

# ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE DIFERENTES MÉTODOS DE CÁLCULO PARA O DIMENSIONAMENTO DE LAJES MACIÇAS BIDIRECIONAIS

Beatriz Vitali Werner (1), Alexandre Vargas (2).

UNESC – Universidade do Extremo Sul Catarinense  
(1) [bia\\_werner@hotmail.com](mailto:bia_werner@hotmail.com) (2) [avargas@unesc.net](mailto:avargas@unesc.net)

## RESUMO

Na bibliografia encontram-se diversos métodos de cálculo para o dimensionamento de lajes maciças bidirecionais. Esse trabalho consiste em estudar e dimensionar um pavimento previamente definido, através de três métodos de cálculo: Teoria Simplificada de Marcus, Resolução por Meio de Séries, e Métodos dos Elementos Finitos, tendo como objetivo analisá-los e compará-los teoricamente, quanto aos esforços de momento fletores e os máximos deslocamentos imediatos obtidos. Para isso, definiu-se um pavimento tipo, com 9 (nove) lajes retangulares, visando enquadrar cada uma delas, em um dos casos que atendam as condições de contorno propostas pelos dois primeiros métodos. Os resultados foram compilados, analisados e comparados, de acordo com as teorias propostas de cada método. Com o Método dos Elementos Finitos, foram realizados dois dimensionamentos, com altura de vigas diferentes, primeiramente considerando vigas com seção 12x50cm, seguindo as configurações dos dois primeiros métodos e posteriormente, com a finalidade de simular elementos rígidos, vigas com seção 12x250cm. Os resultados demonstraram que as diferenças encontradas, não apresentam um padrão definido, e que os esforços e deslocamentos imediatos das lajes, sofrem influência das vigas que as sustentam e das condições de contorno. Por isso os métodos devem ser aplicados isoladamente, seguindo seus preceitos, ficando a critério de cada projetista a escolha do método a seguir.

*Palavras-Chave: Lajes maciças; lajes bidirecionais; dimensionamento de lajes*

## 1. INTRODUÇÃO

As lajes são elementos planos bidimensionais, caracterizadas desta forma, por possuírem suas dimensões de comprimento e largura na mesma ordem de grandeza e consideravelmente superiores à dimensão da sua espessura. Classifica-se uma laje a partir de três características: tipo de armação (unidirecional ou bidirecional), tipo de apoio (vigas, pilares, alvenaria), e quanto sua natureza (maciça, nervurada ou pré-fabricada). Tem como função estrutural suportar as ações decorrentes de seu próprio peso e uso, e distribuí-las aos apoios.

A NBR 6118:2007 estabelece que o cálculo dos esforços resistentes de uma laje maciça, deve atender os princípios de verificações do Estado Limite Último, que

considera o esgotamento da capacidade estrutural da laje. Dentro desse princípio, a laje maciça é calculada em métodos com base em uma Análise Linear “desde que garanta a ductilidade dos elementos estruturais”.

O método clássico utilizado para esse tipo de cálculo, também denominado como Teoria das Placas, ou Teoria de Kirchhoff-Love, tem como base a Lei de Hooke, que considera os materiais em regime elástico-linear. Segundo CARVALHO, et al (p.293, 2007) “esse método fundamenta-se nas equações de equilíbrio de um elemento infinitesimal de placa e nas relações de compatibilidade das deformações desse elemento.”.

O método considera o material constituinte das placas, além de elástico-linear (Lei de Hooke), homogêneo e isotrópico, sendo considerado, portanto constituído de um único material com as mesmas propriedades em todas as direções.

A partir de relações matemáticas entre deslocamentos e deformações e considerando os parâmetros estabelecidos para o material constituinte, estudados Kirchhoff-Love, Lagrange (1811) desenvolveu a equação fundamental das placas delgadas, que tem a forma de uma diferencial parcial de 4ª ordem, conforme demonstrado na Equação 1, o que torna seu cálculo manual bastante complexo.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{p}{D} \quad \text{Equação 1}$$

Sendo:

W - deslocamento vertical;

x,y – coordenadas de um ponto genérico da placa;

p – intensidade da carga atuante;

D – é a rigidez à flexão da placa, definida pela Equação 2.

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \quad \text{Equação 2}$$

Sendo:

E – módulo de deformação longitudinal do concreto;

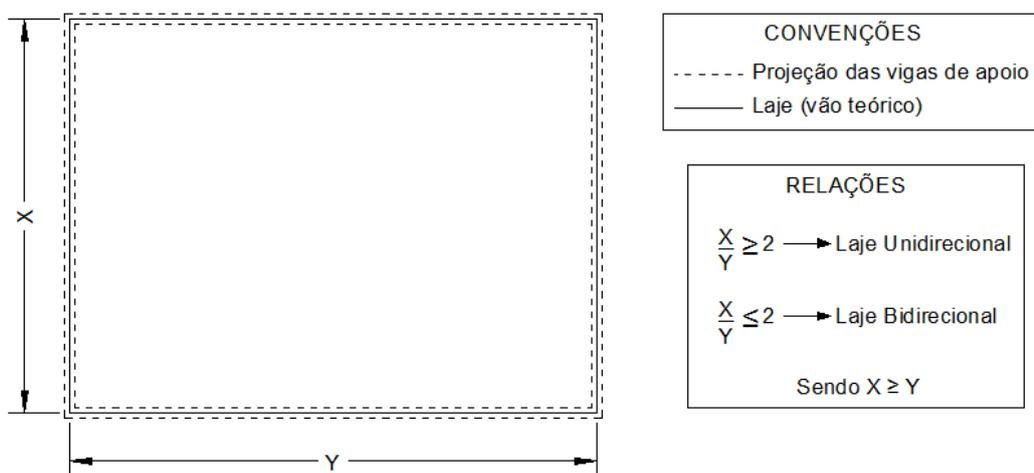
$\nu$  – coeficiente de Poisson;

h → altura ou espessura da placa (laje) (cm).

A partir desta equação, foram elaborados diversos processos de resolução, que dentre os consolidados, são usuais a Resolução por Meio de Séries, Teoria Simplificada de Marcus, Processo de Grelha Equivalente, Método de Diferenças Finitas, e Métodos dos Elementos Finitos.

Essa pesquisa limitou-se a estudar lajes maciças: que possuem toda a sua espessura composta por concreto e aço; bidirecionais: caracterizadas por possuírem armadura longitudinal e transversal e relação entre o comprimento e largura menor ou igual a 2, além de estarem apoiadas em vigas em todo o seu entorno, conforme demonstrado a Figura 1.

Figura 1 - Classificação de laje quanto ao tipo de armação



Fonte: Beatriz Vitali Werner, 2013

O objetivo do trabalho é calcular os esforços provenientes da Resolução por Meio de Séries, Teoria Simplificada de Marcus e do Método dos Elementos Finitos, analisando os resultados obtidos, e as diferenças entre os métodos, em relação aos máximos momentos fletores, e máximos deslocamentos imediatos obtidos.

## 1.1 RESOLUÇÃO POR MEIO DE SÉRIES

A solução exata da equação diferencial da placa somente pode ser obtida para uns poucos casos particulares. Nos casos mais gerais de carregamento e condições de contorno, as soluções são encontradas adotando-se expansões em série de Fourier. Duas soluções são disponíveis: a solução de Navier e a solução de Levy. (ARAÚJO, p.51, 2003)

As séries de Fourier, denominadas em homenagem ao matemático e físico francês Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), é a representação de uma função periódica, utilizada para encontrar valores aproximados para uma integral sobre um intervalo. Através dessas séries, Claude Louis Marie Henri Navier (engenheiro, matemático e físico francês, 1785-1836), definiu equações para o cálculo dos

momentos fletores, como exemplo a Equação 3. Da mesma maneira Paul Pierre Lévy (matemático francês, 1886-1971), também realizou estudos, que resultou na Equação 4.

$$M_x = \pi^2 D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \nu \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right] W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad \text{Equação 3}$$

$$Y_m(y) = (A_m + B_m \eta) \cos h\eta + (C_m + D_m \eta) \sin h\eta \quad \text{Equação 4}$$

As equações de Navier e Lévy são soluções para a equação geral das placas (Equação de Lagrange), no entanto, a resolução dessas equações é feita através de diversos e exaustivos cálculos matemáticos, o que torna o processo longo e inviável nos dias atuais.

A complexidade dessas soluções, segundo BASTOS (p. 19, 2005):

Motivou o surgimento de diversas tabelas, de diferentes origens e autores, com coeficientes que proporcionam o cálculo dos momentos fletores e das flechas para casos específicos de apoios e carregamentos.

Dentre essas tabelas, podemos citar as de Bares, Szilard, Stiglat/Wippel, Kalmanok e Czerny, que possibilitam que o cálculo seja executado manualmente, de maneira simples, tornando o método, comumente ensinado nos cursos de graduação em Engenharia Civil, para o cálculo de lajes maciças.

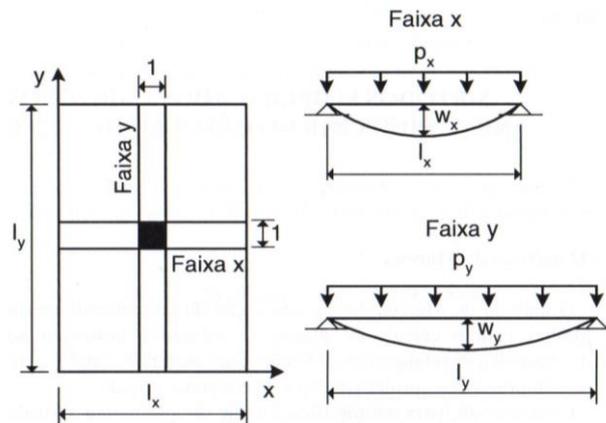
## 1.2 TEORIA SIMPLIFICADA DE MARCUS

Segundo ARAÚJO (2003), “o método de Marcus é uma adaptação da denominada teoria das grelhas para o cálculo de placas.”. O método consiste em simular uma malha equivalente na placa (laje), conforme explicada por CARVALHO, et. al. (p.298, 2007):

As cargas distribuídas dividem-se entre os elementos da grelha equivalente, de acordo com a área de influência de cada elemento. Podem ser considerados uniformemente distribuídas ao longo dos elementos ou, dentro de certa aproximação, concentradas nos nós.

Na Teoria das Grelhas, foram estabelecidas relações, por meio da dedução de que a flecha no centro da laje, no encontro de duas faixas da grelha, é única, considerando um mesmo valor nas direções X e Y, conforme ilustra a Figura 2.

Figura 2 - Flecha central



Fonte: José Milton de Araújo, 2003

No entanto em uma análise mais real do comportamento da placa, Marcus percebeu que devido aos efeitos de torção, o máximo deslocamento não ocorreria necessariamente no centro da placa para as duas direções. A partir disso, definiu-se que os momentos fletores positivos encontrados na Teoria das Grelhas, deveriam ser reduzidos, devido à própria rigidez a torção da placa, que conseqüentemente reduzem as deflexões.

O aparecimento desses coeficientes de redução resulta de imperfeição da teoria das grelhas, que supõe os quinhões constantes e imagina a laje constituída por faixas independentes, ao passo que ela forma um conjunto único, isto é, funciona como uma placa que se deforma no espaço sendo as flechas menores do que as que resultam da teoria das grelhas, e, portanto, menores os momentos. (ROCHA, p.54, 1999)

Os coeficientes estudados por Marcus, segundo ARAÚJO (p.71, 2003) “dependem das condições de contorno e da relação entre os vãos da laje”. A partir da relação entre as condições de contorno da laje, Marcus elaborou uma tabela com a finalidade de facilitar o dimensionamento manual.

### 1.3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

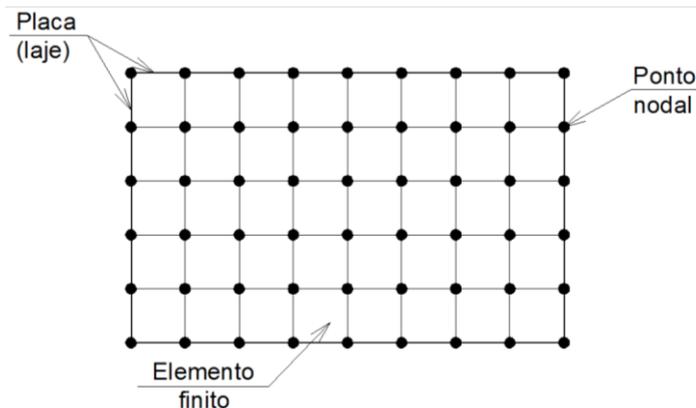
O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um modelo matemático de extrema complexidade, com base em métodos matriciais de rigidez e equações lineares, que analisam a estrutura detalhadamente, sendo necessário o auxílio de um sistema computacional para efetuar a grande quantidade de cálculos necessários para chegar a um resultado preciso, que se aproxima da realidade da estrutura.

Segundo SORIANO, (p.4, 2003):

No método dos elementos finitos, o domínio de definição do modelo matemático é dividido em um número discreto de subdomínios ou elementos de dimensões finitas denominados *elementos finitos*, interligados por meio de um número reduzido de pontos denominados *nodais*.

Exemplificando o conceito citado, em lajes maciças, seu modelo matemático pode ser definido por uma placa de formato quadrado/retangular que é subdividido em uma malha de formas geométricas. Cada região da malha é um elemento finito, e os nós são os pontos nodais, conforme demonstrado na Figura 3.

Figura 3 - Malha de elementos finitos



Fonte: Beatriz Vitali Werner, 2013

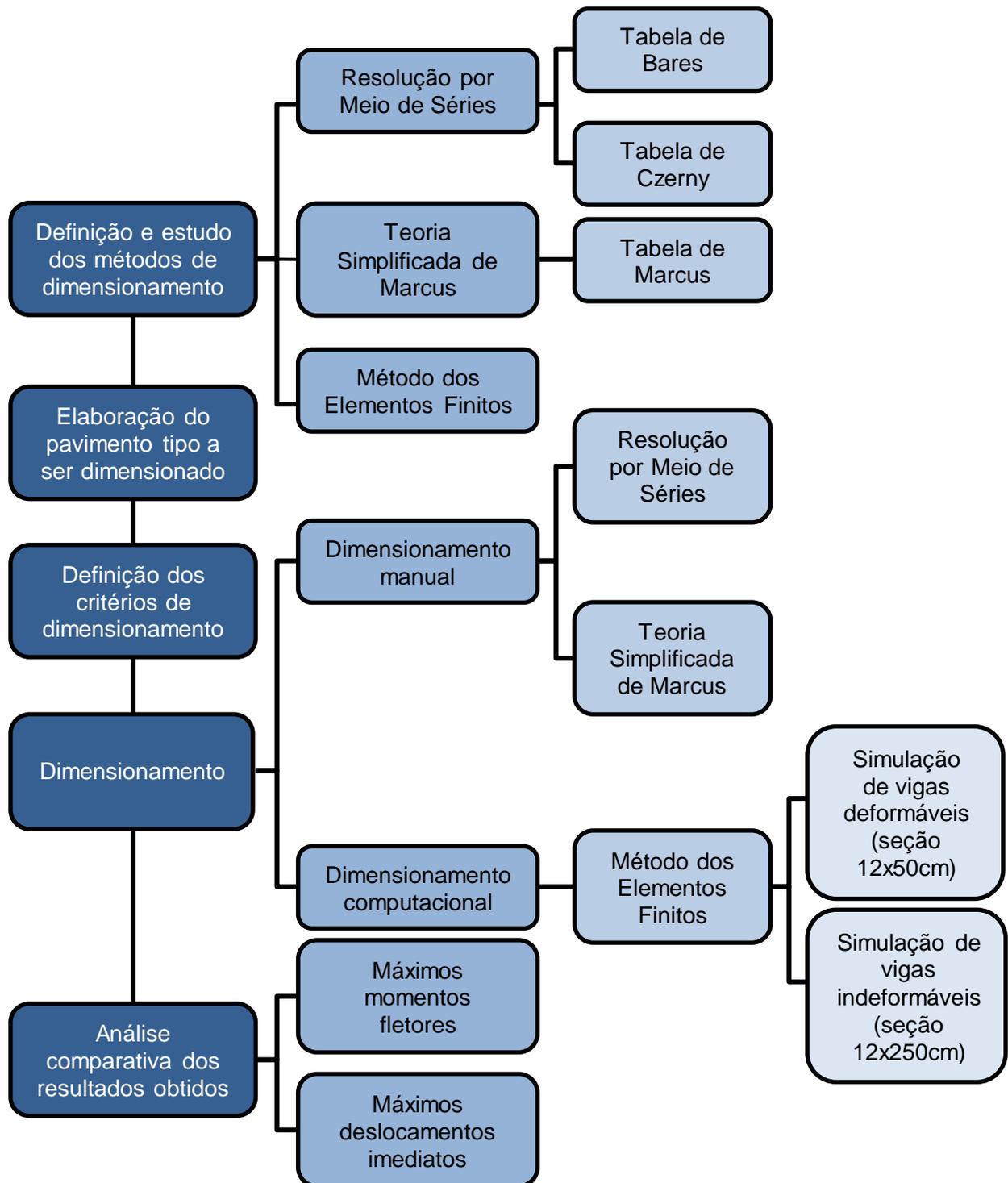
A malha dos elementos finitos pode ser aumentada ou diminuída, conforme a necessidade de subdomínios, porém quanto menor forem os elementos finitos para um mesmo elemento, mais preciso será o resultado.

Diferentemente do método da teoria das placas, devido ao uso computacional para efetuar os cálculos do MEF, é possível considerar que os contornos das lajes sejam rotulados (livres), engastados ou semi-engastados, e ao analisar a estrutura considerando todos os seus elementos estruturais constituintes, como lajes, vigas e pilares, ele considera a deformação do elemento de apoio (neste estudo estabelecido as vigas) o que influi diretamente na deformação do pavimento.

## 2. MATERIAIS E MÉTODOS

O presente estudo tem como objetivo comparar os diferentes resultados obtidos de máximos momentos fletores, e os máximos deslocamentos imediatos, para um mesmo pavimento, utilizando diferentes métodos de cálculo. O fluxograma ilustrado na Figura 4, apresenta o planejamento para a realização das diferentes etapas.

Figura 4 - Fluxograma



Fonte: Beatriz Vitali Werner, 2013

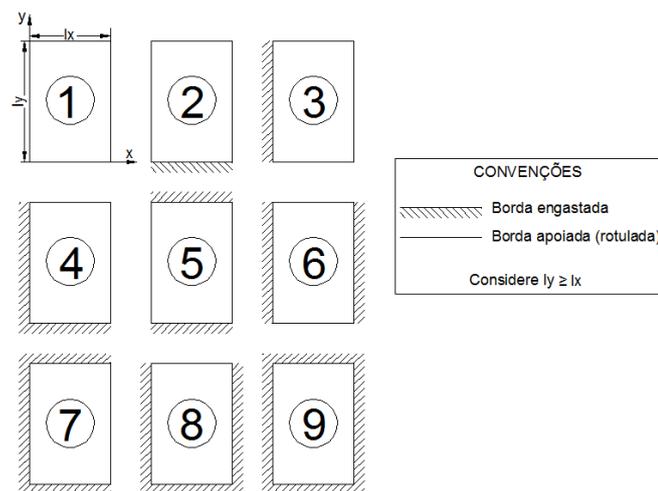
## 2.1 MÉTODOS DE CÁLCULO

Dentre os métodos usuais para dimensionamento de lajes bidirecionais maciças, este estudo limitou-se a estudar a Resolução por Meio de Séries, Teoria Simplificada de Marcus, e o Método dos Elementos Finitos.

Para efeitos de cálculo, os métodos de Resolução por Meio de Séries e Teoria Simplificada de Marcus, consideram que as cargas geradas pela laje, são uniformemente distribuídas às vigas de contorno por meio de forças verticais, os momentos de torção das placas não são transferidos, considerando para esse parâmetro a viga com elemento rígido (indeformável), e os contornos devem ser considerados ainda, apoiados (rotulados) ou engastados, não havendo a possibilidade de semi-engastamento.

Os dimensionamentos, através desses dois métodos, foram realizados por meio de tabelas que simplificam os cálculos manuais. Estas tabelas foram elaboradas considerando nove casos de vínculos com os apoios de uma laje (condições de contorno), o que influencia diretamente no cálculo de momentos fletores. Cada tabela possui os mesmo casos, porém com nomenclaturas diferentes; com a finalidade de facilitar a interpretação dos resultados, optou-se por padronizar essa nomenclatura, utilizando a adotada pelas tabelas de Bares, conforme demonstrado na Figura 5.

Figura 5 - Casos de vinculação das lajes



Fonte: Beatriz Vitali Werner, 2013

Através das tabelas são calculados os máximos momentos fletores, e os máximos deslocamentos imediatos, sendo o deslocamento considerado elástico por não serem considerados os efeitos de fissuração e fluência.

### 2.1.1 Resolução por Meio de Séries

Dentre as tabelas disponíveis para este método, definiu-se realizar o dimensionamento através das Tabelas de Bares e das Tabelas de Czerny. Conforme a Equação 2, o dimensionamento dentro da Teoria das Placas, sofre influência direta do coeficiente de Poisson ( $\nu$ ), adotou-se neste estudos, tabelas elaboradas considerando  $\nu = 0,20$ .

As tabelas apresentam coeficientes aplicados em equações específicas, para cálculo de momentos fletores e deslocamentos. Os cálculos dos momentos fletores, através das tabelas de Bares, são por meio das equações 5, 6, 7 e 8, e do máximo deslocamento imediato, por meio da equação 9. E das tabelas de Czerny, os momentos fletores por meio das Equações 10, 11, 12 e 13, e do máximo deslocamento imediato, por meio da Equação 14.

$$M_x = \mu_x \cdot \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad \text{Equação 5} \qquad M_y = \mu_y \cdot \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad \text{Equação 6}$$

$$X_x = \mu'_x \cdot \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad \text{Equação 7} \qquad X_y = \mu'_y \cdot \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad \text{Equação 8}$$

$$a = \frac{p \cdot l_x^4}{E \cdot h^3} \cdot \frac{\alpha}{100} \quad \text{Equação 9}$$

$$M_x = \frac{p \cdot l_x^2}{\mu_x} \quad \text{Equação 10} \qquad M_y = \frac{p \cdot l_x^2}{\mu_y} \quad \text{Equação 11}$$

$$X_x = \frac{p \cdot l_x^2}{\mu'_x} \quad \text{Equação 12} \qquad X_y = \frac{p \cdot l_x^2}{\mu'_y} \quad \text{Equação 13}$$

$$a = \frac{p \cdot l_x^4}{E \cdot h^3 \cdot \alpha} \quad \text{Equação 14}$$

Sendo:

$M_x, M_y \rightarrow$  máximos momentos fletores positivos característicos ( $M_k$ ) (KNm/m);

$X_x, X_y \rightarrow$  máximos momentos fletores negativos característicos ( $M_k$ ) (KNm/m);

$a \rightarrow$  máximo deslocamento imediato (cm);

$\mu_x, \mu_y, \mu'_x, \mu'_y, \alpha \rightarrow$  coeficientes extraídos das tabelas;

$l_x \rightarrow$  menor lado da placa (laje) (m ou cm);

$p \rightarrow$  carregamento uniformemente distribuído sobre placa (laje) (KN);

$E \rightarrow$  módulo de deformabilidade do concreto (serviço) (MPa);

$h \rightarrow$  altura ou espessura da placa (laje) (cm).

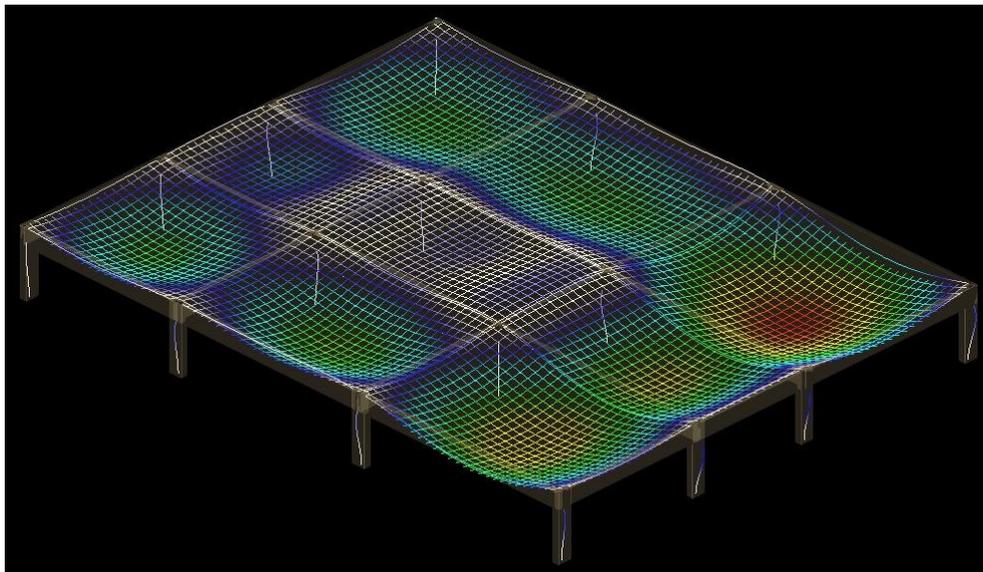
### 2.1.2 Teoria Simplificada de Marcus

Igualmente ao método de Resolução por Meio de Séries, a Teoria Simplificada de Marcus é dimensionada através de coeficientes extraídos de tabelas semelhantes às de Bares e Czerny. Os cálculos dos momentos fletores, são por meio das mesmas equações utilizadas pela tabela de Czerny, Equações 10, 11, 12 e 13. Não foi dimensionado o máximo deslocamento imediato, por meio deste método.

### 2.1.3 Método dos Elementos Finitos (MEF)

No Método dos Elementos Finitos, o dimensionamento foi realizado por meio computacional, através do software de cálculo estrutural CypeCad 2008.1.f, que utiliza o MEF e os requisitos e considerações da NBR 6118:2007. O software sobrepõe ao pavimento uma malha de elementos com 25x25cm, resultando no pórtico espacial ilustrado na Figura 6.

Figura 6 - Pórtico espacial com a malha de elementos finitos

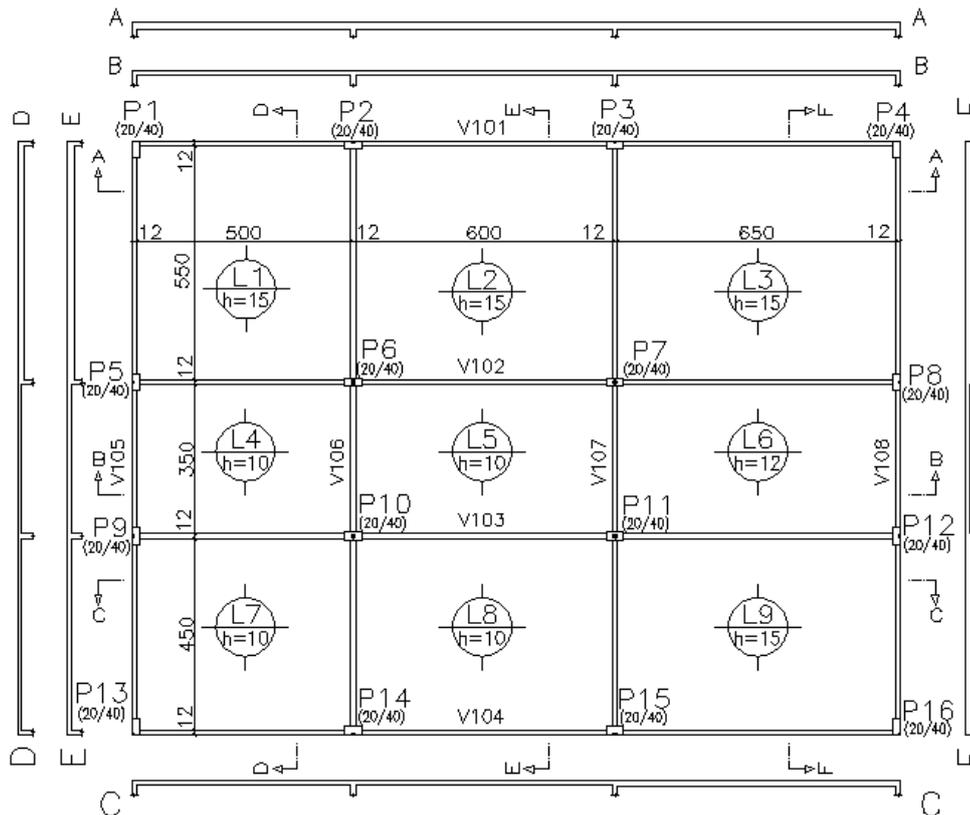


Fonte: Beatriz Vitali Werner, 2013

## 2.2 DEFINIÇÃO DE UM PAVIMENTO TIPO

Para atender os objetivos estabelecidos, foi definido um pavimento, dividido em 9 (nove) lajes, demonstrado na Figura 7.

Figura 7 - Planta baixa do pavimento estudado



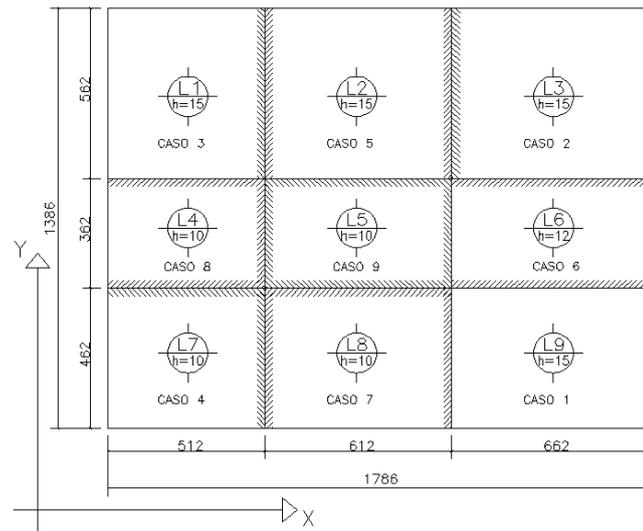
Fonte: Beatriz Vitali Werner, 2013

O dimensionamento por meio de tabelas exige que cada laje seja enquadrada na classificação ilustrada na Figura 5. As características do pavimento, foram definidas com a finalidade de estudar os 9 (nove) casos demonstrados, sendo considerado quatro critérios:

- Contorno de lajes com mesmas espessuras – engastados;
- Contorno de laje com espessura maior – apoiado (rotulado);
- Contorno de laje com espessura menor – engastado;
- Contorno externo do pavimento – apoiado (rotulado).

A partir dos critérios estipulados, o pavimento definido ficou com a configuração demonstrada na Figura 8.

Figura 8 - Planta baixa – condições de contorno



Fonte: Beatriz Vitali Werner, 2013

As espessuras (h) de cada laje estão demonstradas na planta, conforme Figura 6. Para a utilização no cálculo através das Tabelas de Bares, Czerny e Marcus, as vigas e pilares inicialmente foram definidos com dimensões da seção de 12x50cm e 20x40cm, respectivamente, embora as dimensões desses elementos não sejam relevantes nestes dois métodos, uma vez que os tratam como elementos rígidos (indeformáveis), não influenciando no estudo das lajes.

Para o cálculo pelo Método dos Elementos Finitos, que analisa a estrutura como um pórtico espacial, os pilares foram considerados com dimensões da seção de 20x40cm; quanto às vigas, foram efetuados dois cálculos com dimensões distintas para salientar a diferença de considerações dos métodos. Inicialmente foram utilizadas as dimensões da seção de 12x50cm, e posteriormente, com o intuito de simular nas vigas a mesma rigidez proposta pelo outro método, foram definidas as dimensões da seção de 12x250cm.

Os máximos momentos fletores negativos, calculados com as informações das tabelas, apresentam resultados isolados para cada laje. Por serem lajes contínuas, após o cálculo desses momentos, foram feitas compatibilizações entre os resultados, através dos critérios demonstrados na Equação 15, adotando-se o maior valor.

$$X_{1,2} \geq \begin{cases} \frac{X_1 + X_2}{2} \\ 0,8 \cdot X_1 \\ 0,8 \cdot X_2 \end{cases}$$

Equação 15

## 2.3 CRITÉRIOS DE DIMENSIONAMENTO

Os resultados foram obtidos através de cálculos considerando a estrutura no Estado Limite Último (ELU), que conforme a NBR 6118:2007, define como coeficiente de ponderação de resistência para o concreto ( $\gamma_c$ ) de 1,4.

Ainda conforme a NBR 6118:2007 “Ações permanentes são as que ocorrem com valores praticamente constantes durante toda a vida da construção”. Essas ações são divididas em diretas e indiretas. “As ações permanentes diretas são constituídas pelo peso próprio da estrutura e pelos pesos dos elementos construtivos fixos e das instalações permanentes”. No estudo, foram considerados como ações permanentes diretas, o peso próprio da estrutura, considerando o peso do concreto armado com 2.500Kgf/m<sup>3</sup>, o peso do enchimento para a regularização da superfície com 120Kgf/m<sup>2</sup>, e o peso do revestimento com 30Kgf/m<sup>2</sup>.

As ações variáveis, também são divididas em diretas e indiretas, e são constituídas por cargas acidentais, como o uso da construção, considerando pessoas, móveis, veículos, entre outras cargas. Para o estudo, considerou-se uma carga acidental de 200Kgf/m<sup>2</sup>. Utilizou-se o mesmo coeficiente de ponderação para as ações permanentes e variáveis de 1,4.

O módulo de deformabilidade/elasticidade transversal do concreto à compressão, e o máximo deslocamento imediato, que não consideram efeitos de fissuração e fluência, foram estimados de acordo com a NBR 6118:2007, através das Equações 16 e 17, respectivamente.

$$E_{ci} = 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}} \quad \text{Equação 16}$$

Sendo:

$f_{ck}$  → resistência característica à compressão do concreto (aos 28 dias) (MPa).

$$a_{m\acute{a}x} = \frac{L_x}{250} \quad \text{Equação 17}$$

Sendo:

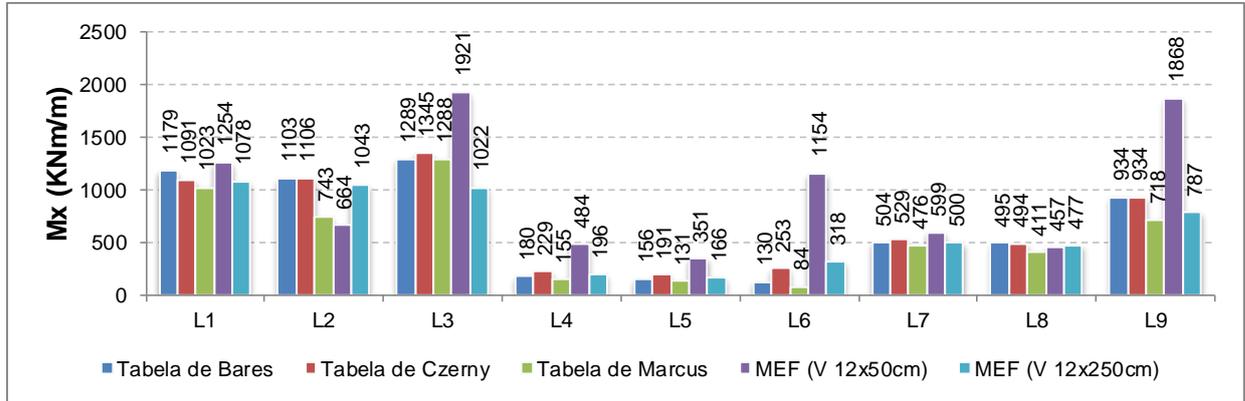
$l_x$  → menor lado da placa (laje) (m ou cm);

## 3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Com o intuito de comparar e quantificar as diferenças, a partir dos resultados obtidos no dimensionamento, elaborou-se as Figuras 9, 10, 11 e 12, demonstrando os valores dos momentos fletores máximos obtidos para cada tipo de laje, em cada

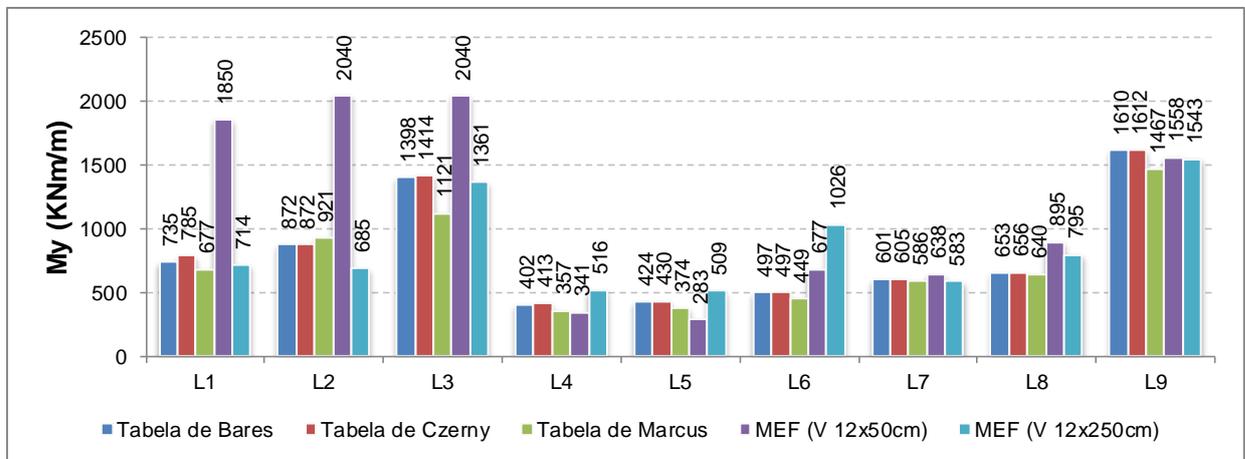
método estudado. Para os eixos X e Y, descritos nas figuras, considerou-se o plano cartesiano global ilustrado na Figura 8.

Figura 9 - Máximo momento fletor positivo na direção X



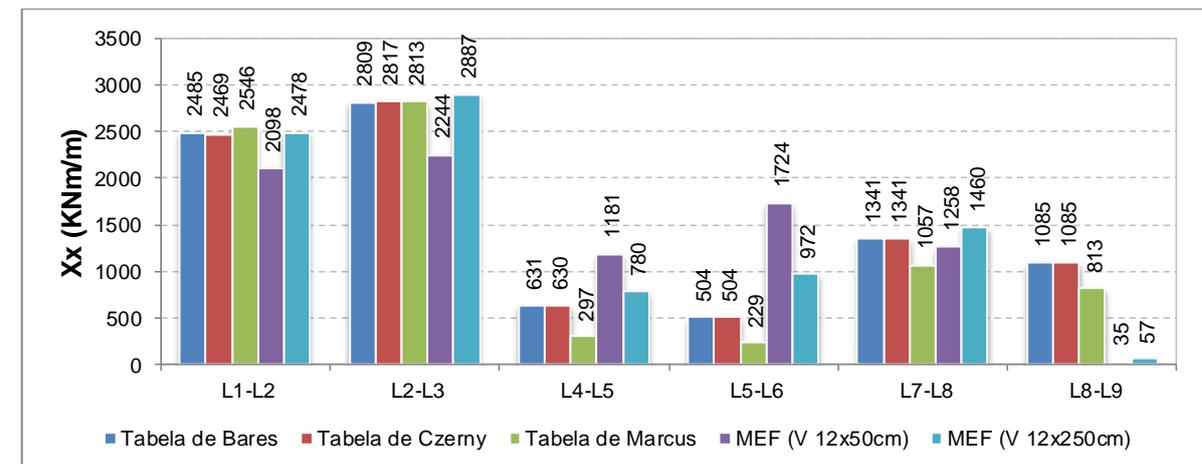
Fonte: Beatriz Vitali Werner, 2013

Figura 10 - Máximo momento fletor positivo na direção Y



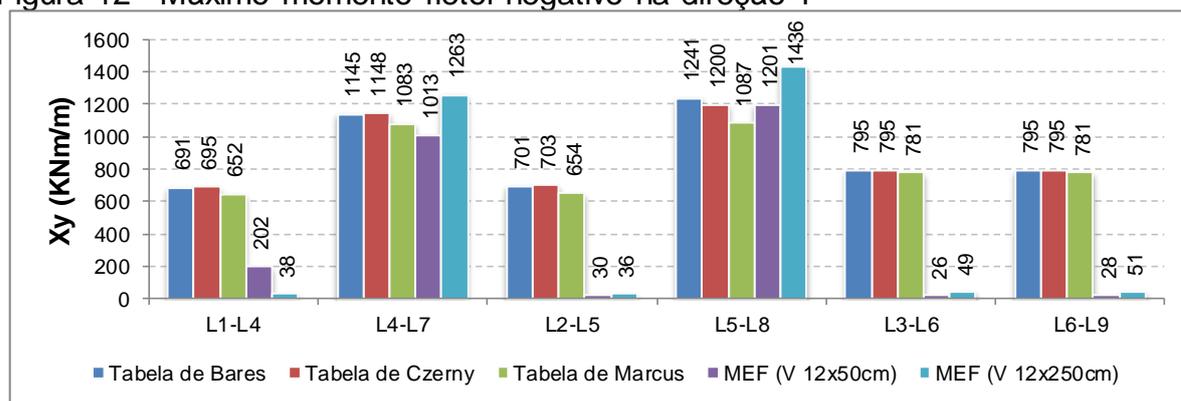
Fonte: Beatriz Vitali Werner, 2013

Figura 11 - Máximo momento fletor negativo na direção X



Fonte: Beatriz Vitali Werner, 2013

Figura 12 - Máximo momento fletor negativo na direção Y



Fonte: Beatriz Vitali Werner, 2013

Os resultados apresentados demonstram que os dimensionamentos realizados manualmente com o auxílio das tabelas (Bares, Czerny e Marcus), não obtiveram grandes variações entre si, quando comparadas com as variações das diferenças de todos os métodos estudados. Com relação aos valores de  $M_x$ , com exceção da laje L6 com variação de 66,8%, as demais ficaram abaixo de 32,8% de variação; em  $M_y$  todas as lajes apresentaram variações abaixo de 20,7%. Nos momentos negativos, na direção X, as lajes L4-L5 e L5-L6 tiveram variações acima de 50% (52,9% e 54,8% respectivamente), o restante abaixo de 25,1%; em relação ao  $X_y$ , todas as lajes tiveram variações de no máximo 12,4%.

Tomando-se como base o maior e o menor valor encontrado para os momentos em cada laje, entre todos os métodos aplicados, elaboraram-se as Tabelas 1, 2 e 3, que demonstram a variação entre os resultados.

Tabela 1 - Variação dos resultados para momento máximo positivo

Laje	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8	L9
$M_x$	18,4%	40,0%	46,8%	68,0%	62,7%	92,7%	20,5%	17,0%	61,6%
$M_y$	63,4%	66,4%	45,0%	33,9%	44,4%	56,2%	8,6%	28,5%	9,0%

Fonte: Beatriz Vitali Werner, 2013

Tabela 2 - Variação dos resultados para momento máximo negativo ( $X_x$ )

Laje	L1-L2	L2-L3	L4-L5	L5-L6	L7-L8	L8-L9
$X_x$	17,6%	22,3%	74,9%	86,7%	27,6%	96,8%

Fonte: Beatriz Vitali Werner, 2013

Tabela 3 - Variação dos resultados para momento máximo negativo ( $X_y$ )

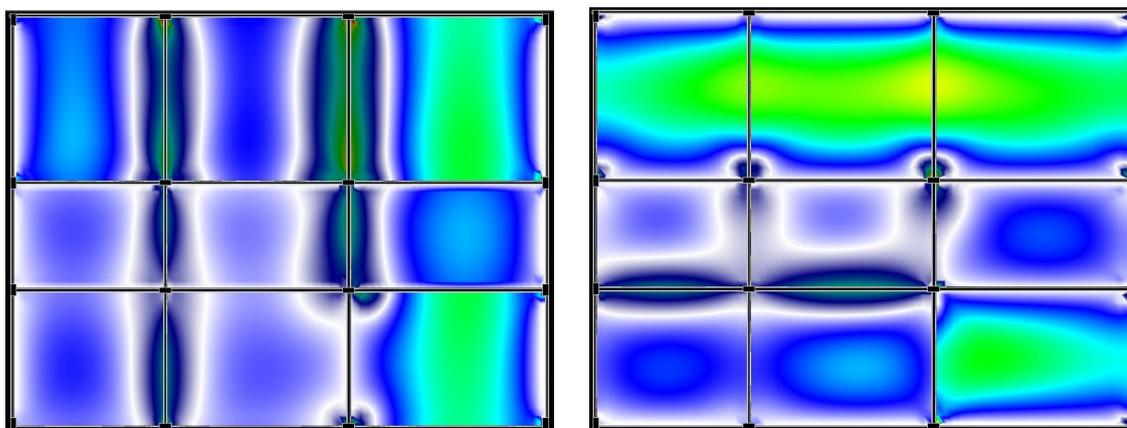
Laje	L1-L4	L4-L7	L2-L5	L5-L8	L3-L6	L6-L9
$X_y$	94,5%	19,8%	95,7%	24,3%	96,7%	96,5%

Fonte: Beatriz Vitali Werner, 2013

Observa-se que para o momento máximo positivo, a maior variação ocorreu na Laje L6, com 92,7%, e a menor, na Laje L7, com 8,6%. Em relação ao momento máximo negativo, a maior variação, apresentou-se nas Lajes L3-L6, com 96,7%, e a menor nas Lajes L1-L2, com 17,6%.

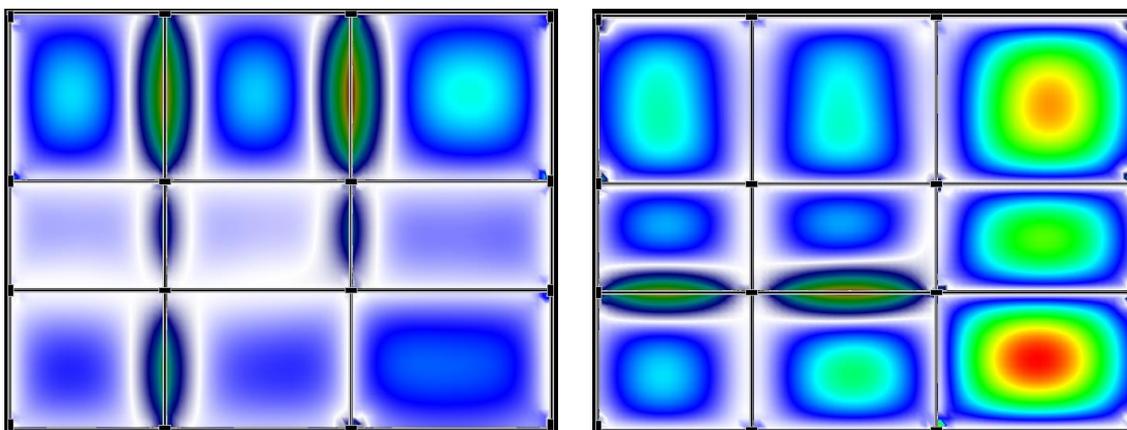
O MEF dimensionado com vigas de 12x250cm teve o intuito de simular a situação estudada pelos outros métodos: vigas rígidas (indeformáveis). O aumento da altura da viga, de fato aproximou os resultados nos momentos máximos positivos, no entanto para o encontro de lajes com espessuras diferentes (L8-L9, L1-L4, L2-L5, L3-L6 e L6-L9), os momentos máximos negativos reduziram de 93,6% a 94,5%; as Figuras 13 e 14 ilustram essa variação de comportamento influenciada pela altura das vigas, baseados na legenda ilustrada na Figura 15.

Figura 13 - Momentos fletores nas direções X e Y - Vigas de 12x50cm



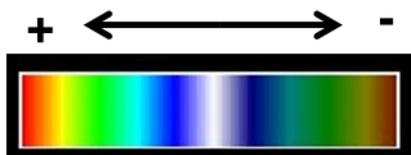
Fonte: Beatriz Vitali Werner, 2013

Figura 14 - Momento fletores nas direções X e Y - Vigas de 12x250cm



Fonte: Beatriz Vitali Werner, 2013

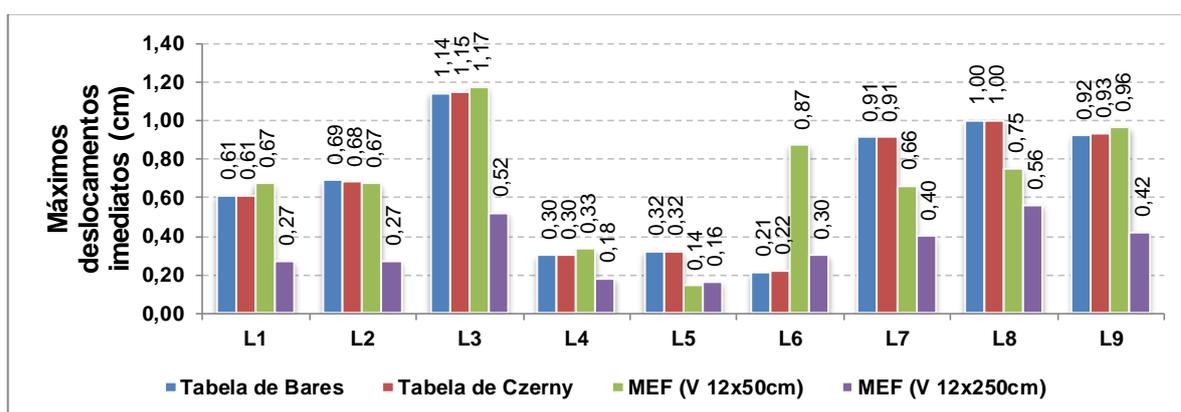
Figura 15 - Legenda



Fonte: Beatriz Vitali Werner, 2013

Os máximos deslocamentos imediatos calculados, ilustrados na Figura 16, estão todos abaixo dos limites máximos permitidos por norma, demonstrados na Tabela 4.

Figura 16 – Máximo deslocamentos imediatos (cm)



Fonte: Beatriz Vitali Werner, 2013

Tabela 4 – Máximos deslocamentos imediatos (cm) conforme NBR 6118:2007

Laje	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8	L9
$a_{m\acute{a}x}$ (cm)	2,05	2,25	2,25	1,45	1,45	1,45	1,85	1,85	1,85

Fonte: Beatriz Vitali Werner, 2013

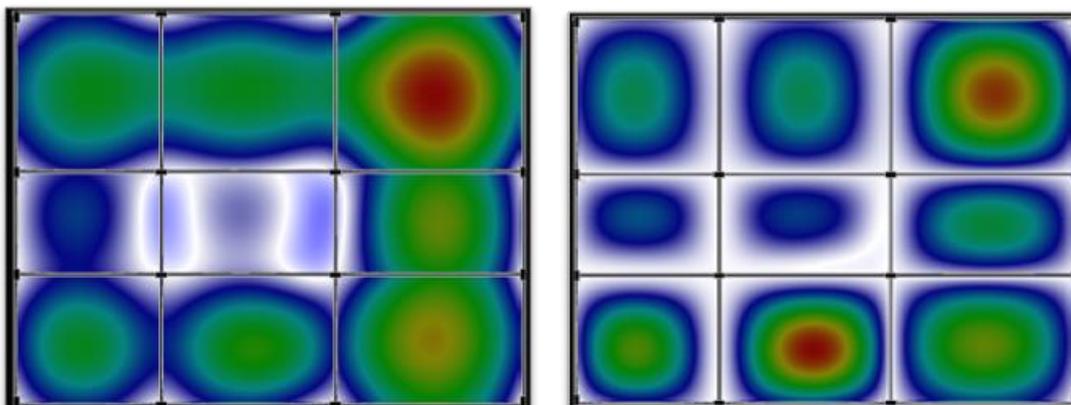
Os resultados demonstram que os máximos deslocamentos imediatos, entre as Tabelas de Bares e Czerny, tiveram uma variação máxima de  $\pm 0,01\text{cm}$ , e em 5 (cinco) dos 9 (nove) casos os valores são iguais. Ao compará-los com o MEF considerando vigas de 12x50cm, os resultados nas lajes L1, L2, L3, L4 e L9 também tiveram uma pequena variação, de no máximo  $\pm 0,06\text{cm}$ ; nos casos das lajes L5, L7 e L8, tiveram variações um pouco maiores, de até  $\pm 0,25\text{cm}$ , e a laje L6, apresentou uma variação de 75,9% correspondente a uma diferença de 0,66cm.

Analisando os resultados do MEF considerando vigas de 12x250cm, e das Tabelas de Bares e Czerny, observa-se que somente na Laje L6 o valor aumentou em

0,09cm (30%), nos 8 (oito) casos restantes, os valores baixaram de 40,0% a 56,0%, o que demonstra a influência direta das vigas no dimensionamento das lajes.

A Figura 17 ilustra o comportamento do pavimento dimensionado pelo Método dos Elementos Finitos, em relação aos deslocamentos, baseados na legenda ilustrada na Figura 15.

Figura 17 - Deslocamentos imediatos - Vigas 12x50cm e 12x250cm respectivamente



Fonte: Beatriz Vitali Werner, 2013

#### 4. CONCLUSÕES

Os resultados explicitados demonstram que a estrutura analisada globalmente através dos Métodos dos Elementos Finitos, sofre influência direta das vigas de apoio, e que a suposta rigidez desses elementos, considerada pelos métodos Teoria Simplificada de Marcus e Resolução por Meio de Séries, torna-os restritos.

Em todos os métodos abordados, os deslocamentos enquadraram-se dentro dos limites da NBR 6118:2007, no entanto, no MEF observou-se a influência direta das vigas de apoio, que fez com que as 9 (nove) lajes, com vigas de 12x50cm, trabalhassem em conjunto, influenciando nos valores e posicionamento dos máximos deslocamentos de todo o pavimento, confirmando a importância de uma análise global de toda a estrutura.

Conclui-se que, como os métodos estudados foram elaborados através de conceitos distintos, justificando-se as variações encontradas nos resultados, não apresentaram um padrão nas diferenças. Por essa razão os métodos devem ser aplicados isoladamente, seguindo seus preceitos, ficando a critério de cada projetista a escolha do método a seguir. Tendo em vista o dimensionamento de estruturas cada vez mais esbeltas, com grandes vãos, e elevados esforços, a aplicação do Método

dos Elementos Finitos, por simular um comportamento da estrutura mais próximo do real, torna-se mais adequada, por isso a importância de estudá-lo.

Os resultados e conclusões apresentados aplicam-se a este estudo, uma vez que as características do pavimento definido foram propositalmente para se enquadrar nas condições de contorno impostas pelos métodos Teoria Simplificada de Marcus e Resolução por Meio de Séries. A obtenção de resultados mais conclusivos necessitaria de intenso estudo e análises experimentais, com base em resultados de métodos diferentes, aplicados em elementos similares.

Como sugestão para continuidade desse comparativo, recomenda-se o dimensionamento de um pavimento com uma única laje isolada, que nos dois primeiros métodos, as condições de contorno seriam obrigatoriamente apoiadas (rotuladas), ao contrário de Métodos dos Elementos Finitos, que ainda assim permitiria as situações de engastamento e semi-engastamento.

## 5. REFERENCIAL BIBLIOGRÁFICO

ARAÚJO, José Milton de. **Curso de concreto armado**. Rio Grande, RS: Editora DUNAS, 2003. 2 v.

ASSAN, Aloisio Ernesto. **Método dos elementos finitos: primeiros passos**. Campinas, SP: UNICAMP, 1999.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Projeto de estruturas de concreto: procedimento**. Rio de Janeiro: ABNT, 2007.

BASTOS, Paulo Sérgio dos Santos. **Lajes de concreto**: notas de aula. Bauru, SP. UNESP, 2005.

BOTELHO, Manoel Henrique Campos, MARCHETTI, Osvaldemar. **Concreto armado, eu te amo**. São Paulo: Edgard Blücher, 2006. v.1.

CARVALHO, Roberto Chust; FIGUEIREDO FILHO, Jasson Rodrigues de. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado**: segundo a NBR 6118:2003. 3. ed, São Carlos, SP: EDUFSCAR, 2007.

ROCHA, Aderson Moreira da. **Concreto armado**. São Paulo: Ed. Nobel, 1985 - 1999. 1 v.

SORIANO, Humberto Lima; LIMA, Silvio de Souza. . **Método de elementos finitos em análise de estruturas**. São Paulo: EDUSP, 2003.