ao melhor modo de apresentação dos numerais para a identificação da propriedade numérica de uma grandeza, sem a necessidade da contagem das unidades. Isso porque os estudantes já atingiram o nível conceitual de número traduzido no modelo universal que estabelece a relação de multiplicidade entre grandezas: $\boldsymbol{a = nc}$ (**a** é a grandeza que se quer medir, **c** a unidade pré-determinada e ***n*** o número de vezes que **c** cabe em **a**). Em termos pedagógicos da proposição davydoviana, eles desenvolveram a segunda ação de estudo por adotarem o modelo abstrato do conceito teórico de número, base para que, no decorrer dos anos escolares, formem o pensamento conceitual de todas as singularidades numéricas: natural, inteiro relativo, racional, irracional, real (DAVÝDOV, 1982).

Nessas circunstâncias, necessárias ao desenvolvimento do pensamento conceitual teórico referente à matemática, conforme Sousa (2013), ela assume o significado de reta numérica propriamente dita, ou seja, o lugar geométrico dos números, inicialmente, com os inteiros naturais. Sua apresentação ocorre, inicialmente, sem o zero[7] e, para ocupar, momentaneamente, o seu lugar, usa-se a figura de uma bandeira, "o que induz à ideia de uma referência e, por extensão, de possibilidade para existência de números que também possam situá-los antes dela e não só depois como, até então, tem ocorrido" (SOUSA, 2013, p. 206) nos estudos anteriores. Isso significa que reta, em determinado momento do estudo escolar, passará a se apresentar com uma nova significação, qual seja: como constituída de duas semirretas com origem comum (no zero), mesma direção, mas de sentidos opostos.

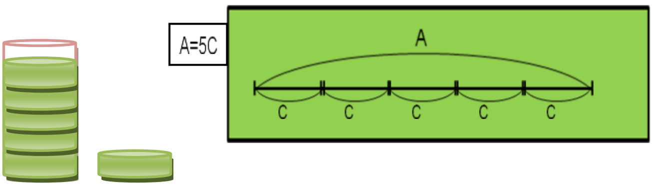
Segundo Горбов et al. (2008), a construção da reta assume a sua significação numérica por constituir a base para a representação do resultado de uma medição e, como tal, estabelece três condições: a opção por ponto inicial, a determinação da direção e a escolha da unidade. Portanto, a reta é o elemento geométrico mediador para expressar duas significações do número: aspecto ordinal, como ponto; bem como seu aspecto qualitativo, um segmento da reta. Sua apresentação às crianças tem como base um esquema (segmentos), produzido por elas em uma situação anterior de medição, na qual se estabeleceu uma unidade de medida arbitrária: o passo. A referência são os segmentos – representativos dos passos –, mas a sua construção exige a explicitação do seu ponto inicial (origem), a direção e o sentido (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

[7]O zero será acrescido à reta no contexto do estudo das operações, mais especificamente de subtração sucessiva. Para tal, sugere-se a leitura de Rosa (2012) e Sousa (2013).

Para início da ação investigativa, na mesa do professor há um recipiente com água e mais um recipiente vazio que será usado como medida. No quadro está o registro: A=5C. O professor informa que A é o volume da água que é precisa colocar no recipiente, mas Vitor já colocou certa quantidade e só é preciso completar. As crianças se defrontam com a necessidade da identificação da quantidade de medidas da água colocadas no recipiente. A situação ainda é problematizada pela informação do professor, que também não sabe o que Vitor fez, mostrando que isso é diferente em relação ao que acontece quando se mede a área ou o comprimento. Então, decide-se medir outra vez a água já colocada. Para tanto, o professor questiona: *Como tornar "visíveis" as medidas dentro do recipiente?* Sugere, ainda, que se marque no vidro com a caneta ou com elástico. Em seguida, ele registra (esquema) no quadro (Figura 59).

Como forma de evidenciar que o lugar de um determinado número na reta depende do tamanho do segmento unidade, o professor apresenta no quadro outro passo (segmento) que é diferente do primeiro. Tal diferença é percebida pelas crianças e, em seguida, faz-se a correção. Identifica-se que no recipiente há apenas três medidas. O trabalho com a água e com o desenho é feito até o final, no estudo sobre as variantes das unidades.

Figura 59: Introdução à reta numérica.



A C

Fonte: Adaptado de Горбов; Микулина; Савельева (2008)

A seguir, descrever-se-á a tarefa (Figura 60) que indica o momento em que se apresenta a nomenclatura "reta numérica". O professor conta que duas crianças, Olga e Paulo, pretendiam indicar a quantidade de água do recipiente (Figura 60). As crianças procedem à contagem pelas marcas do recipiente e concluem que A = 8E. A preocupação é indicar quem fez a melhor representação na reta: Olga, autora da reta superior (Figura 60), ou Paulo, que fez a reta inferior.

Figura: **60** – Introdução da reta numérica com os numerais.

Fonte: Давыдова et al. (2012, p. 51).

O professor acrescenta que a menina foi quem tomou a iniciativa e, por isso, foi a primeira a fazer o desenho. O menino adotou o mesmo de sua colega, mas fez alguns acréscimos: acrescentou as unidades bem definidas e, a cada uma delas, o respectivo numeral. Para que fique evidenciada a vantagem da segunda representação, ele solicita que uma criança marque o valor de A no desenho (reta) superior e um colega faça o mesmo no inferior. Essa interação professor e crianças, mediada pelos desenhos no quadro, é que dará os argumentos de que a representação de Paulo seria a melhor referência, uma vez que os numerais mostram o valor, sem recorrer à contagem dos passos. Além do professor, a própria tarefa explicita que uma reta com os numerais chama-se reta numérica (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2008).

Essa nova caracterização da reta – como lugar geométrico é o melhor modo de apresentação dos numerais – dá condições para manter o vínculo da propriedade numérica de uma grandeza sem colocar a contagem das unidades no patamar de procedimento empírico. O número nela situado é síntese extraída de um modelo que expressa a relação universal entre as grandezas (estas também têm um componente geométrico), que articula ideias de multiplicidade e divisibilidade.

Enfatiza-se que as tarefas estudadas até ao momento refletem o conteúdo específico para o primeiro ano do Ensino Fundamental. Chegar a esse nível de articulação – geometria/aritmética – conceitual e de desenvolvimento de pensamento nesse ano escolar é revelador de algo ímpar em termos de proposição de ensino da matemática. Por isso, tem-se que concordar com Rosa (2012) e Souza (2013) ao afirmarem que a proposição de Davýdov e seus colaboradores superam as concepções de ensino e de aprendizagem presentes nas diversas tendências que permearam e estão presentes no sistema escolar brasileiro.

Na sequência de análises sobre os conceitos geométricos na organização de ensino na proposição de Davýdov e seguidores, serão apresentadas as tarefas correspondentes ao segundo ano.

3.3 OS CONCEITOS GEOMÉTRICOS EM SUA ESSÊNCIA APRESENTADOS NO SEGUNDO ANO.

Como anunciado ao longo da presente dissertação, as tarefas propostas imprimem um movimento conceitual e do próprio pensamento concernentes aos princípios do Materialismo Histórico e Dialético. Na análise referente ao segundo ano escolar, a reflexão mostra que a mesma preocupação permanece nas tarefas particulares, pois seus conteúdos trazem as bases daqueles referentes ao primeiro ano. Dito de outro modo, embora a atividade de estudo ocorra em anos diferentes, mesmo assim, os conteúdos do ano inicial se apresentam com uma espécie de asseguramento ao estudo de novos conceitos geométricos no segundo ano do Ensino Fundamental.

Antecipa-se que na apresentação das tarefas referentes ao segundo ano não se dedicará a analisar o processo de resolução das mesmas, bem como destacar as questões pedagógicas e didáticas que colocam o estudante em processo de apropriação conceitual. Se assim ocorresse, o estudo, além de se expandir, também exigiria um tempo não condizente com os prazos estabelecidos pelo pesquisador e pelo próprio sistema de avaliação dos Programas de Pós-Graduação. No entanto, houve preocupação em trazer evidências às questões geométricas, principalmente no que diz respeito à introdução de novos conceitos. Porém, vale enfatizar que as tarefas não perdem de vista suas características: inter-relação entre as significações aritméticas e geométricas; sempre há algo novo em relação anterior; o estudante em ação investigativa; interação professor/aluno, mediada pelo conhecimento que se apresenta em cada uma delas.

As tarefas particulares apresentadas por Davýdov e seus colaboradores Горбов, Микулина e Савельева resgatam questões relevantes como ponto, segmento, linha reta, linha fechada e linha quebrada desde as primeiras aulas do segundo ano. Isso ocorre no âmbito da apropriação do conhecimento, que requer a relação entre o inteiro e as partes que, por sua vez, está condicionada à identificação das partes, diferenças entre elas e outros procedimentos de cálculos que as crianças não consigam resolver de forma imediata. Busca-se ampliar as ideias conceituais referentes à relação todo/parte e seus significados.

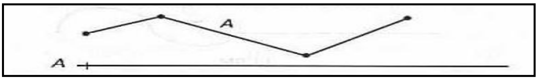
É no âmbito dessas bases teóricas que Горбов, Микулина e

Савельева (2009) apresentam a primeira tarefa particular do segundo ano escolar, com foco para o predomínio de conceitos inter-relacionados de significações geométricas, aritméticas e algébricas. As linhas são referências para a adoção dos princípios básicos dos conceitos de adição e subtração na relação todo parte.

3.3.1 Linha: como princípio básico dos conceitos de adição e subtração na relação todo/parte e introdução ao estudo de polígonos.

A tarefa a seguir (figura 61) tem como finalidade a identificação do "significado do inteiro" (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2009).

Figura 61: Linha quebrada aberta.



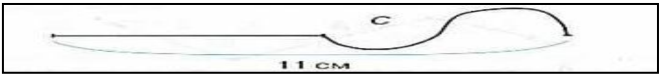
Fonte: Давыдов et al. (2012, p. 5).

Em termos visuais, a situação a ser analisada pelas crianças é composta por pontos e segmentos, que formam uma linha quebrada aberta sobre uma linha reta. É proposto que elas encontrem um meio de indicar o comprimento de uma linha poligonal (A) e construir um segmento do tamanho da poligonal (A). A pergunta diretriz que colocará os estudantes em ação investigativa é: *Como fazer para medir?*

Entre outras, uma alternativa que proporá consequências de apropriações de procedimentos e conceitos é a de medir cada segmento *da linha quebrada* A. A questão central da tarefa é que o todo é constituído de partes. Para determinar a medida do todo, adota-se a adição dos valores de cada parte.

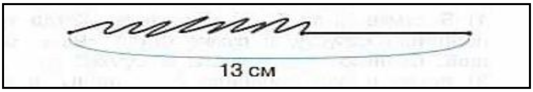
Depois de introduzir a temática da relação parte/todo voltada à medição segmento, as tarefas das figuras 62 e 63 referem-se à identificação de uma parte, isto é, deve-se subtrair a outra parte do inteiro. As crianças observam que a linha mista (reta e curva) mede 11 cm (Figura 62) ou 13 cm (Figura 63 ou 64).

Figura 62: Medição de linhas mistas na ralação parte/todo.



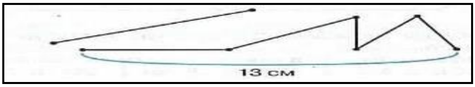
Fonte: Давыдов et al. (2012, p. 6).

Figura : **63** Medição de linhas mistas compostas por reta e quebradas abertas.



Fonte: Давыдов et al. (2012, p. 8).

Figura 64: Medição de linhas mistas compostas retas e quebradas.



Fonte: Давыдов et al. (2012, p. 12).

A questão é: *Como medir as suas duas partes?* Ou seja, qual o comprimento da parte retilínea e da parte curva. Nesse caso, quatro condições – próprias do conceito de adição e subtração, estudadas no primeiro ano – são necessárias: 1) traçar um segmento, por exemplo, de 11 cm (Figura 62), e dividi-lo em duas partes, isto é, a parte retilínea em 5 cm e outra, a curva, em 6 cm; 2) indicar com arcos o todo e suas partes; 3) estipular um valor para uma delas e subtrair do todo, cuja diferença indicará o valor da medida da outra parte; assim, se o valor da primeira é 5 cm, a diferença entre o todo e uma parte é 6 cm. Este procedimento de resolução também será adotado nas tarefas 63 e 64.

As tarefas referentes às figuras 62, 63 e 64 apresentam o mesmo conteúdo: a medição de comprimentos constituídos de linhas compostas. Todas têm uma característica em comum: uma das partes é uma linha. A diferença entre elas se apresenta na constituição da outra parte: as figuras 62 e 63 de linha curvas e a 64 por segmentos de reta. Há ainda algumas particularidades entre as duas primeiras, pois numa delas (Figura 62) a parte curva precede a linha reta e na outra a antecede (Figura 63). Além disso, distinguem-se pelo tipo de curva.

Essas três tarefas trazem a possibilidade de as crianças transferirem uma ideia conceitual aritmética para conceito geométrico, qual seja: diferença. Durante a análise, de acordo com Горбов, Микулина e Савельева (2009), as crianças concluem que para determinar a diferença, é necessário indicar dois valores em comparação: um está na parte quebrada da linha e o outro na parte reta. Ao estabelecer o comprimento (por medição com régua ou por estimativa) de uma delas, a outra é determinada tanto pela medição quanto pela subtração da medida conhecida do todo. Nesse caso, o professor pode orientar uma das crianças para o uso da calculadora (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2009). Outra finalidade dessas tarefas é a reprodução da síntese já elaborada no processo de estudo no primeiro ano: o conhecimento das partes com vistas à obtenção do todo define a adição; em contrapartida, ao se saber o valor do todo e de uma das partes e ainda se busca a outra, a operação é a subtração (ALVES, 2013).

Na sequência, Горбов, Микулина e Савельева (2009) propõem uma nova tarefa (Figura 65) similar àquela (Figura 19) desenvolvida no primeiro ano, a qual trouxe como referência conceitual que o ponto como intersecção de linhas é anunciativo de que é elemento constitutivo da reta. O professor destaca no quadro dois pontos e faz passar por eles várias linhas diferentes.

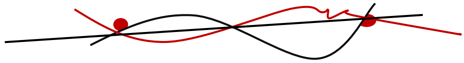
Figura 65: Ponto como intersecção de linhas e condição que, por dois pontos, só passa uma reta.

Fonte: Давыдов et al. (2012, p. 9).

No decorrer do estudo, coloca-se o questionamento: *Que linhas são elas?* As crianças concluem que se trata de linha curva, quebrada aberta e reta. As respostas recebem um acréscimo do professor, como se fosse uma informação que particulariza a figura 65 em relação à tarefa 19: por dois pontos é possível traçar várias linhas curvas, porém uma só reta. Isso é revelador da coerência pedagógica de que cada tarefa traz algo característico, contempla ideias em desenvolvimento, mas presentes nas antecedentes e que acenam para novas possibilidades. Observa-se que, em pleno segundo ano escolar, as crianças adquirem a ideia de um dos postulados – por consequência de uma noção conceitual de base científica – da geometria euclidiana, qual seja: por dois pontos distintos passa uma única reta.

A mesma lógica de organização é adotada na figura 66 que também tem certa similaridade com a tarefa 19.

Figura 66: Interseção de linhas.



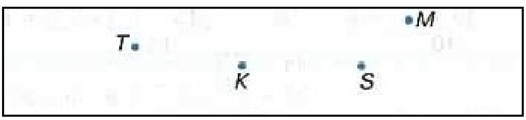
Fonte: Adaptação de Горбов; Микулина; Савельева (2009)

Em termos visuais, ela apresenta como diferença uma terceira linha (curva), mas conserva a intersecção com a linha reta. Esse processo se desencadeia quando o professor apresenta dois pontos no quadro e as crianças nos cadernos. É indicado que elas tracem pelos pontos uma linha. O professor sugere que as crianças falem que tipo de linha é (curva, não fechada). Em seguida, faz um novo questionamento: *É possível traçar mais uma linha curva pelos pontos?* Aqui está uma das diferenças em relação à situação da tarefa 19, uma vez que o professor apresenta uma nova linha curva e com algumas sinuosidades. Em seguida, um novo questionamento: *Quais são as outras linhas que existem?* Uma das possíveis respostas é: as retas. Essa é a condição para o professor solicitar que os estudantes tracem uma linha reta por estes dois pontos, o que requer o uso da régua. Propõe que tracem outra linha reta, porém as crianças percebem que não existe esta possibilidade. O mesmo não ocorre com as curvas, pois podem ser traçadas quantas quiserem: uma quantidade infinita de linhas. No entanto, no quadro estão apenas as três primeiras linhas (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2009).

Um aspecto a destacar nas tarefas 65 e 66 é que o conceito de linha preserva a unidade conceitual: linha reta e linha curva em interface com o conceito de ponto.

Em seguida, as crianças são colocadas diante da seguinte situação investigativa: dados quatro pontos representados por letras do alfabeto, passe por eles uma linha curva não fechada, seguindo a ordem estabelecida. E, posteriormente, marque com outra cor a parte da linha que liga os pontos K e M (Figura 67).

Figura 67: Condição para traçar a linha quebrada.

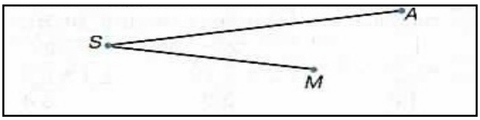


Fonte: Давыдов et al. (2012, p. 19).

Esta tarefa não constitui novidade para as crianças tendo em conta que já possuem conhecimentos sobre linhas curvas quebradas. O diferencial nela é que, desta vez, traz as condições para a sua existência: um número de pontos superior a três, no caso foram dados quatro, e a exigência de que não sejam lineares. Também por simular a existência do referido tipo de linha, mesmo que não esteja traçada, mas se apresenta com a determinação dos pontos. No entanto, para evitar que algumas crianças desenhem outra linha, o professor alerta sobre sua existência, que é quebrada aberta e basta que a destaquem (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2009). Com isso, quer-se transmitir gradativamente aos estudantes que as linhas – sejam elas retas ou curvas, quebradas ou não, fechas ou abertas – existem, independentes do seu traçado.

Na sequência, nova tarefa é colocada para a análise (Figura 68). Apresentam-se três pontos ligados por segmentos na ordem S e M, S e A. Sugere-se que as crianças identifiquem o quanto um é maior que o outro pelo comprimento. Elas, por conta própria, medem inicialmente os segmentos e depois calculam a diferença entre eles (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2009). Além da comparação dos comprimentos dos segmentos, a tarefa prenuncia a ideia de ângulo e de figuras planas. Neste caso, ocorre a necessidade de fechar a linha.

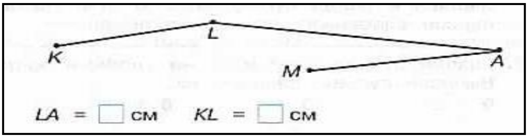
Figura 68: Identificação entre os segmentos que compõem a linha quebrada, o de maior comprimento.



Fonte: Давыдов et al. (2012, p. 19).

Outra tarefa é estudada (Figura 69). Ela contempla uma figura composta por três segmentos: KL, MA, LA. A questão é a identificação da diferença, em centímetros, existente entres dois segmentos, LA e KL. A sugestão é que as crianças, por si mesmas, compreendam que a solução da tarefa requer que se passe três vezes em uma linha e meia, primeiramente, se meça os segmentos e, posteriormente, se anote os resultados no espaço abaixo da figura (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2009).

Figura 69: Diferença, em centímetros, existente entre dois segmentos.

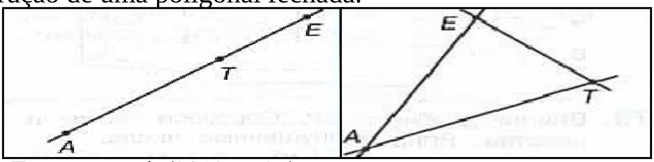


Fonte: Давыдов et al. (2012, p. 22).

As tarefas subsequentes fazem o aprofundamento do estudo sobre os segmentos vistos anteriormente. No entanto, cada uma das tarefas traz consigo uma característica diferente e direciona para a introdução de outros conceitos como raio, ângulo, etc. Que serão vistos mais adiante, como conteúdo estabelecido por Davýdov e seus colaboradores para o segundo ano.

No quadro, o professor coloca três pontos A, T e E, e por eles traça uma linha reta (Situação da direita, Figura 70).

Figura 70: Identificação de segmentos na linha reta e, a partir deles, construção de uma poligonal fechada.

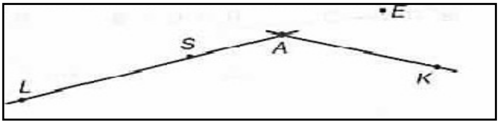


Fonte: Давыдов et al. (2012, p. 24).

A questão investigativa é voltada ao destaque de quantos segmentos contém a linha reta. No decorrer da análise, as crianças identificam que o segmento de reta AE é composto de dois segmentos: AT e TE. Mas a problematização continua no sentido de colocar as crianças em atividade de estudo. As orientações do professor conduzem ao avanço do pensamento conceitual para a necessidade de transformar a situação de uma linha reta de dois segmentos em uma linha reta quebrada fechada. Isso leva à discussão no sentido de estabelecer três critérios lógicos matemáticos: 1) deslinearização dos dois segmentos dados para transformá-los em linha quebrada aberta; 2) criação de um terceiro segmento; 3) união das extremidades da linha quebrada formada pelos dois segmentos dados com aquele criado. Com isso, obtém-se a figura constituída por três segmentos: AT, TE e AE (situação da esquerda, Figura 70). No final da investigação, certifica-se de que os três segmentos à esquerda estão na mesma linha reta; no segundo caso, três linhas retas diferentes, determinadas por três pontos não colineares (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2009). Trata-se, pois, de uma tarefa que cria as bases do conceito de triângulo, como uma superfície delimitada por uma linha quebrada fechada constituída de três segmentos.

Na sequência, a tarefa (Figura 71) toma como referência cinco pontos (L, S, A, E, e K), que o professor apresenta no quadro. Dos quais, em quatro passam duas linhas retas.

Figura 71: Identificação de segmentos a partir de duas linhas retas.



Fonte: Давыдов et al. (2012, p. 24).

A proposição é que as crianças encontrem quatro segmentos. Lança-se a pergunta guia: *Como fazer para encontrá-los?* Concluem que, nas linhas retas traçadas, há visivelmente três segmentos: LS, AS (na mesma reta) e AK. Uma nova questão surge: *Como podemos encontrar o quarto segmento, visto que o ponto E está fora das linhas já traçadas?* É possível que algumas crianças sugiram vários métodos, como também outras não deem conta de resolver esta questão. Entre as alternativas viáveis propostas pelos estudantes, é o auxílio da régua que possibilitará a localização de em qual das duas retas fica o ponto E. Ao sobrepor o referido instrumento sobre as duas retas traçadas, conclui-se que ele está alinhado com os pontos L, S e A. As crianças aprofundam a ideia de que a reta, diferentemente do segmento, se estende nos dois sentidos, sendo ela infinita, pois é sempre possível indicar um novo ponto, desde que alinhado com aqueles que as determinaram (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2009).

O estudo da tarefa seguinte (Figura 72) aprofunda o conhecimento sobre linhas fechadas e não fechadas, bem como introduz a marcação de uma linha quebrada fechada. Estes elementos geométricos foram visto no primeiro ano e também durante a apresentação das tarefas anteriormente descritas, cujo foco foi o cálculo de comprimentos e verificação de quantidades de segmentos. Davýdov e colaboradores não perdem de vista, na organização do ensino, o caráter dialético, que possibilita o desenvolvimento de novos conceitos.

A tarefa traz como sugestão que as crianças tracem uma linha quebrada passando pelos pontos dados (Figura 72).

Figura 72: Pontos para formação de uma linha quebrada, com observação de determinados critérios.

Fonte: Давыдов et al. (2012, p. 45).

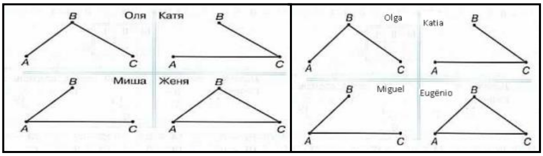
O professor informa que ele já tem uma linha pronta no papel. As crianças podem perguntar por onde devem começar a referida construção geométrica. Porém, elas têm liberdade para a escolha, desde que a linha se constitua de segmentos traçados apenas com a régua. Assim que a linha for feita, o professor mostra a sua linha (CBEA). Depois, solicita que algumas crianças apresentem no quadro as suas linhas indicadoras de outros modos representação. No entanto, o professor problematiza com o seguinte questionamento: *Como as crianças podem contar que linhas fizeram, sem sair de seus lugares?* O professor traça as linhas de acordo com as explicações confusas delas. Torna-se sucesso quando o aluno nomeia os pontos na ordem em que eles foram ligados. Também propõe que elas descrevam no seu caderno a sua linha quebrada, com a atenção para o conjunto dos mesmos pontos. Em seguida, faz a descrição da linha quebrada fechada a ser traçada na situação da direita da figura 72 (CBEA). As crianças traçam a linha. Ela é a mesma que foi feita antes pelo professor (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2009).

Observa-se, nessa tarefa, a preocupação não só com os procedimentos de construção dos segmentos, isto é, com sua representação, mas também com o processo de elaboração conceitual em nível mental e sua expressão verbal. As crianças precisam comunicar oralmente os elementos componentes do conceito e o movimento necessário para caracterizar uma linha quebrada. Esta é componente essencial tanto para a diferenciação entre segmento e reta, como também para definir os elementos conceituais das figuras poligonais. Neste caso, a presença e a posição dos quatros pontos são criadoras de expectativa de atingir figuras de paralelogramos. Isso não ocorreu, dada à condição proposital de gerar perspectiva, ao estabelecer-se a realização de uma linha quebrada somente com dois segmentos em vez de quatro.

Há, pois, uma meticulosa organização de ensino que conduz à formação do que Vygotski (1993) denomina de conceitos genuínos ou verdadeiros. Estes implicam na existência de uma série de conceitos subordinados, além de pressupor uma hierarquia de conceitos com diversos níveis de generalidade. Para atingir esse nível de elaboração, o emprego da palavra é parte integrante e cumpre a função orientadora e condução do processo.

O objetivo da tarefa (Figura 73) a seguir é novamente frisar a existência de linhas fechadas e linhas abertas. No quadro, o professor coloca três pontos A, B e C e solicita que cada criança também os reproduza em seu caderno. Cada qual unirá os pontos e, em seguida, começa a apresentação das construções dos estudantes. Conclui-se que Olga, Kátia e Miguel fizeram linhas quebradas abertas, mas Eugênio uma fechada.

Figura 73: Linhas abertas e fechadas

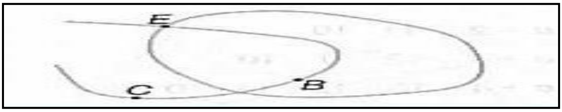


Fonte: Навыдов et al. (2012, p. 58).

Acresce-se a discussão sobre as peculiaridades das referidas produções. Nota-se que a construção da linha fechada se inicia de qualquer ponto e termina no mesmo ponto, isto é, origem e extremidades coincidem. Por sua vez, a linha não fechada tem o começo e o fim em pontos diferentes, o que permite sua descrição de duas maneiras: ABC e CBA (Olga), BAC e CAB (Kátia), ACB e BCA (Miguel). A descrição da linha fechada, no entanto, por começar e terminar em qualquer um dos pontos, não há necessidade de marcar mais uma vez o ponto de referência para a construção: ABC, BAC, etc. Neste caso, marcam-se três letras explicativas de que a linha é fechada (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2009). Novamente, a tarefa traz indícios necessários à formação do conceito de ângulo e triângulo.

A análise da próxima tarefa (Figura 74) tem como referência uma figura dada pronta pelo professor. Porém, esta aparente estacidade se perde para adquirir um caráter ativo, a fim de se verificar as determinações nela existentes. O professor instiga as crianças com perguntas como, por exemplo: *Quantas linhas quebradas fechadas há no desenho? Dessas linhas, quantas passam pelo ponto B? Quantas passam pelos pontos E e C?*

Figura 74: Indentificação de linhas curvas que passam pelos pontos estabelecidos.



Fonte: Давыдов et al. (2012, p. 65).

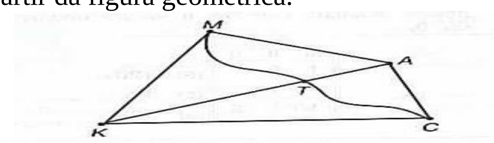
Uma síntese possível de elaboração é a inexistência de linha quebrada fechada, porque todas são curvas. Porém, entre elas, há algumas fechadas, as que terminam no mesmo ponto em que começam. As crianças contornam cada qual com cor diferente. Esse movimento subsidia a elaboração de conclusões como: duas delas passam pelo ponto B, todas as três pelo ponto E e nenhuma pelo ponto C.

Горбов, Микулина e Савельева (2009) sugerem que o professor fique atento às questões não boas dos alunos, a fim de ajudá-los na formulação das respostas certas. Os autores justificam esse alerta informando que nem todos os alunos apresentam a mesma capacidade de interpretação dos problemas.

Embora aparentemente pronta, a tarefa permite um trânsito entre conceitos da geometria euclidiana, a qual se propôs, e também acena para ideia de topologia (interior, exterior, limite) e geometria não euclidiana (a curva com determinante da menor distância entre dois pontos, e outros). Isso significa dizer que em anos posteriores, ao se tratar desses conceitos, a tarefa pode reaparecer não como algo estranho, mas como uma situação de análise com um novo conteúdo.

A situação de análise da próxima tarefa com teor geométrico (Figura 75) retoma a necessidade de encontrar linhas quebradas com acréscimo e interconexão com linhas fechadas não quebradas. Como consequência das discussões propiciadas pelas intervenções dos professores, os estudantes identificam, no desenho, inicialmente, três linhas quebradas: KMA, KAC, KMAC.

Figura 75: Identificação de linhas quebradas e linhas fechadas não quebradas a partir da figura geométrica.



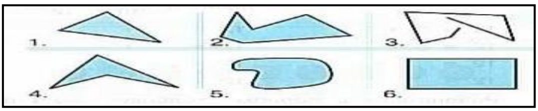
Fonte: Давыдов et al. (2012, p. 67).

Mas, aos poucos, percebem mais dez fechadas, não quebradas, determinadas pelas linhas que ligam os pontos na sequência: KMT, KTC, MTA, ATC, KMTC, MTCA, KMTAC, KCTAM, KMACT, KCAMT. Tamanha elaboração não ocorre de imediato, pois, de início, as crianças por si só indicam algumas delas. Depois elas desencadeiam a percepção das demais. A referência são as primeiras quatro linhas que compõem um dos lados do quadrilátero KMAC e linhas que ligam seus vértices com o ponto T. As duas próximas estão na linha quebrada que liga os pontos M e C e os dois lados do quadrilátero KMAC (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2009).

A tarefa requer dos estudantes um olhar atento para as diversas possibilidades de formação das referidas linhas. Coloca a criança em situação de análise que extrapola a apropriação unilateral de figuras planas somente com a qualidade: ser regular, isto é, seus lados são constituídos de segmentos de retas. Portanto, ela expande para figuras irregulares.

Uma nova tarefa é colocada no quadro (Figura 76). O objetivo da análise é a identificação das características das figuras quanto ao tipo de linha. Ela dá a possibilidade para que seja desenvolvida pelas crianças, sob a observação do professor, pois entre as figuras existe uma ‘pegadinha[8]’.

Figura 76 : Identificação das características das figuras quanto ao tipo de linha.



Fonte: Давыдов et al. (2012, p. 74)

No decorrer da ação investigativa, detecta-se que quatros figuras (1, 2, 4, 6) são linhas quebradas fechadas; uma figura (3) é quebrada, porém não é fechada, e outra figura (5) é fechada, mas não é quebrada. Em seguida, o professor informa que as figuras limitadas por linhas quebradas fechadas chamam-se polígonos; os segmentos que

[8]Tarefa com essa denominação, na proposição davydoviana, tem como pecularied ade apresentar alguma característica condizente com o conteúdo em estudo naquele momento. Tem como finalidade a ‘ação do controle’ para analisar se os estudantes estão em estado de apropriação dos conceitos em estudo.

formam o contorno são chamados lados do polígono; por sua vez, as suas extremidades, vértices poligonais. Por não atenderem essas características, as figuras 3 e 5 não são polígonos e aí que se apresenta a 'pegadinha'.

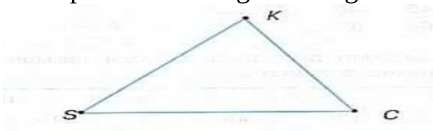
Portanto, a tarefa dá ênfase a alguns tipos de polígonos – triângulos e retângulos, que as crianças aprenderam nas lições anteriores do primeiro ano – mas também introduz outra característica de polígono, como quadrilátero e hexágono, ambos irregulares. Também traz as primeiras iniciativas da ideia de que um polígono, além da característica de ser uma linha quebrada fechada, seu nome depende do seu número de lados e vértices (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2009).

A respeito da explicação da palavra "polígono", Горбов, Микулина e Савельева (2009) alertam como possibilidade a utilização do conceito de ângulo como uma linha aberta constituída de dois segmentos, porém sem chamar a atenção para os demais componentes peculiares do referido conceito, o que ocorrerá mais tarde. Ademais, os autores antecipam que em alguns momentos a própria linha quebrada fechada, que é o limite do polígono, é chamada de polígono. Nesse momento, o importante é que as crianças façam a diferença entre os pontos que estão dentro, fora ou no limite do polígono.

Em continuidade ao estudo, desenha-se um triângulo (Figura 77). Para análise, sugere-se a busca da quantidade de centímetros do seu perímetro. O professor questiona as criança sobre o método conveniente de determinação da medida solicitada. No final, identificar-se-á que o perímetro é composto de três partes correspondentes aos segmentos que definem a figura ou os lados do triângulo. Caberá ao professor mostrar o procedimento por gesto e, posteriormente, fazer a medição dos lados do triângulo com a ajuda de uma régua. Anota-se o resultado próximo aos respectivos lados que, em seguida, serão somados, para que se tenha a ideia final da quantidade de centímetro do perímetro do triângulo (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2009).

Há aspectos novos a serem referenciados nessa tarefa em relação às demais que tratam da temática. Uma delas é conceito de perímetro como um todo (linha quebrada fechada) que delimita o polígono, mas constituído de partes (os segmentos). Outro é o caráter aritmético do conceito, por ser expresso com um valor, obtido pela soma das medidas dos segmentos que compõem os lados. E uma terceira, que aparece implicitamente, é o anúncio da definição de triângulo como uma linha quebrada fechada composta por três segmentos de reta.

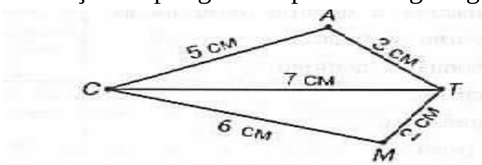
Figura 77: Medida do perímetro da figura triangular.



Fonte: Давыдов et al. (2012, p. 85).

Para finalizar o estudo sobre linhas (quebradas fechadas e abertas, curvas não quebradas) que direcionam para a ideia de polígono, Горбов, Микулина e Савельева (2009) propõem que o professor desenhe no quadro uma figura geométrica (Figura 78).

Figura 78: Identificação de polígonos a partir da figura geométrica.



Fonte: Давыдов et al. (2012, p. 85).

Para a investigação dos nexos que compõem a figura, faz-se a seguinte pergunta: *Quantos polígonos constam na figura?* Depois da identificação, propõe-se às crianças que descrevam estes polígonos e determinem a medida do perímetro de cada um deles, com auxílio dos respectivos dados. No decorrer dessa tarefa, da atividade de estudo, identifica-se que a figura é composta de três polígonos, sendo dois triângulos determinados pelos pontos CAT e CTM, e um quadrilátero, CATM. E, finalmente, calculam-se os perímetros na ordem estabelecida. A sugestão de Горбов, Микулина e Савельева (2009) é que o cálculo seja mental.

Em especial, essa tarefa sintetiza as preocupações emergentes nas anteriores, pois solicita: 1) a identificação da figura poligonal que constituiu o todo; 2) a identificação dos polígonos partes; 3) o cálculo da medida dos respectivos perímetros.

Foi-se enfático na indicação de quão articuladas entre si, mas constituídas de peculiaridades e permanências conceituais, são as tarefas particulares. Isso é reflexo do modo que elas são elaboradas e organizadas, o método.

Em termos didáticos, Davýdov e colaboradores recomendam que no desenvolvimento das tarefas, as crianças encontrem por si mesmas as respostas. A sugestão, nesse caso, é que elas se organizem em grupos, com acompanhamento do professor que promove, em alguns instantes, questionamentos que as instigam ainda mais. Porém, de tal forma que, nos debates, apresentem respostas bem elaboradas.

Reafirma-se que, para tanto, torna-se fundamental a seleção de conteúdos e métodos matemáticos que contribuam para a elaboração da concepção científica de mundo e estimulem a atividade e a iniciativa dos alunos (DAVÍDOV, 1988). É nessa perspectiva que se atribui o papel do professor. Portanto, não como mediador tal como aludem algumas tendências educacionais (BULGRAEN, 2010). Entende-se que, no processo de ensino, a relação professor-aluno é mediada pelo conhecimento (conteúdos programáticos para a referida aula).

Observa-se nas orientações davydovianas a preocupação com a ação promotora do coletivismo. Ou seja, que se devam ensinar as crianças mostrando-lhes a possibilidade de busca de soluções para os problemas matemáticos e sociais, em coletivo, e não de forma individual e competitiva, como pregam as pedagogias das competências (MACHADO, 1998). Isto porque ao exercerem uma convivência coletiva, os alunos aprendem as decisões e o trabalho em comum, com respeito às possibilidades, necessidades e interesses de seus companheiros e dos professores. De acordo com Latíshina (1984), ensinar a criança a resolver os problemas matemáticos e sociais de forma coletiva, ajuda-a na educação de suas qualidades volitivas da personalidade e a sentir a alegria pelo seu trabalho intelectual.

Assim como Davýdov, Latíshina (1984, p. 85) destaca que o estudo da matemática conclama pela contribuição para o desenvolvimento intelectual eficaz dos alunos. Isso consiste não só na transição intensa das formas de pensamento superiores, mas atingir as possibilidades máximas das faculdades intelectuais do aluno de uma determinada idade. Segundo o autor, no processo de estudo da matemática, desenvolvem-se mutuamente o pensamento concreto e o abstrato. Ao resolver os problemas, as crianças imaginam possíveis situações da vida que refletem as relações internas de dependência, por exemplo, entre as incógnitas e os dados.

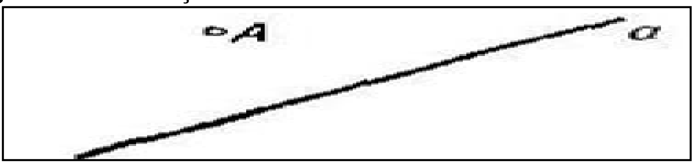
O conhecimento das concepções e leis matemáticas permite que os alunos distingam os signos substanciais e insubstanciais e façam generalizações, abstrações etc. Nesse processo de formação dos conceitos, os professores, por meio da organização das ações e tarefas, estimulam os modos de pensamento indutivo (do particular ao geral) e, ao resolverem os problemas concretos, o modo dedutivo (do geral ao particular).

As tarefas, a seguir, apresentam novos conceitos geométricos, anunciados anteriormente: o raio e o ângulo, conceitos importantes para o segundo ano de escolaridade do Ensino Fundamental.

3.3.2 Raio

Ao iniciar o estudo sobre o raio, Горбов, Микулина e Савельева (2009) recomendam a revisão pertinente ao ponto como elemento geométrico, utilizado para a indicação de uma posição no espaço. O ponto não apresenta dimensões, é representado como um círculo pequeno e designado por letras latinas maiúsculas, por exemplo: A, B, C, e D, etc. Outra questão importante para a introdução desse conceito é o de linha reta como sendo ilimitada em ambos os extremos, não apresentando espessura, representada por letras minúsculas latinas (a, b, c, d, etc.) (POGORÉLOV, 1974). Além disso, para seu traçado, recorre-se a um instrumento, régua (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2009). A figura 79 explicita o que foi inferenciado

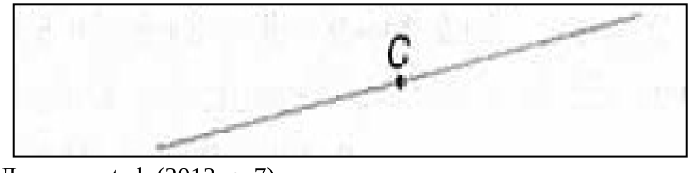
Figura 79: Introdução ao conceito de raio.



Fonte: Pogorélov (1974, p. 18).

No âmbito da atividade de estudo com tarefas direcionadas ao conceito de raio, a primeira delas estabelece que se desenhe um ponto designado por C no meio do quadro e, em seguida, traça-se uma linha reta (Figura 80).

Figura 80 : Representação do Raio.

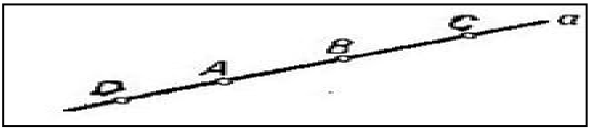


Fonte: Давыдов et al. (2012, p. 7)

O professor fará alguns questionamentos, como: *Que figura está representada no quadro?* A resposta mais provável, por parte dos estudantes, é que se trata de uma linha reta que passa pelo ponto C. Outra questão: *Em quantas partes o ponto C divide a linha reta?* As crianças responderão: em duas. Porém, com a probabilidade de alguns errarem a resposta. É importante, conforme orientação de Горбов, Микулина е Савельева (2009), a ênfase do professor de que o ponto C cumpre a finalidade conceitual de dividir e ser origem de duas semirretas, denominadas de complementares. As semirretas em questão também são chamadas de **Raios** (POGORÉLOV, 1974; ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2009).

O conceito de raio surge na proposição de ensino de Davýdov, no âmbito do conceito de semirreta condizente com o entendimento de Pogorélov (1974) de que as semirretas também se designam por letras latinas minúsculas. Da mesma forma, é possível estabelecê-las por meio de dois pontos, sendo um deles a origem e o outro um ponto seu qualquer. Porém, com a particularidade de que o ponto de origem sempre se coloca em primeiro lugar. Assim, na figura 81, se a referência for o ponto A, significa que divide a reta em duas semirretas: AB e AD.

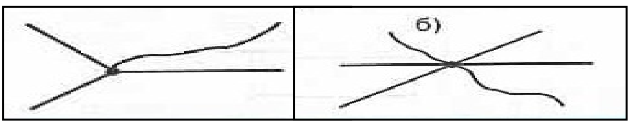
Figura 81: Identificação de semirretas.



Fonte:Pogorélov (1974, p. 19).

Na sequência, no va tarefa (Figura 82) é proposta, a qual tem como objetivo inserir outras significações ao estudo do conceito de raio. Para tanto, no quadro, o professor expõe as duas situações da figura 82. Ele solicita que os alunos identifiquem quantas linhas e quantos raios existem na figura**.**

Figura 82: Identificação de linhas e raios existentes nas figuras.

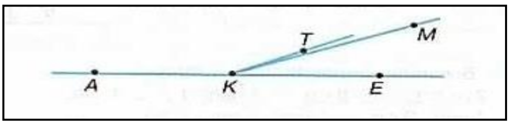


Fonte: Давыдов et al. (2012, p. 7)

No decorrer da discussão, destaca-se a existência de: a) Três raios que pertencem a três retas distintas (situação esquerda da figura 82); b) Quatro raios (situação da direita) que estão em duas retas. Cada raio tem o ponto – seu início. As duas situações são propícias para questionamentos ou dúvidas se as linhas curvas, em ambos os casos, também definem raio. Isso atribui ao professor a indicação de que tais linhas não são passíveis de produção de raio (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2009). Novamente, fica evidente o teor investigativo das tarefas particulares que dão margem às indecisões e, por consequência, à produção de novos questionamentos sobre o conteúdo das mesmas. Ou seja, as crianças estão sempre expostas à solicitação de algo que ainda não têm condições de, por si só, elaborar sínteses, isto é, elas estão em permanente constituição de zonas de desenvolvimento proximal (VYGOTSKI, 1993).

Com essa intencionalidade, um novo desenho (Figura 83) é apresentado às crianças. Observa-se que existe a possibilidade de se estabelecer, como origem, o ponto K, e, por decorrência, definem-se semirretas ou raio com outros pontos, T, A, E M. Ao se considerar K como origem, orienta-se a criança para que trace os raios tendo o cuidado de iniciar exatamente no referido ponto dado (origem) e o fim deles ultrapasse o outro ponto. Tal precaução traduz aspectos conceituais, quais sejam: o raio é infinito de um lado e limitado de outro – origem (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2009).

Figura 83: Determinação de raios existentes na figura.



Fonte: Давыдов et al. (2012, p. 12).

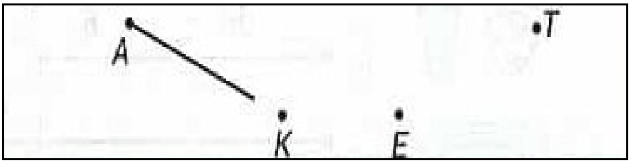
O professor ainda pode solicitar que os alunos determinem o número de raios existentes na figura. Eles concluirão que há quatro raios, por exemplo, dois deles KA e KE, que também são semirretas. Горбов, Микулина e Савельева (2009) sugerem que, ao completar os registros, o professor explique que se descreve o raio com duas letras: a primeira marca o seu início; a outra indica qualquer ponto que está nele.

Para as aquisições iniciais das ideais do conceito de raio no segundo ano, acresce-se uma nova tarefa (Figura 84). O professor constrói a linha na direção AK e solicita que as crianças expliquem porque é possível chamá-la de raio. Ainda, que desenhem outros raios.

As falas que expressam as compreensões de que AK é raio consistem em: a linha se direciona para o ponto K, ou seja, é possível continuar seu traçado. Posteriormente, as crianças desenham outros três raios, de modo que terminem “antes do ponto” (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2009).

O conceito de raio se apresenta com vinculação à linha reta, mais especificamente à semirreta. Nessa última tarefa, o destaque é para a ideia que também seja um segmento em estágio de alcançar um ponto. Sendo assim, não está ainda associado ao conceito de circunferência e círculo como normalmente ocorre no ensino que Davýdov (1982) denomina de tradicional. Chama a atenção também o fato de sua apresentação se dar no segundo ano escolar que, à primeira vista, é passível de estranheza por parte dos defensores de outras propostas de ensino, que a considerariam como introdução conceitual precoce.

Figura 84: Processo de construção de raios.



Fonte: Давыдов et al. (2012, p. 17)

A seguir, as análises se voltarão para tarefas que introduzem as noções sobre Ângulo. A base inicial é o conceito de raio e não se perde de vista o ponto e a linha reta, considerados como algo geral em todas as tarefas particulares até então estudadas. No entanto, haverá uma alteração quanto à denominação.

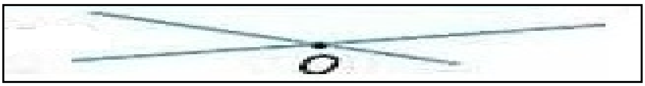
3.3.3 Ângulo

Como anunciado, o estudo centrar-se-á nas tarefas que tratam da introdução do conceito de ângulo, suas determinações e tipologia. Elas traduzem certo zelo em proporcionar aos alunos iguais possibilidades de aprendizagem das matemáticas, em particular o conceito de geometria e, neste caso singular, de ângulo. Por isso, o professor propõe várias tarefas, com a precaução de considerar as características individuais dos alunos (LATÍSHINA, 1984).

As próximas tarefas, assim como aquelas discutidas até o momento, preservam a características de colocar o estudante em processo constante de análise e síntese com base em situações experienciais que extrapolam as observações empíricas. Portanto, contemplam o pressuposto de que a experiência prática é o ponto de partida e a principal força motriz de todo o processo do conhecimento humano. Começa por modos mais simples articulados com as formas superiores do pensamento conceitual teórico do indivíduo. “A prática” é a base na qual se desenvolvem os conceitos científicos. A aparição inicial das noções vem determinada pela atividade laboral do homem como ente social (KURSANOV, 1966). Para tanto, no âmbito da Educação Matemática, uma condição para que se alcance o desenvolvimento dos conceitos científicos é a melhor seleção de conteúdos e material a ser oferecido aos alunos. Latíshina (1984) diz que a seleção do conteúdo, do material matemático, contribui para a elaboração de uma concepção científica de mundo, bem como para o desenvolvimento de constância e a aplicação nas crianças.

Para o início do estudo do conceito do ângulo, traçam-se duas linhas retas que concorrem entre si e, consequentemente, dividem a superfície em quatro regiões (Figura 85).

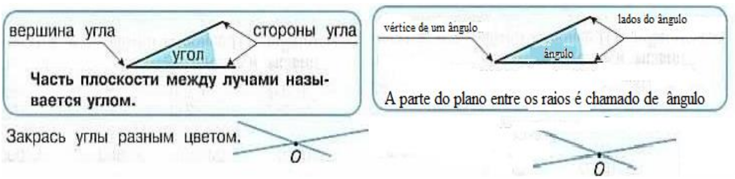
Figura 85: Introdução do conceito de ângulo.



Fonte: Давыдов et al. (2012, p. 26).

Em seguida, sugere-se que uma das partes seja sombreada com uma determinada cor (Figura 86), porém sem que se pinte por inteira, porque as linhas retas não têm limites (elas podem ser continuadas) (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2009).

Figura 86: Ângulo e nomenclatura de seus componentes.



Fonte: Давыдов et al. (2012, p. 26).

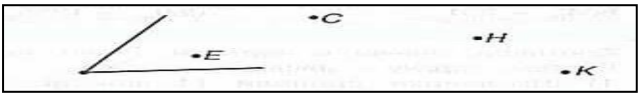
Em sua necessária intervenção, o professor diz que a figura destacada chama-se ângulo. Além disso, tanto ele quanto as crianças contornam o seu limite – a linha que separa o ângulo do restante da superfície – para caracterizá-lo como uma região definida por duas linhas retas, limitadas de um lado pelo ponto O. Portanto, o limite do ângulo é composto por dois raios denominados de ‘lados’, com o mesmo início, chamados de ‘vértice’ do ângulo (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2009).

Essas ideias conceituais têm respaldo em teóricos da Matemática. Por exemplo, Pogorélov (1974, p. 22) define ângulo como uma “figura formada por duas semirretas distintas com um ponto de origem comum. Este ponto se denomina vértice do ângulo e as semirretas recebem o nome de lados do ângulo”. O autor acrescenta uma particularidade que se desdobra da posição relativa dos raios ou semirretas que constituem os seus limites. Ou seja: se os lados de um ângulo são semirretas complementares de uma mesma reta, o ângulo se chama raso e mede 180^{o}. A palavra ângulo pode ser substituída pelo símbolo < (POGORÉLOV, 1974).

A tarefa que aparece na sequência (Figura 87) prevê que o professor desenhe uma figura no quadro, o ângulo. Tem como objetivo a explicitação de que tanto no interior do ângulo de referência quanto em seu exterior é possível que se determinem pontos.

No desenvolvimento da tarefa, propõe-se que as crianças avaliem a posição dos pontos. Para tanto, elas usam a régua para prolongar os lados, o que permite a conclusão: os pontos E, C e H estão no interior do ângulo e o ponto K está fora.

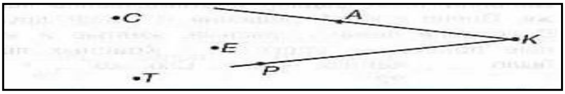
Figura 87: Representação de ângulo com pontos no seu interior.



Fonte: Давыдов et al. (2012, p. 30).

Na tarefa da figura 88, chama-se a atenção das crianças de que o ponto também é um elemento constitutivo do ângulo e tanto se situa no seu interior como no exterior. A figura mostra que tal localização pode ser feita se a referência for os seus lados. Outra diferença em relação à anterior é que isso acontece independente da posição do ângulo definido (abertura para a direita, figura 87, e para esquerda, figura 88). Desse modo, a criança começa a perceber que na a construção de ângulo não há um critério único em relação à sua posição.

Figura 88: Análise dos pontos no interior e exterior do ângulo.



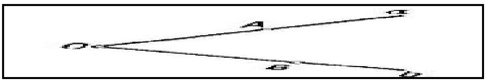
Fonte: Давыдов et al. (2012, p. 37).

No caso da situação da figura 88, constata-se que os pontos E e C encontram-se no interior do ângulo; T na parte exterior; A e P nos lados e K é o vértice. Os ângulos são designados por <AKP ou <PKA.

As tarefas das figuras 87 e 88 são apresentadas com o objetivo de analisar os elementos definidores do ângulo. É fundamental lembrar as crianças que as figuras apresentam algo estudado anteriormente. Sendo assim, elas trazem um teor avaliativo sobre a compreensão das crianças dos conceitos apropriados, porém com acréscimo de novas características referentes ao referido conceito.

Elas contemplam, portanto, as ideias conceituais centrais apresentadas por Pogorélov (1974). Na figura 89, percebe-se que para a definição do referido ângulo, foi preciso desenhar três pontos, o primeiro, O, tido como vértice, e os outros, A e B, os seus lados. Em outras palavras, o ângulo tem seu vértice O e os seus lados sobre as retas a e b que contêm, respectivamente, os pontos A e B.

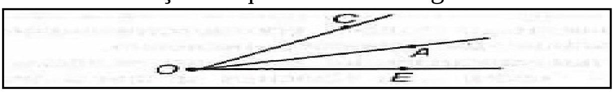
Figura 89: Elementos constitutivos do conceito de ângulo.



Fonte: Pogorélov (1974, p. 19).

A próxima tarefa (Figura 90) convida as crianças à identificação da quantidade de ângulos existentes na figura.

Figura 90: Identificação da quantidade de ângulos existentes na figura.

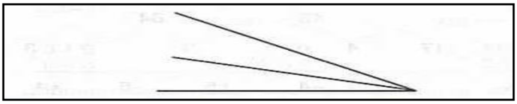


Fonte: Давыдов et al. (2012, p. 39).

No decorrer da análise, a probabilidade é de que as crianças digam que existem apenas dois ângulos. Tal ocorrência se justifica pelo caráter visual da figura que dá margem para a identificação das partes em vez do todo na qual elas se inserem. Caso realmente isso aconteça, compete ao professor solicitar que as crianças encontrem mais um ângulo. Caso necessário, ele mesmo faz a indicação do ângulo ainda não identificado. Assim, a conclusão é que na figura existem três ângulos, quais sejam: < COA, < AOE, < COE.

Volta-se ao estudo de uma tarefa (Figura 91) com as mesmas características da anterior. No entanto, muda-se a posição, além da possibilidade de gerar dúvida em relação à quantidade de ângulos, dada a impossibilidade de explicitar o nome do ângulo pela ausência de pontos de referência que os determinam. O professor serve-se dessa incompletude da figura para questionar: *Que diferença existe entre a figura 90, anterior, e figura 91 que está no quadro?*

Figura 91: Existência de ângulos, mas sem delimitação dos pontos.



Fonte: Давыдов et al. (2012, p. 40).

Dada a similaridade com a tarefa anterior, é mais provável que as crianças apontem a existência de três ângulos no desenho. Contudo, o professor pergunta: *Como podemos descrevê-los?* Por decorrência das suas apropriações, as crianças aludem à necessidade de marcar e nomear – com as letras – os pontos nos raios e, também, no vértice (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2009).

As seis últimas tarefas introduzem as crianças no movimento de formação do pensamento conceitual teórico de ângulo, com ênfase na inter-relação do ponto e vértice, como definidores dos lados (raios ou semirretas) que, consequentemente, determinam uma região interior e outra exterior. A seguir, Davýdov e colaboradores apresentam tarefas que acrescentam algo mais, alguns tipos de ângulos.

Tipos de ângulos

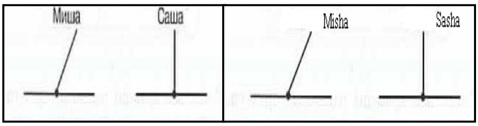
Na tarefa de introdução aos tipos de ângulos, Горбов, Микулина e Савельева (2009) sugerem que, em primeiro lugar, se disponibilize a cada criança duas folhas (papel manteiga) iguais de formas retangulares. Nelas, há uma reta com um ponto A, que não está no centro. Os alunos dobrarão uma das folhas de tal modo que passe pelo ponto A. Depois, traçarão um raio com início no referido ponto, acompanhando a dobra (para cima), que determinará dois ângulos com vértice no ponto A.

Ao comparar diversas variantes, conclui-se que algumas crianças obtiveram os ângulos iguais e outras diferentes. Caso todas as crianças tivessem conseguido ângulos iguais ou diferentes, o professor apresentaria as variantes. Percebe-se que se obtêm os ângulos iguais, caso a linha inicial (horizontal) seja sobreposta em si mesma. Tal igualdade é perceptível no próprio papel por ser transparente (manteiga), desde que, no momento da verificação, a dobra siga retilineamente.

Nesse caso, cada um desses ângulos é chamado de ângulo reto. As crianças fazem a dobra na outra folha de maneira que obtenham a variante nova. Entra, pois, em cena, a discussão sobre a questão: Como traçar os ângulos retos. É nesse contexto que o professor apresenta aos estudantes o esquadro. Demonstra que, para tal finalidade, sobrepõe dois destes instrumentos sobre a folha (ГОРБОВ; МИКУЛИНА; САВЕЛЬЕВА, 2009).

Em seguida, solicita que alguns alunos, Misha e Sasha (Figura 92), construam dois ângulos com ajuda do esquadro, com a posterior comparação dos mesmos. É importante lembrar que nesse primeiro momento, o objetivo do estudo é a introdução de ângulo reto.

Figura 92: Introdução do conceito de ângulos.

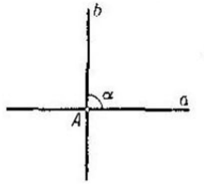


Fonte: Давыдов et al. (2012, p. 44).

No decorrer da comparação, conclui-se que o desenho de Misha (uma das alunas) está com a linha inclinada na horizontal, logo é um ângulo agudo. Enquanto que o desenho de Sasha (outra aluna) tem a linha horizontal direta. O professor diz que a figura com estas características chama-se ângulo reto.

Горбов, Микулина e Савельева (2009) recomendam que o professor volte a enfatizar a característica essencial de um ângulo reto. Em outras palavras, traga à tona os aspectos científicos do referido conceito, que Pogorélov (1974, p. 19) assim descreve: composto de duas semirretas perpendiculares que formam quatros ângulos idênticos α = 90º; qualquer dos três ângulos restantes são seus adjacentes[9].

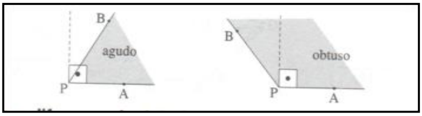
Figura 93: Representação do ângulo reto.



Fonte: Pogorélov (1974, p. 19).

O referido autor também faz referência a outros tipos de ângulos: agudo, se menor que um ângulo reto; obtuso, se maior que o reto (90º) e menor que raso (180º). Rodrigues et al. (1997), na figura 94, traduz a representação desses ângulos.

Figura 94: Outro modo de representação dos ângulos agudo e obtuso.



Fonte: Rodrigues et al. (1997, p. 39).

Essas tipologias de ângulo são tratadas, nas proposições davydovianas, em tarefas como a referente à figura 95, em que o estudante se depara com situações que não atingem um ângulo reto (situação da esquerda da figura 95) ou que ultrapassam os seus limites (situação da direita).

Figura 95: Tarefa referente aos ângulos agudo e obtuso.

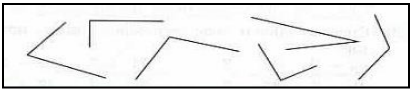
Fonte: Давыдов et al. (2012, p. 44).

---

[9] Diz-se que dois ângulos são adjacentes se têm um lado comum e seus outros lados são semirretas complementares. [...] Diz-se que dois ângulos são verticais se os lados de um ângulo são semirretas complementares dos lados de outro.

Na sequência, as tarefas têm como pretensão que os alunos distingam os ângulos retos, agudos e obtusos. Apresentam-lhes algumas figuras que serão referências para a análise das características a serem destacadas na ação investigativa. Elas são colocadas no quadro (Figura 96) e caberá às crianças, por si só, identificá-las. Nesse processo ocorrem elaborações de abstrações (internas e externas), desde que a base de análise não seja exclusivamente a visualização. Para tanto, o professor direcionará alguns questionamentos, *como, por exemplo: Que* tipos de ângulos se apresentam nas figuras? Também condicionará a descrição de cada um deles, segundo a ordem dada.

Figura 96: Identificação de ângulos.

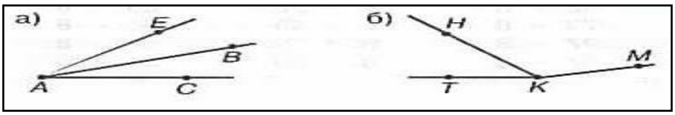


Fonte: Давыдов et al. (2012, p. 46).

Para atender ao referido questionamento e às condições necessárias para o desenvolvimento da tarefa, o instrumento de apoio é o uso de um esquadro; caso contrário, se tornará impossível a elaboração da conclusão correta.

Na sequência, o professor apresenta a figura 97 e dirige outra pergunta: *Quantos ângulos estão indicados em cada figura?* E acrescenta: *Descreva os nomes deles?*

Figura 97: Identificação da quantidade de ângulos.

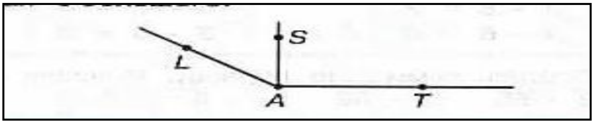


Fonte: Давыдов et al. (2012, p. 48).

Como a tarefa apresenta similaridade com outras analisadas anteriormente, é possível que as crianças digam que em ambas as situações (a, b) há três ângulos. Assim, na situação (a), < EAB, <BAC, e <EAC são todos agudos. E na situação (b), <TKM e <HKM são obtusos e <TKH é agudo.

A tarefa seguinte (Figura 98) também requer questionamentos: *Quantos ângulos a figura tem? Descrevam e digam quais são os seus nomes*

Figura 98: Identificação e nomenclatura de ângulos.

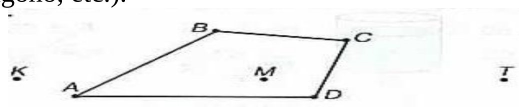


Fonte: Давыдов et al. (2012, p. 50).

Novamente, há possibilidade de as crianças não terem mais dúvidas em relação ao número de ângulos que compõe a figura. Sendo assim, a preocupação é com a distinção entre eles. É provável que as crianças digam que <LAT é obtuso; <SAT é reto e <LAS é agudo. Tarefas similares são apresentas por Давыдов et al. (2012), mas não serão trazidas para esta análise, pois mudam apenas a quantidade de ângulos na figura.

Para finalizar, o estudo sobre ângulos, suas determinações e tipologia, propõem-se uma tarefa (Figura 99) com as características de um quadrilátero, isto é, uma linha quebrada fechada constituída de quatro segmentos de reta.

Figura 99: Identificação e nomenclatura de conceitos estudados (ângulo, polígono, etc.).



Fonte: Давыдов et al. (2012, p. 53).

O objetivo principal é verificar as determinações geométricas estudadas até o momento, as quais se apresentam na referida figura. Isso exige do professor questionamentos para colocar as crianças em movimento investigativo. Por exemplo: *Os pontos BAD constituem ângulo do polígono? Diga se K, M e T pertencem: a) ao ângulo BAD; b) ao polígono ABCD. Quantos ângulos o polígono ABCD tem? Anote-os.*

As crianças recebem a orientação para usar a régua. A análise, guiada pela interferência do professor e outros colegas, contribui para que cada uma delas certifique que: os pontos M e T pertencem ao ângulo BAD e K se encontram na região externa do ângulo. Quanto ao segundo questionamento, K e T não pertencem ao polígono ABCD, M encontra-se na região interna.

Em relação aos ângulos, as crianças se valem dos esquadros e verificam que na figura há um agudo (constituído pelos pontos BAD) e três obtusos (ADC, BCD e ABC). De acordo com Горбов, Микулина e

Савельева (2009), por enquanto só é possível tratar da ideia dos ângulos internos do polígono, visto que, até então, se falou somente dos ângulos menores que o raso.

Essas tarefas, que trazem as ideias iniciais de ângulo, também introduzem a articulação com o conceito de polígono. Isso significa que, além da apreensão de que se trata de uma linha quebrada fechada, as crianças se apropriam de uma nova significação: cada ponto dos segmentos que constitui o polígono também é vértice de um ângulo. O modo que elas são elaboradas e executadas, bem como a articulação entre si, é que possibilitam as crianças dos primeiros anos escolares se apropriarem das bases científicas dos referidos conceitos, isto é, do estágio elevado do desenvolvimento da humanidade. Não se tratam, pois, de noções empíricas do tipo analogia que associa ângulo aos ponteiros do relógio ou movimento de abrir e fechar uma porta, ainda que só seja possível medi-lo com o auxílio de um transferidor.

Observa-se que na proposição davydoviana, a medida do ângulo, nessas tarefas iniciais, está vinculada à ideia de comparação e, concomitantemente, propicia a apropriação dos seus diferentes tipos (agudo, obtuso e raso). Para tanto, admite-se como referência as medidas socialmente admitidasque o professor apresenta às crianças, como de 90^0 e 180^0, cujo foco e uso do transferidor ocorrerão em anos escolares subsequentes.

No entanto, não se trata de desconsiderar as possibilidades intelectuais das crianças ao solicitar-lhes que desenvolvam tarefas as quais requisitam algo que as 'pedagogias tradicionais' (DAVÝDOV, 1982) consideram como abstrato demais para estudantes desse nível de escolarização. Em vez disso, Davídov (1988) atende ao pressuposto de que, ao adentrar na escola, a criança perceba que se insere num contexto totalmente diferente daquele vivenciado na pré-escola, tanto em relação ao conteúdo quanto ao método.

Também é condizente com a base da Teoria Histórico-Cultural, mais especificamente com Vygotski (2014, p. 183), ao afirmar que o desenvolvimento do conceito científico, de caráter social, é apropriado em condições do processo de instrução. Esta constitui uma forma singular da cooperação sistemática do professor com a criança. Decorrente de tal interatividade, amadurecem as funções psíquicas superiores da criança.

Portanto, recai sobre a escola a responsabilidade ampla no processo de maturação científica das crianças. Nesse encargo institucional está a organização do ensino e, no caso da geometria, de modo a criar condições que possibilitam aos alunos a assimilação de conhecimentos por meio da atividade de estudo. De acordo com Vygostki (2014), essa singular cooperação entre a criança e o adulto é o aspecto crucial do processo de instrução, ao se requerer para a educação escolar a função de promover o desenvolvimento do pensamento teórico com fundamentos nos conceitos científicos.

Na última tarefa (Figura 99) analisada, a inserção do ângulo em uma figura fechada prenunciava o aprofundamento do estudo dos conceitos dos polígonos e suas diferenças quanto ao ângulo. A seguir, debruçar-se-á sobre os polígonos regulares, cujos determinantes do seu processo de desenvolvimento e conceituação englobam ponto, linha, segmento e ângulo.

3.3.4 Polígonos Regulares

Na sequência, apresentar-se-ão os acréscimos conceituais da geometria referentes aos polígonos regulares, basicamente, sobre os quadriláteros e os triângulos.

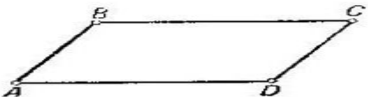
Quadriláteros

Os estudos sobre os quadriláteros não constituem novidade para as crianças. Até então, elas identificavam com a concepção que supera a percepção visual, por tê-los como linha quebrada fechada. Contudo, ainda sem a atenção para a diferenciação do paralelogramo em relação ao retângulo e ao quadrado, que têm ângulos diferentes de reto.

Segundo Pogorélov (1974, p. 60), denomina-se quadrilátero uma figura ABCD (Figura 100) formada por quatro pontos (A, B, C e D), dos quais, três não se encontram em uma mesma reta; e por segmentos AB, BC, CD e AD, que unem os pontos. Além disso, A, B, C, D chamam-se vértices e os segmentos AB, BC, CD e DA são seus lados. O polígono é convexo se a reta que contém qualquer um de seus lados encontra-se em mesmo semiplano. Os segmentos que unem os vértices A e C, B e D do quadrilátero denominam-se diagonais.

Pogorélov (1974) diz que um dos primeiros quadriláteros a ser estudado, no âmbito conceitual geométrico, é o paralelogramo. Este, em termos gerais, é entendido como um quadrilátero em que seus lados opostos são paralelos. Porém, o estudo dos polígonos, na proposição de Davýdov e seus colaboradores, não se inicia pelo paralelogramo, mas pelo retângulo.

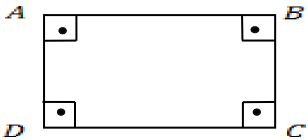
Figura 100: Linha quebrada fechada composta de quatro segmentos e quatro pontos – Paralelogramo.



Fonte: Pogorélov (1974, p. 61).

Горбов, Микулина e Савельева (2009) não recomendam que se apresente uma definição de retângulo sem que as crianças entrem em uma atividade prática direcionada para tal conceito. Para tanto, o professor orienta as crianças na construção de um quadrilátero, com auxílio de uma folha de papel, em que todos os ângulos são retos. No final da construção, se verificada os pressupostos solicitados, ele informa que a figura é chamada de retângulo. Depois deste movimento, recorre-se à caracterização que traduz a sua definição, conforme Pogorélov (1974), com base nas linhas formadas no papel (Figura 101). Trata-se, pois, de linha quebrada fechada composta por quatro pontos e quatro segmentos que unem os pontos com todos os ângulos retos.

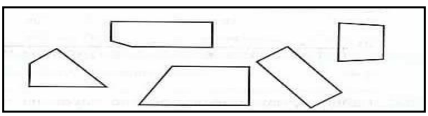
Figura 101: Construção do retângulo.



Fonte: Autor, adaptado de Давыдов et al. (2012).

Para prosseguir, colocam-se no quadro algumas figuras para que as crianças analisem suas características e identifiquem, entre elas, os quadriláteros com a peculiaridade de ser retângulo (Figura 102).

Figura 102: Identificação de linhas de quadriláteros, com peculiaridade de ser retângulo.



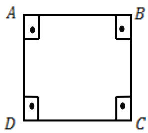
Fonte: Давыдов et al. (2012, p. 67).

No decorrer da ação investigativa, as crianças concluem que, das figuras geométricas apresentadas, apenas uma é retângulo.

A seguir, o estudo se volta para outro quadrilátero, o quadrado. Para tal, usa-se novamente uma folha de papel para construir um retângulo, de modo que os segmentos tenham o mesmo comprimento. A probabilidade é que os alunos digam que estão, novamente, falando a respeito do retângulo. Mas, o professor esclarecerá que se trata do quadrado, um caso particular do retângulo.

O quadrado pode ser definido como um retângulo, formado por quatro pontos e quatro segmentos iguais que definem os seus lados (Figura 103). Assim como o retângulo, no quadrado, os pontos representam os vértices, os segmentos, seus lados e todos os seus ângulos são retos. Nessa tarefa, ainda não se evidencia que o quadrado é também um losango e, portanto, possui as propriedades dele e do retângulo.

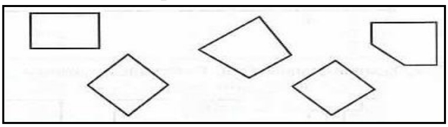
Figura 103: Representação do quadrado.



Fonte: Autor, adaptado de Давыдов et al. (2012).

O objetivo da tarefa referente à figura 104 é identificar os quadriláteros com características de um quadrado. Ela é desenvolvida pelas crianças. Se necessário, o professor intervirá com questionamentos que instiguem as crianças e irá ajudá-las a encontrar a respostas.

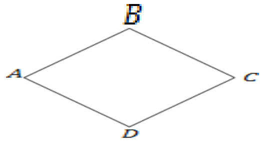
Figura 104: Identificação de quadriláteros com características de um quadrado.



Fonte: Давыдов et al. (2012, p. 71).

Conclui-se que a figura 104 contempla um quadrado e dois losangos. Importa salientar que o losango é um paralelogramo com todos os lados iguais (POGORÉLOV, 1974, p. 63). A figura abaixo demonstra claramente a ideia de um losango (figura 105).

Figura 105: Uma particularidade do paralelogramo, losango.



Fonte: Autor, adaptado de Давыдов et al (2012).

Essas tarefas são representativas do modo que o conceito dos quadriláteros (paralelogramo, retângulo, quadrado e losango) é desenvolvido no segundo ano. A seguir, serão apresentadas tarefas que dão continuidade ao estudo dos polígonos, porém com o conceito de triângulo.

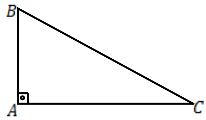
Triângulo e suas particularidades

Tal como foi mencionado, as tarefas que seguem são expressões do modo de organização de ensino para o estudo de polígono em sua especificidade, o triângulo e suas particularidades. A exemplo das tarefas anteriores, referentes aos quadriláteros, solicita-se que os estudantes construam sobre uma folha de papel uma linha fechada de três segmentos com: a) somente um ângulo reto; b) e dois ângulos retos.

Com a execução da tarefa e com base nos estudos anteriores sobre os ângulos, as crianças concluem que não existe triângulo com dois ou três ângulos retos. Decorre a aquisição de outra significação do conceito de triângulo: nele, só é possível um ângulo reto. E, nesse caso, recebe o nome de triângulo retângulo. Inicia-se o processo de desenvolvimento do pensamento conceitual, o qual se dará ao longo dos anos escolares, que atenderá a definição de Pogorélov (1974, p. 63): “chama-se triângulo retângulo aquele que tem um ângulo reto”. Consequentemente, os outros são agudos. Característica esta de todos os triângulos.

De acordo com Pogorélov (1974), os lados de um triângulo retângulo, diferente dos demais, têm denominações especiais: o lado oposto ao ângulo reto se chama hipotenusa e os outros dois lados se chamam catetos. Os ângulos opostos aos catetos são agudos. Essas nomenclaturas ainda não são abordadas no segundo ano. A pretensão, no momento, é que as crianças elaborem a ideia de triângulo como inter-relação entre linhas poligonais fechadas com o número de ângulos (dois agudos e um obtuso ou os três agudos). Porém, isso não é generalizável, pois há um tipo especial – triângulo retângulo – que não tem ângulo obtuso, em vez dele há um reto. Em outras palavras, as crianças indicarão que o triângulo retângulo é uma linha quebrada fechada, composta de três pontos unidos a três segmentos, com um ângulo reto e os outros agudos (Figura 106).

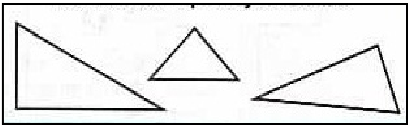
Figura 106: Triângulo retângulo.



Fonte: Autor, adaptado de Давыдов et al (2012).

Nova tarefa investigativa (Figura 107) é apresentada às crianças, com o objetivo de que investiguem a característica das figuras, com base no estudo em curso "triângulo retângulo". Para tanto, apresenta-se a seguinte afirmação: o triângulo em que um dos ângulos é reto chama-se triângulo retângulo. Além disso, as crianças indicarão os tipos de ângulos definidos pelos triângulos.

Figura 107: Investigação das características das figuras com base no estudo em curso.

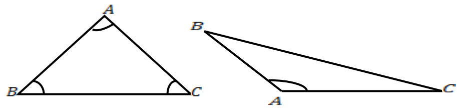


Fonte: Давыдов et al (2012, p. 78).

Tendo em conta as características dos triângulos representados na figura, os ângulos contemplados são: um reto e dois agudos, no primeiro e terceiro, o que faz deles triângulos retângulos; os três agudos, no triângulo do meio.

Dando sequência ao estudo de polígonos regulares com característica triangular, o professor orienta que as crianças construam, com o auxílio de papel, duas figuras. Na primeira, com ângulos agudos; na segunda, que um dos seus ângulos seja obtuso. Como as crianças possuem o domínio do manuseio do papel, adquirido na construção de figuras com características retangulares, recomenda-se que elas desenvolvam sozinhas a tarefa. No final, o professor informa que as figuras construídas são denominadas triângulos. Sendo um deles triângulo obtuso ou obtusângulo (Figura 108, direita), porque um dos seus ângulos é obtuso. O outro triângulo, agudo ou acutângulo, uma vez que seus ângulos são agudos (Figura 108, esquerda). Mas, observa-se que se deixa margem para também anunciar que ambos têm algo em comum: há dois lados de mesmo comprimento, portanto, isósceles. Essa tarefa contempla definições referentes ao triângulo, expressas por Pogorélov (1974, p. 24) e Talizina (2001, p. 23).

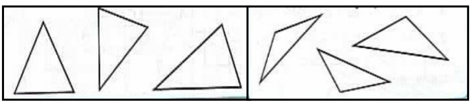
Figura 108: Triângulos obtusângulo e acutângulo.



Fonte: Autor, adaptado de Давыдов et al (2012).

Chama a atenção novamente a requisição das tarefas referentes ao conceito de triângulo que, além de exigirem que as crianças elaborem uma definição, também requerem a aquisição da nomenclatura advinda das particularidades de cada triângulo em relação à tipologia do ângulo e dos lados. Por isso, as tarefas (Figuras 109 e 110) assumem caráter avaliativo e de controle, pois objetivam a identificação de figuras que apresentam as características antes estudadas, quer dizer: figuras triangulares que apresentam ângulos agudos e obtusos.

Figura 109: Identificação de figuras com características de triângulos acutângulos e obtusângulos.



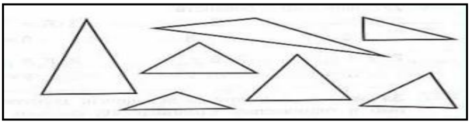
Fonte: Давыдов et al (2012, p. 83).

Ao analisar as características das figuras, espera-se que as crianças identifiquem entre os três triângulos da esquerda (figura 109), dois ângulos agudos e, entre os da direita, os três ângulos obtusos.

O mesmo objetivo propõe a tarefa da figura 110, o que a diferencia é a inclusão da identificação também do triângulo retângulo. Considerando que as crianças dominam estas questões conceituais, elas concluirão que na figura constam três triângulos agudos, dois triângulos retângulos e dois obtusos.

Nesse processo de ensino, o professor promove meios de interatividade e procedimentos investigativos para que as crianças percebam as diferenças e inclusões existentes entre os conceitos geométricos. Assim, quando a questão é resolver problemas como anteriormente colocado, relacionados à identificação de triângulos, vale-se de questionamentos que instigam os alunos a entenderem quais são os aspectos que os unem, ou seja, o que é essencial, em cada um dos triângulos e o que os diferenciam. Essa mesma postura também foi exigida em todos os quadriláteros estudados.

Figura 110: Identificação de figuras com características de triângulos acutângulo, obtusângulo e retângulo.



Fonte: Давыдов et al. (2012, p. 83)

Verifica-se que os entes geométricos ponto, linhas (abertas, fechadas e curvas) e segmentos são condições necessárias para o desenvolvimento de conceitos geométricos, tais como: quadriláteros (paralelogramo, retângulos, quadrados e losango), triângulos e ângulo. Ademais, a partir desses entes, desdobram-se outros conceitos: círculo, circunferência, paralelepípedo, pentágono, hexágono e heptágono, etc. Estes são estudados nas classes subsequentes, em que também são retomados conceitos já estudados com outras significações e acréscimo de novos conceitos do sistema, por exemplo: o cálculo de área dos polígonos e suas demonstrações e especificidades (convexos ou regulares etc.).

Portanto, vale ressaltar que, durante o processo de apropriação de conceitos, quando em atividade de estudo, a condição pedagógica necessária é que as tarefas particulares (independente da ação de estudo na qual se inserem) oportunizem que as crianças se coloquem em ações e operações investigativas. Porém, com a condição que elas não só percebam, mas também elaborem pensamentos referentes às características necessárias para a formação dos conceitos geométricos. Além disso, estabeleçam o vínculo entre um e outro conceito que reflete um movimento das ideias produzidas historicamente, as quais constituem o teor teórico conceitual. Em outros termos, as apropriações das crianças se dão pela via dos conceitos científicos e, por extensão, geram o desenvolvimento do pensamento teórico. Isso se evidencia quando, em nenhuma tarefa do capítulo três, que tinha como finalidade colocar o estudante em processo de elaboração conceitual de geometria, foi solicitado que as crianças indicassem características externas de objetos. Por exemplo, apresentar um livro para que as crianças indicassem como sendo um retângulo. Em vez disso, as tarefas requeriam explicitação de um conjunto de elementos teóricos como linha quebrada fechada, definida por quatro pontos que se constituem em vértice de ângulos retos, etc. Essa interconexão conceitual teórica (conteúdo), independente de objetos físicos – mas neles lidos, como síntese – é, segundo Davýdov (1982), expressão do método de ensino apropriado. Ou seja, o método de ascensão do abstrato ao concreto que se traduz em referência e pressuposto para uma organização do ensino que possibilita a formação do pensamento teórico. Só assim, segundo Talizina (2001), é que os alunos, em atividade de estudo, "afirmam sem dúvida que um triângulo retângulo é toda figura geométrica que apresenta um ângulo reto". E, se no momento seguinte, diz a autora, mostrarem-lhes a figura de um triângulo com o ângulo reto em uma direção diferente a que acabam de estudar e reafirmam se tratar de triângulo retângulo, então há realmente um pensamento conceitual teórico em formação. Caso contrário, ocorre uma incapacidade dos alunos demonstrarem a formação dos conceitos.

Portanto, a atividade é premissa para o desenvolvimento não só do pensamento geométrico, mas da própria formação da criança. Como dizem Rosa, Moraes e Cedro (2010), com base em Davídov (1988):

> A atividade de ensino, ao possibilitar aos indivíduos a apropriação do conhecimento teórica (conceitos), proporciona a formação do pensamento teórico, o que leva ao seu desenvolvimento (...) o pensamento teórico surge como um dos elementos formadores da sua personalidade; ou seja, o trabalho pedagógico com os estudantes deve ser orientado para formar neles uma posição vital ativa, o que significa desenvolver a necessidade de criar o pensamento teórico como fundamento interno da personalidade humana.

Portanto, na perspectiva davydoviana de organização do ensino da matemática, descarta-se a centralidade em ações e tarefas que priorizam a memorização, por si só, e a repetição, pois são promotoras do pensamento empírico, além de limitar o processo de pensamento dos estudantes e, consequentemente, o desenvolvimento humano.

De acordo com Moura et al. (2010, p. 90), uma efetiva atividade de ensino do professor gera e promove a atividade do aluno. Cria nele um motivo especial para a sua atividade: estudar e aprender teoricamente sobre a realidade. Com essa intenção, o professor planeja a sua própria atividade e ações de orientação, organização e avaliação.

Para os referidos autores, considerando que a formação do pensamento teórico e da conduta cultural só é possível como resultado da própria atividade do homem, decorre como tão importante quanto à atividade de ensino do professor a atividade de aprendizagem que o estudante desenvolve. Esse desenvolvimento que se adquire, por via de conhecimentos disponibilizados pela escola, ajudará os alunos no enfrentamento dos desafios peculiares ao homem. Isso significa dizer que também criam possibilidades para o enfrentamento do modo social de viver no meio dos desequilíbrios econômicos existentes neste século.

4. ENFIM, QUAL O MOVIMENTO QUE INTER-RELACIONA QUESTÕES EPISTEMOLÓGICAS E PEDAGÓGICAS REFERENTES AO ENSINO DOS CONCEITOS GEOMÉTRICOS NA PROPOSTA DAVYDOVIANA?

O modo de organização do ensino, adotado por Davýdov, expresso no conjunto de tarefas particulares, analisadas nesta dissertação, possibilita que o estudante entre em atividade de estudo, desde que o professor consiga atender a todas as orientações e criar novas caso seja necessário. As tarefas atentam para minúcias conceituais que têm como referência inicial a unidade constituída por ponto, reta e segmento. Esses elementos conceituais da geometria – trazidos à tona desde Euclides – serão apropriados pelas crianças, não como algo estático e independente, mas algo interligado e em movimento. Isso porque cada tarefa se apresenta com novas significações em processo de apropriação que, simultaneamente, explicitam os conceitos elaborados e acenam para a necessidade de outros.

A unidade – ponto, reta e segmento –, no âmbito da concatenação das tarefas, gera um movimento do pensamento conceitual referente à geometria euclidiana em que o ponto é uma abstração (ALEKSANDROV, 1976) constitutiva da reta. Em seguida, assume novas significações ao se considerar um par deles. Uma delas, por delimitar (extremidades) um segmento de reta; a outra, como condição para definir a reta, com prolongamento para os dois sentidos. E, também, para determinar a semirreta. Nesse contexto conceitual, abarcam-se as primeiras noções de infinito[10]. Quando a referência é o segmento, a ideia de infinito toma como base o aumento e a diminuição de distância dos pontos que os define. Nesse sentido, à criança se apresenta a noção de que o segmento se caracteriza como infinitamente pequeno[11], isto é, os pontos estão separados por distância, não sendo possível imaginar sua representação gráfica com o lápis. Da mesma forma, o infinito da reta se caracteriza pela sua possibilidade de prolongamento, a partir dos pontos e sem necessidade de identificação de sua origem e extremidade. A semirreta tem algo comum ao segmento, isto é, uma origem, e também à reta, que é a sua infinitude, porém em um único sentido.

---

[10] Conteúdo a ser visto nos cursos superiores na disciplina de cálculo diferencial e integral.
[11] Ver conteúdo relacionado ao cálculo infinitesinal.

Mas, o movimento propiciado pela organização pedagógica das tarefas se expande para as questões conceituais referentes às figuras planas. Estas também traduzem uma essência conceitual da unidade – ponto, linha reta e segmento – com aglutinação de outros conceitos como, por exemplo, de infinito. Essa trama conceitual é que caracteriza as figuras planas como referenciadas por três ou mais pontos que, por sua vez, são unidos por segmentos. Como decorrência, cada ponto incide numa intersecção de dois segmentos que passam a constituir-se com duplo significado: lado da figura e determinação de um ângulo e seus diferentes tipos. Com isso, ocorre a possibilidade de a criança, mesmo nos dois primeiros anos escolares, elaborar seu pensamento geométrico a respeito das figuras planas com base teórica.

Assim, por exemplo, o triângulo é entendido pela criança como uma linha quebrada fechada, estabelecida por três pontos que interceptam a mesma quantidade de segmentos e que se apresentam como vértices de ângulos. Além disso, a igualdade e desigualdade do comprimento dos segmentos que formam o triângulo também definem os seus diferentes tipos (equilátero, isósceles e escalenos), bem como os seus ângulos.

Ter como ponto de partida essa base teórica, mesmo no início do período de desenvolvimento humano em que predomina a atividade principal do estudo, é vislumbrar a complexificação do pensamento teórico da criança. É com essa perspectiva que os estudantes se apropriam, com o tempo, de que o estudo do triângulo possibilitou o desenvolvimento da trigonometria (ENGELS apud DAVÝDOV, 1982). Este novo conceito, no seu desenvolvimento, só foi possível de acordo com o autor, a partir das novas propriedades do triângulo, quando do início do estudo da relação existente com o círculo. Neste âmbito, todo triângulo pode dividir-se em triângulos retângulos e, cada um deles, considera-se como pertencente a um círculo. E, em virtude do círculo, dos lados e dos ângulos, obtêm-se as inter-relações totalmente distintas, impossíveis de serem estabelecidas sem referência a ambas as figuras (triângulo e círculo).

Isso, de acordo com Davýdov (1982, p. 366):

> [...] é um procedimento dialético, um modo de pensamento dialético, porque estabelecer a conexão do triângulo com o círculo só se pode no plano de certa ideia que admite a possibilidade da transformação mental do triângulo como parte integrante do círculo, ou seja, a redução de um ao

> outro (do particular ao geral). Logo, mediante essa metamorfose e a redução mental de uma figura a outra, foi possível identificar no triângulo novas propriedades que aventaram as bases de uma nova teoria do mesmo.

Essa mesma base também é válida para as demais figuras poligonais, que se diferenciam pela quantidade de pontos que os definem e, consequentemente, determinarão seus segmentos e ângulos. Além disso, determinam algumas especificidades dentro de um determinado grupo delas. Por exemplo, o quadrado como particularidade do retângulo (POGORELOV, 1974) em relação ao comprimento dos seus lados, mas preserva a característica comum em relação ao ângulo, isto é, ser reto.

Desse modo, as concepções geométricas das crianças se formam em bases teóricas científicas, o que sustenta prenúncios de novas possibilidades conceituais sem apegos extremos à sustentação empírica. Nesse contexto, os estudantes passam a elaborar hipóteses de que, por exemplo, uma específica figura retangular só tem aquela superfície pelas condições: distâncias dos quatro pontos e perpendicularidade dos seus segmentos. No entanto, na medida em que essa distância aumenta ou diminui, a superfície se transforma nas mesmas proporções e se configura um movimento de infinitude. A aproximação dos pontos gera superfícies infinitamente pequenas; enquanto o distanciamento deles tende a afastá-los na extensão das retas as quais eles (dois a dois) definem, o que expressa a ideia de infinitamente grande[12].

Vale esclarecer que essas reflexões sobre a formação de pensamento conceitual da geometria não aparecem de forma explícita no desenvolvimento das tarefas. No entanto, a análise empreendida proporcionou tal teorização sobre as possibilidades de desenvolvimento do pensamento conceitual geométrico concreto, isto é, em seu nível teórico. Isso ocorre pelas condições dadas no modo de organização das tarefas que não apresentam para as crianças, por exemplo, objetos redondos para definir círculo, o que se caracterizaria em concreto empírico, caótico. Pelo contrário, elas tratam de colocar estudantes em ações investigativas para se apropriarem da essência do conceito e das condições que o determina. Assim, círculo é entendido como uma superfície determinada por uma linha curva fechada, cujos segmentos

---

[12] Ver conteúdos relacionados ao cálculo infinitesimal.

são ínfimos, em que os infinitos pontos se distanciam igualmente de um determinado ponto (centro) de referência.

Portanto, o movimento que inter-relaciona questões epistemológicas e pedagógicas referentes ao ensino dos conceitos geométricos na proposta davydoviana – a pergunta desta pesquisa – é que promove a apropriação dos conceitos em nível teórico, como acima referenciado. Opera-se o movimento do conceito do geral ao particular (do abstrato ao concreto). Sendo assim, as manifestações particulares se apresentam em conexões do geral, primário; aos poucos, toma corpo e se revela o conceito (a teoria) correspondente. Entretanto, em todas as etapas deste movimento participam imagens da percepção e representação, que desempenham o papel de material auxiliar cuja forma de conexão vem dada por determinado procedimento de atividade que reproduz e concretiza a relação básica do objeto estudado, ou seja, o correspondente conceito (DAVÝDOV, 1982).

Desse modo, o processo pedagógico empreendido pelas tarefas particulares, de acordo com Davýdov (1982) não prioriza a ideia de que o homem passa imediatamente da percepção e representação ao conceito, até um determinado momento inexistente. Na realidade, as tarefas se articulam de modo tal que propiciam um processo de elaboração de dados da percepção e representação, movida pela relação geneticamente inicial entre grandezas, obtendo-se o conceito e sua forma pura.

Como diz Sousa (2013), no modo de organizar a atividade de estudo, proposto por Davýdov, não é possível a adoção de uma lógica de apresentação de modelos prontos, bem como de omitir a participação das crianças. A organicidade das tarefas requer que estejam continuamente no processo de busca e tomada de decisões para as soluções necessárias.

Isso porque as tarefas têm sempre presente peculiaridades de ordem conceitual e pedagógicas:

1) inter-relação entre as significações aritméticas, geométricas e algébricas que, em determinadas circunstâncias, não há como distingui-las. Por exemplo, a reta numérica.

2) apresenta algo novo em relação à anterior. Ou seja, coloca em evidência o conceito em estudo, mas anuncia as noções que, basicamente, se referem a algo peculiar de outro conceito. Revela-se, pois, o pressuposto vigotskiano de que os conceitos genuínos ou verdadeiros se subordinam a um sistema de conceitos, os quais pressupõem uma hierarquia de diversos níveis de generalidade.

3) o estudante em ação investigativa, que requer uma função orientadora e condução do processo. Isso só é possível pela oportunidade de interação professor/aluno, mediada pelo conhecimento que se apresenta em cada uma delas.

Feitas essas sínteses, resta expressar as sensações com a produção desta pesquisa, que perpassam desde o período formativo (disciplinas do mestrado) até o contato específico com os manuais que adentram para a proposta davydoviana. O caminho percorrido permitiu momentos constantes de desafios e aprendizagens. Ao mesmo tempo, serviu para a compreensão de que o fim desta etapa abre-se para novas possibilidades no prosseguimento de estudos, ao mesmo tempo, na condição de incompletude e dinamicidade da realidade na qual o pesquisador está inserido. Outros conflitos e reflexões durante a produção do presente trabalho se consubstanciaram em seu próprio entendimento da matemática. Isso se deu com base no modo que Davýdov e coloboradores organizam o ensino, em que todos os conceitos matemáticos encontram-se articulados uns aos outros (aritmética, álgebra e geometria) desde os anos iníciais até o sexto ano. Sendo assim, constituem-se em base para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral para aqueles estudantes que, futuramente, optarão pelos cursos de engenharia. Trata-se, pois, de uma contrariedade ao modo em que se foi formado para o exercício da prática docente em que os conceitos se apresentam totalmente desarticulados, estáticos e sem promoção do pensamento teórico. Esta é uma das grandes razões pelas quais o pesquisador colocar-se-á em próximos momentos de pesquisa e busca para o melhor enfretamento da atividade docente.

REFERÊNCIAS

ALEKSANDROV, A. D.; KOLMOGOROV, A. N.; LAURENTIEV, M. A. et al. **La matemática**: su contenido, métodos y significado. Madrid: Alianza Editorial S.A., 1976.

ALVES, E. S. B. **Proposições brasileiras e davydovianas**: Limites e possibilidades. 2013. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2013.

BERBESHKINA, Z.; ZERKIN, D.; YAKOVLEVA, L. **Que es el materialismo histórico?** Moscú: Editorial Progresso, 1986.

BLAGONADEZHINA, L. V. Las emociones y los sentimientos. In: SMIRNOV, A. A. et al. **Psicologia**. Barcelona; Buenos Aires; Mexico: Editorial Grijalbo, 1978. Tradução de Florencio Villa Landa.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BULGRAEN, V C. O papel do professor e sua mediação nos processos de elaboração do conhecimento. **Revista Conteúdo**, Capivari, v.1, n. 4, ago./dez. 2010. ISSN 1807-9539.

BUTKIN, G. A. La formación de las habilidades que se encuentran en la base de la demostración geométrica. In: TALIZINA, N. F. **La formación de las habilidades del pensamiento matemático**. México: Editorial Universitária Pososina, 2001.

CARAÇA, B. J. de. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Editora Cosmos, 1946.

CARDOSO, F. C. O ensino da Geometria e os registos de Representação sob um enfoque epistemológico. In: SEMINÁRIO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO DA REGIÃO SUL, 9., 2012, Caxias do Sul. **Anais...** Caxias do Sul: UCS, 2012.

CHEPTULIN, A. **A dialética materialista**. São Paulo: Alfa-Ômega, 2004.

COSTA, J. M. C. da. **Tratado de arithmetica**: Elementos de Mathematica. Lisboa: Impresa Nacional, 1866.

CRESTANI, S. **Análise conceitual das proposições de Davýdov e seus colaboradores para o ensino do conceito de divisão**. 2013. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2013.

DAMAZIO, A. Desenvolvimento de conceito matemático: Uma leitura histórico-cultural. In: DAMAZIO, A.; MENDES SOBRINHO, J. A. C. (Org.). **Educação Matemática:** contextos e práticas. Teresina: Editora Gráfica da UFPI, 2010.

DAMAZIO, A. Elaboração de conceitos matemáticos: Abordagem histórico-cultural. **GT: Educação Matemática**, n.19, 2006.

DAVÍDOV, V. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico**: Investigación psicológica teórica y experimental. Moscú: Editorial Progreso, 1988.

DAVÍDOV, V; MÁRKOVA, A. El desarrollo del pensamiento en la edad escolar. In: SHUARE, Marta (Org.). **La Psicología Evolutiva y Pedagógica en la URSS**: Antología. Moscú: Editorial Progreso, 1987.

DAVÝDOV, V. V.; SLOBÓDCHIKOV, V. I. **La enseñanza que desarrolla en la escuela del desarrollo; en La educación y la enseñanza**: una mirada al futuro. Moscú: Progreso, 1991.

DAVÝDOV, V. V. O que é a atividade de estudo**. Revista "Escola inicial"**, n.7, 1999.

DAVÝDOV, V. V. Uma nova abordagem para a investigação da estrutura e do conteúdo da atividade. In: HEDEGARD, Mariane; JENSEN, Uffe Jull. **Activity theory and social practice**: cultural-his torical approaches. Aarhus (Dinamarca): Aarthus University Press, 1999a. Tradução de José Carlos Libâneo.

DAVÝDOV, V. V. La renovación de la educación y el desarrollo mental de los alumnos. **Revista de Pedagogia**, Santiago, n. 403, jun. 1998.

DAVÝDOV, V. V. **Tipos de generalización en la enseñanza**. 3. ed. Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1982.

DIENES, Z. P. **O poder da matemática**. São Paulo: Editora Universitária, 1975.

DORIGON, J. C. G. **Proposições de Davýdov para introdução ao conceito de equação**. 2013. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2013.

ELKONIN, D. Sobre El problema de La periodización del desarrollo psíquico en la infancia. In: SHUARE, Marta (Org.). **La Psicologia Evolutiva y Pedagógica em la URSS**: Antología. Moscú: Editorial Progresso, 1987.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011. Tradução de Hygino H. Domingues.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Revista Zetetiké**, Campinas, Ano 3, n. 4, 1995, p. 1-35.

GALPERIN, P.; ZAPORÓZETS, A.; ELKONIN, D. In: SHUARE, Marta (Org.). **La Psicologia Evolutiva y Pedagógica em la URSS**: Antología. Moscú: Editorial Progresso, 1987.

HUAMBO. Instituto Superior Politécnico. **Relatório do Instituto Superior Politécnico do Huambo da Universidade José Eduardo dos Santos**. Huambo: ISP, 2012.

KALMYKOVA, Z. I. Pressupostos psicológicos para uma melhor aprendizagem da resolução de problemas aritméticos. In: LÚRIA et al. **Pedagogia e Psicologia II**. Lisboa: Estampa, 1991.

KLINE, M. **O fracasso da matemática moderna**. São Paulo: IBRASA, 1976.

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Rio de Janeiro: Editora Civilização Brasileira, 1978.

KURSANOV, G. A. El materialismo dialectico y El concepto. México: Editorial Grijalbo S.A, 1966. Traduzido por Andres Fierro Menu.

LATÍSHINA, D. **La escuela primaria soviética**: problemas de La enseñanza y La educación. Moscú: Editorial Progresso, 1984.

LEONTIEV, A. N. **Actividad, conciencia y personalidad**. Buenos Aires: Ediciones Ciencia Del Hombre, 1978a.

LEONTIEV, A. N. Las necessidades y los motivos de la actividad. In: SMIRNOV, A. A. et al. **Psicología**. Barcelona; Buenos Aires; México: Editorial Grijalbo S. A, 1978b. Tradução de Florencio Villa Landa.

LEONTIEV, A. N. **O desenvolvimento do psiquismo**. Lisboa: Livros Horizontes, 1978.

LEONTIEV, A. N. Uma contribuição à teoria do desenvolvimento e aprendizagem. In: VIGOTSKII, LURIA, LEONTIEV. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. São Paulo: Ícone, 2010.

LIBÂNEO, J. C.; FREITAS, R. A. M. M. Vasily Vasilyevich Davýdov: a escola e a formação do pensamento teórico-científico. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (Org.). **Ensino Desenvolvimental:** vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. Uberlândia, MG: EDUFU, 2013.

LORENZATO, S. **Para aprender matemática**. Campinas, SP: Editora Autores Associados, 2006. (Coleção Formação de Professores).

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? **Educação Matemática em Revista**, n.4, primeiro semestre de 95, p. 3-13, 1995.

MACHADO, L. R. de S. Competências e aprendizagem. Belo Horizonte: [S.l.], 1998.

MADEIRA, S. C. **Prática:** Uma leitura Histórico-Crítica e proposições davydovianas para o conceito de multiplicação. 2012. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2012.

MATOS, C. F. **Resolução de problemas davydovianos sobre adição e subtração por estudantes brasileiros do sexto ano do ensino fundamental**. 2013. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2013.

MENESES, R. S. **Uma história da Geometria Escolar no Brasil:** de disciplina a conteúdo de ensino. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

NASCIMENTO, I. F. do; JOÃO, W.; MFUANSUKA, J. **O meu livro de matemática - 1ªclasse, manual do aluno**. Luanda: Árvore do Saber, 2007.

NASCIMENTO, I. F. do; JOÃO, W.; MFUANSUKA, J. **Matemática - 2ªclasse, manual do aluno**. Luanda: Fukuma, 2010.

NUÑES, B. I. **Vygotsky, Leontiev e Galperin:** formação de conceitos e princípios didáticos. Brasília: Líber Livro, 2009.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Revista Zetetiké**, Ano 1, n.1, p. 01-17, 1993.

POGORÉLOV, A. V. **Geometría Elemental.** Moscú: Editorial Mir, 1974.

PUENTES, R. V. Vida, pensamento e obra de A. V. ZAPOROZHETS: Um estudo introdutório. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (Org.). **Ensino Desenvolvimental:** vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. Uberlândia, MG: EDUFU, 2013.

RÍBNIKOV, K. **Historia de las matemáticas**. Moscú: Editorial Mir, 1974.

RODRIGUES, M. B; ARANHA, A. Z. **Exercícios de matemática -** Vol. 6: Geometria Plana. São Paulo: Editora Policarpo, 1997.

ROSA, J. E.; DAMAZIO, A. O ensino do conceito de número: uma leitura com base em Davýdov. **Revista Ibero-americana de Educación matemática**, n. 30, p. 81-100, 2012. ISSN 1815-0640.

ROSA, J. E. **Proposições de Davýdov para o Ensino de Matemática no primeiro ano Escolar**: Inter-Relações dos Sistemas de Significações Numéricas. 2012. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

ROSA, J. E; MORAES, S. P. G. de; CEDRO, W. L. A formação do pensamento teórico em uma atividade de ensino de matemática. In: MOURA, M.O. **A atividade pedagógica na teoria histórica – cultural**. Brasília: Líber Livro, 2010.

ROSENTAL, M. M.; STRAKS, G. M. **Categorías del Materialismo Dialéctico**. México: Grijalbo. 1958. Tradução de Adolfo Sanchez Vazquez e Wenceslao Roces.

RUBISNSHTEIN, S. L. Objeto, problemas y métodos de la psicologia In: SMIRNOV, A. A. et al. **Psicologia**. Barcelona; Buenos Aires; México: Editorial Grijalbo, 1978. Tradução de Florencio Villa Landa.

SANTA CATARINA. Secretaria de Estado da Educação Ciência e Tecnologia**. Proposta curricular de Santa Catarina**: estudos temáticos. Florianópolis: IOESC, 2005.

SAVIANI, D. **Escola e democracia.** Campinas, SP: Autores Associados, 2009.

SILVEIRA, G. M. **Proposições para o ensino do sistema de numeração em Davýdov**. 2013. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2013.

SOUSA, M. B. **O ensino do conceito de número**: objetivações nas proposições davydovianas e formalista moderna. 2013. 237 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2013.

TALIZINA, N. F. La formación de los conceptos matemáticos. In: TALIZINA, N. F. **La formación de las habilidades del pensamiento matemático**. México: Editorial Universitária Pososina, 2001.

TALIZINA, N. F. **Psicologia de la enseñanza**. Moscú: Editorial Progresso, 1988.

TRIVIÑOS, A. N**. Introdução à pesquisa em ciências sociais**: A pesquisa qualitativa em educação. São Paulo: Editora Atlas, 1987.

VYGOTSKI, L. S**. Psicologia Pedagógica**. São Paulo: Martins Fontes, 2010.

VYGOTSKI, L. S. **Obras Escogidas II:** Incluye Pensamiento y Lenguaje, Conferencias sobre Psicología. Madrid: Visor Distribuciones, 1993.

VYGOTSKI, L. S. **Obras Escogidas II:** Incluye Pensamiento y Lenguaje, Conferencias sobre Psicología. Madrid: Machado Distribuciones, 2014.

ГОРБОВС. et al. **Обучениематематике - 1 класс**: Пособиедляучителейначальнойшколы. Москва: ВИТА-ПРЕССб, 2008.

ГОРБОВС. Фet al **Обучениематематике - 2 класс:** Пособиедляучителейначальнойшколы. Москва - ВИТА-ПРЕССб 2009.

ДАВЫДОВА, В.В; et al. **Математика**: Учебникдля 2 классначальнойшколы. Москва : ВИТА- ПРЕСС, 2012.

ДАВЫДОВА, В.Вet al. **Математика**: Учебникдля 1 классначальнойшколы. Москва: ВИТА-ПРЕСС, 2012.