UNIVERSIDADE DO EXTREMO SUL CATARINENSE – UNESC
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MESTRADO EM EDUCAÇÃO

MARLENE BECKHAUSER DE SOUZA

O ENSINO DO CONCEITO DE NÚMERO: OBJETIVAÇÕES NAS PROPOSIÇÕES DAVYDOVIANAS E FORMALISTA MODERNA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade do Extremo Sul Catarinense - UNESC, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação.

Orientador: Prof. Dr. Ademir Damazio

CRICIÚMA
2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

S729e Souza, Marlene Beckhauser de.
O ensino do conceito de número : objetivações nas proposições davydovianas e formalista moderna / Marlene Beckhauser de Souza ; orientador : Ademir Damazio. – Criciúma : Ed. do Autor, 2013.
237 f. : il. ; 21 cm.

Dissertação (Mestrado) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Programa de Pós-Graduação em Educação, Criciúma, 2013.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Ensino de matemática. 3. Número – Conceito. 4. Proposição davydoviana. 5. Proposição formalista moderna. I. Título.

CDD 22. ed. 372.7

Bibliotecária Eliziane de Lucca Alosilla – CRB 14/1101
Biblioteca Central Prof. Eurico Back - UNESC

MARLENE BECKHAUSER DE SOUZA

O ENSINO DO CONCEITO DE NÚMERO: OBJETIVAÇÕES NAS PROPOSIÇÕES DAVYDOVIANAS E FORMALISTA MODERNA

Esta dissertação foi julgada e aprovada para obtenção do Grau de Mestre em Educação no Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade do Extremo Sul Catarinense.

Criciúma, 8 de abril de 2013.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ademir Damazio
(Orientador – UNESC)

Profa. Dra. Josélia Euzébio da Rosa
(Membro – UNISUL)

Prof. Dr. Vidalcir Ortigara
(Membro – UNESC)

Prof. Dr. Alex Sander da Silva
(Suplente – UNESC)

Prof. Dr. Gladir da Silva Cabral
Coordenador do PPGE-UNESC

Marlene Beckhauser de Souza
Mestranda

Aos meus filhos João Paulo e Clara e ao meu Mestre, Professor Ademir Damazio.

AGRADECIMENTOS

"Existem pessoas que tornam nossa caminhada mais significativa... Pela companhia, pelo apoio, pelo carinho." (Autor desconhecido)

A conclusão de mais esta etapa acadêmica só foi possível graças à colaboração de muitas pessoas, por isso, nesse momento, quero agradecer especialmente:

Ao meu orientador, **Prof. Dr. ADEMIR DAMAZIO**, por quem tenho profunda admiração e respeito, que com toda a sua sabedoria, humildade, paciência e dedicação contribuiu, significativamente, para a conclusão desta dissertação;

Aos participantes da banca de qualificação, **Prof. Dra. JOSÉLIA EUZÉBIO DA ROSA** e **Prof. Dr. VIDALCIR ORTIGARA** pelas sugestões;

A todos os integrantes do grupo **GPEMAHC -** Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: uma Abordagem Histórico-Cultural, pela acolhida;

Ao Fundo de Apoio à Manutenção e ao Desenvolvimento da Educação Superior**- FUMDES**, pelo apoio financeiro concedido;

Aos **professores** e **funcionários** do Programa de Pós-Graduação – Mestrado em Educação – UNESC;

Aos meus filhos **JOÃO PAULO** e **CLARA**, por serem filhos queridos, abençoados e amados, que suportaram minha ausência num momento tão difícil de nossas vidas;

A minha mãe **ALBERTINA**, pela compreensão e ajuda com meus filhos;

Ao meu pai **JOÃO**, que foi o grande alicerce nesses dois anos;

A minha irmã **MARI**, pela preocupação e colaboração;

À **AMANDA MAZON FRAGA**, diretora do Centro Educacional Alpha Ideal e toda sua equipe, pela confiança e incentivo;

À **CRISTINI KUERTEN MAIA**, Secretária da Educação e Desporto do município de Braço do Norte – 2009 a 2012 – e a equipe do Núcleo de Desenvolvimento e Aprendizagem pela flexibilidade de horário disponibilizada no trabalho para frequentar as aulas e orientações dessa pesquisa;

À **LUIZA LIENE BRESSAN**, pelo carinho e apoio;

A todos os meus **AMIGOS** (sintam-se todos inclusos) pessoais e profissionais que, de alguma forma, compartilharam comigo os momentos de estudo e desabafo;

A vocês: **MUITO OBRIGADA!**

"De nada valem as ideias sem homens que possam pô-las em prática." Karl Marx

RESUMO

A presente dissertação é decorrente de inquietações sobre a atividade pedagógica, em particular as ações, e suas possibilidades para o que entendemos de efetiva apropriação de conceitos científicos, por parte dos estudantes. Nesse contexto, analisamos duas propostas de ensino: a davydoviana e a formalista moderna, no que se refere à introdução do conceito de número, no primeiro ano do Ensino Fundamental. O problema de pesquisa é expresso no seguinte questionamento: Em que se distingue o ensino do conceito de número, para o primeiro ano escolar do Ensino Fundamental, objetivado nas proposições davydovianas – com fundamento materialista histórico e dialético – em relação às tendências em Educação Matemática com fundamento formalista moderno? As referências da análise adotadas foram: o livro didático do aluno, das duas proposições, e o manual do professor da proposição davydoviana. Para tanto, esta pesquisa caracteriza-se na modalidade bibliográfica e tem como base teórica a Teoria Histórico-Cultural. As duas propostas de ensino se distinguem, em método e conteúdo, que tem como consequência: o desenvolvimento do conhecimento empírico, na proposição formalista, e do conhecimento teórico, na proposição davydoviana.

Palavras-chave: Proposição davydoviana; proposição formalista moderna; conhecimento empírico; conhecimento teórico.

ABSTRACT

To present dissertation it is due to inquietudes about the pedagogic activity, in matter the actions, and their possibilities for what understood of effective appropriation of scientific concepts, on the part of the students. In that context, we analyzed two proposed of teaching: the Davidov's propost and the modern formalist, in what refer the introduction of the number concept, in the first year of the fundamental teaching. The research problem expressed in the following question: In what does stand out the teaching of the number concept, for the first academic year of the Fundamental Teaching, done aim at in the David's propositions with historical materialistic foundation and dialético-in relation to the tendencies in Mathematical Education with modern formalistic foundation? The references of the analysis adopted were: the student's text book, of the two propositions, and the teacher's of the proposition davydoviana manual. For so much, this research is characterized in the bibliographical modality and it has as theoretical base the Historical-cultural Theory. The two proposals are distinguished mainly in method and content, which results in: the development of empirical knowledge, the proposition formalistic and theoretical knowledge, the proposition davydoviana.

Keywords: Proposition davydoviana; proposition formalist modern, empirical knowledge, theoretical knowledge.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

GPEMAHC - Grupo de Pesquisa “Educação Matemática: Uma Abordagem Histórico – Cultural”
IBEP – Instituto Brasileiro de Estudos Pedagógicos
IDEB - Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
MMM - Movimento da Matemática Moderna
MM - Matemática Moderna
PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais
PCSC - Proposta Curricular de Santa Catarina
PISA - Programa Internacional de Avaliação dos Alunos
UNESC - Universidade do Extremo Sul Catarinense

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

A produção da presente dissertação foi movida pelo pressuposto histórico-cultural de que as relações sociais são produzidas historicamente, porém em estado permanente de vir a ser. Nesse processo, elas se complexificam cada vez mais, o que requer determinadas práticas sociais para o seu próprio entendimento como, por exemplo, o ensino e estudo. Estes são componentes inseparáveis de uma das atividades especificamente humana: a atividade educativa.

Assim, o indivíduo que opta pela profissão de professor se coloca em constante concomitância da atividade de estudo e de ensino. Essa convivência mútua produzem nossas experiências docentes que nos colocam em conflitos e nos inserem na busca de respostas para nossas angústias, dúvidas, convicções e, acima de tudo, das superações de concepções tidas como verdade insuperável. Esse processo nos envolve num movimento dialético de reflexão da realidade social na qual se insere o ensino e o estudo no contexto escolar.

Nessa trajetória, desenhamos objetos de estudo e formulamos precariamente problemas de pesquisa que, por falta de condições objetivas, não levamos à plena sistematização. Com os nossos aprofundamentos teóricos, consequência das necessidades surgidas no desenvolvimento de formação docente, constituímos o propósito da presente pesquisa: analisar possíveis diferenças entre duas propostas de ensino, no que se refere ao conceito de número no primeiro ano escolar. Para tanto, guiamo-nos por critérios como, por exemplo, de contemplar elementos conceituais de base empírica ou teórica.

A decisão por essa temática foi fortemente influenciada pelas nossas reflexões sobre a proposta de ensino de Davydov, que deram argumentos para adotá-la como referência ímpar de possibilidade de superação do atual estado crítico da educação escolar.

De acordo com Davydov (1988), o ingresso da criança na escola é marcado por várias mudanças e responsabilidades. Ela inicia também a "atividade de estudo" que deve, prioritariamente, promover apropriação dos conceitos científicos com base essencialmente teórica.

A referida atividade requer um modo de organização do ensino, que contemplem tarefas de estudo, vinculadas a ações de estudos que, por sua vez, requerem tipos especiais de tarefas particulares, cuja execução, solicitam dos estudantes determinadas operações (Davýdov, 1982). Assim sendo, a educação e o ensino passam a ter papel determinante no desenvolvimento do pensamento teórico das crianças.

Para Davydov (1988, p. 47): "Todo conceito científico é, simultaneamente, uma construção do pensamento e um reflexo do ser. Desse modo, um conceito é, ao mesmo tempo, um reflexo do ser e um procedimento da operação mental." Como decorrência, a presença da criança na escola só tem real importância se promover o seu desenvolvimento intelectual.

Mas o que há de diferente na proposta de Davydov em relação a outras que se apresentaram no contexto escolar brasileiro e mesmo mundial? Para produzir uma reflexão sobre tal questionamento, no presente estudo, adotamos como referência o Movimento da Matemática Moderna que se apresentou, no início da segunda metade do século passado, como algo inédito e superador do ensino formalista clássico, até então predominante (FIORENTINI, 1995).

Nesse sentido, organizamos a dissertação em quatro capítulos. No primeiro, expressamos nossas intenções sobre o processo de produção do problema e objetivos da pesquisa. Para tanto, dialogamos com nossa trajetória de formação e atuação profissional, principalmente, no primeiro ano do Ensino Fundamental, caracterizadas por dúvidas e certezas, continuação e superação. Além disso, discorremos sobre o modo de desenvolvimento referente a presente pesquisa.

O segundo capítulo é o espaço em que traduzimos nosso entendimento sobre os fundamentos filosóficos das duas propostas: davydoviana e modernista. A primeira tem suas bases do materialismo histórico e dialético; a segunda fundamentada no Movimento da Matemática Moderna com fundamentos da lógica formal.

No terceiro capítulo, desprendemos os esforços para apresentar, com teor reflexivo, a objetivação do conceito de número nas proposições modernistas e davydovianas, tomando por referência os livros didáticos do aluno e o livro de orientações do professor. Finalmente, último capítulo, trazemos algumas considerações sobre a pesquisa, basicamente uma síntese e perspectivas todo estudo.

1. O PROCESSO DE CONSTITUIÇÃO DO OBJETO DE PESQUISA E DO SEU MODO DE DESENVOLVIMENTO

Para o desenvolvimento do presente capítulo, apegamo-nos à compreensão de que todo estudo científico apresente, inicialmente, o esforço reflexivo do pesquisador sobre o movimento do seu pensamento, articulado à prática social, para a elaboração do teor da problemática de pesquisa. Não só isso, mas apontar o modo de apreensão do seu objeto e de produção de respostas ou novas perguntas referentes ao problema de investigação.

Por sentirmo-nos mais à vontade para organizar e expor nossas ideias referentes às definições necessárias à pesquisa dividimos o capítulo em duas seções. Na primeira – O movimento de constituição do objeto da pesquisa –, trazemos as interrogações brotadas de uma prática social, atividade pedagógica[1], que geraram entendimentos, à primeira vista, concretos. À medida que as reflexões se subsidiam em bases teóricas, eles passam a ser considerados como em processo de vir a ser, que requer delimitações para atingirmos o objeto de estudo propriamente dito. É nesse contexto que definimos o problema de pesquisa, seus questionamentos auxiliares e os objetivos.

A segunda seção – O modo de desenvolvimento do estudo – apontamos os caminhos percorridos no processo de produção das respostas ou de novas perguntas referentes ao estudo propriamente dito. Em outras palavras, prenunciamos o método, uma vez que, conforme nosso entendimento, ele se apresenta no próprio desenvolvimento da escrita do texto como um todo.

1.1 A FORMAÇÃO DOCENTE COMO BASE DA CONSTITUIÇÃO DO OBJETO DA PESQUISA

Para quem está diretamente inserido no processo educacional, pesquisar algo sobre o ensino e a aprendizagem faz confluir dois conceitos adotados pela Teoria Histórico-Cultural: o real ponto de partida e ponto de chegada. A confluência ocorre pela dificuldade de

[1] A atividade pedagógica é adotada em conformidade com Bernardes (2006), entendida como aquela que unifica dialeticamente: a atividade de ensino, própria do professor; e a atividade de estudo, peculiar aos alunos. Seu motivo mobilizador das ações e operações desenvolvidas por alunos e professores é a formação humana.

estabelecer e compreender os limites de cada momento e do processo como todo para atingir esses dois níveis de entendimento. Isso ocorre porque, na atividade docente[2], estamos em permanente estado de ação/reflexão propiciado pela necessidade de busca e superação daquilo que vivemos e presenciamos no ambiente escolar e social. Somos dominados pelo inconformismo, em relação ao modo de organização do ensino que gera desigual atenção aos alunos de distintas classes sociais e, consequentemente, propicia diferente aprendizagem, bem como desenvolvimento humano. Tal distinção se explicita no sistema educacional brasileiro, constituído de diferentes tipos de escolas: particulares, destinada às classes sociais com maior poder aquisitivo; e públicas que atendem às camadas sociais consideradas pobres, em termos financeiros. Cada qual apresenta um currículo escolar diferente. Por exemplo, conforme Vitório (2009), com as dificuldades dos estudantes em Matemática, as escolas públicas diminuem e as particulares aumentam a carga horária da referida disciplina. Nesse nosso estado de preocupações, as situações vividas são marcadas por momentos de dúvidas, certezas e perguntas se apresentam: Que nível de compreensão temos da educação escolar e do sistema de ensino? Existem outras possibilidades efetivas que não seja essa que se objetiva no contexto educativo da atualidade?

Essas interrogações permearam o processo de produção do tema, do objeto, do problema e do objetivo da presente pesquisa. Partimos do pressuposto da Teoria Histórico-Cultural, trazido da sua matriz o materialismo histórico e dialético, de que a prática social é critério essencial de todo o processo investigativo. Ou, como dizem Rosental e Straks (1958, p. 318), "o critério de verdade da imagem cognoscitiva". Então, admitimos a necessidade de explicitação das nossas vivências educacionais, pois foram essenciais para as delimitações necessárias da pesquisa. Elas constituem em espécie de divisor de águas entre o vivido, que passa a ser questionado e, por isso, torna-se possibilidades de confronto com a base teórica, que se desenvolveram no decorrer da pesquisa, a qual propiciará novas compreensões.

Assim, o vivido, em fase de novos entendimentos, se expressa nas reflexões e inquietações acerca das experiências vivenciadas durante

---

[2] Consideramos "atividade docente", como entende Leontiev (1983), entre aquelas desenvolvidas na idade adulta e determina o lugar que um indivíduo ocupa nas relações sociais, cujo motivo compreensível, por estar numa sociedade determinada pelas relações de produção capitalista, é o salário.

mais de vinte anos na educação. Nesse período de exercício da docência, deparamo-nos com muitas dificuldades inerentes ao processo de apropriação dos conhecimentos científicos que, segundo a Teoria Histórico-Cultural, é a tarefa principal do ensino escolar (DAVÍDOV[3], 1988; VIGOTSKI[4], 2001).

Ao tomarmos como referência a Proposta Curricular de Santa Catarina, PCSC, em suas duas últimas versões (1998 e 2005), e os Parâmetros Curriculares Nacionais, PCNs (1997), documentos norteadores do atual contexto educacional, observamos uma desarticulação entre os fundamentos teóricos das literaturas utilizadas com as orientações metodológicas neles explicitados. Não entraremos nas especificidades desses documentos, pois os mesmos não são objeto de estudo dessa pesquisa. Limitar-nos-emos apenas em ressaltar a falta de clareza nos pressupostos teóricos, dos documentos apontados, que citam os pensadores Vigotsky e Piaget como sendo pares de uma mesma compreensão de realidade, mas pertencem a linhas teóricas distintas. Por exemplo, Duarte (2001, p. 85) diz: “[...] os PCNs adotam como referencial teórico um construtivismo eclético, que incorpora expressões e conceitos de diversas correntes psicológicas e educacionais, fazendo-se passar por uma grande síntese [...]”.

Conforme Rosa (2006), a incompatibilidade teórica também é explicitada na Proposta Curricular de Santa Catarina ao afirmar que suas orientações metodológicas e a sequência dos conceitos são antagônicas em relação às proposições de Vigotsky, no que diz respeito à relação entre conceitos científicos e espontâneos, e de Davydov, no referente à relação entre pensamento teórico e o pensamento empírico.

Nossas leituras dessas duas Propostas, PCNs e PCSC, também confirmam tal incongruência teórica. A dúvida maior foi se apenas as duas obras de Vigotsky – Pensamento e Linguagem e A Formação Social da Mente – nelas referenciadas, dariam conta de fundamentar um sistema de ensino. Nosso questionamento tem por base as reduções e contornos que os referidos livros sofreram em relação aos textos originais, como por exemplo, as reflexões marxistas que foram cortadas nas traduções para o inglês, e daí para o português (ROSA, 2006).

---

[3] Em todo o texto a escrita Davydov diz respeito a nossa referência ao autor, enquanto as demais notações atendem fielmente a forma que aparece na referência citada.

[4] Usaremos a notação Vigotsky quando a menção é feita por nós. As demais traduzem a escrita adotada na obra referenciada.

Essas desarticulações entre as concepções teóricas e práticas pedagógicas, que se apresentam nas escolas, dão margem para a hipótese de que elas contribuem para o baixo desempenho dos alunos nas avaliações que indicam os índices de qualidade do ensino. Por exemplo, o IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica), criada em 2007, pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), para medir a qualidade de cada escola e rede de ensino. Os resultados mais recentes, obtidos em 2011 e publicados em agosto de 2012, apontam que a média brasileira, considerando as notas do Ensino Fundamental I e II é 4,6 (INEP, 2012). A meta, até 2022, é atingir o índice de 6.0, que se tornou parâmetro por ser a média obtida nos países desenvolvidos no Programa Internacional de Avaliação dos Alunos (PISA). Conforme Salla (2011), nessa avaliação, os estudantes brasileiros foram reprovados em Matemática e Leitura, respectivamente, ocupou a 53ª posição (dentre os 57 países da amostra) e 48ª (entre 56 países).

A indisciplina teórica (TRIVIÑOS, 1995), explícita em documentos pedagógicos oficiais, norteadores da Educação Nacional e Estadual, leva-nos à elucidação de nossos entendimentos sobre o processo educativo com tendência a transformar-se, o que requereu um olhar para nossas inquietações que se manifestaram desde o curso de graduação, Pedagogia. Para tanto, tomamos como referência o trabalho de conclusão do curso pautado no entendimento do papel das concepções pedagógicas no processo de aquisição da linguagem escrita, alfabetização. O suposto era de que uma leitura atualizada, com base na Teoria Histórico-Cultural possibilitar-nos-ia novas considerações a respeito daquele objeto de estudo.

Mas outros elementos – a seguir mencionados – relacionados à educação escolarizada que se concretizaram em nossos pensamentos e agora se tornam em algo confuso, também se apresentaram no curso de graduação. Naquele nível de formação profissional para a docência, tivemos os primeiros anúncios da teoria de Davydov numa palestra sobre a Teoria da Atividade. Na época, não tínhamos conhecimento da dimensão teórica subjacente à abordagem daquela temática. Mesmo assim, despertou-nos um interesse de ampliar as leituras acerca da referida teoria. Tratava-se de algo novo, ou seja, algo produzido academicamente que precisaríamos apropriá-lo, que requeria um processo de imersão na literatura pertinente. Mas vale registrar que, naquele momento, iniciava-se o processo de opção teórica, que fundamenta a presente pesquisa.

No entanto, ela fica latente dada às circunstâncias e condições que se apresentaram na continuidade do processo de formação profissional. Ainda instigados pelos resultados obtidos na pesquisa do trabalho de conclusão do curso de graduação, procuramos o aprofundamento do conhecimento num curso de Pós-graduação - Latu Sensu - Especialização em Psicopedagogia Clínica e Institucional. Tínhamos como objetivo o entendimento sobre o processo de apropriação dos conceitos num contexto de ensino e aprendizagem que considere todos os sujeitos envolvidos, sejam eles estudantes ou professores. Essa área de conhecimento concebe o ato de aprender a partir de uma multiplicidade de fatores, que articulam as características individuais e sociais. Porém, a base teórica do curso fora outra, com raras menções à Teoria Histórico-Cultural, basicamente com algumas citações de Vigotsky.

Com o intuito de aprofundar os conhecimentos adquiridos até aquele momento, tanto na formação acadêmica como na atuação pedagógica, vislumbramos uma nova possibilidade no Programa de Pós-Graduação em Educação/UNESC, Mestrado em Educação. O ingresso ocorreu antecedido pela reflexão sobre a possibilidade de se efetivar a questão ainda oculta de estudo sobre a perspectiva histórico-cultural. Por isso, a opção pela linha de pesquisa Educação e Produção de Conhecimento nos Processos Pedagógicos, que sinalizava para a referida teoria.

Naquele momento, esvaíram-se as nossas certezas sobre a prática pedagógica, bem como defrontamo-nos com novos conceitos da referida base teórica, como por exemplo: pensamento empírico, pensamento teórico, movimento do pensamento concreto/abstrato/concreto, entre tantos. Surgem dúvidas no processo de estudo e apropriação da teoria. A principal delas diz respeito ao debate no interior da própria Teoria Histórico-Cultural sobre a distinção ou inclusão da Teoria da Atividade no seu campo de estudo. Discussão não tratada no presente trabalho, pois tínhamos uma preocupação, com certo teor pragmático, que se acentuou a partir da palestra mencionada anteriormente, traduzida no questionamento: O que seria e como se efetivaria uma proposta de ensino histórico-cultural? As disciplinas cursadas no mestrado oportunizaram o conhecimento de que a proposta de ensino de Davydov contempla de modo ímpar a Teoria Histórico-Cultural. Além disso, o seu estudo daria elementos para entender disparidades e equívocos da Proposta Curricular da rede Estadual de Educação de Santa Catarina que se diz fundamentada na mesma matriz teórica: o materialismo histórico e dialético.

Observamos, então, a existência de algo aproximativo entre uma proposta de ensino – que orienta a Educação do Estado do qual nos inserimos – e uma teoria surgida, na primeira metade do século passado, para orientar a formação de um novo homem que constituiria uma sociedade orientada pelos princípios do modo de produção socialista: o fundamento materialista histórico e dialético.

Os estudos realizados em algumas disciplinas optativas do Mestrado e esporádicas participação nas reuniões no Grupo de Pesquisa "Educação Matemática: Uma Abordagem Histórico-Cultural" (GPEMAHC/UNESC), bem como a leitura das produções científicas do referido grupo (ROSA, DAMAZIO, 2010; DAMAZIO, ROSA, SOARES, 2011; ROSA, 2012), reavivaram pensamentos extraídos na palestra anteriormente mencionada. Dentre eles reascendeu a afirmação, daquela oportunidade: Davydov apresenta o que há de mais atual em termos de proposição educativa, no referente às possibilidades dos estudantes se apropriarem dos conceitos científicos num movimento do pensamento de ascensão do abstrato ao concreto. Esse pensamento se apresentava permeados por perguntas: Que proposta é essa? Ascensão do abstrato ao concreto? Como, se o que aprendemos e até passamos a ensinar é que devemos partir do concreto para atingir o abstrato?

Inicia-se, então, o processo de entendimento de que nossa formação para docência foi marcada por princípios filosóficos positivistas, que entende a construção de um objeto de estudo pautada em métodos das ciências naturais para atingir a objetividade e ao êxito nos processos de controle sobre os fenômenos (TRIVIÑOS, 1995). Isso propiciou-nos um desenvolvimento de um pensamento empírico sobre educação, ensino, aprendizagem e, por extensão, de mundo, homem e sociedade, uma vez que víamos as realidades – educacional e social – tais como elas se apresentavam aos nossos olhos e concebidas como imutáveis.

As leituras de Vigotski (2000), Leontiev (1978), Davýdov (1982) entre outras, começaram a colocar em cheque a impregnada concepção pragmática e utilitarista de educação, qual seja: um meio de ascensão social pela via de obter melhores empregos em termos profissionais. Em outras palavras, para se dar bem na vida, financeiramente. Contrariamente, os referidos autores dizem que o ensino constitui a forma interna indispensável e geral do desenvolvimento humano. Davydov (1988) acrescenta algo mais: a base do ensino que promove o desenvolvimento é o conteúdo e dele se originam os métodos de organização do processo educativo. O conteúdo da atividade de estudo[5] é o conhecimento científico/teórico.

A proposta de Davydov e colaboradores (Elkonin, Gorbov, Mikulina, Savieliev, entre outros) centralizou nossa atenção e se constituiu no alvo para nossa dissertação. Estudá-la em sua plenitude tornou-se inviável dada as limitações de tempo e risco de superficialidade pela abrangência e profundidade de seus pressupostos e desdobramentos. Por isso, tomamos como referência a decisão de outros estudiosos do GPEMAHC, por exemplo, Rosa (2012), de estabelecer algumas delimitações para determinar um objeto de estudo, no âmbito das proposições davydovianas. No sentido de contribuir com estudo de temáticas de investigação do referido grupo, traçamos os primeiros contornos necessários à pesquisa nos próprios estudos preliminares sobre os fundamentos e os delineamentos da referida proposta (DAVÝDOV, 1982).

Nesse processo de leitura, vinham à tona os questionamentos explicitados anteriormente. Além disso, surgiam outras questões e dúvidas referentes aos pressupostos davydovianos. Por exemplo, ao dizer que a criança, ao ingressar na escola, precisa sentir – em relação ao vivido na experiência pré-escolar – o novo, tanto no conteúdo quanto no modo de organização do ensino. O novo se caracteriza pelo teor teórico dos conceitos a serem apropriados, bem como pela compreensão do lugar que passa a ocupar nas relações sociais, consequência da atividade de estudo (DAVÝDOV, 1982).

A questão que se apresentou foi: Como organizar o "novo" que rompa com as vivências pré-escolares? Novamente, desacordavam nossas concepções empíricas, adquiridas no processo formativo anterior: E a realidade pré-escolar do aluno, não se considera?

Esses questionamentos ainda eram abrangentes, pois se referiam ao ensino como um todo. Mas, aos poucos, se direcionam para uma especificidade curricular, a Matemática, em que dois pressupostos de Davydov chamaram nossa atenção. O primeiro quando estabelece que o objetivo do ensino da Matemática, desde o primeiro ano escolar é promover nos estudantes "uma concepção circunstanciada e válida de número real a partir do conceito de grandeza" (DAVÝDOV, 1982, p. 431). Novamente, se apresentam perguntas que expressam o estado confuso de nossas compreensões: Número real no início da

[5] A "atividade de estudo", conforme Leontiev (1978), é a segunda atividade principal que caracteriza uma nova fase do desenvolvimento humano, isto é, indica que a criança ocupa outro lugar nas relações sociais.

escolarização? Um professor sem graduação em Matemática daria conta de ensinar um conceito tão complexo que, atualmente, só é tratado de forma sistemática no último ano do Ensino Fundamental (SANTA CATARINA, 1998)? E as crianças teriam condições intelectuais para, desde o início, se apropriarem desse conceito? É mesmo possível organizar o ensino que atenda o referido objetivo? Essa última pergunta foi respondida afirmativamente ao depararmos com os livros didáticos· e de orientações metodológicas ao professor, produzidos por Davydov, seus colaboradores e continuadores, bem como o estudo de Rosa (2012).

O segundo pressuposto davydoviano que nos direcionou para o nosso problema de pesquisa se expressa na afirmação de que, convencionalmente, a Psicologia, a Didática e os métodos de ensino tradicionais se fundamentam pela interpretação da lógica formal (DAVÍDOV, 1988). Decorre, então, um possível tema de estudo, isto é, o fundamento materialista histórico e dialético da proposta de Davydov, em diálogo com outra concepção oposta de matemática e de seu ensino: o formalismo. A referência está no sistema de tarefas estabelecidas por Davydov e colaboradores para o ensino do conceito de número no primeiro ano do ensino fundamental, concomitantemente com uma proposição formalista.

A definição desse objeto de estudo se traduz, para nós, em devir, isto é, uma possibilidade que, para atingi-la, requer o desencadeamento de um processo de estudo, galgado em bases científicas. Em consonância com a teoria Histórico Cultural, precisávamos, então, buscar a questão geral, isto é, a base de todo o movimento do presente estudo. Isso é dado pela definição do problema de pesquisa, qual seja: em que se distingue o ensino do conceito de número, para o primeiro ano escolar do Ensino Fundamental, objetivado nas proposições davydovianas – com fundamento materialista histórico e dialético, em relação às tendências em Educação Matemática com fundamento formalista moderno?

Para tanto, voltamo-nos não para o problema de pesquisa em si, mas a sua ideia definidora, qual seja: o que se pode considerar como indicador (es) de diferença (s) essencial (is) entre as proposições de Davydov e a formalista moderna, referentes ao ensino do conceito de número no primeiro ano do Ensino Fundamental.

Por decorrência, algumas perguntas auxiliares se fizeram necessárias, como forma de delimitação do objeto da pesquisa, porém, com a preocupação de não perder de vista o contexto no qual eles se inserem:

1) Quais os elementos peculiares da proposta de Davydov, em relação com a concepção formalista moderna?

2) Davýdov (1982) estabelece como finalidade do ensino a apropriação – por parte dos estudantes, desde o primeiro ano escolar – da essência dos conceito de número, que significa encontrar o geral, que é o conceito de grandeza. Esse geral, de acordo com Rosa (2012), traz como essência a medida e, por extensão, gera os diferentes tipos de números: naturais, inteiros, racionais e irracionais, em mútua relação entre eles. Então, qual é a essência, o geral da proposta formalista moderna?

3) Que implicações das duas proposições (davydovianas e formalista) de ensino para a promoção do desenvolvimento do pensamento numérico dos estudantes?

Para tanto, dirigimo-nos para algumas especificidades, relacionadas à identificação dos elementos peculiares às duas propostas, que se constituíram em **categorias** centrais para análise. Essas se delinearam durante o estudo sobre a teoria davydoviana, entre outras obras, Davýdov (1982), Davídov (1985), Davídov (1988); bem como de pesquisas sobre a temática que as evidenciam: Rosa (2012), Damazio, Rosa e Euzébio (2012), Rosa e Damazio (2012). No momento do estudo dos livros didáticos, verificamos a possibilidade de consolidação das categorias prévias que, basicamente, orientam a identificação de elementos que diferenciam as duas propostas. São elas: 1) a base interna geral do conceito de número abordado no primeiro ano escolar de ambas; 2) as expressões do movimento conceitual que se apresenta no ensino do conceito de número; 3) evidências da base materialista histórico-dialético e da lógica formal.

1.2 O MODO DE DESENVOLVIMENTO DO ESTUDO

A definição de um modo de desenvolvimento do estudo auxiliou-nos na determinação de contornos para que o objeto e problema de pesquisa assumissem o papel principal no desenvolvimento do estudo. Nosso esforço foi para captar e reproduzir, no pensamento, o movimento real (ROSENTAL; STRAKS, 1958) das pretensões da investigação. Ou seja, inicialmente tínhamos uma percepção sincrética da própria atividade pedagógica, mas causava-nos desconforto que levaram à formulação das diversas interrogações expressas na seção anterior. Em seguida, inicia-se o processo de análise com a articulação entre nossas percepções empíricas do processo educacional e a base teórica histórico-cultural que proporcionaram não só a constituição do objeto e problema de pesquisa, como também o desenvolvimento da investigação como um todo. Por fim, elaboramos a síntese que se expressa em vários espaços da dissertação e de forma mais objetiva em seu último capítulo.

Para tanto, algumas delimitações se estabeleceram para atingirmos um melhor entendimento dos procedimentos da investigação, cujas definições se explicitarão no decurso da presente seção.

A necessidade de estabelecer procedimentos metodológicos se apresentou desde o momento da decisão pela investigação do ensino do conceito de número, num contexto de relação entre a proposição de Davydov e as propostas com teor formalista. Isso exigiu-nos um esforço de entendimento teórico, pois tomamos por base a definição de Davídov (1987) de "ensino tradicional", que ocorre com base em três características: 1) apresenta-se e se constituiu no modelo oficial do modo de produção capitalista; 2) sistema de ensino fundamentado nas teorias Ya. Komenski, I. Pestalozzi, A. Diesterweg, K. Ushinski , dentre outros pedagogos; 3) na atualidade, ainda é referência para a seleção de conteúdos e dos métodos de ensino. Também, ao afirmar que a Psicologia, a Didática e os métodos de ensino tradicionais – ao tratarem da abstração, da generalização e da formação do conceito nos escolares – se apoiam na interpretação da lógica formal. E, como tal, considera: o geral, como o igual ou semelhante no grupo de objetos; o essencial como traço distintivo da classe de objetos; a descrição da transição da percepção à representação e, depois, ao conceito (DAVÍDOV, 1988).

No Brasil, essa caracterização de "tradicional" atrelada à "lógica formal", dada por Davydov, é contemplada em diversas tendências do ensino da Matemática: formalismo clássico, formalismo moderno, empírico-ativismo, tecnicismo e construtivismo (FIORENTINI, 1995). Essas cinco expressões pedagógicas gerou a necessidade de opção por uma delas, dadas às condições de produção da presente dissertação. Consequentemente, defrontamo-nos com outra dificuldade, qual seja: a determinação de um critério. A questão que se apresentou foi: O que essas manifestações têm em comum ou se diferenciam em relação ao ensino do conceito de número, mas contrapõem ao que é definido nas proposições davydovianas?

Como questionamento, é expressão de algo prospectivo, portanto, propiciador de formulação de novas hipóteses. Para tanto, foram decisivos os estudos auxiliares sobre: pedagogias que fundamentam o ensino (LIBÂNEO, 2005), as abordagens do ensino (MIZUKAMI, 1986), bem como as tendências no ensino da Matemática no Brasil (FIORENTINI, 1995). Essas últimas propiciaram a formulação da hipótese de que, para o formalismo clássico, a base do ensino do conceito de número é a contagem e escrita dos numerais, em termos de naturais; o ensino formalista moderno centra-se na ideia de correspondência biunívoca, isto é, na relação um a um entre os elementos de dois ou mais conjuntos; o ensino empírico-ativista foca na associação entre a quantidade de objetos e a escrita numérica; o construtivismo admite o número como síntese da seriação e classificação; e o tecnicismo tem um posicionamento eclético que une as concepções formalistas clássicas e modernas.

No entanto, essas peculiaridades de cada uma das cinco tendências, referentes ao conceito de número e seu ensino, possibilitam a definição de outra hipótese de que, embora aparentemente apresentem diferenças, elas têm a mesma concepção no que se refere ao modo de obtenção/produção do conhecimento, isto é, de base empírica. Por exemplo, conforme Fiorentini (1995), o formalismo – em suas correntes clássica e moderna – apresenta uma concepção platônica e aristotélica do conhecimento matemático, que existe no mundo das ideias, independente da existência do homem. Sendo assim, a matemática é a-histórica, está adormecida nas mentes dos indivíduos e somente alguns deles terão condições de desacordá-la. Por sua vez, o empírico-ativismo entende que a matemática existe na natureza e o homem a descobre por procedimentos empíricos (FIORENTINI, 1995).

Assim, as duas hipóteses anteriores foram inspiradoras para a escolha premente do rumo da pesquisa de focar o formalismo moderno como contraponto à concepção de ensino de número de Davydov. Contribuiu para tal opção os depoimentos dos pesquisadores do GPEMAHC reveladores de que, ao exporem seus estudos referentes às proposições davydovianas para o ensino do conceito de número, as pessoas com formação em Matemática estabelecem relação e as enquadram no movimento da Matemática Moderna. Existe, pois, um vazio nos estudos do grupo (ROSA, 2012; DAMAZIO, ROSA, EUZÉBIO, 2012; ROSA, DAMAZIO, 2012) para trazer a tona possíveis equívocos da referida compreensão de proximidades das duas proposições.

Nesse sentido, emergiu outra questão de ordem epistemológica no que diz respeito à ideia modernista da Matemática de atrelar o conceito de número natural à relação entre os elementos de dois ou mais conjuntos. Por consequência, surge a necessidade de indicação do que realmente é entendido como número. Ou seja, para designar um determinado número basta a identificação de que há em comum entre

dois conjuntos por correspondência biunívoca? Tal distinção não é a expressão de um procedimento eminentemente empírico?
Esses dois questionamentos se constituíram em referenciais no processo de análise do objeto de estudo, especialmente, no que diz respeito à explicitação de elementos caracterizadores da possível diferenciação das especificidades teóricas do conceito de número que se objetiva nas proposições de ensino desenvolvidas por Davydov e também pela tendência formalista moderna. Desse modo, a pesquisa centra-se em questões filosóficas do ensino do conceito de número no primeiro ano escolar, que tem como foco as proposições davydovianas vistas como oponentes às objetivações de ensino formalista moderno. Em outras palavras, as duas proposições apresentam a mesma preocupação, isto é, o ensino da matemática em uma especificidade conceitual, o número, que, supostamente têm fundamentos distintos.

Portanto, não entendemos o referido foco como a junção das duas proposições de ensino, mas pelo que apresentam em comum, ou seja, o mesmo fim: a aprendizagem da matemática, no caso o conceito de número, por parte dos estudantes. No entanto, salientamos que no presente estudo, de início, trouxemos a hipótese de possível divergência entre ambas as concepções, tanto de ensino quanto de aprendizagem do referido conceito para o primeiro ano escolar. Isso significa dizer que pressupomos a não existência da possibilidade de um diálogo em termos pedagógico (com teor filosófico, epistemológico, psicológico, entre outros) eminentemente consensual entre elas, nem tampouco uma influência mútua capaz de promover a transformação de uma na outra. No entanto, é provável que as duas contemplem uma determinada significação conceitual – por exemplo, a ideia de biunivocidade – por ser algo produzido historicamente e se apresenta como elemento caracterizador de uma singularidade do conceito de número, no caso do natural (DAVÝDOV, 1982). Tal significação, contudo, pode se apresentar em situações bem diferentes no que diz respeito ao movimento do desenvolvimento do pensamento conceitual. A divergência pode se explicitar, conforme veremos nos capítulos posteriores, caso o formalismo moderno admite a correspondência um a um como noção básica a ser apropriada pelas crianças, cujo contato inicial é com o conceito de número natural. Por sua vez, nas proposições davydovianas, tal significação não é a referência primeira da atividade de ensino e de estudo, mas as relações entre grandezas, que caracterizam o conceito de número real (DAVÝDOV, 1982).

Vale lembrar que o conjunto desses pressupostos se apresentou no contexto de delimitação da relação entre a proposta de Davydov e a tendência de ensino formalista moderna. Pelo seu teor hipotético, caracteriza-se como um momento ainda em estágio primeiro do movimento de nossas apreensões referentes ao objeto da pesquisa. Por se tratar de uma percepção inicial, conforme Behring & Boschetti (2008) é uma manifestação aparente. Por isso, requisita a reflexão para buscar argumentos para a necessária negação da imediaticidade e da evidência, a fim de superá-la e atingir a concreticidade em seu nível teórico, pensado.

Ou seja, as apreensões do objeto da pesquisa não poderiam ter como base somente suposições ou aparências, o que requereu a busca e o entendimento das múltiplas determinações, pois de suas sínteses é que se constitui o concreto (DAVÝDOV, 1982).

Para imprimir esse processo, recorremos a uma especificidade do processo educativo: o ensino da Matemática. Mas as condições objetivas impostas oficialmente para a realização de um estudo referente à dissertação de mestrado, bem como pelos próprios critérios de cientificidade, requereu outro recorte ou delimitação. Por isso, optamos por fontes que objetivam as duas proposições (davydoviana e formalista moderna) do ensino do conceito de número, como referência para a explicitação de suas especificidades, diferenças Contudo, com a consciência instigada pela matriz teórica de que as fontes, em si, não se explicam e nem falam por si próprias como entendem e propõem outras bases teóricas, por exemplo, o positivismo. No entanto, com o cuidado para que elas fossem analisadas e problematizadas, no contexto histórico e, consequentemente, dar-lhes sentido e significado pela articulação dos determinantes sociais que geraram os seus teores e surgimento. Por entendermos esse estudo como ação da nossa atividade docente, reportamo-nos a Leontiev (1978, p. 157) ao dizer que as “ações do homem sempre estabelecem, objetivamente, um conjunto de relações: com o mundo objetivo, com as pessoas circundantes, com a sociedade, consigo mesmo”.

As fontes – dos dados da análise – adotadas, como expressões do objeto de estudo na prática social, foram os livros didáticos de matemática do primeiro escolar e manuais correspondentes de orientações aos professores, a seguir referenciados com especificação da proposição.

1) Fontes de referência para a análise da proposição davydoviana, o manual (GORBOV, S.F.; MIKULINA, G.G.; SAVIELIEV, O.V., 2008) e o livro didático (DAVIDOV, 2012). Essas obras são expressão de muitos anos de pesquisa e se constituem a base de toda a aprendizagem da Matemática naquilo a que

Davydov e colaboradores alvitram. Em outras palavras, elas representam o início com teor da essência, não só do conteúdo conceitual como também do método, que se perpetuarão coerentemente ao longo dos anos escolares dos estudantes. Além disso, apoiamo-nos em Rosa (2012), cujo estudo é pioneiro no âmbito científico brasileiro das referidas obras.

2) Fontes de análise da tendência formalista moderna, o livro didático (JÚNIOR, sd). Embora, em local algum do livro não seja indicada a data de sua publicação, entendemos que seja editado em 1975, uma vez que o livro da terceira série de mesma edição consta o referido ano. O livro foi recomendado pelo Instituto Brasileiro de Estudos Pedagógicos (IBEP), o que foi considerado com critério para a sua deferência. Ao receber o aval de um organismo oficial da Educação Brasileira, contempla princípios e concepções educativas defendidas naquele momento histórico. Além disso, ele também representa um instrumento desencadeador de um novo modo de conceber e aprender matemática das gerações que adentravam à escola, principalmente, nos anos 1970.

Portanto, como demonstração de uma prática social voltada à especificidade de duas atividades humanas – de ensino, para o professor, e estudo, para os alunos – esses livros têm algo em comum: se apresentam com *status* de um novo modo de organizar o ensino e aprendizagem da Matemática. Porém, surgem em momentos históricos diferentes com objetivos, à primeira vista, comuns, que necessitam de identificação e análise para melhor distingui-los e apreendê-los.

Com isso, reafirma-se, que os livros em referência, por si só, não dariam conta da análise do objeto de estudo. Isso significa dizer que as tarefas particulares que Davydov e colaboradores (GORBOV, S.F.; MIKULINA, G.G.; SAVIELIEV, O.V., 2008; DAVIDOV, 2012) propõem para o ensino de conceito de número e os exercícios do livro formalista moderno (JÚNIOR, sd) não explicitam as suas intenções e determinações, bem como o contexto político e ideológico no qual se constituíram como proposta educativa. Ou seja, eles dão conta de especificar as tarefas ou operações da atividade de estudo que as crianças desenvolverão para apreenderem o conceito de número, mas não apontam os seus motivos e fins no âmbito sócio histórico. Portanto, eles não abarcam a totalidade das determinações que geraram o surgimento tanto da proposta de ensino de Davydov, quanto da Formalista Moderna. Trata-se, portanto, de objetivações das duas proposições de ensino que trazem a expressão das concepções que elas defendem para o ensino e à aprendizagem do conceito de número.

Tendo por base o método materialista histórico e dialético, o suposto é de que as duas proposições de ensino do conceito de número – estão imersos em uma totalidade, caracterizada pela dinamicidade de articulações e por manter-se em equilíbrio marcado pelo seu estado de precariedade. Elas estão, pois, num estado de abstração, marcadas pela necessidade de apropriação do seu significado por aproximações sucessivas, o que requer apreensões dos momentos diferentes da gênese, e desenvolvimento da proposta de ensino do conceito de número.

A identificação e o conhecimento dessas proposições ocorreram pela síntese das aproximações e determinações. Portanto, a concreticidade do objeto de pesquisa não fora atingido pela simples definição ou pela elucidação de um fato histórico. O esforço foi para concebê-lo com base nas aproximações reflexivas a partir da objetivação nos livros e manuais didáticos.

Nessas circunstâncias, o objeto de estudo (as diferenças entre as proposições davydovianas e na tendência formalista moderna para o ensino do conceito de número) não se apresenta como algo conhecido pelo fato de estar expresso nos livros. E, como tal, oferecia a oportunidade de resolução ou desenvolvimento das tarefas que propiciam as crianças "aprender" o referido conceito matemático. Se assim considerássemos, em todos os momentos da pesquisa, estaríamos simplesmente admitindo-o como um dado. Por isso, a necessidade de refletirmos sobre os questionamentos referentes ao contexto de sua produção, dos seus atores e das finalidades. Desse modo, vislumbraríamos a possibilidade de extrapolarmos os limites empíricos para atingir à instância teórica.

Tal compreensão colocou-nos, desde o início, no compromisso de estarmos atentos ao maior número de determinações das proposições para o ensino do conceito de número. Isso oportunizou o resgate da gênese, isto é, dos processos que as constituem, porém não observáveis pelas aparências do conjunto de tarefas ou "exercícios" dos livros didáticos, que cumprem aos professores apresentarem aos estudantes. Esses processos foram em determinados momentos deixados à margem e constantemente resgatados, porém, reconstituídos por novo entendimento orientado por determinações reais.

Para tanto, fomos à literatura em busca dos fundamentos e fontes de algumas determinações das proposições de ensino. Nesse sentido, estabelecemos três tipos de leitura:

1) Os fundamentos do Materialismo Histórico-Dialético, tendo como referência os próprios escritos de Davydov (1982, 1985, 1987, 1988, 1991) e recorrência a Marx (1974), Marx e Engels (1984), Kopnin (1978), Rosental e Straks (1958), entre outros.
2) O Sistema de Ensino de Davydov, referência central da pesquisa, tendo como parâmetro o estudo anterior, com o objetivo de apreender a sua base interna universal e as manifestações particulares.
3) Os fundamentos da Matemática Moderna, o formalismo moderno, com deferência para Funchs (1970), Boyer (1974), Eves (2007), bem como autores brasileiros e estrangeiros que tratam desse movimento no contexto do ensino da Matemática: Fiorentini (1995), Valente (2006), Búrigo, (1990, 2006 e 2010), Revuz (1967), Dienes (1967), Gilbert (1974).

Esse trânsito – pela matriz filosófica da proposta de Davydov a par de uma base antagônica do formalismo moderno, como também pelos fundamentos pedagógicos de ambas e pelas suas objetivações no ensino do conceito de número em livros didáticos e orientações – foi oportuno para a definição de **categorias** para as quais convergiu a análise. São elas: 1) a base interna geral do conceito de número abordado no primeiro ano escolar de ambas; 2) as expressões do movimento conceitual que se apresenta no ensino do conceito de número; 3) evidências da base materialista histórico-dialético e da lógica formal.

Para tanto, procuramos estar atentos: aos elementos peculiares de cada uma das proposições, seus antagonismos ou convergências; aos fundamentos filosóficos das proposições; e às reflexões sobre possíveis implicações das duas proposições (davydovianas e formalista moderna) de ensino para a promoção do desenvolvimento do pensamento numérico dos estudantes. A base teórica da análise é apresenta no capítulo subsequente.

2 OS FUNDAMENTOS FILOSÓFICOS DAS PROPOSIÇÕES DAVYDOVIANAS E MODERNISTA

No presente capítulo, a preocupação volta-se ao teor filosófico da proposta educativa de Davydov, o materialismo histórico e dialético, e do Movimento da Matemática Moderna. Cada qual constituirá uma seção específica.

2.1 O MATERIALISMO HISTÓRICO E DIALÉTICO, FUNDAMENTOS DA PROPOSTA DE DAVYDOV E COLABORADORES

Ao considerarmos que Davydov compõe o grupo da terceira geração (ROSA, 2012) de pesquisadores da Psicologia Histórico-Cultural, torna-se premente que reportemos à sua matriz teórica: o materialismo histórico e dialético, de base marxista. Isso significa que essa é a fonte teórica da sua proposta de ensino, uma vez que ele próprio Davídov (1988, p. 17) diz:

> As teses da filosofia materialista têm importância decisiva na elaboração dos problemas da ciência psicológica. [...] as ideias e princípios da doutrina do materialismo dialético são adotados na psicologia, levando em consideração as tarefas concretas que se empregam nas distintas etapas do seu desenvolvimento. [...] filósofos e cientistas soviéticos empenharam-se para assimilar a essência do legado filosófico marxista-leninista, criando as bases da psicologia materialista dialética, lutando contra as tendências que, de uma forma outra, estavam ligadas ao idealismo e ao materialismo mecanicista.

Davídov (1988) faz a leitura de que Marx considera a dialética como a ciência das leis gerais do movimento, tanto do mundo exterior quanto do pensamento humano. Assim sendo, torna-se imprescindível a reflexão sobre as principais teses da concepção marxista do materialismo dialético e histórico. De acordo com Davídov (1988), para Marx, na lógica dialética, não há nada de absoluto e de definitivo. Trata-se de um momento de autoconstrução dos homens, numa relação direta com a natureza. O entendimento é de que o ser social determina a consciência do homem e não o contrário, isto é, ela gera o seu ser social.

O marxismo baseia-se no materialismo e contempla duas bases teóricas: materialismo dialético e materialismo histórico. De acordo com Triviños (1995, p. 51): “o materialismo dialético é a base filosófica do marxismo e como tal realiza a tentativa de buscar explicações coerentes, lógicas e racionais para os fenômenos da natureza, da sociedade e do pensamento”. A base de seus princípios é: a matéria, a dialética, a prática social e a aspiração de constituir-se em teoria da revolução do proletariado.

Por sua vez, conforme Triviños (1995), o materialismo histórico é a ciência filosófica do marxismo, cujo estudo se refere às leis sociológicas inerentes à vida da sociedade, de seu processo evolutivo histórico e da prática social, geradores do desenvolvimento da humanidade. Traz à tona o papel da força das ideias para promover as mudanças econômicas que geraram elas próprias. Para tanto, discute conceitos essenciais como: ser e consciência social; meios, relação e modo de produção.

Em conformidade com Triviños (1995), a lógica dialética ao permitir e exigir o movimento do pensamento concebe a materialidade histórica como a forma de organização dos homens em sociedade na história. Trata-se, então, das relações sociais que a humanidade produziu durante a sua existência que, para compreendê-la, uma possibilidade de ponto de partida é “forças produtivas”, o trabalho. Este, no entanto, não se limita a ideia de ocupação ou uma tarefa como conceitos eminentemente econômicos. Em vez disso, como categoria central das relações do homem com a natureza e com os outros homens. Por meio dele, o homem produz historicamente a sua sobrevivência, bem como a própria humanidade. Tal produção histórica e coletiva tem como referência os instrumentos – objetos, conhecimento, tecnologia e outros – por meio dos quais se estabelece a relaciona com a natureza e com os outros que promove a própria sobrevivência.

Com esses pressupostos, Marx atribui dupla característica ao método: material e histórico, que adota para estudar a realidade econômica, social, política e cultural determinada pela sociedade regida pelas relações de produção capitalista. Triviños (1995, p. 52) considera três características da concepção materialista.

> A primeira delas é a materialidade do mundo, isto é, todos os fenômenos, objetos e processos que se realizam na realidade são materiais, que todos eles são simplesmente aspectos diferentes da matéria em movimento. A segunda peculiaridade do

> materialismo ressalta que a matéria é anterior à consciência. Isto significa reconhecer que a consciência é reflexo da matéria, que esta existe objetivamente, que se constitui numa realidade objetiva. E, por último, o materialismo afirma que o mundo é conhecível. Esta fé na possibilidade que tem o homem de conhecer a realidade se desenvolve gradualmente. [...] Só depois de um processo que pode levar milhares de anos, séculos, meses ou diferentes dimensões de duração, o homem é capaz de conhecer os aspectos quantitativos, a essência, a causa, etc. do objeto.

Nesse sentido, o método materialista histórico-dialético pauta-se no esforço de separar o sujeito e do objeto, uma vez que ele tem a capacidade de intervenção na natureza, constituindo-se, assim, sujeito ativo. Conforme Kopnin (1978), uma perspectiva materialista histórica e dialética postula a apreensão do objeto e sua transformação por meio de uma atividade desenvolvida pelo homem. O movimento de constituição do pensamento, como um processo histórico de transformação do desconhecido em conhecido, cria novas possibilidades de entendimento da realidade e abre novas perspectivas e condições de entendimento e de compreensão do mundo pela humanidade.

O materialismo dialético postula as leis do pensamento que correspondem às leis da realidade. A dialética não é somente expressão do pensamento, mas a ele se acresce à realidade. Em outros termos, há confluência entre matéria e o conteúdo histórico, que requer a compreensão de que a realidade é contraditória. De acordo com Triviños (1995, p. 50):

> [...] a matéria é o princípio primordial e que o espírito seria o aspecto secundário. A consciência, que é um produto da matéria, permite que o mundo se reflita nela, o que assegura a possibilidade que tem o homem de conhecer o universo. A idéia materialista do mundo reconhece que a realidade existe independente da consciência.

Ao se admitir a matéria como ponto de partida, não se concebe em seu estado parado, mas em evolução, pois as relações que o homem estabeleceu com ela deram origem às práticas sociais. Por esse motivo, é que se apresentou a tese de sua anterioridade em relação à consciência.

Isso significa “uma mudança fundamental na interpretação dos fenômenos sociais que, até o nascimento do marxismo, se apoiava em concepções idealistas da sociedade humana” (TRIVIÑOS, 1995, p. 51).

Davýdov (1982) diz que Marx, ao buscar a explicação do conhecimento como a interpretação da realidade histórica e social, reinterpreta a dialética de Hegel. Esta tem fundamentos no idealismo, doutrina filosófica que nega a realidade individual das coisas e admite a ideia como base para conceber algo real. A dialética do materialismo considera a matéria como realidade e contrapõe-se as explicações sobre a existência da alma.

O autor em referência considera que uma das ideias mais originais do materialismo dialético foi de ressaltar a importância da prática social como critério de verdade, no que se refere à teoria do conhecimento. Além disso, ao enfocar o conhecimento no seu processo histórico, dá destaque à interconexão do relativo e do absoluto. Por extensão, as verdades científicas são entendidas como instância relativas de conhecimento, limitados pela história, porém “este relativismo não significa reconhecer a incapacidade de o ser humano chegar a possuir a verdade” (TRIVIÑOS, 1995, p. 51).

Para Davídov (1988, p. 18), o fundamento da filosofia materialista dialética está presente na obra “O Capital”, de Marx. Ressalta a importância das pesquisas de Lenin para o “estudo das bases filosóficas da Psicologia Contemporânea”. Tal deferência se justifica pela explicação de Lênin sobre a “origem das categorias lógicas”, por meio de uma análise muito detalhada dos fundamentos da dialética materialista.

Davídov (1988), ao se referir às contribuições de Lenin, diz que ele leva em consideração as próprias leis da dialética ao ter como referência a compreensão antagônica da dialética de Hegel. Assim, por exemplo, a filosofia idealista hegeliana inclui a atividade racional como categoria da lógica. Isso significa dizer que existe na realidade um princípio espiritual absoluto que só se expressa na atividade humana. Lenin não nega essa tese essencial que se refere à natureza das categorias, figuras e axiomas lógicos, isto é, que a ação é um silogismo ou uma figura lógica. No entanto, com a compreensão de que o status de significações axiomáticas é consequência de incessantes vezes que chegaram à consciência por meio da atividade prática. Davídov (1988, p. 20) considera que a tese legítima para a lógica materialista dialética, mas inadmissível à lógica formal tradicional, é: “a forma originária, de partida e universal da existência da figura lógica, é a atividade real, sensorial-prática do homem. O pensamento verbal pode ser compreendido cientificamente como forma derivada da atividade prática".

Com isso, Lenin expressa que o materialismo dialético histórico se apresenta como outro modo para o estudo universal e completo do desenvolvimento da espécie humana, de forma tal, que contemple o processo inicial de seu surgimento até as relações de produção que constituem a estrutura da sociedade.

Davídov (1988, p.12) evidencia a contribuição, que considera como inédita, de Lenin: "o homem está à frente de uma rede de fenômenos naturais. O homem instintivo, o selvagem, não se distingue da natureza. O homem consciente se distingue dela."

Segundo Rosental e Straks (1958), a lógica dialética é instrumento lógico-metodológico eficaz para o entendimento do real, porque se traduz na própria expressão da relação entre as leis do pensamento e da realidade objetiva, que não se apresenta ao pensamento de imediato. As apreensões iniciais sobre o real são apenas manifestações de seus elementos perceptíveis, como uma unidade caótica. Como tal, de início, não evidenciam seus diferentes aspectos e relações.

Pode-se dizer, então, que a lógica dialética é modo de estudar e descrever as formas – que estão na base do desenvolvimento de toda cultura material e espiritual da sociedade – historicamente significativas e universais da atividade prática e mental das pessoas.

Nesse contexto, importa o conceito de atividade, que tem sua origem e caracterização lógico-filosófica sobre o desenvolvimento do homem na teoria materialista dialética. Por sinal, o referido conceito, no entendimento de Davídov (1988), é uma das ideias leninistas no campo da lógica dialética que contribuiu decisivamente para a definição do objeto de estudo da Psicologia, hoje denominada histórico-cultural. Vale dizer que Lênin indicou a importância da história do desenvolvimento mental das crianças para estudar os problemas da dialética.

> [...] o conceito de atividade é introduzido na ciência contemporânea pela lógica dialética, que examina, a partir de um determinado ponto de vista, a estrutura universal e os esquemas universais da atividade e, o mais importante, o desenvolvimento histórico desta nos processos de reflexo e transformação pelo homem do mundo natural e de si próprio (DAVÍDOV, 1988, p. 13).

O homem satisfaz suas necessidades por meio de movimentos vivos (ou ações) realizados no contexto social; cujo conjunto caracteriza sua atividade que, com mediação da psique, adquire a forma de consciência. Esta conserva, simultaneamente, as funções gerais da psique: estruturação das imagens da realidade, bem como a busca e a prova das ações sobre as bases das imagens (DAVÍDOV, 1988, p. 23).

Como estudioso da teoria histórico-cultural, Davydov filia-se ao pressuposto filosófico do marxismo-leninismo que define a atividade como a abstração teórica de toda prática humana universal, isto é, de caráter histórico-social. Ao analisá-la em sua essência inter-relaciona com outros conceitos tais como: trabalho, organização social, universalidade, liberdade, consciência, objeto de uma finalidade, que são próprios do sujeito genérico. Toda atividade humana está determinada por sua prática social. Por exemplo, a lógica dialética entende que os conceitos científicos surgem e se formam na conexão do desenvolvimento dos objetos com os meios de domínio prático sobre eles.

Desse modo, o conceito filosófico-psicológico materialista dialético da atividade tem como essência a relação entre o sujeito humano como ser social e a realidade externa. Porém, não de forma direta, mas mediada pelo processo de transformação e modificação da referida realidade. Seu modo inicial e universal é as transformações e mudanças, pelo sujeito social, dos instrumentais que se dirigem a uma finalidade.

Independentemente da sua vontade, as relações estabelecidas pelo homem vinculam-se à sua necessidade social. Desse modo, o homem, distingue-se da natureza, pois toma consciência e conhecimento, adquiridos no próprio envolvimento com a sociedade, o que lhe possibilita o domínio sobre o mundo natural, impulsionado pelo motivo da atividade.

As transformações ocorrem tanto sobre a realidade sensorial e corporal quanto à prática humana material produtiva. Elas constituem a atividade laboral criativa do homem que, por meio da história da sociedade, formam a base sobre a qual surgem e se desenvolvem as diferentes formas da atividade espiritual humana, entre outras, a cognitiva, artística, religiosa.

No processo do desenvolvimento histórico-social do homem, na concepção de Davydov e demais autores adeptos do materialismo histórico dialético, o trabalho foi a base genética para os demais tipos de atividades humanas, como a atividade do jogo e do estudo, consideradas como principais por Leontiev (1978). Na atividade de estudo, o objetivo é a apropriação da experiência socialmente elaborada (conhecimentos e capacidades) que supõe a formação, mesmo nos estudantes de menor idade, de abstrações e generalizações que constituem a base do pensamento teórico (DAVÍDOV, 1988).

Para Davídov (1988), essas compreensões diferem daquelas que existiram nas diversas teorias que permearam a história da psicologia, principalmente, no que diz respeito aos problemas da aprendizagem e da educação. Tais questões se tornam essenciais, na atualidade, para a psicologia evolutiva e pedagógica por trazerem o seguinte questionamento: A aprendizagem e a educação do homem determinam ou não os processos de seu desenvolvimento psíquico?

No entanto, o estudo desse questionamento e de toda a realidade, conforme Davídov (1988) tem como um dos princípios de análise a contradição para a apreensão do que dela é essencial. Para tanto, o caminho lógico, isto é, o movimento do pensamento se dá a partir da realidade dada, ou seja, do real aparente e, por meio de abstrações ou elaborações do pensamento, chegar ao concreto.

Rosental e Straks (1958, p. 298) consideram "o abstrato e o concreto como outras categorias epistemológicas, que possuem um conteúdo objetivo, ou seja, refletem as leis objetivas pelas quais se regem os fenômenos da natureza e da sociedade." No contexto da dialética marxista, elas têm importância no processo de compreensão do conhecimento como lógica e de captação do reflexo da realidade objetiva, na consciência humana.

Nesse contexto, é que se explicitam as diferenças entre conteúdo do pensamento empírico e do pensamento teórico, concreto pensado. Por sinal, uma das principais questões discutidas pela teoria histórico-cultural, nas suas relações com a formação dos conceitos. De acordo com Davídov (1988), o desenvolvimento do psiquismo ocorre no processo de apropriação dos conhecimentos elaborados historicamente, assim a qualidade do conhecimento determina a forma do pensamento, isto é, o conhecimento empírico corresponde a um pensamento também empírico, e um conhecimento teórico a um pensamento teórico.

O pensamento empírico opera mediante os conhecimentos cotidianos, no qual o processo consiste na comparação de objetos-sensoriais obtendo como produto a classificação do mesmo. Desse modo, "os alunos gradualmente são levados as generalizações por meio da observação e o estudo do material concreto dado visualmente e captado sensorialmente (DAVÍDOV, 1988, p.103)."

Nesse sentido, a atividade cognoscitiva se manifesta de diferentes formas: símbolos, sinais e palavras, e essas representações podem ser observadas e constatadas pela percepção que determinará a que classe os objetos pertencem. “Sobre a base das designações verbais dadas às representações gerais e aos resultados das observações diretas, o homem pode estruturar juízos (DAVÍDOV, 1988, p. 71)”, isto é, as palavras podem representar um objeto e suas particularidades, bem como o conteúdo de maneira reduzida ou geral. Segundo Davídov (1988), a partir de tais representações o homem apresenta condições de elevar o pensamento a um nível bastante complexo.

O pensamento resulta das representações gerais do objeto e de sua utilidade prática, assim, as características que constituem o objeto, tanto na sua formação como utilização, permitem por meio da experiência sensorial uma abstração universal do mesmo (DAVÍDOV, 1988). No entanto, tal universalidade, constitui uma das particularidades do pensamento empírico, que apresenta a realidade objetiva por meio de abstrações adquiridas pelos órgãos do sentido.

Sendo que a lógica formal considere toda abstração universal um conceito, presume-se que o pensamento empírico admite a aquisição dos conceitos da mesma maneira, pois para esse pensamento o caráter sensorial assume a caracterização da abstração. Davídov (1988, p.72) confirma esse pensamento dizendo que: “O conhecimento empírico é o movimento na esfera desta exterioridade, a assimilação do aspecto da realidade descrito pela categoria de existência.”

Embora o pensamento empírico classifique e denomine as propriedades e relações do objeto de modo sensorial, cabe ressaltar que “o pensamento é conhecimento racional” (DAVÍDOV, 1988, p. 72), ou seja, não se pode considerar o conhecimento sensorial como algo separado, próprio e anterior ao conhecimento racional. Pois, todo conhecimento humano, é produzido social e racionalmente, e se apresentam ao homem pelas sensações e percepções da realidade objetiva.

> O sensorial e o racional escreve P. Kopnín, não são dois degraus no conhecimento, mas dois momentos, que o penetram em todas as etapas do desenvolvimento. (...) A unidade do sensorial e do racional no processo do conhecimento não significa que um siga o outro, mas que um e outro participam permanentemente em nosso conhecimento. (...) No homem não se pode falar sequer do conhecimento sensorial como tal... (DAVÍDOV, 1988, p. 73).

Davídov (1988) ressalta que o “caráter racional” das percepções sensoriais do objeto, não se manifesta apenas pela forma verbal, mas também quando o homem diferencia as propriedades particulares e utilidades prática deste objeto. Para o referido autor, na base da formação do pensamento teórico está a reflexão, a análise e a experiência mental, ao qual o homem examina permanentemente os aspectos da “atividade objetal-prática” e de suas formas universais de representação.

Para Davydov a base do conceito consiste na essência do fenômeno (objeto), na qual a essência se revela juntamente com as conexões internas do mesmo, desse modo, o ensino não pode ser reduzido apenas à contemplação e representação sensorial dado num processo imediato. No entanto, a elaboração do conceito surge a partir de dados concretos, sendo estes reproduzidos no pano ideal onde se manifestam as conexões internas o que engendra a entidade concreta dada revelando assim sua essência.

Davídov (1988) concorda com Rubinstein, quando este afirma que o conhecimento não surge dissociado da atividade cognitiva do sujeito e não existe sem relação com ela. Por isso, Davídov (1988) considera o conhecimento como o resultado das ações mentais (abstração, generalização) e como processo de obtê-lo.

Para Davídov (1988), os conceitos não são criados a priori, separadamente dos elementos que se apresentam na natureza, eles são apropriações das experiências produzidas historicamente pela atividade humana com os elementos naturais.

> [...] o pensamento teórico tem seu conteúdo peculiar, diferente do conteúdo do pensamento empírico; é a área dos fenômenos objetivamente inter-relacionados, que conformam um sistema integral, sem o qual e fora do qual, estes fenômenos só podem ser objeto de exame empírico (DAVÍDOV, 1988, p. 75).

No pensamento empírico, a distinção e classificação dos objetos são descritas verbalmente por meio das observações sensoriais, isto é, a inclusão de um objeto a uma determinada classe representará a função geral do conceito. “A repetição externa, a semelhança, a separação, são as propriedades gerais da realidade captadas e “esquematizadas” pelos conceitos empíricos” (DAVÍDOV, 1988, p. 76).

Para o pensamento teórico ou formação do conceito é necessário que se considere as relações internas e essenciais do objeto, as quais não ocorrem pela observação direta do objeto. O interno se apresenta pelas relações das propriedades particulares dos elementos constituintes do objeto num todo. É justamente nessas correlações que o universal se manifesta anterior ao particular. Nesse sentido, Davídov (1988, p. 76) afirma que o "conceito teórico aparece na relação objetiva do universal e o particular (o total e a parte)", o que revela as relações internas e essenciais dos objetos.

Assim também, nas relações internas singulares, objetiva-se o concreto e o todo se manifesta na sua própria exteriorização. No entanto, as manifestações captadas no momento das inter-relações apresentam "o concreto em desenvolvimento, em movimento, em que podem ser descobertas as conexões internas do sistema e, com isso, as relações do singular e do universal (DAVÍDOV, 1988, p. 76)."

O desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes é o papel que Davýdov (1982) atribui à educação escolar. O referido autor é enfático na proposição de que a atividade educativa deve propiciar, ao aluno, o desenvolvimento de um grau de consciência elevado, em conformidade com o estágio atual do desenvolvimento do homem atual. Por isso, estabelece a relação entre o ensino e a aprendizagem, bem como diferencia o conhecimento sistematizado pelas ciências naturais ou sociais, daquele desenvolvido pelo aluno no seu cotidiano.

Dessa maneira, o desenvolvimento do pensamento teórico é considerado a categoria central da atividade de estudo. Tal finalidade só será atingida pelo processo de apropriação conceitual de teor científico que, segundo Davídov (1988), foi omitido, historicamente, pela maioria dos sistemas de ensino. Em suas palavras:

> O conteúdo e os métodos do ensino primário vigentes se orientam predominantemente à formação, nos escolares dos primeiros graus, das bases da consciência e do pensamento empíricos, caminho importante, mas não o mais efetivo na atualidade, para o desenvolvimento psíquico das crianças (DAVÍDOV, 1998, p. 59).

Portanto, nos estabelecimentos de ensino, predomina a ênfase ao pensamento empírico, o que não garante a apropriação da essência dos conceitos científicos, que se diferencia dos conceitos cotidianos (base do pensamento empírico) pelos processos de generalização e as vias de obtenção dos mesmos (DAVÍDOV, SLOBÓDCHIKOV, 1991). No processo de formação de conceitos científicos, bem como de suas abstrações, a referência é seu conteúdo geral e, partir dele, atingir as suas expressões particulares. Isso significa dizer que na especificidade de um determinado conceito também se manifesta modo geral de uma determinada ciência e disciplina escolar.

Em situação escolar, segundo Davídov (1988), o processo de desenvolvimento da generalização teórica é consequência do modo de organização do ensino, que privilegia as relações estabelecidas pela criança. Por exemplo, a comparação para extrair alguma propriedade dos objetos agrupados. Porém, não somente aquela que extrai alguma propriedade dos objetos agrupados, pela observação direta por meio dos órgãos dos sentidos. Pelo contrário, requer a análise dos vínculos essenciais do sistema conceitual em referência, bem como sua função no mesmo.

Desse modo, num sistema de ensino, os materiais didáticos extrapolam a função eminentemente manipulatória e visual para os estudantes observarem determinadas regularidades. Passam, pois, a se constituírem elementos mediadores tanto no processo de organização das tarefas de estudo, por parte dos professores, quanto de orientação precisa e detalhada ao estudante para que alcance o grau de desenvolvimento da generalização conceitual.

Davídov (1988) considera importante a concomitância, na análise, da generalização e da operação abstração, como relação mútua. É nessa inseparabilidade que o estudante transforma o geral em particular, isto é, faz a necessária distinção das características gerais em um determinado objeto, bem como inclui o desmembramento de outras qualidades. O conhecimento do comum que resulta da análise e de sua fixação na palavra é algo abstrato.

É esse movimento que caracteriza a passagem do concreto ao abstrato, em que no conteúdo específico do conceito teórico contempla a relação objetiva do universal e o particular. Vale destacar que o conceito teórico não se caracteriza pela inclusão dos traços comuns em cada objeto da classe, mas por aquilo que revela as inter-relações de objetos isolados dentro do todo, internamente no sistema de sua formação.

O abstrato e o concreto, na lógica dialética, são duas categorias vinculadas entre si, “dois momentos do processo de captação da essência do objeto (ROSENTA; STRAKS, 1958, p. 300).”

Davídov (1988) caracteriza o concreto pela integridade objetiva que existe como consequência da conexão das coisas singulares e argumenta com a afirmação de Marx de que é “a unidade do diverso”.

Porém, exteriormente, o concreto se forma como algo dado na contemplação, na representação, ao apreender o momento da inter-relação geral de suas manifestações. Importa que seja analisado no seu movimento, no processo de sua origem e desenvolvimento, de modo que se descubram as conexões internas do sistema e, por extensão, as relações do singular e do universal. É esse movimento que conduz para a plenitude das manifestações do todo.

Assim, o processo de generalização caracteriza-se como um dos elementos essenciais na apropriação do conhecimento teórico ou na formação dos conceitos, pelos estudantes. Consequentemente, ela se constitui em fator pedagógico determinante da finalidade principal da atividade de ensino, no espaço escolar.

Segundo Davídov (1988), a generalização tem vínculo com uma das tarefas da atividade de ensino pela sua função de sistematização ou classificação. Esta, em qualquer área do conhecimento humano – por exemplo, na geometria (figuras planas e corpos), tem ligação direta, de gênero e de espécie, com a formação dos conceitos.

Então, a generalização conceitual tem lugar na atividade de estudo. Por exemplo, na proposta de ensino de Davydov, ela se constitui parte da primeira tarefa de estudo referente ao ensino da Matemática, qual seja: que o estudante obtenha e use o "número como meio especial de comparação das grandezas (DAVÍDOV, 1988, p. 188)."

De outra parte, na atividade de ensino, o professor contribui significativamente, pois tem a função de propor tarefas particulares que conduzam os estudantes para a formação da generalização conceitual. Para Davídov (1988, p. 101):

> A formação, nas crianças, das generalizações conceituais se considera uma das finalidades principais do ensino escolar. Nos manuais de diferentes matérias, o material é disposto, em geral, de modo que o trabalho dos alunos leve à formação das correspondentes generalizações e conceitos. Os guias didáticos fornecem aos professores indicações detalhadas de como se deve dirigir este processo e verificar o nível de desenvolvimento da generalização conceitual alcançado pelas crianças.

Porém, tal participação do professor nas finalidades do ensino se insere no contexto da didática como uma expressão concreta e do método como expressão do caráter particular destas ideias.

De acordo com Davídov (1998) a formação de um conceito ocorre do seguinte modo: primeiro, a explicação do geral; segundo o esclarecimento do essencial; e, em terceiro lugar, a exposição minuciosa do objeto, ou seja, a descrição da representação por meio de sua singularidade.

Contudo, surge a pergunta: É possível a organização do ensino que se fundamente na generalização teórica? Davídov e Slobódchikov (1991) respondem afirmativamente e apresentam as seguintes condições a ser consideradas:

1) O processo de apropriação de todos os conceitos de cada disciplina escolar, por parte dos estudantes, deve ocorrer como base na análise das condições de sua origem, ou seja, não em forma de conhecimentos prontos.

2) A apropriação dos conhecimentos de caráter geral e abstrato é precedida da familiarização dos conhecimentos particulares concretos. Estes são deduzidos do abstrato a partir de sua base única. Esse processo requer uma orientação de modo que revele a origem do conceito, bem como corresponda às exigências do procedimento de ascensão do abstrato ao concreto.

3) Ao estudar as bases objetais dos conceitos, os estudantes devem descobrir a conexão genética inicial, universal, que determina o conteúdo e a estrutura do sistema de conceitos. E Davydov em seus escritos indica que, em todo sistema de conceitos da matemática escolar, a referida conexão universal é a **relação entre as grandezas**.

4) Necessariamente, reproduz-se a mesma conexão em três formas de modelos: objetais, gráficos e literal. Isso permite o estudo das propriedades conceituais na "forma pura".

5) É preciso que os estudantes formem ações objetais que advém do material didático, bem como reproduzam os modelos da conexão essencial do objeto e, em seguida, estudam as propriedades dela. Isso significa dizer que a explicitação de uma determinada conexão de cada conceito de número (inteiro, racional e real), forma nos escolares, uma determinada ação referente à multiplicidade das medidas das grandezas.

6) Na atividade de estudo, os estudantes passam das ações objetais, atingem os níveis verbais e semânticos e, finalmente, a sua realização no plano mental.

Segundo Davídov (1988), a organização didática do ensino em conformidade com os seis componentes, anteriormente apresentados, atende os preceitos do pensamento racional ou dialético que apresenta “no objeto o concreto como unidade das diferentes definições”. Portanto, sai dos limites do pensamento discursivo empírico em que só é possível a percepção dos elementos conceituais de maneira separada. Assim, o pensamento racional é ao mesmo tempo algo mental, abstrato, e concreto “porque não constitui uma unidade simples, formal, mas a unidade das determinações diferenciadas" (DAVÍDOV, 1988, p.63).

Portanto, o pensamento dialético expressa a abstração concreta da unidade das diferentes definições, pois coloca em evidência o trânsito, o movimento, o desenvolvimento dos objetos que traduzem a sua própria natureza.

Assim, o grande mérito da Psicologia Pedagógica Histórico-Cultural, em particular Davydov e colaboradores, foi a produção de um Sistema de Ensino com base do método geral do conhecimento científico, que reflete os princípios do pensamento dialético. Tais princípios são considerados na elaboração de todas as tarefas gerais e particulares de ensino, com manifestações nas respectivas ações, bem como no próprio material didático. Este tem o objetivo de contribuir na organização da atividade de pensamento dos estudantes com base em conceitos teóricos. Portanto, de finalidade diferente daquela que se presencia nas instituições de ensino em que os recursos didáticos são estruturados para a formação do pensamento empírico.

Enfim, a proposta de Davydov traz um fundamento teórico explícito nas dimensões filosóficas, epistemológicas, psicológicas, sociológicas e pedagógicas. Emerge no contexto de pesquisa da Psicologia, que se expande às questões da Pedagogia, uma vez que tem como preocupação a formação humana.

2.2 A LÓGICA FORMAL, BASE DO MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA

Ao admitirmos, no presente estudo, a proposição de ensino do Movimento da Matemática Moderna (MMM) como contraposição aos pressupostos educativos de Davydov, trazemos como justificativa as afirmações do referido autor de que as propostas de ensino que, historicamente, marcaram o ensino escolar se fundamentaram na Pedagogia Tradicional. Esta, de acordo com Davídov e Slobódchikov (1991), também trazem como orientação o princípio de caráter visual, concreto, porém sua estrutura, conteúdo e métodos de ensino projetam, nos estudantes, somente a formação do pensamento empírico.

Alguns estudiosos acreditam que a Lógica Formal contemporânea e a Lógica Matemática sejam a mesma. Entre eles, estão os fundadores da corrente filosófica da Matemática denominada de

Logicismo. Tal pensamento se apresenta no limiar do século XX, quase concomitantemente e em confronto com as filosofias denominadas de Formalismo e Intuicionismo, que entendem a Lógica Formal como disciplina independente. No entanto, essas três correntes filosóficas apresentaram-se com uma preocupação em comum: prover a Matemática de métodos consistentes. Tal necessidade é consequência de sucessivas crises que, historicamente, abalaram os seus fundamentos da Matemática, dentre elas destacam-se:

1) A descoberta da incomensurabilidade, isto é, que nem todas as grandezas geométricas da mesma espécie são comensuráveis, ou seja, quando é possível medir ao mesmo tempo dois segmentos com a mesma unidade de medida. Trata-se, pois, de uma tensão entre a Aritmética e a Geometria, entre o discreto e o contínuo. Fuchs (1970) considera essa crise como a gênese dos números irracionais.

2) Inconsistências no Cálculo Diferencial e Integral, relativa aos infinitésimos e das Séries, especificamente das somas paradoxais, que surgem pelo descuido dos matemáticos de não examinar a solidez do Cálculo, consequência do predomínio das ideias intuitivas de convergência e proximidade.

3) O surgimento das geometrias não-euclidianas que questionam postulados e teoremas, oriundos das proposições axiomáticas de Euclies (325 a.C., 265 a.C.). A título de ilustração, cita-se como perturbação o questionamento sobre a validade da afirmação de que em todo triângulo a soma dos seus ângulos nternos é igual a 180º. Nesse contexto, conforme Barker (1976), surge novas geometrias desenvolvidas por János Bolay (1802/1860), Nikolai Lobachevskii (1792/1856) e Gauss (1777/1855). Porém, a contribuição importante foi dada por Georg Riemann, por desenvolver a teoria geral das variedades, em 1854.

4) Aparecimento de paradoxos na Teoria dos Conjuntos de Cantor, séculos XVIII e XIX, mesmo no auge da apreciação das ideias de Cantor. Por exemplo, ele próprio percebeu a impossibilidade de existir o *conjunto de todos os conjuntos*. Caso fosse possível, contradiria a sua demonstração de que há um infinito maior do que todos os outros.

É no âmbito das contribuições para a superação das crises dos fundamentos da Matemática que se apresenta o Logicismo fundado pelo alemão Gottlob Frege (1848-1925) – filósofo, matemático e lógico – e, posteriormente, com Bertrand Russel. A sua finalidade consistia em trazer para a Matemática os mesmos princípios da Lógica. Para tanto, conforme Barker (1976) Frege cria uma lógica que tem por base símbolos matemáticos atrelados à análise formal do discurso. Ele organiza o que poderia chamar de uma gramática adotável por linguagens como: proposicional, que estuda a relação dos juízos entre si; de predicados, que analisa a estrutura interna das proposições. Ambas têm algo em comum com a Matemática em relação à utilização dos símbolos: lógicos, referente à negação, conjunção e implicação, entre outros; e não lógicos para criar cálculos ou sistemas de dedução, representados pelas proposições, funções, relações e outros.

De acordo com Barker (1976), Russel e Whitehead planejaram a demonstração de que seus axiomas – expostos na obra Principia Mathematica – pertenciam à lógica. Se assim o fizessem, seria admissível que os axiomas da lógica dariam os fundamentos da Matemática, portanto seriam os axiomas da lógica. Em outras palavras, queriam completar e transformar a resposta "porque é que a Matemática está livre de contradições" em "porque é que a lógica está livre de contradições". No entanto, não atingiram o intento, uma vez que alguns dos seus axiomas não se caracterizaram como lógicas.

O Intuicionismo tem em L. E. J. Brouwer (1881-1966) o seu principal mentor, ao dizer que os paradoxos da Matemática Clássica eram anunciativos de seus equívocos e fragilidades. A Matemática deixa de ser entendida num contexto eminentemente axiomático, isto é, como uma coletânea de teoremas, para ser concebida como uma atividade mental. O projeto intuicionista adota os números naturais como base para a pretensa e necessária reconstrução da Matemática. Seu pressuposto é o potencial da intuição humana para definir o que seja o número 1 e, a partir dele, obter o 2 por repetição da mesma ideia. Como decorrência, chega-se à compreensão e construção da coleção finita de números naturais 0, 1, 2, ..., n.

Conforme Barker (1976), por se tratar de construções mentais, os intuicionistas denominavam esse feito de "constructo". Esse termo é usado na definição da Matemática como uma atividade mental que permite a elaboração de sucessivos constructos. Por admitir esse potencial da mente humana, a referida filosofia nega a possibilidade de a matemática ser reduzida à lógica, como queria o Logiscimo; consequentemente, também rejeita a lei do terceiro excluído. Em vez disso, aceitam que todas as demonstrações construtivas, advindas de suas formações; admitem como parte da Matemática e como sequência de constructos toda parte válida da lógica clássica.

O Logicismo, assim como o Intuicionismo, não recebeu a devida consideração e aceitação pela comunidade científica. No cerne dessa rejeição está a dificuldade de romper com a tradição da Matemática Clássica que, apesar de seus paradoxos e crises, continua a oferecer resultados plausíveis nas aplicações em outras ciências (MACHADO, 1987).

O Formalismo se apresenta no contexto das turbulências sobre as fragilidades da consistência matemática, por volta de 1910. Para Machado (1987), o principal teórico dessa filosofia, David Hilbert, propôs-se a produzir uma técnica com teor lógico que evitasse possíveis contradições dos sistemas matemáticos. Isso significa dizer que ele continua a prestigiar a Matemática Clássica, porém buscou uma demonstração de sua consistência com argumentos finitários, de modo que não fosse rejeitado por logicistas e intuicionistas.

Dentre seus feitos propositivos, destaca-se a introdução de uma linguagem e regras formais de inferência, com vistas a um modelo de demonstração precisa de teorema e, também, com possibilidade de verificação de cada etapa. Para essa linguagem formal, desenvolveu uma teoria das próprias propriedades combinatórias. Além disso, demonstrou a impossibilidade de deduzir algum tipo de contradição.

Para tanto, estabeleceu procedimentos que denominou de demonstrações objetivas. Em outras palavras, elaborou um encadeamento de fórmulas, com base em implicações de símbolos, axiomas ou conclusões prévias.

Machado (1987) sintetiza as componentes de uma teoria formal: tem como ponto de partida os axiomas e termos primitivos, que dão base para a determinação de regras necessárias ao desenvolvimento de uma cadeia ordenada de fórmulas, elaboração de regras de inferências e teoremas.

Mas esse sistema foi abalado pelo teorema da incompletude de Gödel, que mostra a impossibilidade de prover a Matemática de uma certeza, com base em métodos da lógica tradicional. Significa dizer que, por mais completo e aprimorado seja um sistema, sempre se recorrerá a elementos fora dele para provar e entender determinadas proposições. Dito em outros termos, a Matemática é incompleta e está sempre em estado de devir.

As demonstrações de Gödel revelam que não são realizáveis as aspirações filosóficas de Hilbert de livrar a exposição da Matemática à fragilidades de sua consistência. Assim, cai por terra o programa formalista de provar a certeza dos métodos matemáticos (BARKER, 1976).

Mesmo com as restrições apresentadas por Gödel, o formalismo e a teoria dos conjuntos predominam entre os matemáticos. Essa é, pois, base da Matemática Moderna que desencadeou um movimento para se constituir como oficial nos programas de ensino.

Para Machado (1987, p. 58), a Lógica Formal é considerada a ferramenta essencial no processo de apreensão do conhecimento matemático. Ela “ajuda a compreensão dos limites da Matemática, enquanto Pura, no estudo das estruturas abstratas”. Essas são uma das concepções da Matemática Moderna que a transformou “num campo de experiências do “puro espírito”. Daí por que muitos matemáticos proclamam que sua ciência é ao mesmo tempo uma ciência mental por excelência (FUCHS, 1970, p. 190-191).

No âmbito escolar brasileiro, a objetivação do ensino Matemática Moderna traz dupla associação em termos de concepção. Uma delas de ordem de conteúdo de ensino, que remente à inclusão da teoria dos conjuntos e das estruturas algébricas. A outra ligada às questões pedagógicas, basicamente, sobre as razões de seu insucesso. Nesse sentido, Búrigo (2010, p. 278) afirma:

> O movimento da matemática moderna é comumente lembrado ou associado, no Brasil, à introdução da teoria dos conjuntos no ensino secundário, a adoção de certo formalismo na linguagem e à valorização das estruturas algébricas. As representações muito frequentes, entre os educadores matemáticos, de um “fracasso” da matemática moderna estão parcialmente relacionadas à rejeição ou à reversão dessas inovações no período que se seguiu ao refluxo do movimento, desde o final dos anos 1970.

Soares (2001) confirma essa cumplicidade de conteúdo e forma, bem como pontua o ensino dos conjuntos como o causador do fracasso da Matemática Moderna:

> No caso do Brasil, a implantação da Matemática Moderna como parte do currículo escolar não se mostrou eficaz no combate aos problemas que o ensino tradicional já apresentava. Sua adoção foi feita sem o planejamento necessário e sem a devida preparação dos professores. O ensino da teoria dos conjuntos tornou-se excessivamente abstrato e exagerado e as propostas originais que o Movimento apresentava acabaram se perdendo ou nunca se realizando por completo (SOARES, 2001, p. 142).

Valente (2010) concebe a Matemática Moderna como o movimento, de âmbito mundial, para a reforma curricular do ensino da Matemática no mundo. Ele destaca dois traços que marcaram tal mudança. Um deles se refere às impressões ou aspecto distintivo que o novo currículo produziu entre os professores, pais e alunos: uma reformulação dos conteúdos usuais da matemática escolar, marcadamente pela teoria dos conjuntos. O outro diz respeito à preocupação de compatibilizar os currículos de Matemática com os trabalhos de Jean Piaget, sobre as estruturas básicas cognitivas.

Trata-se, então, da questão de ordem didático-epistemológica, advinda da analogia que Piaget (1968) estabelece entre as estruturas da inteligência e as estruturas matemáticas. Estas, segundo os bourbakianos são: algébrica, ordem e topológica. Piaget (1968, p. 21) afirma:

> Não é exagerado afirmar que as estruturas operatórias da inteligência em formação manifestam, desde o início, a presença dos três grandes tipos de organização que correspondem aos que serão em Matemática estruturas algébricas, estrutura de ordem e estrutura topológicas.

Na subjacência dessa nova proposta para ensino da Matemática estava a intenção de diminuir as distâncias entre o saber dos matemáticos e aquele dos currículos escolares. Nesse sentido, ela atendia a proposição piagetiana:

> Se o edifício das matemáticas repousa sobre estruturas, que correspondem, por outro lado às estruturas da inteligência, é necessário buscar a Didática da Matemática na organização progressiva destas estruturas operatórias (PIAGET, 1968, p. 27).

A proposta modernista nasce no contexto dos próprios matemáticos, mas estabelece diálogo com questões teóricas da Pedagogia, Filosofia e Psicologia. A objetivação dessas articulações teóricas, conforme Valente (2010), em uma das ações de âmbito mundial com vistas à reformulação do ensino da Matemática: a criação, em 1950, da CIEAEM (Commission Internationale pour l´Étude et l´Amélioration de l´Enseignement des Mathématiques). O grupo se constitui, por iniciativa de Caleb Gattegno (matemático, pedagogo e filósofo da Universidade de Londres), com a participação de matemáticos como Jean Dieudonné, Gustave Choquet, André Lichnerowicz e o psicólogo Jean Piaget.

Os membros da Comissão eram movidos pela intencionalidade de estudar o estado da arte referente ao ensino de Matemática, bem como das possibilidades de melhoria da qualidade do ensino e, por extensão da aprendizagem da Matemática. Valente (2010) explicita ainda mais o vínculo da teoria moderna da Matemática com seu próprio ensino. Diz que a Comissão parte do pressuposto de que, naquela atualidade, existiam pesquisadores com domínio dos fundamentos, da lógica, da epistemologia, da história, da psicologia do pensamento e da pedagogia experimental. Assim, a Comissão tinha como tarefa de elaborar a síntese das contribuições das referidas disciplinas ao ensino de matemática. Como decorrência ou cumprimento do que foram atribuídos é que foi produzido a obra de Piaget: “Las estructuras matemáticas y las estructuras operatorias de la inteligencia (1968).”

Conforme Valente (2010), na tônica da referida obra está o problema da filosofia ocidental, com preocupação de não dicotomizar racionalismo-empirismo. Isso porque a proposição de Piaget (1968), para o ensino da Matemática, é o recurso à experiência e à ação, própria da pedagogia dita ativa. Tal opção é apresentada com o argumento de que não compromete o rigor dedutivo posterior do pensamento matemático. Pelo contrário, fornece as bases reais, em vez de somente verbais.

A primeira vista, pode impressionar que a Matemática Moderna se apresenta com um novo método e um novo conteúdo em relação ao formalismo clássico, por expressar a intencionalidade por métodos ativos de ensino e trazer um elemento diferente ao conceito de número, a propriedade. Mas, como esse pretenso novo se objetiva no ensino? Questão essa que será aborda no próximo capítulo.

Porém, explicitamos algumas restrições a essas possibilidades de Davydov e outros autores que se fundamentam no pensamento materialista dialético. Conforme Davýdov (1982, p. 80), todo sistema de ensino que tem por base a Lógica Formal acaba por priorizar, na formação dos conceitos, a classificação do objeto por suas semelhanças comuns. Nessa lógica, não são estudados os processos de formação e desenvolvimento dos conceitos, também não analisam as particularidades e especificidades das características do objeto, apenas os distingue em relação a outro objeto ou classe. Portanto, o propósito da lógica formal fica reduzido à esfera dos conceitos empíricos.

Tanto a generalização quanto a abstração, segundo Davýdov (1982), que ocorre no pensamento lógico formal, não expressam as especificidades do conceito científico, isto é, suas particularidades e singularidades essenciais. Os resultados apresentados na lógica formal e que caracterizam o pensamento empírico, se limitam, somente, à comparação dos dados do objeto e à identificação dos objetos, apenas com caráter sensorial.

Da mesma forma, Davídov (1988, p. 103) assinala que o enfoque acerca da abstração, generalização e formação do conceito, nos escolares, corresponde à interpretação da lógica formal. Para tanto, recorre a seus interlocutores D. Gorski, P. Tavánets para indicar que a "lógica formal examina os traços do conceito apenas sob o ponto de vista da função de diferenciação de uma classe de objetos, refletida em um ou outro conceito, em relação à outra classe".

Davídov (1988) destaca três peculiaridades das interpretações da lógica formal: 1) o geral de um conceito como aquilo que se obtém somente pelas características iguais ou semelhantes no grupo de objetos; 2) o essencial é definido pelo traço que distingue a classe de objetos; 3) o movimento que passa, inicialmente, pela descrição da transição da percepção à representação e, posteriormente, ao conceito.

Para Davýdov (1982, p. 79), "o problema central da lógica formal é a teoria do silogismo, do conhecimento dedutivo". Sendo assim, nessa matriz teórica a discussão sobre os conceitos ocorre com base na aparência, aceita somente os métodos do pensamento discursivo, que não consideram categorias como historicidade, totalidade e contradição. Além disso, desconsideram a dialética do singular e do universal na formação do conceito. Consequentemente, distanciam o conceito das características essenciais do objeto, isto é, só aceita o geral e exclui as particularidades e singularidades. Desse modo, a abstração perde quase todo contato com o objeto, o que reduz os conceitos somente a palavras.

Por esta razão, os filósofos semânticos afirmam que os conceitos de maior significação são aqueles que se encontram num grau mais baixo de abstração, ou seja, próximos da percepção sensível do objeto singular (ROSENTAL; STRAKS, 1958).

Nas palavras de Davýdov (1982, p. 87): "a lógica formal incide sobre o problema da formalização do valor do conhecimento inerente essenciais para compreender os "mecanismos" da atividade mental dos homens."

De acordo com Rosental e Straks (1958), a Lógica Formal teve a grande contribuição para teoria da abstração, porém faz ressalva de que não se pode elevar a classificação do conhecimento como algo pronto, acabado e absoluto, pois ele é passivo de transformação e desenvolvimento.

Nesse caso, a formação de conceitos acontece por meio das sensações e percepções das relações estabelecidas com o objeto do conhecimento, no anseio de encontrar as características comuns entre eles. A concreticidade do conhecimento se manifesta por meio da percepção sensorial e imediata. Por sua vez, o abstrato se encarrega de fazer a distinção entre as características comuns e similares do objeto.

De acordo com Davídov (1988, p. 63), na perspectiva da lógica formal, a formação conceitual, na educação escolarizada, acontece quando há “separação e comparação das propriedades dos objetos com a finalidade de abstrair a generalidade formal”. A diferenciação dos objetos se dá pelas abstrações de suas propriedades particulares. E, como tal, reflete muito mais as características dos conceitos empíricos, formados pelas abstrações realizadas pelo pensamento lógico-formal que, por sua vez, operam com o caráter sensorial dos objetos estudados.

Sobre esta base lógica, os alunos são levados às generalizações conceituais por meio da observação e do material concreto dado visualmente e captado sensorialmente. O caráter visual, próprio da lógica formal, se expressa nas manifestações didáticas e metodológicas dos sistemas de ensino da atualidade, portanto, forma nos escolares um modo de pensar empírico (DAVÝDOV, 1982).

Uma das principais diferenças entre os conceitos científicos e empíricos está em definir qualitativamente as particularidades e as peculiaridades dos mesmos. Entretanto, as abstrações e as generalizações lógico-formais não conseguem expressar essas especificidades. Segundo Davídov (1988), a generalização conceitual empírica não separa a aparência externa dos objetos da sua essência, não diferencia as particularidades essenciais do mesmo. Sendo assim, na lógica formal, os processos mentais se limitam a comparação e identificação sensorial concreta do objeto, com a finalidade de realizar sua classificação e inclusão em outra classe.

O pensamento empírico também apresenta características atribuídas à generalidade formal, mas apenas com a função de classificação dos objetos, que não expressa a abstração no pensamento, pois não apresenta à especificidade do concreto do objeto (DAVÍDOV, 1988). O pensamento empírico “não compreende que a abstração é uma forma de conhecimento da realidade qualitativamente distinta, em comparação com o grau sensível do conhecimento” (ROSENTAL; STRAKS, 1958, p. 301). Por exemplo, é impossível a representação visual do movimento das partículas elementares da matéria, que o pensamento teórico explica por meio da abstração conceitual.

3. AS PROPOSTAS, MODERNISTA E DAVYDOVIANA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE NÚMERO

Esse capítulo é o espaço que estabelecemos para a discussão do objeto de estudo, a partir de sua expressão nos livros didáticos do primeiro ano escolar. No referente à proposta de Davydov, recorremos ao livro que contempla as suas próprias proposições e foram à base de seus estudos, bem como traduz o esforço de fidelidade à matriz teórica. Sendo assim, trazemos à tona as originais tarefas de estudo, referentes ao conceito de número, elaboradas por Davydov e colaboradores, que foram ou estão sendo desenvolvidas por estudantes russos, qual seja: Davidov (2012). Além disso, tomamos por base algumas tarefas e ideias do livro de orientação ao professor (GORBOV, S.F.; MIKULINA, G.G.; SAVIELIEV, O.V., 2008). Vale dizer que, além dessas duas obras, também constam dois livros de tarefas complementares a serem desenvolvidas pelas crianças. No entanto, não os adotamos na pesquisa pela similaridade das tarefas com aquelas trazidas no livro 1.

O livro didático representativo da proposta modernista, além dos critérios apontados no primeiro capítulo, também foi decisivo o seu título, “Matemática Moderna”. Além disso, por seu conteúdo refletir a essência das ideias conceituais, defendidas pelo referido movimento, como por exemplo, os fundamentos no âmbito da teoria dos conjuntos.

A preocupação é estabelecer relações que possam explicitar as diferenças entre as duas propostas. Para tanto, procuramos trazer à tona os ‘exercícios’ propostos no livro de Júnior (sd) e, na medida do possível, apresentar os sistemas de tarefas da proposta davydoviana que, a primeira vista impressionam como similares entre ambas, mas em decorrência das análises, procuramos apresentar suas diferenças densas.

Vale esclarecer que não faremos, na íntegra, análise dos dois livros, mas somente no que se refere à introdução do conceito número. Para tanto, a referência será o livro da proposição modernista que apresenta o ensino de número sequencialmente, a partir do 1 (um). Por isso, definimos e delimitamos tal iniciação numérica até o 9 (nove). O capítulo está dividido em duas seções, cada qual se refere a uma das propostas em estudo.

3.1 A PROPOSTA MODERNISTA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE NÚMERO

Partindo do pressuposto que uma nova tendência de ensino se apresenta com o a preocupação de atender reclamos sociais em relação à outra em vigência (FIORENTINI, 1995; BÚRIGO, 2006; VALENTE, 2010) então algumas considerações se fazem necessárias com referência ao Movimento da Matemática Moderna, antes de focarmos os livros didáticos e de orientações.

O referido movimento traz consigo um componente competitivo pedagógico, pois se apresenta com o seu objetivo de ser uma proposição que deveria superar as concepções da tendência formalista clássica. Trata-se, pois, de uma concorrência no interior da própria matriz teórica, a lógica formal, porém se distinguem em relação ao foco dado na apresentação do conceito de número, aos estudantes, quando iniciam o processo de escolarização (SOARES, 2009).

A proposta formalista clássica – comumente denominada de ensino tradicional – ao visar à disciplina do espírito (FIORENTINI, 1995), traz como objeto de ensino do número natural a ideia de contagem associada à escrita dos algarismos ou numeral. Ou seja, a criança é introduzida na Matemática com a aprendizagem voltada para a contagem e escrita da respectiva simbologia.

A proposição moderna também foca o conceito de número natural. Mas em que se diferencia do formalismo clássico? Ou seja, qual o conteúdo que distingue ambas as tendências e se caracteriza como elemento competitivo entre elas? O avanço está que o número, como veremos por todo o presente capítulo, se apresenta num outro sistema conceitual que tem o conceito de conjunto como essencial e a relação ou correspondência de biunivocidade de seus elementos a ideia central.

A questão que se apresenta é: Então, para a Matemática Moderna, a biunivocidade em si é o número? Para responder essa pergunta, parece-nos oportuno salientar que o diferencial dessa nova proposta para a Matemática e do seu ensino está na teoria de Cantor que, segundo Bourbaki (1969), tem como fundamento no novo conceito: conjunto, que delineia a ideia de estruturas (ordem, topológica e algébrica). “A noção de conjunto é o alicerce do edifício da matemática, tal como hoje conhecemos” (REVUZ, 1967). Assim, a correspondência biunívoca entre os elementos de diferentes conjuntos é a base para a definição de número natural como *a propriedade comum de conjuntos entre os quais é possível estabelecer a referida relação*[6].

Como decorrência, aparece outro conceito: equipotência. Assim, a correspondência biunívoca entre dois conjuntos equipotentes é que vai definir um determinado número natural. Para a explicitação da definição moderna de número natural, recorremos à Sangiorgi (1969) que, Soares (2009), considera a publicação referência no contexto brasileiro do MMM:

> O que ocorre de importante *entre conjuntos equipotentes*?
> A mente humana, pondo de lado a *qualidade* (carteiras, alunas, nomes, ...) dos elementos que figuram nos *conjuntos equipotentes* e apoiando-se tão somente na *correspondência biunívoca* existente entre seus elementos, destaca a permanência de uma propriedade comum: a *quantidade* ou o *número de elementos*, também chamado de número natural (SANGIORGI, 1969, p. 35, grifos do autor).

Sangiorgi (1969) em nota de rodapé acrescenta, em forma de informação, que o número natural recebe outra denominação: cardinal de um conjunto.

De acordo com Dienes (1967), o número não tem existência real, é uma abstração, uma propriedade do conjunto de objetos, em vez deles em si. Desse modo, 'três' é uma palavra que designa uma propriedade e, por isso, não é possível aplicá-la a determinados objetos, fatos ou entes, mas somente ao conjunto dos mesmos.

Dienes (1967) entende que, no processo de aprendizagem do conceito de número em sua concepção moderna, se faz necessário um corpo de experiência em que se confluem conceitos da lógica, dos conjuntos e dos números. Acrescenta: "As relações entre conjuntos conduzem a considerações de natureza *lógica*, ao passo que as propriedades dos conjuntos levam a considerações de natureza *matemática* (DIENES, 1967, p.15)."

Esse entendimento é compartilhado por Junior (sd) em sua proposta de implantação da ideia modernista da Matemática, na primeira série (primeiro ano) escolar. A seguir, faremos a reflexão sobre essa afirmação com base nas tarefas propostas pelo livro de sua autoria.

---

[6] Essa definição e suas relações se explicitarão na análise do livro sobre a proposição modernista.

3.1.1 O ponto de partida para o ensino do conceito de número

O ponto de partida, que coloca o estudante em situação de aprendizagem do conceito de número, para a proposta modernista é a correspondência biunívoca entre os elementos dos conjuntos. Para tanto, os exercícios colocam a criança, inicialmente, em observação e em ação visual e manual de ligar os elementos de dois conjuntos. No entanto, na primeira proposição (figura 1), a referida ligação é apresentada pronta e ocorre por meio de flechas em duplo sentido, o que indica uma ideia de biunivocidade. Outra característica é a possibilidade de desmembramento das figuras em dois conjuntos: de pessoas (homem, mulher, menino, menina e bebê) e de seus concernentes pertences (pasta, bolsa, bola, boneca e chocalho). Isso significa que a criança estará envolvida com a relação entre dois ou três conjuntos (pessoas, pertences e pontos).

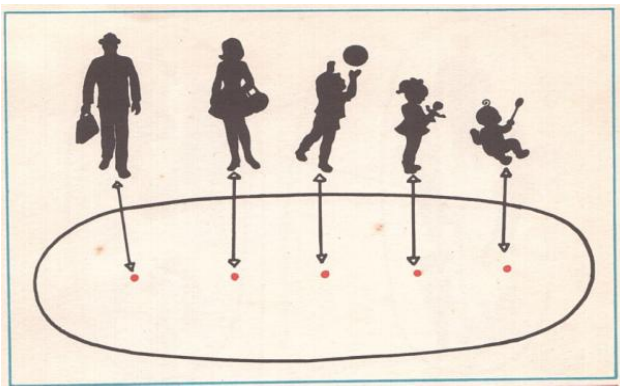


Figura 1: Correspondência entre elementos
Fonte: Junior (sd, p. 3)

A segunda (figura 2) se diferencia da primeira: pela ausência da duplicidade de sentido das linhas de ligação entre os elementos, não mais indicado por flechas; os elementos pessoas também passam a aparecer em diagrama; os dois conjuntos (de pessoas e pontos), se apresentam na disposição vertical, em vez de horizontal.

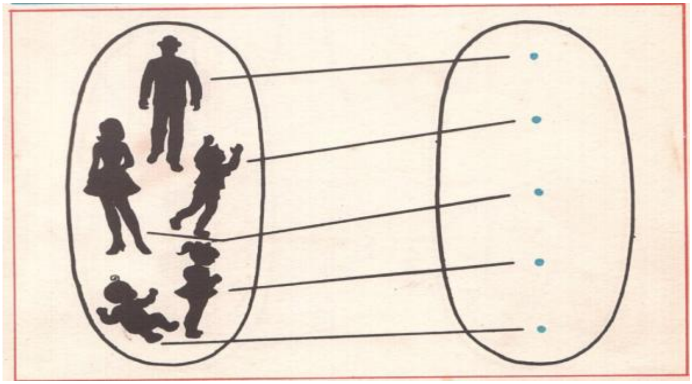


Figura 2: Procedimento a adotar na correspondência entre elementos de dois conjuntos
Fonte: Junior (sd, p. 3)

Vale destacar que, à criança, cabe apenas observar a situação dada. A proposição aparece sem orientação, o que leva-nos a induzir que basta o estudante olhar a figura para identificar o procedimento a ser adotado, isto é, ligar o elemento de um conjunto com o de outro. Em outras palavras, com o pretenso objetivo de estabelecer a relação biunívoca entre os dois conjuntos.

Na figura 3, a seguir, abre a possibilidade da criança, além da observação, usar o lápis para ligar os elementos do primeiro conjunto com os seus correspondentes, no segundo. Para tanto, há um ponto de partida simulador, qual seja: o elemento, menino, do primeiro conjunto, com o elemento bola do segundo. Subjacente a tal proposição está à ideia de classificação, pois é necessária a identificação de cada elemento dos dois conjuntos. Além disso, sugere que o estudante relacione os elementos pessoas com os respectivos pertences que caracterizam os componentes do segundo conjunto.

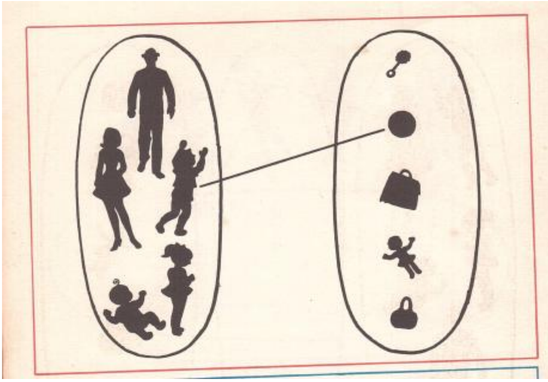


Figura 3: Completar a correspondência entre elementos de dois conjuntos
Fonte: Junior (sd, p. 4)

A próxima indicação do livro texto (figura 4) requer que a criança, por intuição, estabeleça a correspondência biunívoca. Possibilita para que ela adote aleatoriamente o critério para ligar qualquer ponto (primeiro conjunto) com os pertences humanos (segundo conjunto). Importa dizer que Mário Magnusson Júnior (sd), na elaboração da proposta, atenta para não repetição e nem promover uma ruptura brusca entre uma proposição e outra. Isso se evidencia na preservação da ideia central (correspondência), porém com o acréscimo de algo novo em cada uma delas.

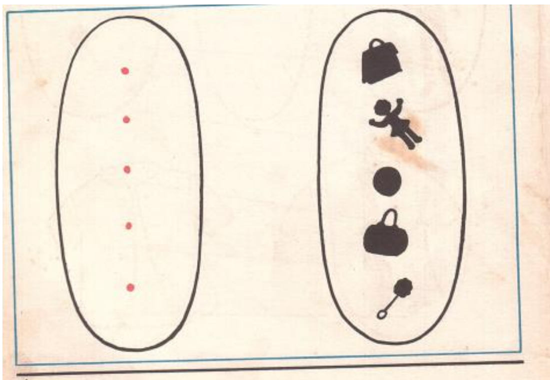


Figura 4: Correspondência entre elementos do conjunto de pontos e de pertences
Fonte: Junior (sd, p. 4)

O novo, na próxima proposição (figura 5), é caracterizado pela correspondência triunívoca entre os elementos dos conjuntos convividos pelas crianças anteriormente: pessoas, pontos e pertences.

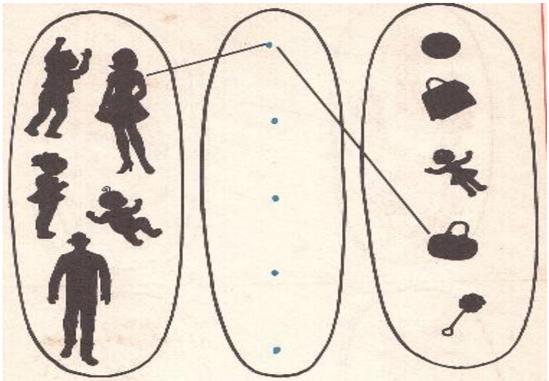


Figura 5: Correspondência triunívoca
Fonte: Junior (sd, p. 5)

As quatro proposições seguintes têm em comum a quantidade, dois, de elementos dos conjuntos, quais sejam: cadernos (mesma cor e tamanhos distintas), livros (mesmo tamanho, cor e espessuras diferentes) e lápis (cores, tamanhos e espessuras desiguais). Vale destacar que não há indicação alguma, em cada uma delas, do que a criança executará. Por consequência, presume-se que o estudante deverá estabelecer a correspondência pelas seguintes características:

1- Tamanho (figura 6), na relação caderno maior com lápis maior e caderno menor com lápis menor.

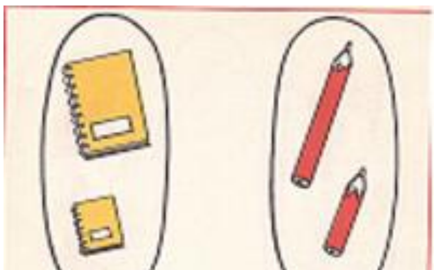


Figura 6: Correspondência entre os elementos dos conjuntos pelo critério tamanho
Fonte: Junior (sd, p. 6)

2- Espessura (figura 7), na relação livro grosso com lápis grosso e livro fino com lápis fino.

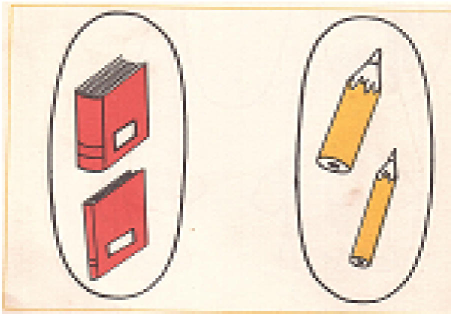


Figura 7: Correspondência entre os elementos dos conjuntos pelo critério espessura
Fonte: Junior (sd, p. 6)

3- Indefinido (figura 8), o que dá margem para as crianças adotarem diferentes critérios. Por exemplo, a relação composta pelos pares: maior tamanho (lápis)/maior espessura (caderno) e menor tamanho (lápis)/menor espessura (caderno).

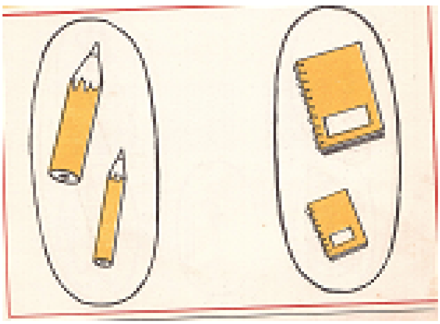


Figura 8: Correspondência entre os elementos dos dois conjuntos sem critério explícito
Fonte: Junior (sd, p. 7)

4- Indefinido (figura 9) que possibilita a adoção de diferentes critérios. Por exemplo, pode ser adotada a mesma relação do item anterior, pois muda apenas o tipo de elementos e a posição dos conjuntos. Ou seja, antes a relação ocorria entre os conjuntos de lápis e de cadernos e, na presente situação, a mesma se dá entre conjunto de cadernos e de livros, sendo o tamanho o atributo comum.

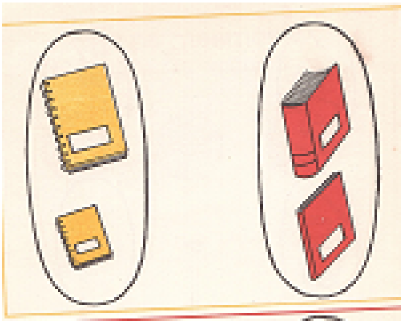


Figura 9: Correspondência entre os elementos dos dois conjuntos sem critério explícito
Fonte: Júnior (sd, p. 7)

A próxima proposição (figura 10) faz a junção de todas as ideias subjacentes àquelas retratadas de forma separada nas figuras de 1 a 5. Entram em cena três conjuntos, cada qual com três elementos: objetos (agulha, xícara e caderno), seus correlatos (linha, pires e lápis) e pontos. Compete, às crianças, o estabelecimento da relação um a um entre os elementos dos conjuntos: objetos e seus correlatos, objetos e pontos, pontos e correlatos. Por fim, configura-se a relação triunívoca entre eles.

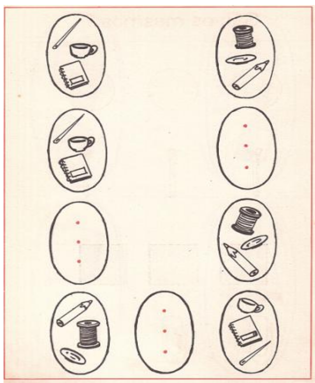


Figura 10: Correspondência entre os elementos dos três conjuntos
Fonte: Junior (sd, p. 8)

Em termos pedagógicos, a característica predominante, nesse conjunto de proposições, é o espontaneísmo a que são submetidos os estudantes. Tal afirmação se justifica pela ausência de enunciados ou questionamentos orientativos em cada uma delas. Contudo, a orientação para a sua execução aparece implicitamente na própria proposição, pois a primeira delas se apresenta resolvida. Ou seja, funciona como uma espécie de "modelo a ser seguido", isto é, o procedimento completo a adotar pelos alunos. Nas proposições subsequentes, elas se apresentam incompletas, o que exige do estudante a realização em sua plenitude.

Ao colocar a diretividade na própria proposição, pode ocorrer que tanto o professor quanto as crianças interpretem de forma peculiar e não condizente com os verdadeiros objetivos que conduzem à apropriação do conceito em estudo. Em outros termos, não fazem o percurso concernente aos fins que se propôs. Sendo assim, aumenta a possibilidade dos estudantes entrarem em processo prioritário de desenvolvimento do pensamento empírico relativo ao conceito de biunivocidade e, por extensão, do conceito de número. Por exemplo, ao adotar – a partir da observação da primeira proposição – o procedimento sugerido, corre o risco de a criança se apropriar somente da operação de ligar o elemento de um conjunto com o elemento de outro por meio de uma linha. Ou seja, o traçado passa a ser a centralidade conceitual, em vez do pretenso essencial que seria, para o autor, o conceito de número natural.

Desse modo, o que fica é o aparente – a linha, os elementos dos conjuntos, o diagrama – em detrimento do pensamento conceitual. Isso significa dizer que a diretividade é imprescindível quando se almeja que os estudantes se apropriem das significações de um determinado conceito matemático. Para tanto, conforme Davýdov (1982), é premente que o professor assuma tal atribuição, que deve ser reproduzida no próprio método, principalmente, ao se propor a iniciação de um novo conceito. Nesse sentido, estabelece os seguintes estágios:

> 1) orientar os escolares na situação do problema (matemático, linguístico, etc.), cuja solução requer um novo conceito; 2) dominar um modelo de transformação do material de modo que esclareça a relação válida como base resolutiva geral de qualquer problema do tipo dado; 3) fixar a referida relação em um modelo objetivo ou sinalizador que permita suas propriedades em "forma pura"; e 4)

> esclarecer as propriedades da relação destacada, pelas quais é possível deduzir as condições e métodos de solução do problema inicial (DAVÝDOV, 1982, p. 420).

Assim, a forma como se apresentam as proposições modernistas (JÚNIOR, sd) – introdutórias do conceito de número – revela uma base eminentemente empírica, pois requer do estudante apenas a observação do exposto, aparentemente, nos conjuntos (elementos e o traçado da linha que os unem), em vez da relação de comparação entre eles.

3.1.2 O abandono da relação de biunivocidade e a adesão a ideia de identificação e localização

O bloco de proposições, a seguir focadas, não tem por base a relação biunívoca entre os elementos de dois ou três conjuntos como ocorria naquelas analisadas na sessão anterior. A preocupação é o desenvolvimento, por parte do estudante, da habilidade de identificação de atributos comuns ou diferentes entre o desenho de determinados objetos. Para tal, cada proposição é precedida por uma pergunta, cuja palavra chave é "mesmo".

A diretividade se explicita nas perguntas. Estas, porém, buscam respostas diretas, sem dar a possibilidade para que os alunos respondam com outros questionamentos que, segundo Gorbov, S.F.; Mikulina, G.G.; Savieliev, O.V. (2008), é a condição para colocar os estudantes em ação investigadora. No entanto, percebe-se um tipo de pergunta que cerceia o diálogo mediado pelos princípios conceituais e apresenta similaridades com os preceitos da teoria comportamentalista da aprendizagem, galgados na relação estímulo/resposta.

Contudo, a palavra "mesmo" e suas flexões (gênero e número), que aparecem na pergunta, conduz a ideia de "igual ou diferente", que se explicita nos objetos em conformidade com os seguintes atributos: espécie, cor, tamanho e posição. Inicialmente, as proposições tratam os atributos individualmente e, aos poucos, se referem simultaneamente a dois ou três deles.

Reafirmamos que as proposições em foco são direcionadas por perguntas que induzem respostas afirmativas, negativas, localizativas e identificativas. Esse modo de organização não pode ser confundido com a ideia de movimento da dialética. Pelo contrário, traz componente da lógica formal que, segundo Cyrino (2006), se preocupa com o rigor, com atenção a seguinte forma:

a) uma premissa maior do tipo, ‘todos os x são y’;
b) uma premissa menor, ‘ora, p é x’,
c) uma conclusão, ‘logo p é y’.

Por exemplo:

Premissa maior: todos os números são reais;
Premissa menor: p é um número natural;
Conclusão: p é real.

É esse o componente orientativo das proposições a seguir explicitadas:

a) Proposição de resposta afirmativa (figura 11), introduzida pela pergunta “São os mesmos?”, induzem os alunos a expressar a palavra “sim”. Para tanto, devem dirigir a atenção à classe dos objetos desenhados (círculo, prego, quadrado e clipe). Também, exige uma leitura horizontal da coleção, na seguinte ordem: círculos vermelhos, na sequência os pregos, posteriormente, os quadrados azuis e, finalmente, os clipes.

O direcionamento da própria pergunta impede a participação ativa do estudante com liberdade de expressar suas dúvidas, propor novos questionamentos e de justificar que sua afirmação se pautou pela adoção dos critérios: tipo de objetos, tamanho, cor e posição. Caso fosse-lhe dada a possibilidade de iniciativa, até poderia que a leitura também se procedesse verticalmente. Com isso, ocorreria a reversão da resposta para negativamente, pois os objetos são distintos (círculo, prego, quadrado e clipe). Porém, se esse mesmo conjunto – embora de elementos distintos – for a referência para comparar as colunas, então, novamente a resposta será afirmativa.

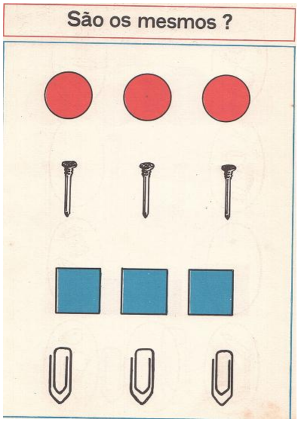


Figura 11 – Proposição para identificação de mesmos atributos
Fonte: Júnior (sd, p. 9)

A objetividade da pergunta e a própria elaboração da proposição impedem que os alunos complementem ou justifiquem suas respostas com a explicitação do critério adotado para a elaboração de suas respostas. Por exemplo, a afirmação teve por base os seguintes critérios: sim, são iguais porque são círculos vermelhos e do mesmo tamanho.

b) Proposição de resposta negativa (figura 12), também introduzida pela pergunta “São os mesmos?”. Dos alunos, espera-se que redarguam: “não”. Impõe-lhes a condição única de observarem as classes de objetos (círculo, prego, quadrado e clipe), no sentido horizontal, para identificarem que em cada uma delas, dentre os seus quatro elementos, sempre existe um deles maior que os demais. Ou seja, tamanho torna-se o atributo que os diferenciam. Entretanto, a pergunta pode dissimular a atenção para outros critérios, como cor e espécie, que propiciaria uma resposta afirmativa, pois: todos são círculos, todos são pregos, todos são quadrados, e todos são clipes.

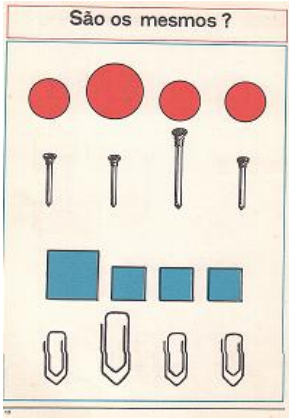


Figura 12 – Proposição para identificação de mesmos atributos
Fonte: Júnior (sd, p. 10)

Do mesmo modo que a proposição anterior exime a possibilidade de leitura dos objetos pela disposição vertical, o que manteria a negatividade da resposta. Caso a referência se desloque para o conjunto dos objetos, dispostos na horizontal e procedesse a comparação com as demais linhas, a resposta inverteria para positivamente.

Entretanto, a formulação da pergunta condutora para a execução da proposição, pelos estudantes, limita-os a formação do pensamento focado apenas no objeto em si, isto é, na unidade considerada como 1 (um) elemento. Isso descarta o desenvolvimento da compreensão que poderia ser um conjunto, por exemplo, constituído pelos objetos (círculo, prego, quadrado e clipe) que se repetem, quatro, na proposição em análise.

Essa ideia é uma das peculiaridades da proposta davydoviana ao adotar a unidade como aquela tomada para medir outra grandeza (discreta ou contínua) de mesma espécie. Vale lembrar que, para Davýdov (1982), desde o primeiro ano escolar, o ensino volta-se prioritariamente para o conceito de número real, com a ideia de relações entre grandezas. Como tal, conforme Rosa (2012), envolve o conceito de medida e, por extensão, os princípios da multiplicação e da divisão por solicitar reposta ao questionamento: quantas vezes a unidade estabelecida cabe na grandeza a ser medida. É nessa circunstância que se explicitam dois tipos de unidades: 1) base, que pode ser qualquer um dos objetos; 2) intermediária, constituída pelo conjunto de um exemplar de cada objeto.

As proposições anteriores (a, b), introduzidas por um pergunta, permitem apenas a adoção de único critério e somente uma resposta, entre as opções ‘sim’ ou ‘não’. Por se tratar de questões diretas, sem a exigência de justificativa, por parte dos estudantes, elas refletem o seu conteúdo lógico formal, basicamente na terceira das suas três leis básicas: 1) identidade (X é X); 2) contradição, isto é, a impossibilidade de X ser, simultaneamente, Y ou nãoY; 3) terceiro excluído, não há outra alternativa para X além de Y ou não Y (BARKER, 1976).

c) Proposição com exigência de resposta localizativa (figura 13), enunciada com a pergunta “Onde está o mesmo objeto?”. Há um direcionamento para o procedimento a adotar pelos estudantes, ao ligar, por meio de uma flecha o objeto de referência (superfície quadrada de cor vermelha) com o seu idêntico entre os três posicionados à sua direita.

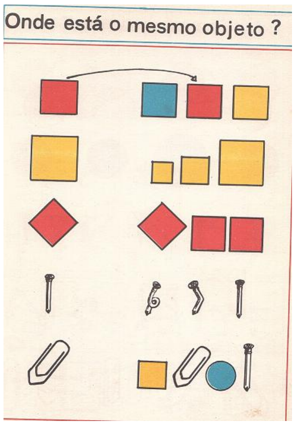


Figura 13 – Proposição para identificação de mesmos atributos
Fonte: Júnior (sd, p. 11)

O esperado é que a criança apenas trace a flecha indicadora de onde está o mesmo objeto. Portanto, não requer explicação do critério e atributos de identificação, como por exemplo, na primeira linha, é o mesmo objeto por ser quadrado, superfície vermelha e de mesmo tamanho. Assim também, na segunda linha, a flecha indicaria o quadrado maior de superfície amarela. Na linha seguinte, o critério para a localização seria quadrado de superfície de mesma cor (vermelha), mesmo tamanho e posição com ideia losango. Na quarta linha, a referência seria o objeto prego, de mesmo tamanho, mesma posição (vertical) e sem deformação. Por fim, última linha, o atributo identificador para a localização é a espécie: clipe.

d) Proposição com teor localizativo (figura 14), dirigida pela pergunta “Onde está a diferença?”. Ela não estabelece o procedimento a adotar, pelo estudante, o que possibilita-lhe a adoção de qualquer modo de localização do objeto solicitado. Por exemplo, apontar o objeto com o dedo indicador, usar o lápis ou caneta para assinalar com qualquer marca ou circulá-lo.

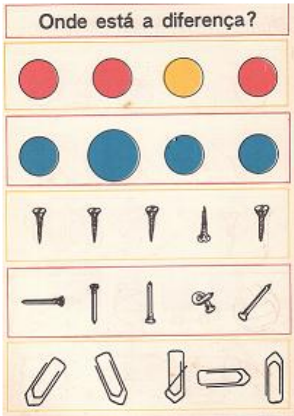


Figura 14 – Proposição para identificação de mesmos atributos
Fonte: Júnior (sd, p. 12)

A proposição sugere que a criança indique o mesmo objeto, desde que se distinga por um dos atributos (cor, tamanho, posição e deformação). Sendo assim, na primeira linha, o objeto a ser indicado seria o círculo de superfície amarela (atributo cor), pois todos os demais elementos se apresentam com iguais características (mesma forma, cor e tamanho). Na segunda linha, todos os quatro objetos têm forma circular de superfície azul. O atributo que distingue o elemento procurado é o tamanho. No terceiro conjunto, de cinco parafusos, a posição inversa diferencia o quarto deles dos demais. Na quarta linha, os cinco elementos do conjunto se apresentam como sendo da mesma espécie (pregos) e tamanho idênticos. Além disso, quatro deles não apresentam nenhum defeito. Um deles, o quarto, é que deve ser indicado, uma vez que o atributo que o identifica como diferente é a deformidade. O mesmo critério é adotado na quinta linha com os elementos do conjunto (clipes).

e) Proposição com requisição indicativa (figura 15) e enunciado interrogativo: “Quais são os mesmos objetos?”. Do mesmo modo que a anterior, essa proposição não apresenta um procedimento direto para sua execução, isto é, permite-lhe que indique os objetos solicitados de diferentes maneiras, como dito no item d (mostra com o dedo indicador, usar o lápis ou caneta para assinalar com qualquer marca ou circulá-lo).

No entanto, a proposição apresenta algo novo, pois o questionamento possibilita a indicação dos elementos iguais (em espécie ou classe). Há a inversão do solicitado nas proposições anteriores, em que a criança destacaria apenas um dos elementos, o que se diferencia desta, ao requerer que somente um deles não será marcado e/ou indicado. No entanto, esse elemento diferenciado (que não pertence à mesma espécie ou classe) continuará em evidência.

Na primeira sequência de figuras, os elementos (maçãs) que devem ser indicados são da mesma espécie, tamanho e forma, embora estejam em posições diferentes. Assim, a criança não indicaria somente o clipe. Seguindo a mesma lógica, a segunda sequência de figuras, sugere a indicação de todos os elementos da espécie óculos, mesmo que cada um deles tenha forma diferente. Nesse caso, a exclusão fica para o elemento bastão. Na terceira linha, os elementos prego, parafuso, martelo e alicate são identificados pela classe às quais pertencem: utensílios de carpintaria. Eles possuem formas e espécies diferentes, mas, o atributo comum entre eles é dado pela utilidade. Desse modo, a maçã não seria assinalada. Similarmente, na quarta sequência de figuras, a bola, o caminhão, o pião e a carroça seriam destacados, pelas crianças, desde que adotassem como critério a classe a que pertencem: os brinquedos. Então, a exceção seria o parafuso. Assim também, a última linha, se faz necessária a adoção da característica pela classe, material escolar, a qual pertence os elementos a assinalar: lápis, caderno, livro e pasta. Nesse caso, exime-se o caminhão.

Figura 15 – Proposição para identificação de mesmos atributos
Fonte: Júnior (sd, p. 13)

f) Proposição com teor identificativo (figura 16), dirigida pela pergunta “O que é diferente?”. A identificação do elemento solicitado em cada um dos conjuntos, por parte do aluno, deve ocorrer por procedimentos espontâneos, pois não há nenhuma orientação para tal.

No conjunto da primeira linha, os elementos apresentados pertencem à mesma espécie e forma (quadrados), bem como o mesmo tamanho. Sendo assim, a diferença é o atributo cor. A segunda linha, também, traz elementos da mesma espécie (boné, chapéu masculino, chapéu feminino e capacete), porém, se diferenciam pelo modelo (forma) e gênero. Em seguida, na terceira linha, os atributos que diferem os elementos (círculo, quadrado, triângulo e retângulo) são: cor e forma. Por sua vez, os elementos (clipe, carroça, martelo e bengala), apresentados na quarta linha, são diferenciados pelos seguintes atributos: espécie e classe, ou seja, não há um atributo que os igualam. Logo, são todos diferentes. O mesmo ocorre na quinta linha, pois os elementos (pião, quadrado de superfície vermelha, chapéu e prego) pertencem a classes, espécies e cores diferentes.

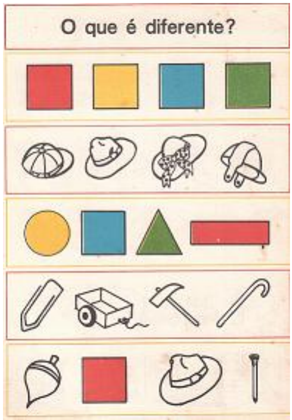


Figura 16 – Proposição para identificação de atributos diferentes
Fonte: Júnior (sd, p. 14)

g) Proposições que requerem a identificação do todo e das partes do conjunto designados por algum atributo diferenciador (figuras 17, 18, 19 e 20). Elas se apresentam emudecidas, isto é, sem perguntas ou procedimentos explícitos. Os elementos de cada conjunto 'todo' estão distribuídos de modo que seja possível identificar os subconjuntos a ser estabelecidos ou unidos, pelos estudantes, conforme o caso.

No conjunto da primeira linha da figura 17, os elementos apresentados pertencem a mesma espécie e forma (quadrados), bem como o mesmo tamanho. A diferença é o atributo cor, que habilita os estudantes a desenhar os elementos dos dois subconjuntos: num de dois quadrados de superfície amarela e noutro as mesmas figuras, porém de superfície vermelha.

Na sequência, a situação apresenta os dois subconjuntos formados pela mesma quantidade de lápis com os atributos quantidade, cor e tamanho comuns. O incomum é a posição em que, no primeiro, os lápis se apresentam inclinados e, no segundo, na vertical (um para cima e outro para baixo). Aos estudantes cabe reproduzi-los em um diagrama, isto é, um só conjunto. Por último, retorna-se à ideia de formar os dois subconjuntos. Para tanto, os elementos do todo são quadrados de superfície amarela, mas se diferenciam pelo atributo tamanho (maior e menor). A disposição em dois pares, cada qual constituído de um quadrado grande e outro pequeno, torna-se o critério para a elaboração e cada subconjunto.

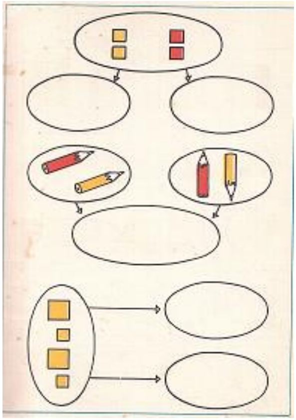


Figura 17 – Proposição para identificação do todo e das partes
Fonte: Júnior (sd, p. 15)

Na primeira situação da figura 18, os elementos (quadrados de mesmo tamanho, mas diferem pela cor de sua superfície, amarela e vermelha) sugerem dois modos de concluir solução requerida. Um deles, pelo tipo de elemento, que resultaria num subconjunto de quadrados e o outro de lápis. Além disso, pela cor em que os subconjuntos seriam formados, respectivamente, por dois quadrados vermelhos e por um quadrado amarelo e o lápis da mesma cor.

A segunda situação parece explicitar melhor o duplo atributo – cor e espécie – que define os dois subconjuntos: um de lâmpadas incolores e um de lápis amarelos.

A terceira situação dá indícios de trivialidade, pois se diferencia das anteriores por exigir que os alunos repitam os elementos de cada subconjunto e um só diagrama que se apresenta na parte inferior. Ou seja, os alunos desenhariam três superfícies quadradas vermelhas e uma amarela.

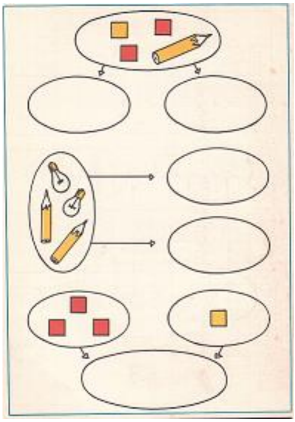


Figura 18 – Proposição para identificação do todo em partes
Fonte: Júnior (sd, p. 16)

Na próxima proposição a ser desenvolvida pelos estudantes, figura 19, as situações trazem as mesmas ideias das duas anteriores, porém com outro tipo de diagrama (retangular), que anexam os dois subconjuntos com o todo. Na situação inicial, a flechas orientam para que os elementos quadrados sejam desenhados no subconjunto superior e a lâmpada no inferior.

A situação intermediária apresenta as flechas indicadoras de que os elementos de cada um dos subconjuntos foram copiados do conjunto todo. Este, portanto, constitui-se de dois quadrados de superfícies vermelhas, elementos do subconjunto superior, e dois de superfícies azuis do subconjunto inferior.

A última situação, referente à proposição da figura 19, traz os dois subconjuntos, vazios, anexados na parte superior do respectivo conjunto 'todo'. Este tem seus três elementos com os mesmos atributos (forma, tamanho, posição), o que estabelece a quantidade como critério para a formação dos conjuntos partes: um com dois quadrados azuis e o outro com apenas um.

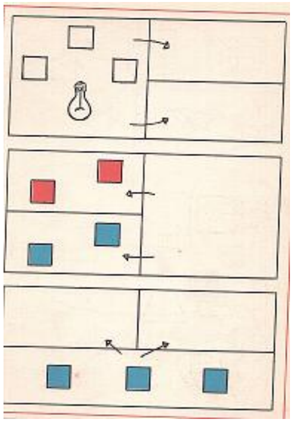


Figura 19 – Proposição para identificação do todo e das partes
Fonte: Júnior (sd, p. 17)

Por fim, uma proposição (figura 20) com apenas duas situações. A primeira destaca dois subconjuntos, cada qual com um elemento: um de lâmpada e o outro de lápis. O conjunto ‘todo’ é delimitado por um diagrama triangular e recebe a indicação, por duas flechas, para que seja transportado à sua região interior os referidos elementos.

A última situação tem o conjunto de cinco elementos distribuídos de um modo tal que dá ideia de dois subconjuntos que se distinguem pelo alinhamento dos azuis (um grande e um pequeno) e dos amarelos (um grande e dois pequenos). Porém, esse não é o critério de formação dos subconjuntos, pois são dados cinco diagramas que, consequentemente, deve conter apenas um elemento cada. A dúvida que pode gerar, por parte da criança, diz respeito ao critério de distribuição dos elementos em cada um deles, uma vez que há dois diagramas acima do conjunto e três abaixo. Ocorre, então, dupla alternativa: os superiores seriam constituídos pelos quadrados grandes e os inferiores pelos pequenos, ou os elementos estariam dispostos nos diagramas aleatoriamente.

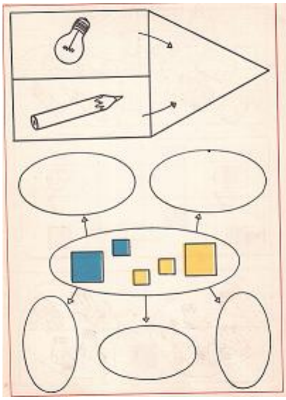


Figura 20 – Proposição para identificação do todo e das partes
Fonte: Júnior (sd, p. 18)

3.1.3. O retorno à biunivocidade com base em atributos de classificação dos elementos dos conjuntos

As proposições da presente seção centram-se novamente na relação biunívoca entre os elementos de dois conjuntos. A característica peculiar em relação ao procedimento adotado na seção 3.1 é a adoção de um ou até três atributos (cor, tamanho ou posição) para estabelecer as biunivocidades, especificadas a seguir:

a) Proposição envolvendo a relação biunívoca entre conjuntos determinada pelo atributo cor (figura 21).

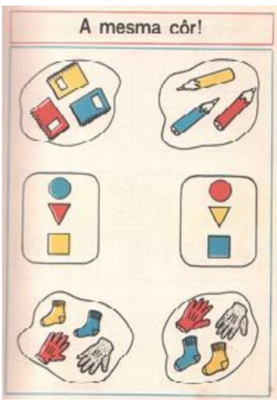


Figura 21: Relação de biunivocidade determinada pelo atributo cor
Fonte: Júnior (sd, p. 19)

A proposição se constitui de três situações – pares de conjuntos dispostos horizontalmente – em que os dois primeiros apresentam a quantidade de três elementos como característica comum, que se distingue do último que tem quatro. Além disso, em sua elaboração, Júnior (sd) toma o cuidado tanto para diversificar quanto para manter o tipo de elemento. As crianças devem indicar a biunivocidade, definida pela mesma cor, que pode ser traduzidas nos seguintes pares ordenados:
1) na primeira situação, (caderno amarelo, lápis amarelo), (caderno azul, lápis azul), (caderno vermelho, lápis vermelho);
2) na segunda, (círculo azul, quadrado azul), (triângulo vermelho, círculo vermelho), (quadrado amarelo, triângulo amarelo);
3) na última, (meia amarela, meia amarela), (meia azul, meia azul), (luva preto e branca, luva preto e branca), (luva vermelha, luva vermelha).

b) Proposição envolvendo a relação biúnivoca entre conjuntos determinada pelo atributo tamanho (figura 22).

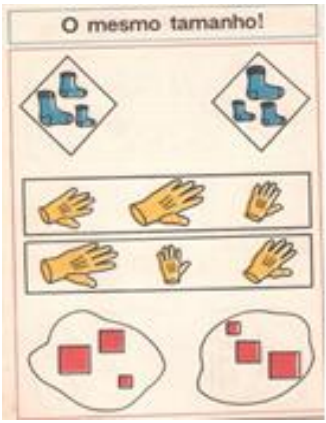


Figura 22: Relação de biunivocidade determinada pelo atributo tamanho
Fonte: Júnior (sd, p. 20)

Nessa proposição, constam três situações ou pares de conjuntos, cada qual com três elementos. Além disso, apresentam a regularidade de que, tanto o conjunto de partida quanto o de chegada, são constituídos de mesmos elementos que mantém a cor (azul, quando o elemento é meia; amarela, para luva; vermelha para a superfície quadrada) e de três tamanhos (maior, médio e pequeno) em todos os conjuntos. Também, houve o cuidado para diferenciar uma situação da outra, o que se observa pela: forma dos diagramas (losango, retângulo e linha curva fechada), em cada uma delas; disposição dos dois conjuntos (vertical, na primeira e terceira situação e horizontal, na segunda); e tipo de elemento (meia, luva, quadrado).

São esses critérios adotados na elaboração da proposição que, supostamente, conduziriam a atenção dos estudantes para o atributo tamanho e estabelecessem as relações que constituiriam os seguintes pares de elementos:

1) primeira situação (meia maior, meia maior), (meia média, meia média), (meia pequena, meia pequena);
2) situação intermediária (luva grande, luva grande), (luva média, luva média), (luva pequena, luva pequena);
3) terceira situação (quadrado maior, quadrado maior), (quadrado médio, quadrado médio), (quadrado pequeno, quadrado pequeno).

c) Proposição que envolve a relação biunívoca entre elementos de dois conjuntos determinada pelo atributo posição (figura 23).

Vale destacar que nessa proposição também reflete o intuito de Júnior (sd) de sempre apresentar algo novo. Isso é perceptível quando pela primeira vez a região interna dos conjuntos se apresenta colorida (amarela ou rosa).

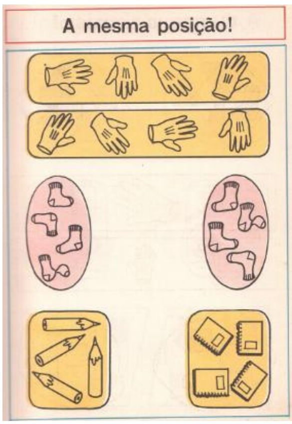


Figura 23: Relação de biunivocidade determinada pelo atributo posição
Fonte: Júnior (sd, p. 21)

Assim como na anterior, essa proposição expõe aos estudantes, três situações ou pares de conjuntos com quatro elementos. Na primeira situação, apresenta seus dois conjuntos, ambos de luvas, dispostos verticalmente. A segunda traz seus conjuntos de meias, posicionados horizontalmente. Esta mesma disposição ocorre na terceira situação em que os elementos de partida e chegada são, respectivamente, lápis e caderno.

Além do tipo de elemento, outro aspecto distinto é o formato dos diagramas: retangular com região angular curva e base maior na horizontal, na situação superior; elíptica, na intermediária; retangular com região angular curva e base maior vertical, na inferior.

Esse contexto de peculiaridades e diferenças da proposição é que possibilita que os estudantes liguem os elementos dos dois conjuntos, de cada situação, que tem como característica comum a posição.

d) Proposição que envolve a relação biunívoca entre elementos de dois conjuntos determinada por duplo atributo cor e posição (figura 24). Embora a exigência aumente para que a correspondência um a um seja estabelecida com atendimento a dois atributos, mesmo assim o continua três o números de situações ou pares de conjuntos.

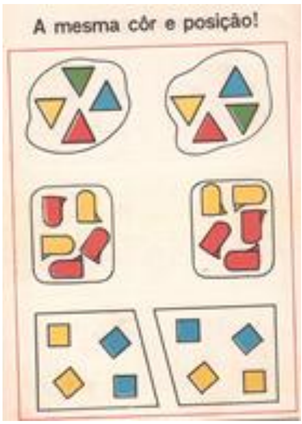


Figura 24: Relação de biunivocidade determinada pelos atributos cor e posição
Fonte: Júnior (sd, p. 22)

Dois aspectos diferenciam, de modo geral, as situações entre si: o tipo de elemento, respectivamente, triângulo, béquer e quadrado; o formato do diagrama (linha curva fechada, retangular e trapezoide).

Vale destacar a preocupação para que os elementos correspondentes não ficassem dispostos na mesma região do diagrama.

A primeira situação requer que os estudantes identifiquem os quatro elementos (triângulos), que conservam o mesmo tamanho, e também as quatro cores diferentes (amarela, verde, vermelha e azul). Essas características induzem-lhes a ligar os triângulos de mesma cor e mesma posição.

A situação seguinte, cujos conjuntos se compõem de cinco elementos (béquer), requer dos alunos as seguintes identificações: duas cores (vermelha e amarela) e cinco posições (horizontal para cima, horizontal para baixo, vertical para cima, vertical para baixo e inclinada para baixo). A correspondência demandada constitui os pares: (horizontal para cima vermelha, horizontal para cima vermelha), (horizontal para baixo amarela, horizontal para baixo amarela), (vertical para cima vermelha, vertical para cima vermelha), (vertical para baixo amarela, vertical para baixo amarela), (inclinada para baixo vermelha, inclinada para baixo vermelha).

A última situação tem cada um de seus dois conjuntos constituídos de quatro quadrados de mesmo tamanho, dos quais dois deles têm superfície amarela e dois azuis. Também, se apresentam com as posições horizontal e inclinada (losango). Desse modo, a correspondência esperada é: (quadrado de superfície amarela e posição horizontal, quadrado de superfície amarela e posição horizontal), (quadrado de superfície azul e posição horizontal, quadrado de superfície azul e posição horizontal), (quadrado de superfície amarela e posição inclinada – losango – , quadrado de superfície amarela e posição inclinada – losango), (quadrado de superfície azul e posição inclinada, quadrado de superfície azul e posição inclinada – losango).

e) Proposição que envolve a relação biunívoca entre elementos de dois conjuntos determinada por duplo atributo cor e tamanho (figura 25). As três situações – pares de conjuntos – só se distinguem entre si pelo tipo de elemento. Isso significa que elas têm em comum: o mesmo formato do diagrama (linha curva fechada); a quantidade de elementos (seis); três tamanhos (grande, médio, pequeno); em cada conjunto há dois elementos grandes amarelos, dois médios vermelhos e dois pequenos azuis; os elementos a serem correspondidos não estão dispostos na mesma região do diagrama.

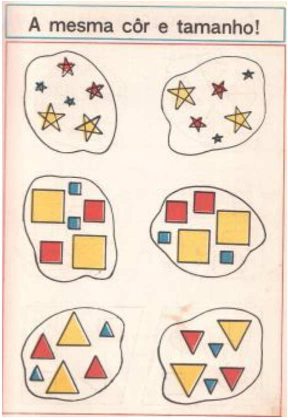


Figura 25: Relação de biunivocidade determinada pelos atributos cor e tamanho
Fonte: Júnior (sd, p. 23)

Ao estudante compete à identificação dos elementos que atenda aos critérios cor e tamanho. Dada as condições propiciadas por essas similaridades, é possível que o estudante identifique e estabeleça, em cada situação, dois pares idênticos de elementos que atendam os critérios cor e tamanho. Assim, na primeira situação ocorrerão as seguintes correspondências todas com dois pares cada: (estrela grande amarela, estrela grande amarela), (estrela média vermelha, estrela média vermelha), (estrela pequena azul, estrela pequena azul).

f) Proposição que envolve a relação biunívoca entre elementos de dois conjuntos determinada por duplo atributo posição e tamanho (figura 26).

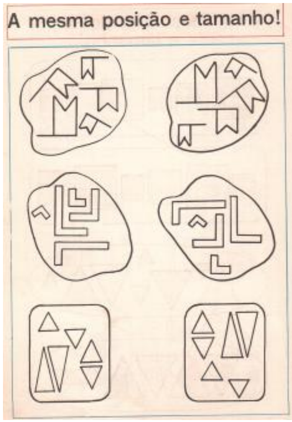


Figura 26: Relação biunívoca determinada pelos atributos posição e tamanho
Fonte: Júnior (sd, p. 24)

Observam-se dois aspectos comuns as três situações, identificáveis nos elementos dos seus conjuntos: a mesma cor e três tamanhos (grande, médio, pequeno). Porém, se diferenciam no tipo de elemento: na inicial, bandeiras; na intermediária, esquadros; na última, triângulo.

As duas primeiras situações se igualam no referente ao número de elementos dos seus conjuntos, cinco; e na forma de seus diagramas, linha curva fechada. Essas similaridades se distinguem em relação à terceira situação, cujos conjuntos têm seis elementos e diagrama retangular com região angular curva.

Como consequência de tais especificidades e diferenças é que se cria as condições para que os estudantes centrem-se na identificação dos elementos dos dois conjuntos de cada situação que atenda a condição estabelecida: ter a mesma posição e tamanho.

Na primeira situação, seus conjuntos apresentam dois elementos pequenos, o mesmo número de médios e somente um grande. Isso dá condições para os estudantes estabelecerem a correspondência um a um: (bandeira pequena horizontal, bandeira pequena horizontal), (bandeira pequena inclinada, bandeira pequena inclinada), (bandeira média horizontal, bandeira média horizontal), (bandeira média inclinada, bandeira média inclinada), (bandeira grande horizontal, bandeira grande horizontal).

Em cada um dos conjuntos dos pares da segunda situação, há dois elementos grandes, dois pequenos e um médio. Assim, são esperadas as seguintes correspondências: (esquadro grande vertical, esquadro grande vertical), (esquadro grande horizontal, esquadro grande horizontal), (esquadro pequeno vertical, esquadro pequeno vertical), (esquadro pequeno inclinado, esquadro pequeno inclinado), (esquadro médio vertical, esquadro médio vertical).

A terceira situação, pelos seus conjuntos se constituírem de seis elementos, propicia para que se tenham dois deles de cada tamanho (grande, médio e pequeno). Isso torna possível que se estabeleça as seguintes correspondências: (triângulo grande de base para baixo, triângulo grande de base para baixo), (triângulo grande de base para cima, triângulo grande de base para cima), (triângulo médio de base para cima, triângulo médio de base para cima), (triângulo médio de base para baixo, triângulo médio de base para baixo), (triângulo pequeno de base para cima, triângulo pequeno de base para cima), (triângulo pequeno de base para baixo, triângulo pequeno de base para baixo).

g) Proposição que envolve a relação biunívoca entre elementos de dois conjuntos determinada por triplo atributo posição, cor e tamanho (figura 27). Se comparada com as anteriores, além da peculiaridade de exigir a correspondência condicionada por três atributos, ela também se diferencia por se constituir apenas de duas situações e, ainda, pela posição vertical dos seus pares de conjuntos.

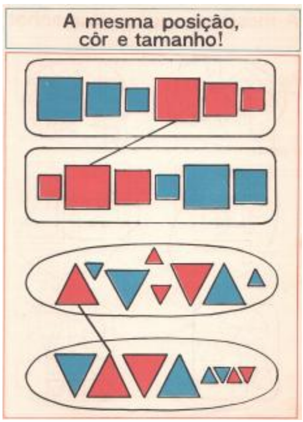


Figura 27: Relação biunívoca determinada com atributos cor, posição e tamanho
Fonte: Júnior (sd, p. 25)

As duas situações têm os elementos caracterizados por figuras geométricas: quadrados, na primeira e triângulos, na segunda, sendo a metade delas em cor vermelha e a outra na cor azul. Em ambas, há uma indicação orientativa de como os alunos devem proceder ao apresentar uma linha reta que liga as figuras vermelhas maiores dos dois conjuntos de cada par.

A primeira situação tem seus dois conjuntos constituídos de seis quadrados em cada um, dos quais, três vermelhos e três azuis. De cada cor, há três tamanhos (grande, médio e pequeno) e todos com a mesma posição, horizontais. Decorre, então, a possibilidade dos estudantes completar os pares, uma vez que o primeiro deles a proposição já traz formado: (quadrado grande vermelho, quadrado grande vermelho), (quadrado grande azul, quadrado grande azul), (quadrado médio vermelho, quadrado médio vermelho), (quadrado médio azul, quadrado médio azul), (quadrado pequeno vermelho, quadrado pequeno vermelho), (quadrado pequeno azul, quadrado pequeno azul).

A segunda situação tem oito elementos (triângulos) assim caracterizados: duas posições (base para baixo e base para cima); dois tamanhos (grande e pequeno); de cada posição e tamanho há sempre um elemento azul e um vermelho. Desse modo, espera-se que o estudante ligue os elementos correspondentes dos dois conjuntos, em conformidade com os atributos posição, cor e tamanho. O primeiro par, exemplo, se apresentou na própria apresentação da situação: (triângulo base para cima/vermelho/grande, triângulo base para cima/vermelho/grande); (triângulo base para baixo/vermelho/grande, triângulo base para baixo/vermelho/grande), (triângulo base para baixo/vermelho/pequeno, triângulo base para baixo/vermelho/pequeno), triângulo base para cima/vermelho/pequeno, triângulo base para cima/vermelho/grande), (triângulo base para baixo/azul/grande, triângulo base para baixo/azul/grande); (triângulo base para cima/azul/grande, triângulo base para cima/azul/grande), (triângulo base para baixo/azul/pequeno, triângulo base para baixo/azul/pequeno), triângulo base para cima/azul/pequeno, triângulo base para cima/azul/grande).

3.1.4. O prenúncio da ideia de quantidade

As proposições analisadas nas seções anteriores tinham como foco a ideia de relação um a um – entre elementos de dois conjuntos – permeada por critérios de classificação (cor, espécie, espessura e posição). Por sua vez, as proposições, a seguir analisadas, trazem as primeiras expressões da noção de quantidade, porém ainda sem conduzir para a simbologia numérica. Pedagogicamente, essa introdução é conduzida por três ideias básicas: mais, menos e ordem (crescente e decrescente) em relação ao tamanho e não à quantidade. Ao abandonar a correspondência biunívoca, elas induzem à identificação, por parte das crianças, daquilo que se espera. Para tanto, a condução é determinada por perguntas iniciadas pela expressão "onde tem", quando o foco é intensidade (muito, pouco, mais, menos). Se a centralidade for a ordem, a interrogação condutora inicia pela palavra "descubra".

a) Proposição referente à identificação de maior quantidade (figura 28), que consta de quatro situações para serem analisadas pelos estudantes. Por não haver um direcionamento direto, deixa livre para que eles indiquem a quantidade maior por procedimentos próprios. Os diagramas delimitadores dos conjuntos são de diferentes formas (linhas fechadas curvas e linhas retas).

Na primeira situação, a relação é entre conjuntos mesma classe (instrumentos musicais), com diagramas curvilíneos, mas de elementos diferentes (conjunto de cornetas e conjunto de tambores). O segundo conjunto (de tambores) contempla a exigência posta por ter maior número de elementos do que o primeiro (cornetas). A seguir, na segunda situação, os dois conjuntos, cujos diagramas são linhas retas fechadas do tipo retangular, têm elementos da mesma espécie (copos). O primeiro deles contém a maior quantidade de elementos, portanto é aquele que deve ser identificado, pelos estudantes. A terceira situação se constitui de dois conjuntos delimitados por uma linha curva fechada elíptica, com mesmo tipo de elementos, pequenos traços, mas se diferenciam pela posição: horizontal no primeiro e vertical no segundo conjunto. A identificação prevista exige atenção do estudante, dada à semelhança e ao posicionamento dos elementos. A contagem deve ser o procedimento para a criança apontar "onde tem muito". Por fim, os conjuntos aparecem novamente em diagramas curvos, ambos contêm quadrados iguais como elementos, que ocupam o mesmo espaço em cada um deles. Essa distribuição, contudo não se converte em impeditivo – caso fosse a intenção do autor – para a criança indicar o segundo conjunto, pois é visível a maior quantidade de elementos.

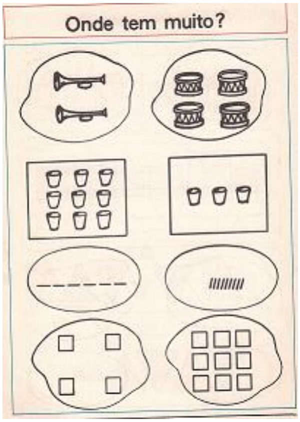


Figura 28 – Proposição condutora para a identificação de maior quantidade
Fonte: Júnior (sd, p. 26)

b) Proposição condutora para identificação de menor quantidade (figura 29) que envolve o estudante na observação de quatro situações para indicar, em cada uma, onde está o conjunto que tem menos elementos. Adota o critério da proposição anterior de, em cada situação, conjuntos não terem os mesmos elementos. Porém, numa mesma situação, são idênticos nos dois pares, o que pode variar é o tamanho e, pelo próprio objetivo a que se propõe a quantidade. Na primeira situação, os seus conjuntos apresentam-se em diagramas de formato de linha curva fechada e em posição horizontal. Eles têm como elemento desenhos de garrafas, de tamanho maior no primeiro conjunto – a ser assinalado pelo estudante, pela quantidade – e menor no segundo.

A segunda situação quebra a rotina em relação as demais no referente à posição (vertical) e à forma do diagrama (retangular com região angular curva) dos seus pares de conjuntos. Faixas de mesmo tamanho, em forma de S, são os seus elementos, que se prevê que dá condições suficientes para as crianças identificarem o conjunto posicionado inferiormente como aquele que "onde tem pouco". A terceira situação é similar à primeira com diferença no tipo de elemento (pandorgas) e suas quantidades nos dois conjuntos do par. Com essas condições postas, espera-se que o estudante identifique o primeiro como sendo aquele que lhe é solicitado a identificação.

Na situação subsequente, os pares de conjuntos têm os mesmos elementos (pontos) e diagramas (elípticos). A diferença entre a quantidade de pontos deles é acentuada, o que se considera como fator de identificação, sem grandes dificuldades, de que o segundo conjunto se caracteriza como aquele que ‘tem pouco’.

Vale destacar a preocupação do autor (JÚNIOR, sd) para que as respostas esperadas, por parte dos estudantes, não se centrassem somente em um dos conjuntos dos pares. Assim, nas quatro situações da proposição referente à identificação de “onde tem muito” está: na primeira, terceira e quarta, no segundo conjunto do par e, somente na segunda, no primeiro conjunto. Por sua vez, nas quatro situações da proposição que propunha a localização do conjunto que ‘tem pouco’, a resposta correta apresenta-se alternada: a primeira e a terceira estão no primeiro conjunto do par, enquanto a segunda e a quarta, no segundo.

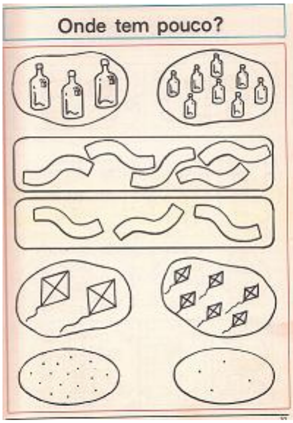


Figura 29 – Proposição condutora para identificação de menor quantidade
Fonte: Júnior (sd, p. 27)

c) Proposição condutora para identificação simultânea de maior e menor quantidade discreta (figura 30). Significa que o estudante deverá indicar dois conjuntos em cada situação: aquele com mais e o que tem menos elementos. Porém, não há orientação sobre o modo de expressá-los.

Na primeira linha, os quatro conjuntos estão interligados entre si formando um retângulo. Neles os elementos (quadrados) são os mesmos, mas, em diferentes quantidades e posições. Essas mesmas características são preservadas na segunda, terceira e quarta situações. As distinções entre elas estão no tipo de diagrama (respectivamente, linha curva fechada, losango e retângulo). As duas primeiras têm em comum o tipo de elemento (quadrado) que se diferencia das outras duas que são constituídas de círculos.

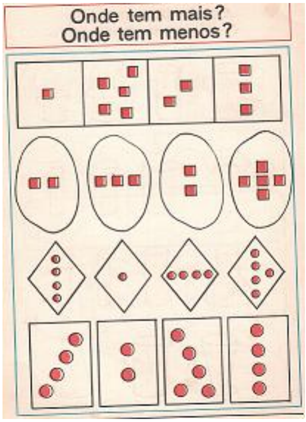


Figura 30 – Proposição condutora para identificação simultânea de maior e menor quantidade discreta
Fonte: Júnior (sd, p. 28)

d) Proposição condutora para identificação simultânea de maior e menor referentes a quantidades contínuas (figura 31). É a primeira proposição que foca quantidade contínua, isto é, medida de volume. A quantidade (líquido) é representada em diferentes tipos de recipientes, que requer uma observação atenta, por parte da criança, para os dois recipientes: o que tem mais e o que tem menos. Com exceção da primeira situação que os quatro recipientes têm duas alturas diferentes, as demais conservam sempre a mesma. Consequentemente, as diferenças se apresentam em relação à forma ou largura.

Diferentemente das tarefas davydovianas, que focam enfaticamente a relação entre medidas de grandezas de mesma natureza, essa proposição se apresenta com o tratamento de grandeza contínua. Portanto, o volume é algo, não relacionado à medida, mas basta que a criança olhe o recipiente, direcionada pelo pensamento da lógica formal, e dizer: “este tem mais” e “aquele tem menos”, recorrendo a qualquer tipo de indicação.

Figura 31 – Proposição condutora para identificação simultânea de maior e menor quantidade contínua
Fonte: Júnior (sd, p. 29)

e) Proposições condutoras para identificação e disposição dos objetos em ordem crescente ou decrescente (figuras 32, 33 e 34). A ideia de crescente e decrescente está ligada ao tamanho, “maior” e “menor”, e não à quantidade. O direcionamento, ao estudante, aparece na primeira proposição (figura 32) explicitamente com o enunciado: “Descubra a ordem”. Porém, não requer que a indicação seja pelas palavras ‘crescente’ ou ‘decrescente’, que expressaria um esforço de sair da simples identificação puramente pela observação da coisa em si. Em vez disso, insiste para que os estudantes redesenhem os objetos, de modo que, na coluna da esquerda, a disposição deles em cada situação obedeceria a sequência maior/médio/menor. Na segunda coluna, mudaria a ordem dos respectivos objetos para menor/médio/maior. A situação inicial, com peões, está completa, sendo a referência de como proceder com as demais.

Sendo assim, os estudantes deverão completar a coluna da direita na segunda e terceira situações, com os respectivos desenhos (bonés e tambores), do menor para o maior. Contrariamente, na quarta e quinta situações, os desenhos (instrumentos musicais e pregadores) serão desenhados na coluna da esquerda na ordem decrescente de tamanho.

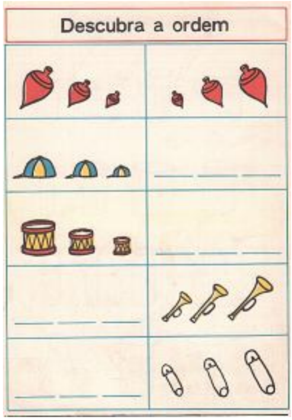


Figura 32 – Proposição condutora para identificação e disposição dos objetos em ordem crescente ou decrescente
Fonte: Júnior (sd, p. 30).

A proposição seguinte (figura 33) traz a mesma exigência da anterior, uma vez que as situações da primeira coluna requerem que os objetos (círculos, quadrados, triângulos, elos, respectivamente) sejam desenhados em ordem decrescente. Na segunda coluna, ocorrerá o contrário, na ordem crescente. A diferença marcante, em relação à anterior, é a ausência de enunciado, substituído por uma sequência do objeto.

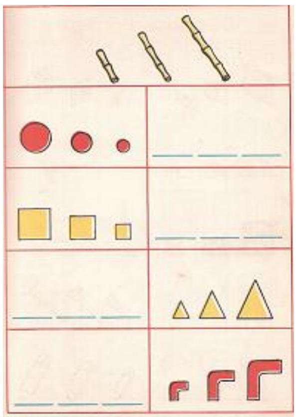


Figura 33 – Proposição condutora para identificação e disposição dos objetos em ordem crescente ou decrescente
Fonte: Júnior (sd, p. 31)

A última proposição dessa seção (figura 34), assim como a anterior, não dirige o estudante com um enunciado, mas com uma situação que dispõe três quadrados de tamanhos diferentes em ordem crescente, se observada da esquerda para a direita. Distingue-se das demais, pois em todas as situações a coluna da direita – ou primeiro conjunto do par – estão completas, isto é, são referências para ser transportadas para a coluna da direita. Exceto a última, nas demais situações as figuras ou elementos mantêm-se em ordem crescente.

A ausência de enunciado, na proposição, deixa dúvida sobre a ordem que os estudantes devem desenhar os respectivos objetos na segunda coluna. A hesitação pode ocorrer pela manutenção dos objetos na primeira coluna, que não dá oportunidade aos estudantes de identificar o procedimento necessário com a observação na lógica adotada na construção das situações, como ocorria nas proposições anteriores. A questão que se apresenta é: Manter na segunda coluna a ordem da primeira, ou invertê-la?

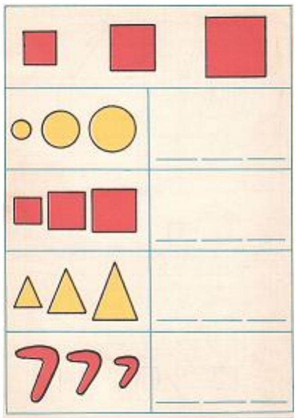


Figura 34 – Proposição condutora para identificação e disposição dos objetos em ordem crescente ou decrescente
Fonte: Júnior (sd, p. 32)

A criança passa muito mais tempo envolvida com desenho do que com as questões conceituais, isto é, com as relações e princípios caracterizadores do sistema de conceito. Prioriza o fazer em detrimento do desenvolvimento do pensamento.

3.1.5 O número: seu fundamento em quantidade discreta, simbólica e escrita

Nessa seção apresentaremos o modo que Júnior (sd) introduz o conceito de número, propriamente dito, pois é o momento em que, da relação entre conjuntos, surge à simbologia e a escrita dos numerais. O autor introduz os numerais, consequentemente, a pretensa ideia conceitual, a partir do 1 (um), segue o 2 (dois) e assim sucessivamente, até atingir o 10 (dez).

A quantidade aparece articulada com o gênero (masculino e feminino) direcionada pela pergunta: “Quantos?” e “Quantas?”, (figura 30). Assim, ponto de partida é a sequência de conjuntos em ordem decrescente de quantidades de elementos: 4, 3, 2, 1, respectivamente, copos (azuis de mesmo tamanho) referente à pergunta “Quantos?”, e flores (vermelhas de mesmo tamanho) ao feminino “Quantas?”. Após essas duas sequências de conjuntos, outra aparece com o mesmo objetivo, que se diferencia das anteriores pelo tipo de elemento (retângulos vermelhos de mesmo tamanho), concernente ao gênero masculino, e bolinhas (azuis de mesmo tamanho), referente ao gênero feminino.

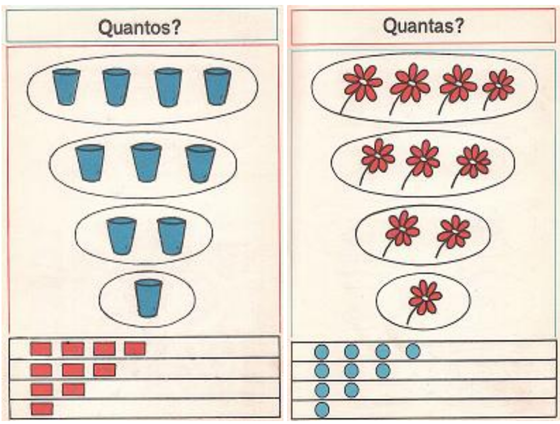


Figura 35 – Proposições introdutórias para a apresentação dos numerais
Fonte: Júnior (sd, p. 34 e 35)

A proposição e suas perguntas, “Quantos?” e “Quantas?”, pressupõem que a criança tenha aprendido a identificar as quantidades e suas respectivas nomenclaturas (quatro, três, dois, um) em ambiente de informalidade, pois até o momento o livro não trata de tais questões. Tal expectativa, não se caracteriza como um lapso por parte do autor, pois, como diz Vigotski (2000), a criança ao chegar na escola traz noções conceituais cotidianas de número. No entanto, o risco que corre é da não interferência do professor e da própria proposição para fazer com que o estudante não permaneça com o mesmo nível de compreensão, isto é, sem uma base conceitual científica.

3.1.5.1. Os primeiros números: 1 (um) e 2 (dois), suas ideias e formas de representações

Posteriormente as proposições que requerem a identificação das quantidades de objetos, inicia-se o ensino do conceito de 1 (um), cujas proposições são idênticas àquelas que conduzirão ao 2 (dois). Por isso, discutiremos concomitantemente essas duas quantidades, embora no livro, sejam tratadas sequencialmente, mas de forma isolada. Elas iniciam com as perguntas "Quantas?" e "Quantos?", cada qual apresenta várias situações de pares de conjuntos para que os estudantes estabeleçam a correspondência biunívoca entre os respectivos elementos, indicada na primeira delas.

O primeiro conjunto de cada par tem como elemento o desenho de objetos, que se distinguem, nas respectivas situações, pela espécie e cor. Por sua vez, no segundo conjunto há o predomínio do elemento ponto, posteriormente, da própria simbologia e, por fim, a escrita numérica.

a) Proposição que estabelece a relação objeto do primeiro conjunto e ponto do segundo conjunto (figuras 36 e 37).

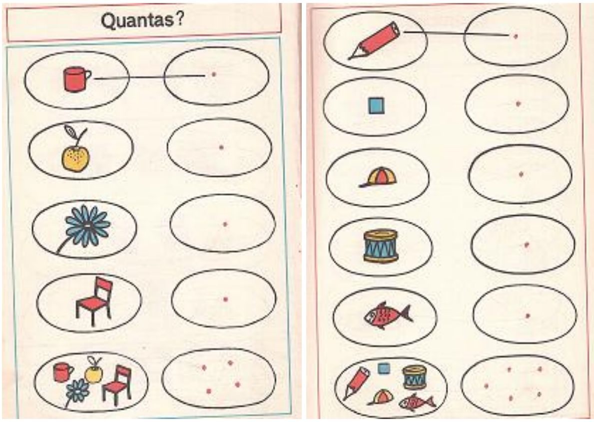


Figura 36 – Proposição introdutória para a apresentação do número 1(um)
Fonte: Júnior (sd, p. 36 e 37)

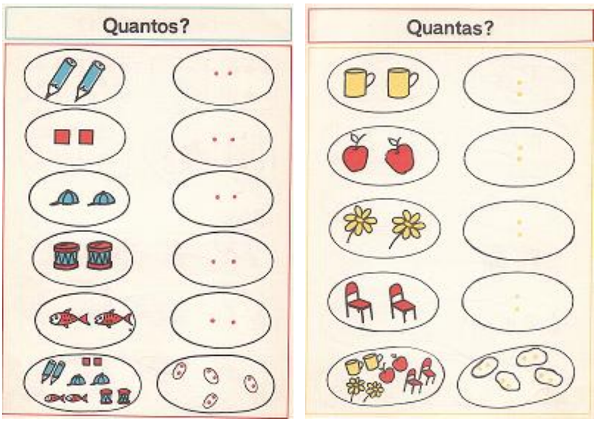


Figura 37 – Proposição introdutória para a apresentação do número 2 (dois)
Fonte: Júnior (sd, p. 46 e 47)

Observa-se que as proposições que introduzem as referidas quantidades apresentam certas similaridades. Uma delas é que apresentam duas proposições, em que os elementos objetos são os mesmos – tanto para a quantidade um, quanto para dois – quando se tratam, respectivamente das perguntas, “Quantos?” e “Quantas?”. Além disso, a última situação tem seus elementos constituídos de todos aqueles dos conjuntos anteriores. No entanto, a correspondência permanece com o princípio de um a um.

b) Proposição que estabelece a relação objeto do primeiro conjunto e ponto do segundo, com apresentação da simbologia (figura 38 e 39). O diferencial dessa proposição é a apresentação pela primeira vez do numeral, isto é, o símbolo numérico. A relação biunívoca entre os elementos dos conjuntos (objeto e ponto) permanece e, nesse momento, apresenta-se o numeral que representa a quantidade de elementos em cada conjunto. Em seguida, o estudante completará as várias situações como determina a proposição, ou seja, ligar por um traço o objeto (elemento do primeiro conjunto) ao ponto (elemento do segundo conjunto) e escrever o numeral (1 ou 2) correspondente à quantidade de cada conjunto. Por fim, a criança escreverá duas linhas numerais do mesmo numeral; em outras palavras, treinar a escrita (desenho) do mesmo.

Na proposição seguinte, à direita da anterior, os elementos de cada primeiro conjunto do par correspondem ao gênero feminino (caneca, laranja, flor e cadeira, respectivamente). Somente, na primeira situação – exemplo a ser seguido – é que aparece o próprio símbolo numérico como sendo o elemento do segundo conjunto do par. Isso é o indicativo para que as crianças o acrescente nos demais que estão vazios. Assim, a relação biunívoca se estabelece pelo critério: quantidade de objeto/numeral correspondente.

A última situação se traduz numa espécie de síntese das demais ao reunir nos seus dois conjuntos os elementos dos anteriores correspondentes. Para evitar dúvidas e equívocos de que não se trata da união de conjuntos, o que se caracterizaria pela quantidade 4 elementos, mostra-se o exemplo a ser adotado que induz a correspondência um a um, ou seja: (,1); (,1); (,1); (,1). A mesma precaução se expressa quando a referência é o ensino do dois: (,2); (,2); (,2); (,2).

Contudo, essa situação quebra a ênfase de que o elemento do conjunto é apenas um objeto, mas também por um agrupamento deles. No entanto, é questionável a forma que se apresenta à criança que não instiga a interferência do professor e se restringe a uma orientação por um exemplo que induz o procedimento a adotar. Observa-se que o objetivo é focar o conceito de 1 ou de 2, porém pode ficar evidente a quantidade 4 (figura 33) ou 8 (figura 34), caso não haja uma orientação meticulosa, pois é a primeira vez que surge tal ideia, elemento como agrupamento.

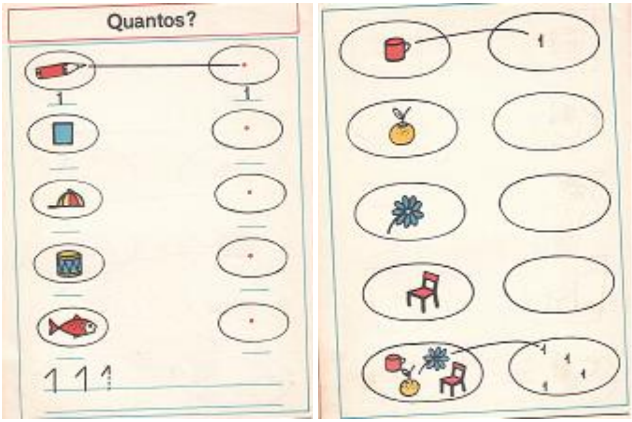


Figura 38 – Proposição introdutória para a apresentação do numeral 1 (um)
Fonte: Júnior (sd, p. 38 e 40)

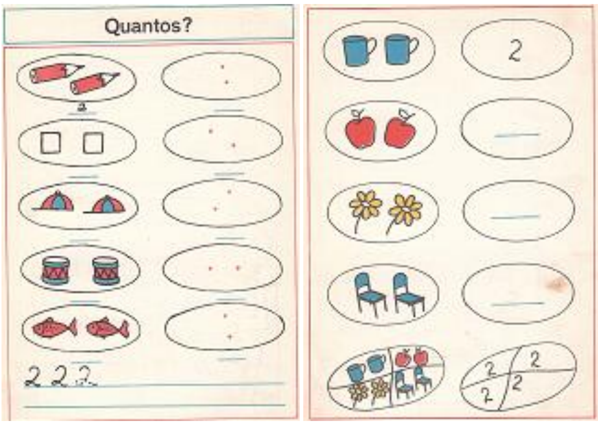


Figura 39 – Proposição introdutória para a apresentação do numeral 2 (dois)
Fonte: Júnior (sd, p. 48 e 50)

c) Proposições que estabelecem a associação da quantidade (um ou dois) de elementos ou objeto com a escrita dos numerais (figura 40 e 41). Portanto, diferencia-se da anterior apenas no tipo de representação por adotar a escrita numérica, em vez de simbólica. As proposições da esquerda das duas figuras requerem que os estudantes escrevam a palavra ‘um’ (masculino) sob cada um dos conjuntos dos pares (um de figura e o outro de ponto) das cinco situações. Por fim, o aluno deve escrever repetitivamente, nas duas linhas, a palavra ‘um’ ou ‘dois’, conforme o conceito em referência.

As situações da proposição da figura à direita se diferenciam em relação as da esquerda no que diz respeito ao segundo elemento do segundo diagrama do par que tem, em vez de ponto, a própria escrita numérica no gênero feminino. Ou seja, visa o treinamento dos estudantes em relação à palavra ‘uma’ ou ‘duas’.

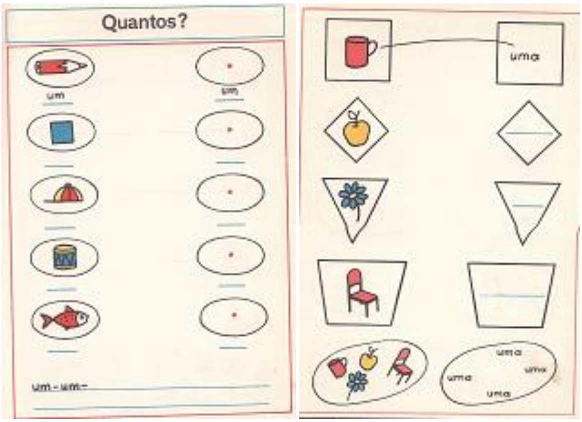


Figura 40 – Proposição para a apresentação da escrita numérica “um”
Fonte: Júnior (sd, p. 39 e 41)

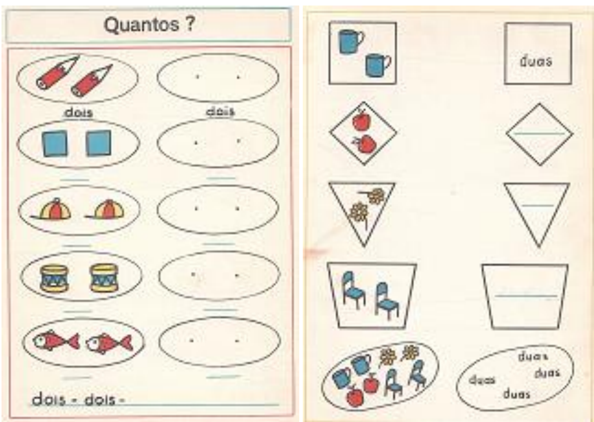


Figura 41 – Proposição para a apresentação da escrita numérica “dois”
Fonte: Júnior (sd, p. 49 e 51)

Na sequência, são indicadas duas proposições (figuras 42 e 43), não mais com base na correspondência biunívoca, entre dois conjuntos, mas com a ideia de associação entre a quantidade de objetos e o numeral ou sua escrita. Para tanto, o direcionamento é dado pelas perguntas “um ou uma?” e “Dois ou duas?”. A primeira delas apresenta como atributo diferenciador apenas o gênero (masculino ou feminino), que imprime a condição da escrita da quantidade, por exemplo: ‘uma’ garrafa e ‘um’ clipe. A segunda, à direita, se refere à associação entre quantidade de objetos e o símbolo (numeral), bem como com a sua escrita. Nessa, as duas situações iniciais, estão resolvidas e servem de exemplos a ser adotados. As duas subsequentes apresentam-se com os objetos e compete ao estudante indicar os dois modos representação. As demais propõem o contrário: dá um dos modos de representação numérica, o outro a completar, além de oportunizar a criação do objeto.

Figura 42 – Proposição para a apresentação de associação entre quantidade de objetos, numeral e sua escrita – 1 (um)
Fonte: Júnior (sd, p. 42 e 43)

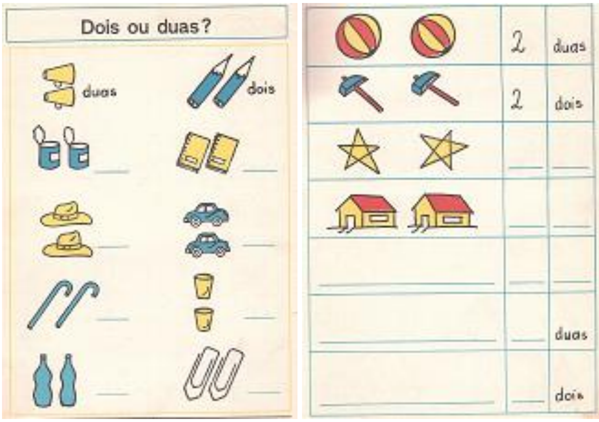


Figura 43 – Proposição para a apresentação de associação entre quantidade de objetos, numeral e sua escrita – 2 (dois)
Fonte: Júnior (sd, p. 52 e 53)

A última proposição da presente seção estabelece que o estudante identifique a quantidade com teor localizativo, em que o direcionamento é feito por meio da pergunta "Onde está o 1?" ou "Onde está o 2?" (figuras 44 e 45). Antes, porém, oferece mais uma sequência de situações que, além da relação biunívoca, entre os dois conjuntos de cada par (respectivamente, objeto e ponto), o aluno escreverá o símbolo numérico (1 ou 2). A exceção de tal exigência está na penúltima situação que, em vez do símbolo, requer o desenho de um objeto no primeiro diagrama do par de conjuntos. A localização e indicação da quantidade solicitada, na proposição da figura da direita, se apresenta em todas as situações caracterizadas por algum tipo de desenho (bolas, quadrados, balões, cadernos e lápis), que se repetem tanto para quantidade dois, quanto para um. A diferença está apenas na cor. O estudante não recebe nenhuma orientação explícita sobre a forma de fazer a indicação, como por exemplo: assinalar com X, circular, pintar, etc.

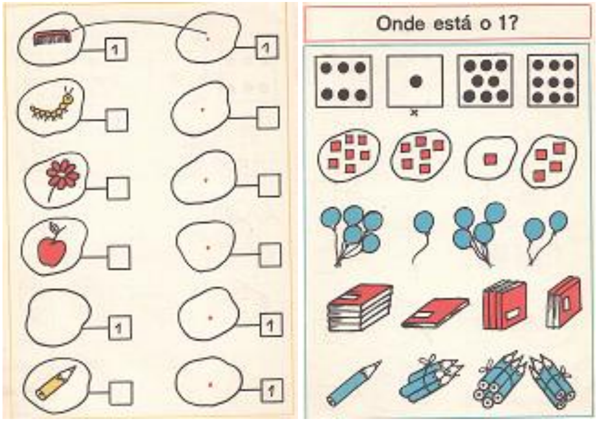


Figura 44 – Proposição para localização da quantidade 1 (um)
Fonte: Júnior (sd, p. 44 e 45)

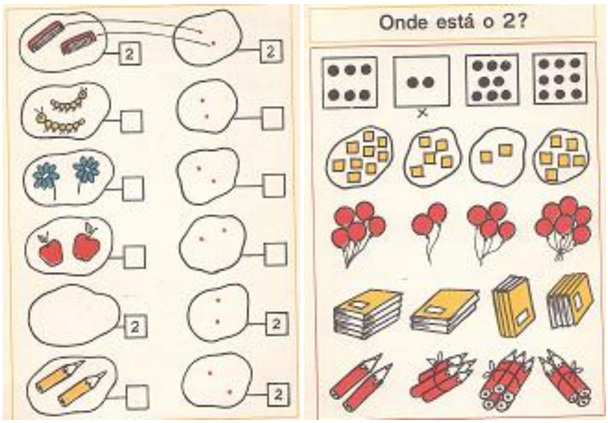


Figura 45 – Proposição para localização da quantidade 2 (dois)
Fonte: Júnior (sd, p. 54 e 55)

3.1.5.2. O ensino do 3 (três): peculiaridades que expandem aos demais números

Na presente subseção, analisaremos as proposições para o ensino do conceito de 3. Vale dizer que elas serão referências essenciais de nossas análises, pois será o último conceito que trataremos isoladamente. Não daremos a mesma atenção aos demais (4, 5, 6, 7, 8 e 9), de forma particular, uma vez que eles são apresentados com situações similares a do 3, guardadas as devidas peculiaridades em termos de quantidade. No entanto, na próxima seção (4.6) destacaremos as proposições que se apresentam como peculiares no ensino dos demais números por se caracterizarem como o surgimento de uma nova significação ou conceito.

O ensino e o estudo do conceito de três é antecedido por uma proposição (figura 46) que coloca imediatamente, uma em seguida da outra, duas situações referentes às quantidades 1 (um ou uma) e 2 (dois ou duas), com suas respectivas simbologias e escritas numéricas. As mesmas estão dispostas em linhas em que aparece o objeto a quantificar, além de duas colunas: na primeira, o estudante irá completar com numerais (1 ou 2); na segunda, a escrita (um ou uma, dois ou duas), conforme o direcionamento proposto. Ela deixa indicativos de que estão em ordem, na sequência dos numerais que deverão ser memorizados.

Figura 46 – Proposição que antecede o conceito de três
Fonte: Júnior (sd, p. 56)

As proposições que introduzem o referido conceito não trazem enunciados que orientam o estudande para a finalidade prentendida. A situação inicial de cada uma delas indica algum procedimento a seguir, interpretado como se fosse do tipo: “é assim que se faz”. Cada uma delas traz sempre algo a mais que as anteriores, isto é, uma nova significação conceitual, quais sejam: identificação da quantidade e sua representação simbólica ou escrita, composição numérica por agrupamento das quantidades (2 e 1), igualdade e diferença, maior e menor.

a) Proposição com teor de identificação da quantidade e sua representação simbólica, cuja situação inicial induz que estudante estabeleça a relação biunívoca – ligar os elementos – entre os dois conjuntos (figura 47). Além disso, que ele escreva o numeral 3 sobre um traço, situado entre os dois diagramas. As demais situações requerem o mesmo procedimento, pois muda apenas a forma do diagrama e do tipo dos elementos: na primeira situação, peões e pontos, respectivamente, no segundo alfinetes e quadrados, na terceira, balões e triângulos, na quarta; laços e círculos.

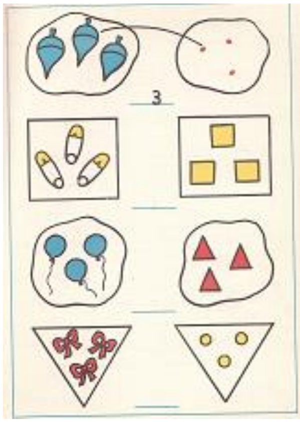


Figura 47 – Proposição de indentificação e representação simbólica da quantidade 3 (três)
Fonte: Júnior (sd, p. 57)

b) Proposição com teor de identificação da quantidade e sua representação escrita (figura 48), composta de seis situações. Cada uma das quatro primeiras, é formada por pares de conjuntos que simulam a correspondência um a um entre seus elementos. Estes, nas três iniciais, devem ser criados ou reproduzidos, pelos estudantes, em um dos conjuntos dos pares. Além disso, solicita que ele escreva a palavra ‘três’ sobre um traço, situado entre os dois diagramas. Por fim, as duas últimas situações são linhas para que seja completadas, respectivamente, pelo numeral 3 e pela a escrita ‘três’.

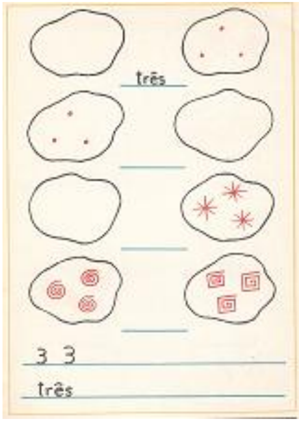


Figura 48 – Proposição de indentificação e representação escrita da quantidade 3 (três)
Fonte: Júnior (sd, p. 58)

c) Proposições referentes ao ensino do três, conforme figuras 49 e 50, que dão início à inclusão de novas significações ao conceito de número. No caso das duas subsequentes, trazem a ideia de agrupamento das quantidades (2 e 1). Na primeira delas (figura 49), as cinco situações apresentam em um dos conjuntos dos pares os três elementos são desenhos (estrelas, lápis, caixas e livros). E, no outro, três pontos. A situação inicial está completa para que a criança a observe para fazer o mesmo com a demais. Nas quatro situações iniciais, em um dos conjuntos do par, há um traço que separa dois elementos do outro e, sob ele, dois traços ligados pela letra ‘e’, locais para escrever 2 ou 1, de acordo com o proposto. Na última situação, a separação ocorre por dois traços, isto é, separam os elementos em unidade, o que requer a escrita ‘1 e 1 e 1’.

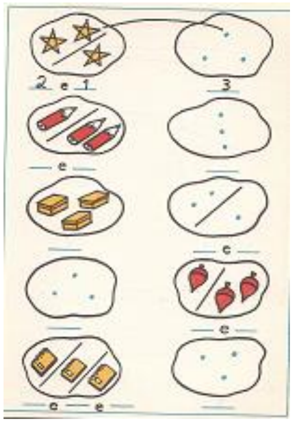


Figura 49 – Proposição com teor de composição
Fonte: Júnior (sd, p. 59)

A segunda proposição (figura 50) aparenta uma tabela com sete linhas (situações) e duas colunas, em que aquelas posicionadas à esquerda, aparecem os numerais da seguinte forma: ‘2 e 1’, ‘1 e 2’ e ainda ‘3’, ou espaços a completar com esses símbolos. Nas colunas da direita, cada linha tem pontos em quantidade correspondete aos valores especificados à esquerda. Seguindo o ritual que caracteriza a proposição modernista de ensino da Matemática, compete ao estudante obsevar a primeira situação e adotá-la como referência para completar as demais que, nesse caso, oscila entre numerais e pontos.

Figura 50 – Proposição com teor de composição
Fonte: Júnior (sd, p. 60)

d) Proposições que envolvem as significações de ‘igual’ e ‘diferente’ que têm como enunciado a própria simbologia, respectivamente, = e ≠. A apresentação dessas simbologias é destituída de qualquer menção conceitual, simplesmente concebidas como algo dado que diz respeito apenas aos objetos em si. Portanto, não traduz um pensamento conceitual científico com ênfase a uma relação vinculada ao equacionamento de determinadas situações, atrelada ao princípio de equivalência.

Em cada uma dessas proposições que apresentam a relação de igualdade e de diferente no contexto do conceito de três, as situações cetralizam-se na relação biúnivoca, nas simbologias numérica (1, 2 e 3), consequentemente, = e ≠.

Na proposição relativa ao = (figura 51), as três primeiras situações requerem, do estudante, que estabeleçam a correspondência um a um dos elementos dos dois conjunto dos pares e, sob estes, preencher com os numerais correspondentes os espaços separados por =. Nas demais situações que trazem somente os numerais, basta colocar o = no espaço a completar.

Na proposição relativa ao ‘diferente’ (figura 52), o papel do aluno é similar ao desempenhado na anterior. A diferença está que, em vez da relação biúnivoca, compete-lhe desenhar os elementos de cada primeiro conjunto dos pares. Obviamente, além disso, completar os espaços estipulados com ≠.

E, finalmente, uma proposição (figura 53) que abrange simultaneamente = e ≠, exige do estudante: identificar a quantidade de elementos dos dois conjuntos de cada par, escrever a respectiva simbologia e colocar entre eles o sinal de igual ou diferente.

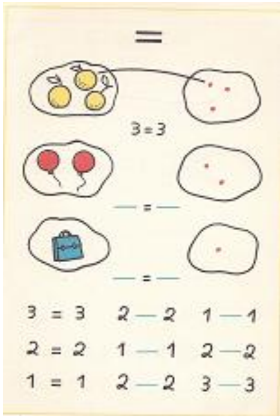


Figura 51 – Proposição para identificação de quantidades iguais e sua simbologia.
Fonte: Júnior (sd, p. 61)

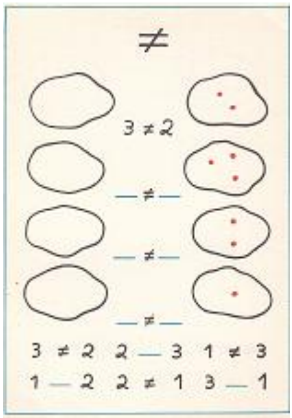


Figura 52 – Proposição para identificação de quantidades diferentes e simbologia.
Fonte: Júnior (sd, p. 62)

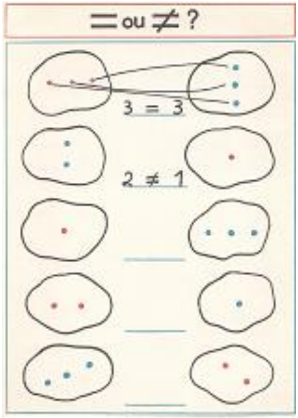


Figura 53 – Proposição para identificação de quantidades iguais e diferentes com as simbologias pertinentes.
Fonte: Júnior (sd, p. 63)

f) Proposição que retoma à pergunta “Quantos?” (figura 54) referente ao 3 (três), com a ideia de decomposição. Há três situações, cada qual constituída de um conjunto com três elementos, porém delimitados internamente por diagramas pontilhados, caracterizando subconjuntos que compõem a referida quantidade. Externamente, estão quadrados, em cujas superfícies aparecem os numerais correspondentes ao total de elementos do conjunto e de seus dois subconjuntos. A exceção fica para o último conjunto, composto pelos subconjuntos de três elementos e o vazio. Este não traz o numeral ‘0’ (zero) no devido quadrado. Sendo assim, coloca a criança a mercê de procedimentos a adotar, pois trata-se de uma situação conceitual nova que, na certa, conclama a intervenção do professor para orientá-la.

O conceito de zero traz a ideia de ausência de quantidade, no âmbito de um subconjunto sem elemento. Porém, assim como 1 e 2, também compõe o 3, ou seja: 2 e 1, 1 e 2, 1 e 1 e 1, além de 3 e 0. Na última situação da proposição, explicitamente, ele é apresentado como sendo primeiro da sequência de números naturais. Para tanto, a mesma tem forma de tabela com quatro linhas e três colunas, assim constituídas: as linhas da primeira coluna e segunda colunas contém, respectivamente, a quantidade elementos (triângulos) e o numeral correspondente; na terceira coluna, com exceção da primeira linha que está completada com a palavra ‘zero’, é que compete a criança escreve o nome dos numerais (um, dois, três).

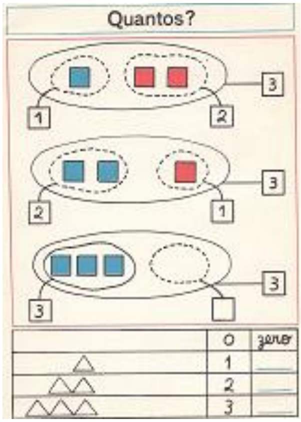


Figura 54 – Proposição que introduz o zero no contexto do três
Fonte: Júnior (sd, p. 65)

g) Proposição com teor comparativo (figura 55) – maior e menor – enunciada pelos novos símbolos, > e <, sem a devida identificação de quem é um ou outro. A primeira e segunda situações compõem-se de pares de conjuntos, cujos elementos são balões vermelhos de mesmo tamanho. Na primeira situação, cabe à criança apenas completar o espaço entre 3 e 2, com > ou <.

A segunda situação inverte, em relação à anterior, a quantidade de balões nos dois conjuntos dos pares. As crianças precisam escrever o numeral correspondente de cada um, acrescido de > entre eles. Função idêntica é que as crianças devem exercer frente às as demais as outras seis situações que se diferenciam somente pelo tipo de elemento dos conjuntos: pontos.

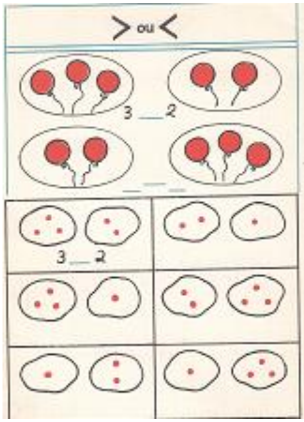


Figura 55 – Proposição referente às quantidades maior e menor, com a respectiva simbologia
Fonte: Júnior (sd, p. 66)

Por fim, antes de adentrar ao ensino do quatro, as duas últimas proposições (figura 56) voltadas especificamente ao conceito três e aos demais números pelos quais é possível compô-los. Elas se convertem numa espécie de síntese referentes à ideia de igual ou diferente e de maior ou menor, sequencialmente na ordem que foram apresentadas anteriormente às crianças. A identificação de ambas não se dá por um enunciado em forma de texto, mas pela simbologia pertinente. Têm características eminentemente simbólica, isto é, sem a relação entre os elementos de conjuntos. Propõem que o estudante identifique e diferencie as quantidades pelos símbolos = (igual), ≠ (diferente), > (maior) e < (menor).

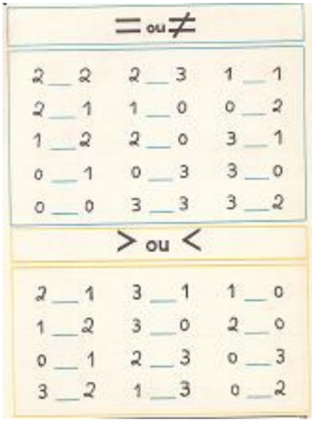


Figura 56 – Proposições sínteses referentes a igual ou diferente e maior ou menor
Fonte: Júnior (sd, p. 67)

3.1.6. Novas ideias e significações conceituais que se apresentam nas proposições do ensino dos demais números, 4 a 9

Como anunciado anteriormente, não detalharemos as proposições referentes aos números de 4 a 9, pois são similares àquelas do três, que contemplavam as seguintes ideias conceituais: correspondência um a um e escrita (numérica e simbólica), que se apresentaram inicialmente com o 1 e 2; igual ou diferente e maior ou menor. Para evitar repetição, traremos à tona aquilo que se apresenta pela primeira vez e torna-se inclusa, quando o enfoque é o número subsequente. Essas proposições com teor novo se apresentam basicamente entre aquelas referentes ao ensino do 4 (quatro), 6 (seis) e 8 (oito).

3.1. 6.1 As peculiaridades referentes ao ensino do 4 (quatro): introdução da adição e subtração.

No contexto de proposições para o conceito de quatro similares àquelas de três, Júnior (sd) – mantendo a precaução de sempre apresentar algo a mais em cada uma, em relação à anterior – inclui no conceito de número as operações de adição e subtração.

A proposição que introduz o ensino da adição (figura57) se apresenta com um diferencial: a primeira com um enunciado completo para orientar o estudante, que se traduz na primeira situação exemplo. É retomada uma situação desenvolvida anteriormente voltada para a explicitação do teor de composição dos números, como por exemplo, 3 é formado por ‘2 e 1’. No entanto, pauta-se em componentes conceituais da lógica formal ao considerar a conjunção ‘e’ como um conectivo aditivo. Assim, o que era indicador de composição numérica passa a ser uma adição. Desse modo, situação como ‘2 e 1’ transforma-se em ‘2 + 1’, o que requer a substituição de ‘e’ por ‘+’.

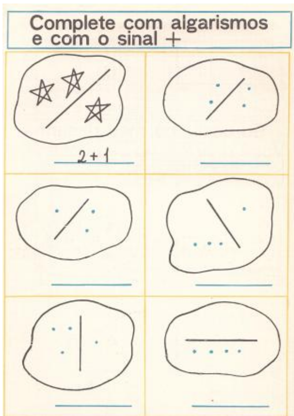


Figura 57 – Proposição inicial do conceito adição
Fonte: Júnior (sd, p. 71)

A outra proposição (figura 58) introdutória da adição se expõe com uma situação exemplo, constituída da representação em conjuntos – cujos elementos são triângulos – e, sob eles, a expressão numérica aditiva, algoritmo, popularmente denominada de “conta de mais”. Os diagramas na forma retangular se apresentam horizontal e verticalmente, indicadoras da dupla posição possível para a representação algorítmica. Em seguida, aparece o enunciado que orienta o estudante para, em vez de triângulos, adotar asteriscos como elementos dos conjuntos, em conformidade com a respectiva sentença matemática, que indica tanto a quantidade quanto a posição.

Figura 58 – Proposição introdutória do algoritmo da adição
Fonte: Júnior (sd, p. 72)

Observa-se em ambas as proposições que o foco, em termos de linguagem matemática referente à adição, é para a representação das duas parcelas e do sinal + (mais). Portanto, sem o resultado numérico escrito. Ou seja, a sentença matemática é a expressão de uma quantidade anteriormente apresentada em situação de conjuntos com elementos pictóricos.

O resultado da operação – soma ou total – é enfatizado em uma proposição (figura 59), entre aquelas referentes ao cinco, que a incluímos aqui nessa seção, cuja referência ainda é o quatro.

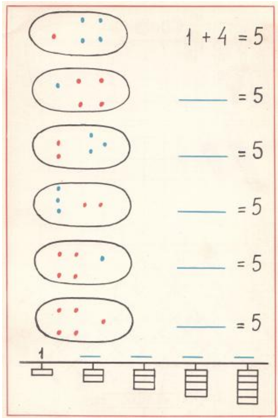


Figura 59 – Primeira proposição com o resultado da adição
Fonte: Júnior (sd, p. 77)

Na sequência, a subtração também é apresentada, ao estudante, por uma proposição (figura 60) sem um texto anunciativo. Em vez disso, aparece com uma espécie de título, simplesmente, uma linha reta, sinal indicativo da operação. Inicialmente, traz quatro situações, cada uma delas delimitada por um retângulo dividido em três partes. Na parte central estão quatro pincéis nas cores vermelha e azul. A parte da direita é destinada para escrever o numeral correspondente aos pinceis vermelhos – quantidade a ser subtraída – e, na parte à direita, a representação numérica referente à diferença (lápis azuis). Em seguida, com o enunciado "Então", as situações anteriores são representadas na forma algorítmica para que as crianças coloquem o resultado. A vinculação entre as situações de cunho pictórico (quatro primeiras) e a algorítmica se dá por componentes da lógica formal, com uso da sua linguagem proposicional, que envolve a bicondicionalidade: 'se ... então'. Ou seja, se existe P – uma situação subtrativa envolvendo elementos de um conjunto, destacados em subconjunto – **então** tem Q – um modo peculiar de representá-la algoritmicamente. Em linguagem da lógica: P ↔ Q (BARKER, 1976).

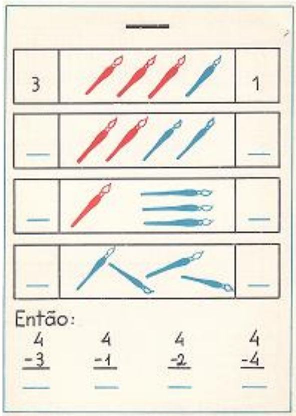


Figura 60 – Proposição introdutória da subtração
Fonte: Júnior (sd, p. 74)

3.1.6.2 As peculiaridades referentes ao ensino do 6 (seis): a adição no âmbito da interseção de dois conjuntos e o prenúncio da reta numérica

A proposição introdutória para o ensino do seis (figura 61) é composta de três situações. A primeira, como ocorre na apresentação de todos os números, é aquela que requer o estabelecimento da relação biunívoca entre os conjuntos. Porém, a segunda e a terceira trazem algo que até então não havia sido abordado: a adição associada com a intersecção de dois conjuntos. Em cada uma delas, são destacadas duas operações, em que uma das parcelas é a quantidade dos elementos incomuns e a outra dos comuns a ambos os conjuntos.

Entretanto, elas se apresentam com uma finalidade ilustrativa. Ou seja, muito mais como forma de variação de tipos diferentes de apresentação das situações a serem analisadas pelas crianças do que uma preocupação de apropriação do conceito de subconjunto e sua significação própria relacionada à operação de adição.

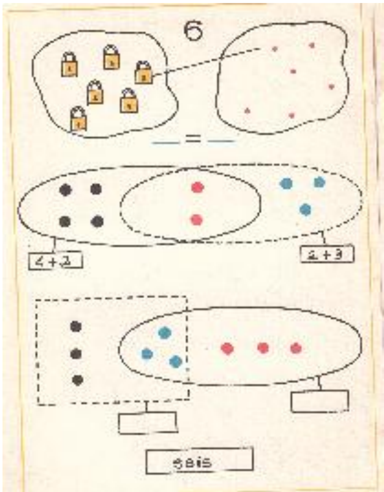


Figura 61 - Proposição introdutória da adição associada à intersecção de conjuntos
Fonte: Júnior (sd, p. 80)

Outra distinção, no âmbito do ensino de 6 (seis), é a apresentação da reta numérica (figura 62). Também, tem a característica de ser um tipo diferente de situação – última dentre aquelas que introduzem o referido número – com objetivo de 'revisar' a ordem crescente dos numerais até então focados. Ela é dada pronta com a inclusão de 0, 1, 2, 3 e, aos estudantes, compete apenas completar os espaços destinados ao 4, 5 e 6. Portanto, não traz como um componente conceitual matemático complexo de representação geométrica dos números.

Figura 62 - Proposição para identificação de quantidades e apresentação da reta numérica
Fonte: Júnior (sd, p. 82)

3.1.6.3 As peculiaridades referentes ao ensino do 8 (oito): introdução de um esboço ao pensamento algébrico

Com o enunciado “Veja:”, a proposição (figura 62) traz indícios de uma característica algébrica: sentença aberta, cuja incógnita – em vez de uma letra – é um quadrado. Este está em lugar de um valor a ser determinado. Porém, é papel da criança apenas a identificação do respectivo número. Ao descobri-lo em uma das sentenças, as demais basicamente serão solucionadas, pois a incógnita da situação inicial é a primeira parcela de uma adição, a da intermediária é a outra parcela da mesma operação e a da terceira o resultado, soma. Não se trata, pois, de procedimento galgado num movimento conceitual marcado pelo princípio de equivalência em que entra em cena relações aditivas e subtrativas, que fundamentam o conceito científico de equação. Em vez disso, caracteriza-se, como uma espécie de “adivinhação”.

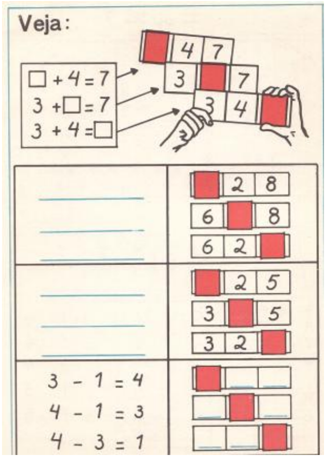


Figura 63 - Proposição com prenúncio da álgebra
Fonte: Júnior (sd, p. 87)

Para expressar a síntese referente às proposições modernistas, recorremos a Fiorentini (1995) ao afirmar que o surgimento de uma tendência no ensino de Matemática traz consigo a preocupação com a qualidade de ensino. Isso significa dizer que, em sua subjacência, estão concepções de diversas ordens (mundo, educação, ensino, aprendizagem, Matemática, entre outras) distintas daquelas até então conhecidas e vivenciadas no contexto escolar e social. Nessa seção, trouxemos as evidências do modo de organização do ensino do conceito de número explicitado no livro didático de Júnior (sd), com os anúncios de diferenças em relação à proposta elaborada por Davidov (2012).

As proposições representativas dos princípios do Movimento da Matemática Moderna trazem a concepção epistemológica de número como propriedade obtida a partir da relação entre elementos de conjuntos equipotentes: a quantidade. Dienes (1967, p. 14) enfatiza: “são propriedades dos conjuntos de objetos, e não dos próprios objetos”.

A quantidade é considerada a ‘abstração’ caracterizadora do referido conceito matemático, entendida como algo que não tem existência real. O autor exemplifica:

> <Ter três elementos> é uma propriedade que permite distinguir no universo dos conjuntos um certo conjunto de conjuntos, a saber o conjunto dos conjuntos nos quais cada elemento-conjunto consta

> justamente de três elementos. Importa vincar que <ter três elementos>, ou apenas <três>, para abreviar, é um atributo dos conjuntos e não dos elementos desses conjuntos (DIENES, 1967, p. 28).

Tal abstração, no entanto, é análoga, por exemplo, 'ser rapaz', 'ser branco' que abrange elementos do universo das criaturas, e não ao universo dos conjuntos de seres vivos.

> Um conjunto de rapazes não é um rapaz; por isso, a propriedade <ser rapaz> não pode aplicar-se a nenhum conjunto de criaturas, mas sim é tão – somente a uma criatura. Inversamente <ter três elementos> é uma propriedade que se não aplica a uma criatura isolada, mas sim a determinados conjuntos de criaturas isoladas (DIENES, 1967, p.18).

Para que os estudantes apreendam essa propriedade e atinjam a consequente abstração, quantidade, Júnior (sd) coloca-os em situação de observação de elementos de dois conjuntos para ligá-los entre si, por meio de uma linha. Em outras palavras, estabeleçam a correspondência um a um ou a relação de biunivocidade. Mas essa linha é apenas um recurso procedimental para a resolução do 'exercício' proposto. Não se trata, pois, de algo intrínseco ao conceito de número, como veremos na próxima seção, referente à proposição davydoviana. As situações – que compõem as proposições de Júnior (sd) – a serem analisadas e desenvolvidas pelos estudantes, raramente, trazem uma orientação ou enunciado. Normalmente, a inicial se apresenta pronta, como 'exercício exemplo' para adotá-lo como referência. Por isso, a observação torna-se o elemento excepcional para identificar os aspectos externos dos elementos dos conjuntos.

A essencialidade dessa característica se constitui pela necessidade dos estudantes estarem atentos para identificar o que deles é esperado em cada uma das situações. Estas, inicialmente, têm implicitamente a ideia de classificação, por requerem, além da identificação de cada elemento dos dois conjuntos, sua relação com a classe ou categoria a qual pertence. Por exemplo, uma boneca é um brinquedo que, entre os membros de uma família, é pertinente a uma menina. Além disso, dá indicativos para que a correspondência biunívoca ocorra, embora sem nomeá-los, por critérios como: tamanho, forma (não necessariamente geométricas, muito mais como tipo de figuras), espessura, utilidade e cor. Gilbert (1974) traduz as razões dessa forma de organização do ensino modernista:

> Trata-se principalmente de ajudar para que as crianças abram os olhos e coloquem em ordem suas percepções, tratando de adquirir mais rigor, isto é, mais lógica. Porém, esta colocação em ordem do dado natural é primeiramente subjetiva, ante um monte caótico de objetos variados. Cada uma pode reagir pelo seu gosto, conforme as suas ideias, seu humor, seus interesses. Pode fazer uma classificação segundo a cor, a forma, o tamanho, a espessura, a utilidade, ... (GILBERT, 1974, p. 18).

A exigência única para que os estudantes observem as características externas dos elementos dos conjuntos e os liguem por uma linha – ou mesmo em situações que as figuras se apresentam fora do contexto de conjuntos –, as proposições modernistas trazem uma ‘concepção empírica’ do modo de elaboração do pensamento conceitual. Ela se expande por todo o livro (JÚNIOR, sd) para que as crianças do primeiro ano escolar aprendam exclusivamente o conceito de número natural.

Mesmo naquelas proposições em que a correspondência um a um deixa de ser momentaneamente o alvo, a observação é requerida e se volta para outro foco: a identificação de atributos dentre um grupo de determinados objetos. É nessa ocasião que se apresenta pela primeira vez um enunciado em forma de pergunta, com fundamentos da lógica formal clássica. Tal concepção se explicita em conformidade com o enunciado interrogativo, por limitar a possibilidade de respostas referente a um determinado atributo, por parte dos estudantes, sem qualquer tipo de justificativa, entre sim ou não. Assim, por exemplo, ao perguntar, “São os mesmos?”, cabe à criança responder: ‘é’ ou ‘não’, porém sem oportunidade de justificativa do critério ou atributo adotado. A imposição de somente uma possibilidade também acontece em enunciado com teor indicação ou localização, em conformidade com as perguntas: “Onde está a diferença?”, “O que é diferente?” e “Quais são os mesmos objetos?”. Esses tipos de interrogações sugerem retornos do tipo: ‘é essa’, ‘é a figura tal’ e ‘está ali ou lá’, bem como suas flexões no plural, conforme o caso.

Os preceitos da lógica se apresentam em proposições, que retomam a correspondência biunívoca, pois, cada vez mais, restringem a única alternativa – sim ou não – consequência do seu enunciado exclamativo: “A mesma cor!”, “O mesmo tamanho”, “A mesma posição!” ou aquelas que solicitam dois e os três atributos.

Assim sendo, as proposições pedagógicas modernistas se vinculam ao conteúdo formal da lógica clássica, cuja ênfase não é para o que reflete essa forma de pensamento e ao modo de fazê-lo. Volta-se ao conteúdo que permite a formulação de um novo juízo a partir daqueles existentes (KOPNIN, 1978). Por exemplo, na primeira situação da proposição da figura 16, anunciada por ‘O que é diferente?’, a partir do juízo ‘todas as figuras são quadrados e do mesmo tamanho, é possível extrair o juízo: ‘o diferente é a cor’. Para Kopnin (1978, p. 73), o “conteúdo formal é material, representa o reflexo das leis objetivas, das leis mais gerais e mais simples, porém não está imediatamente ligado às propriedades concretas de qualquer objeto determinado, refletido nesse ou naquele juízo concreto. [...] Assim, o conteúdo objetivo fixado nas formas do pensamento se torna formal caso sirva de base às regras e formas de estudo”.

O ensino modernista de número também traduz a vinculação do progresso da lógica formal ao desenvolvimento da lógica matemática, resultante da evolução de ambas. Ou seja, traz a afinidade entre seus objetos que dizem respeito ao reflexo de “relações extremamente gerais que se expressam em abstrações de longo alcance” (KOPNIN, 1978, p.75).

Essa coerência entre Lógica Formal e Matemática se traduz nas proposições (JÚNIOR, sd) que avançam rumo ao conceito de número propriamente dito, por colocar os estudantes em necessidade de expressar a noção de quantidade, ainda sem o uso da simbologia numérica. A condução ocorre por questionamentos ou indicação – referentes às ideias de tem mais, tem menos e ordem relacionadas ao tamanho e não à quantidade – respectivamente: “Onde tem mais?”, “Onde tem menos?” e “Descubra”. Assim, os juízos ‘ter mais ou menos’ ou ‘é maior, médio e menor’ se constituem condição para extrair o juízo de ordem: decrescente, do maior para o menor; crescente, do menor para o maior.

Contudo, existe a ausência de uma orientação para as primeiras formas de representação e simbologia matemática e mesmo da lógica. Existe certo receio das possibilidades das crianças para tal exigência e, por extensão, propõem-lhes a exclusividade de apenas reproduzir os objetos das situações. A precaução é para que as primeiras simbologias a apresentar às crianças sejam aquelas relacionadas aos numerais. A suposição é que existe um zelo para que os símbolos matemáticos se apresentem como exclusividade do conceito de número. Por isso, todas as proposições de ensino, que antecedem a escrita numérica, envolvem excessivamente o desenho dos objetos em referência. Ou, como dito anteriormente, primam pela observação, pelo fazer e secundarizam as relações conceituais e o desenvolvimento do pensamento.

Essas características pedagógicas e epistemológicas dão margem para conjecturarmos de que o ensino modernista, objetivado por Júnior (sd), traz a convicção de que a apreensão do conhecimento, por parte dos estudantes do primeiro escolar, ocorre no e pelos olhos em vez de um processo mental, de pensamento. Não considera, pois, a possibilidade das crianças desse nível de escolaridade para transitar por relações conceituais mais complexas. Por isso, adota como critério de organização do ensino: dos conceitos mais simples aos mais complexos, isto é, dos considerados mais fáceis e familiares para os mais difíceis.

Esse entendimento se expressa ao propor o ensino do número, sequencialmente: um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove. Cada um deles associado à respectiva quantidade discreta, à simbologia e à escrita, o que requer a flexão da palavra que compõe a pergunta orientadora: “Quanto?” e “Quanta?”, quando se refere apenas a ‘um’ (elemento do gênero masculino) ou ‘uma’ (elemento feminino); “Quantos?” e “Quantas?” para os de mais números. A exceção é para o zero que é apresentado, a partir do ensino do conceito de três, como um dos seus subconjuntos, o vazio, porém sem a devida simbologia (0). Essa ideia, ausência de quantidade, ou subconjunto sem elemento, faz com que o zero componha os demais números quando inseridos na decomposição aditiva.

Vale dizer que a correspondência biunívoca é mantida no desenvolvimento conceitual dos números de 1 a 9. Isso significa, que a ideia de número como uma propriedade, uma abstração, porém, a pergunta “Quantos?” só é suficiente para indicar a quantidade de elementos do conjunto. Consequentemente, não dá condições de explicitar a essência do conceito, como concebe o próprio Movimento da Matemática Moderna, uma propriedade. Para tanto, uma pergunta que deveria permear as proposições, constituídas por dois conjuntos equipotentes, seria: O que há de comum nos dois conjuntos?

Esse tipo de questionamento, além de levar o estudante ao desenvolvimento do pensamento de número natural como propriedade comum dos conjuntos, também seria providencial para outras relações próprias do referido conceito, tais como: maior, menor, igual, diferente e suas respectivas simbologias ($>$, $<$, $=$ e $\neq$). Para tanto, as proposições deveriam explorar também conjuntos não equipotentes, o que Júnior (sd) não propiciou aos estudantes. As desigualdades se apresentaram muito mais como base nos numerais (por exemplo, $3 > 2$, $2 < 3$, $3 \neq 2$) do que com a ideia de não biunivocidade.

Essa lacuna conceitual também se explicita no ensino modernista (JÚNIOR, sd) ao tratar da ideia numérica de inclusão de classe ou de composição e decomposição que, posteriormente, se transforma em noções de adição e subtração por expediente da lógica formal. Por exemplo, o 4 como sendo composto por 3 e 1, passa para 3 + 1, porém, sem uma análise da relação entre conjuntos equipotentes ou não.

Enfim, o ensino modernista do conceito de número prima pelo que Rosental e Straks (1958, p. 306) denominam de “abstrações elementares que se caracteriza pela sua obtenção por simples comparação para destacar o universal”. Elas se constituem a partir das percepções e representações de um determinado objeto, que extraem os traços mais gerais representativos de uma classe na qual se insere. Por exemplo, para atingir a abstração numérica de 5 basta que se estabeleça as comparações de alguns conjuntos com tal quantidade de elementos e indica-la como similares. Trata-se, pois, de um procedimento da “lógica formal por assinalar somente um aspecto da comparação: o que se refere aos traços comuns, similares” (ROSENTAL; STRAKS, 1958, p. 307). Para os mesmos autores, ao admitirmos esse tipo de abstração como essencial, expressamos a concepção idealista de que os conceitos são produtos exclusivos do espírito humano. Eles consideram uma “abstração vazia” e carente de razão por destacar os aspetos externos não essenciais e secundários do objeto, em detrimento das qualidades e relações essenciais.

Desse modo, eximem-se as crianças do desenvolvimento das “abstrações profundas que requerem processos mais complexos para a sua formação, uma vez que não se apresenta por meio de comparação das percepções” (ROSENTAL; STRAKS, 1958, p. 307). A verdadeira abstração não consiste e se expressa somente na distinção entre o que é comum e idêntico de um grupo de objetos, mas, sobretudo, pela evidência de sua essência.

Assim sendo, os estudantes somente desenvolvem o “primeiro grau da abstração matemática” caracterizada pelo surgimento do conceito de número (identificação dos objetos, prescindo da infinita diversidade de suas qualidades individuais) e criação dos símbolos numéricos, isto é, os algarismos” (ROSENTAL; STRAKS, 1958, p. 308-9). Desse modo, a eles, é negado a possibilidade de atingir o “segundo grau de abstração”, caracterizado pela passagem dos números concretos ao uso das letras como símbolo. Em outras palavras, da passagem da aritmética para a álgebra. Da mesma forma não desenvolvem o "terceiro grau de abstração" que tem como particularidades a eliminação tanto do conteúdo numérico dos símbolos, quanto do teor quantitativo concreto das operações aritméticas. Por exemplo, a + b = b + a, se apresenta, além da igualdade de grandezas, como: vetores, fatores cuja ordem se altera, entre outras noções (ROSENTAL; STRAKS, 1958, p. 307).

3.2. A PROPOSTA DAVYDOVIANA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE NÚMERO

Vale reafirmar que, na presente seção, trataremos do objeto da investigação no âmbito do Sistema de Ensino de Davydov que tem como fundamentos o materialismo histórico e dialético. Para tanto, retornamos, em linhas gerais, alguns de seus pressupostos que foram tratados no segundo capítulo dessa dissertação. Davýdov (1982) diz que é papel da escola desenvolver o pensamento teórico das crianças por meio da apropriação dos conhecimentos científicos, em detrimento do pensamento empírico, que opera mediante os conhecimentos cotidianos.

Também, considera a obtenção e o emprego do número como um meio peculiar de comparação entre as grandezas (DAVÍDOV, 1988). Estas são consideradas o fundamento genético do número real, tido como de referência para o ensino, mesmo no primeiro ano escolar (DAVÝDOV, 1982).

Davídov (1985) preconiza que o método com maior possibilidade de evitar a "saturação" e dispersão com o estudo deve contemplar um conjunto de tarefas cognoscitivas com certo grau de complexidade, de modo que os estudantes se defrontem com situações problemas, que propicie o domínio conceitual. Davídov (1985, p. 87) assim descreve:

> Isto ocorre, aproximadamente, da seguinte maneira: no curso de matemática é de grande importância o conceito de número; este é apresentado à criança no primeiro ano escolar. O modo de apresentação é: propõem-lhes a tarefa de comparar alguns objetos por seu tamanho ou por sua quantidade, porém com a condição de que não seja de forma imediata e direta. Como fazer? Os alunos se vêm obrigados a

> buscar um método geral para resolver os problemas dessa índole. Com a ajuda do professor, ocorre uma série de intentos exitosos, em que são necessárias a medida, a conta e o número. Graças a eles é possível realizar a comparação indireta de grandezas. Depois as crianças aprendem a medir e contar, assimila o conteúdo do conceito de número. Essa explicação especial (até que ponto são necessários os conceitos correspondentes e qual é a sua origem?) contribui para formar – como indica a experiência – o interesse cognoscitivo da criança pelos métodos verdadeiramente matemáticos para resolver problemas vitais, o interesse da classe sobre o tema.

Por isso, procuramos não perder de vista esses pressupostos, pois estão articulados com as categorias de análise, além de se constituírem na base para o entendimento de um modo de organizar o ensino do conceito de número.

Desde a introdução do conceito de número, no livro 1, da proposta de Davydov, é possível pontuar diferenças em relação à apresentação modernista. As tarefas davydovianas também são cuidadosamente planejadas para contemplar rigorosamente os princípios expressos em seus escritos sobre os fundamentos do seu sistema de ensino. Como veremos, no decorrer da análise, a ênfase é para o conceito científico, considerado base primordial para o desenvolvimento do pensamento teórico ((DAVÝDOV, 1982). Para tanto, as situações, apresentadas aos estudantes, desde a primeira aula, não tratam apenas de "exercícios", como denomina o ensino tradicional, mas de tarefas particulares concernentes a cada uma das seis ações de ensino que, por sua vez, atendem a "primeira tarefa de estudo" articulada com a finalidade da "obtenção e o emprego do número como meio especial de comparação das grandezas" (DAVÍDOV, 1988, p. 188).

O desencadeamento das tarefas particulares de forma minuciosa é determinado pelo enfoque científico, isto é, do método que prima pelo procedimento do geral – conceito de grandeza, base essencial do número real – ao particular que, segundo Davýdov (1982), se expressa nos diferentes números (naturais, inteiros, racionais e irracionais).

3.2.1 O ponto de partida para o ensino do conceito de número proposto por Davydov

Como dito anteriormente, a proposta davydoviana traz como base o conceito de número real e, consequentemente, as relações de medidas entre grandezas. Por isso, a centralidade inicial é a familiarização, por parte das crianças, com a referida ideia geral. Como é a partir da medida que mais adiante – na segunda ação de estudo – as crianças chegam ao modelo universal do número, a preocupação com as primeiras tarefas é subsidiá-los com noções conceituais requerida no processo de representação das grandezas e a comparação entre elas, que ocorre de três modos: objetal, gráfica e literal. Para tanto, essas tarefas introdutórias dão ênfase a elementos conceituais – a seguir analisados – que subsidiarão no processo de apropriação do referido modo geral caracterizador do conceito de número.

a) Cor, forma e tamanho.

As tarefas particulares que envolvem as características dos objetos são consideradas como familiares às crianças. Porém, a preocupação maior não é exclusivamente para o desenvolvimento da capacidade formal para diferenciar os objetos pelos referidos atributos – como se caracterizam as proposições modernistas – uma vez que as crianças, de modo geral, possuem as noções necessárias para tal. Trata-se, então, de valer-se dessas características para a adoção de um objeto que dê condições para atingir algum objetivo referente à formação da ideia geral do conceito de número (GORBOV, S.F.; MIKULINA, G.G.; SAVIELIEV, O.V., 2008).

O objetivo é colocar os estudantes em ação investigativa (DAVÍDOV, 1988). Para tanto, as tarefas são estruturadas de modo tal que instigam-lhes à formulação de perguntas – direcionadas ao professor, como também aos colegas – pautadas no movimento do pensamento conceitual. Por exemplo, o livro de orientação ao professor (GORBOV, S.F.; MIKULINA, G.G.; SAVIELIEV, O.V., 2008) sugere-lhe que apresente às crianças a tarefa introdutória, a seguir descrita. Em papel, há um modelo de casa incompleta, pois falta uma coluna. Além disso, são apresentadas algumas possibilidades de colunas que se diferenciam pela cor, forma, tamanho, entre outras. Traz como finalidade escolher aquela ideal para concluir a construção da casa (figura D1).

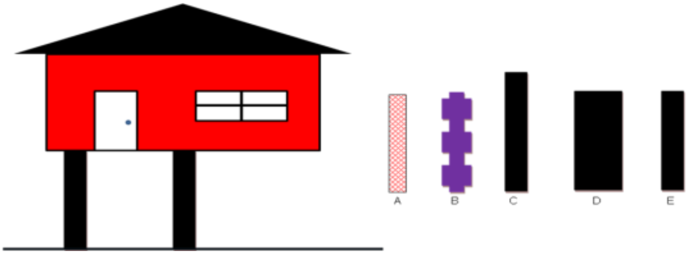


Figura D1 – Tarefa sugerida ao professor para introduzir as crianças no ensino da Matemática
Fonte: Rosa (2012, p. 71)

Gorbv, S.F.; Mikulina, G.G.; Savieliev, O.V. (2008) presumem a possibilidade das crianças escolherem, de imediato, a figura correta. Mas consideram imprescindível a discussão sobre as variantes erradas. Para tanto, o professor deve estabelecer um diálogo simulador como:

Professor: Um aluno de outra série indica que a coluna B seria a ideal, por ser a mais bonita!

Isso possibilita entre outras intervenções:

Estudante: Não, pois a forma dela é diferente.

Professor: Então, a coluna A.

Estudante: Também não, porque é de outra cor.

Professor: Significa que a coluna B não cabe por causa da forma, e a A devido a cor. E o que dizem da coluna D?

Estudante: Ela não serve pela forma e pela cor. A coluna C é a única que cabe tanto pela forma como pela cor.

As primeiras tarefas (assim como as demais) – diferentemente das proposições modernistas – se apresentam no contexto de uma temática traduzida por um título (figura D2). Explicita, pois, as características: cor, forma e tamanho. Além disso, ocorre uma orientação, aos estudantes, acrescida de perguntas que requerem-lhes uma justificativa.

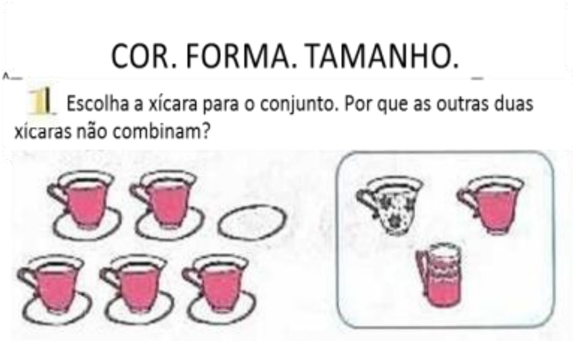


Figura D2 - Tarefa introdutória do conceito de número da proposta davydoviana
Fonte: Davidov (2012, p. 3)

Visualmente, até pode aparentar que a tarefa tem como centralidade a correspondência um a um. Não se pode negar que a referida ideia se apresenta como um meio para a solução dos problemas produzidos pelos questionamentos ligados à forma, ao tamanho e a cor. Afinal, há um conjunto de pares de xícara e pires e um deles a completar. Porém, a referência não é para a quantidade ou tem a necessidade de ligar os elementos, delimitados por diagramas, por meio de linhas ou flechas para verificar a biunivocidade. A execução da tarefa exige, por parte da criança, a atenção para o todo caracterizado, no mínimo, por três atributos: ser xícara, do mesmo tamanho, da mesma cor e da mesma forma.

Outra distinção, em relação ao proposto por Júnior (sd), que se explicita nas primeiras tarefas, é a participação ativa do estudante, propiciada pela exigência de justificar tanto a indicação de uma determinada escolha, como explicar as razões de exclusão das demais. Por isso, a maioria das tarefas – com enunciado interrogativo ou não – procura abranger as características apontadas com temática: cor, forma e tamanho. Isso é possível observar nas tarefas D3 e D4.

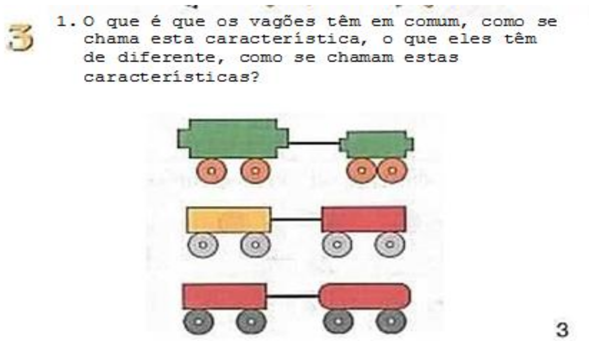


Figura D3- Tarefa introdutória do conceito de número da proposta davydoviana
Fonte: Davidov (2012, p. 3)

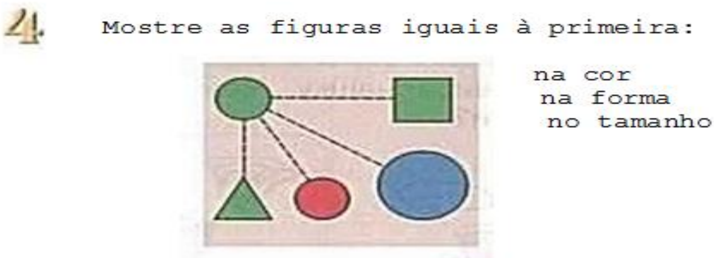


Figura D4 - Tarefa introdutória do conceito de número da proposta davydoviana
Fonte: Davidov (2012, p. 4)

Vale lembrar que o livro de Júnior (sd) também trata das características, porém, inicialmente, de forma individual, na seguinte ordem: cor, tamanho e posição, portanto não traz a forma. Depois desse tratamento particularizado, apresenta situação que envolve duas dessas características e, por fim, as três juntas.

Em Davidov (2012), há tarefas, como D5 e D6, que solicitam dos estudantes a atenção para uma das características. No entanto, são organizadas de um modo tal que aparecem situações que atende as demais. Em D5, tal solicitação individualizada se processa no âmbito de todas as características, pois solicita a seleção das figuras pela cor, pela forma e pelo tamanho.

Figura D5 – Tarefa para identificação das características cor, forma e tamanho
Fonte: Davidov (2012, p. 4)

A tarefa apresentada pela figura D6 tem como orientação: “Modifique as figuras mudando uma característica”. Observa-se a necessidade dos alunos não só identificar a figura, mas também produzi-la, não tal qual aquela de referência, mas com atenção à modificação requerida. Portanto, difere das proposições modernistas que sugerem o desenho integral dos objetos, que impede qualquer iniciativa da criança.

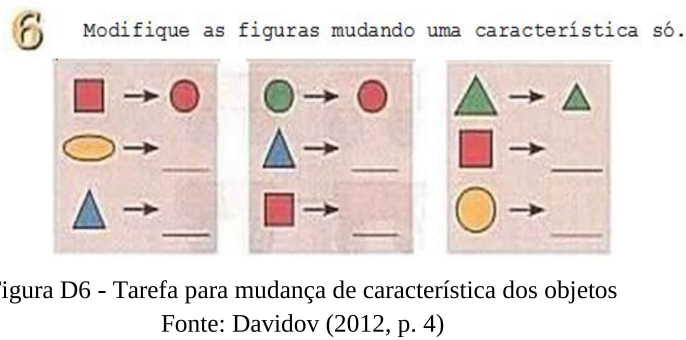


Figura D6 - Tarefa para mudança de característica dos objetos
Fonte: Davidov (2012, p. 4)

As duas tarefas anteriores (D5 e D6) são antecedidas por outras – que promovem ampla discussão entre professor e as crianças – contidas no livro de orientação (GORBOV, S.F.; MIKULINA, G.G.; SAVIELIEV, O.V., 2008). Dentre outras faremos referência apenas a uma delas, o jogo "Adivinhe as figuras", que envolvem figuras, expostas no quadro, com tripla característica: cor (amarelo, vermelho e verde), pela forma (círculos, quadrados e triângulos) e pelo tamanho (grande e pequeno). Dessa maneira, o estudante fará comparações entre os objetos para realizar a tarefa proposta.

As perguntas do professor serão fundamentais para colocar a criança em atividade investigativa, bem como, a encontrar a resposta desejada. O diálogo é fundamentado pela formulação de "perguntas inteligentes", pelos estudantes. Não basta fazer perguntas para adivinhar a figura que o professor diz ter pensado, mas que os desafiem para que reflitam sobre as suas conclusões.

Professor: Qual foi a figura que eu pensei?

Estudante: Não sei.

Professor: Mas eu estou falando que cor e que forma ela tem. É um círculo vermelho.

Estudante: Aqui estão dois círculos vermelhos e não sabemos qual dos dois você pensou.

Professor: É verdade, estas figuras são iguais pela cor e pela forma, por isso é preciso fazer mais uma pergunta. Que pergunta tem que fazer? Qual é a diferença entre elas?

A pergunta inteligente esperada dos estudantes é: Ela é grande ou é pequena?

Professor: Certo. Estas figuras são diferentes **pelo tamanho** – uma é grande, outra é pequena. A minha é grande. Agora vocês sabem que figura é essa?

A resposta esperada dos estudantes: Sim, é o círculo grande e vermelho.

Professor: Está certo. Quais foram as perguntas que ajudaram vocês a adivinhar?

Estudante: Qual é a forma? Qual é a cor? Qual é o tamanho?

Observa-se, então, a diferença do que propunha a Matemática Moderna que possibilitava apenas uma repostas entre sim ou não. Davydov, desde o início, coloca o estudante em ação e reflexão, isto é, em atividade de pensamento, direcionada pela primeira ação de estudo: Transformação dos dados da tarefa a fim de revelar a relação universal, geral, do objeto estudado Davídov (1988, p. 188).

A tarefa trazida pelo livro didático só será executada após esse tipo de interação e diálogo com os estudantes, o que permitirá que cada um deles encontre uma resposta diferente, porém, que corresponda ao que lhe foi solicitado.

b) À esquerda – à direita, entre, em cima – embaixo.

Na tarefa a seguir (figura D7), a diferenciação dos objetos se dará pela posição que eles ocupam em relação aos outros (relações: “acima – abaixo”, “à esquerda – à direita”, “fica entre”). De acordo com a orientação de Davidov (2012), a tarefa assim se define: “Aponte os ovais que estão à esquerda do quadrado; à direita da estrela; entre o quadrado e a estrela”. Essas condições de identificação se apresentam na seguinte ordem: primeira linha por quadrado amarelo, estrela alaranjada e outras formas azuis; na segunda linha o quadrado é vermelho; a estrela verde e as outras formas amarelas e na terceira linha quadrado verde; estrela azul e outras formas alaranjadas.

Figura D 7 - Tarefa para identificação de posição
Fonte: Davidov (2012, p. 5)

Os estudantes terão que indicar as figuras situadas entre outras. Novamente, eles encontrarão mais de um objeto como respostas, o que terão de observar as características de cada um, particularidade, pois, além da forma, é solicitada a posição concernente: à direita, à esquerda e entre.

A lateralidade (esquerda e direita) não é referenciada na proposta modernista de Júnior (sd) em que a posição trazia a ideia, sem explicitá-la, de: horizontal (deitado), vertical (de pé), virado para cima ou para baixo. Difere, pois, da proposta davydoviana, cujas tarefas que tratam dessa temática exigem dos estudantes várias operações do pensamento, peculiares ao processo de apropriação dos conceitos matemáticos.

Do mesmo modo, a tarefa a seguir (figura D8) requer as mesmas objetivações que a anterior de colocar os alunos em constante processo de comparação entre os objetos com base nas diversas posições, porém, determinados pela condição: 'estar em cima ou embaixo e entre', sem considerar a cor.

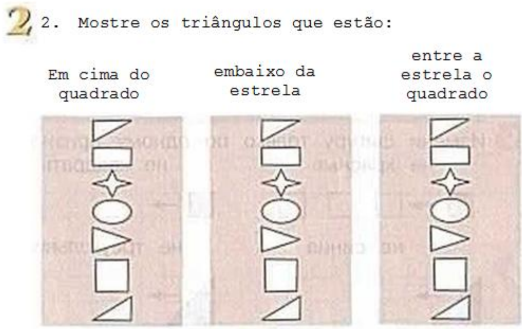


Figura D 8 - Tarefa para identificação de posição

Fonte: Davidov (2012, p. 5)

c) Tamanho. Maior. Menor

As tarefas a seguir, assim como aquelas dos itens 'a' e 'b' tratam da característica 'tamanho', porém com a peculiaridade de colocar as figuras em ordem: da maior para a menor e vice e versa.

Para a introdução, Gorbv, S.F.; Mikulina, G.G.; Savieliev, O.V. (2008) propõe que o professor disponibilize para as crianças, um kit constituído de cinco triângulos, que se diferenciam pelo tamanho e cor. Solicita que uma das crianças desenvolva a tarefa no quadro, e as demais em suas respectivas carteiras. Orienta-lhes que escolham o triângulo verde e coloquem-no em suas frentes. Em seguida, tomem o triângulo azul e compare-o com o anterior. Como consequência das discussões, concluem que o segundo é maior que o primeiro. Imediatamente, requer-lhe que coloquem em evidência noções tratadas anteriormente, entre elas: colocar o triângulo azul a direita do verde. Depois, eles devem pegar o terceiro triângulo, vermelho, e o compará-lo com os demais. Pergunta-lhes: Ele é maior que o verde e menor que o azul? Então, onde é melhor colocá-lo? A resposta esperada é que será entre os dois primeiros, pois é menor que um e maior que outro.

Resultante de amplo debate, o professor certifica-lhes: as figuras em foco estão dispostas em ordem crescente, da menor para a maior; e quanto maior, mais a direita se localiza. Na execução da tarefa, é exigida a argumentação de cada ação realizada. Além disso, a participação do professor será marcada pela indicação de posicionamento errados dos triângulos, para a contestação dos estudantes. Procedimento similar é adotado para a ordenação contrária dos triângulos: do maior para o menor. A partir dessas orientações é que as crianças desenvolverão as tarefas D9, D10 e D11, do livro didático.

A tarefa D9 tem como enunciado: Mostre a casinha de cada um dos bichos. A princípio parece que o objetivo é a correspondência biunívoca, como enfatiza a proposta formalista moderna. No entanto, vale observar que não há uma representação de conjunto, isto é, uma delimitação por diagrama. Trata-se de focar para a característica tamanho no interior de cada um dos dois grupos de figuras (animais e casas), bem como na possível relação entre cada desenho de ambos os agrupamentos. A relação entre os dois grupos se dá em base hipotética, pois a altura dos animais aparentam maiores que as respectivas casas.

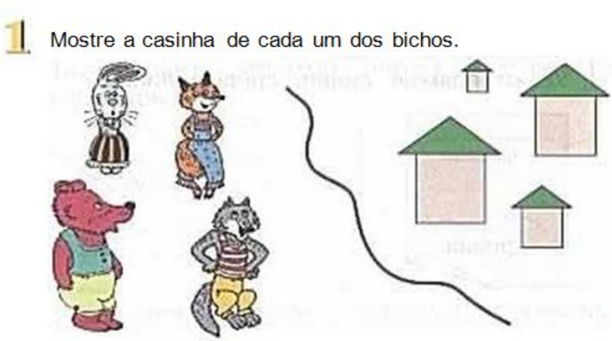


Figura D9 - Tarefa para identificação de tamanho
Fonte: Davidov (2012, p. 7)

A tarefa da figura D10 – Como foram interligadas estas figuras? Faça ligação igual entre os triângulos usando traço – também pode aparentar semelhança com a proposição da Figura 32 de Júnior (sd), condutora para identificação e disposição dos objetos em ordem crescente ou decrescente. No entanto, essa aparência se dissipa quando observarmos que a referida proposição formalista moderna apenas requer que se “descubra a ordem” de grupos de apenas três objetos de tamanhos diferentes. Estes estão dispostos linearmente entre as duas opções: decrescente (maior, médio e menor), ou crescente (menor, médio, maior). Embora apresente uma situação pronta, a tarefa da figura D10 provoca o estudante a expressar o modo como fora organizada, o que requer atenção redobrada, pois há cinco objetos de tamanhos diferentes que impossibilita a explicitação na forma: grande, médio e pequeno. Ou seja, a comparação é mais abrangente e deve ser a inspiradora para a execução da situação á direita, com os cinco triângulos azuis. O cuidado para que as figuras tenham mesma forma e cor propicia a conclusão, pelos estudantes, de que o critério em jogo é o tamanho.

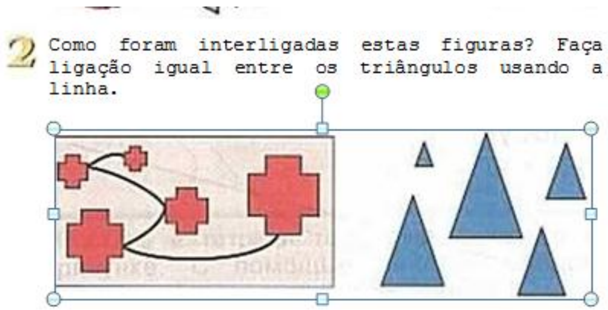


Figura D 10 - Tarefa para identificação e ordenação pelo tamanho

Fonte: Davidov (2012, p. 7)

A mesma orientação serve para a tarefa da figura D11: “Une as figuras de acordo com o modelo usando linha”. A tarefa propõe a explicitação, na forma linear, da ordem decrescente dos objetos, como um modo particular do processo de ordenação.

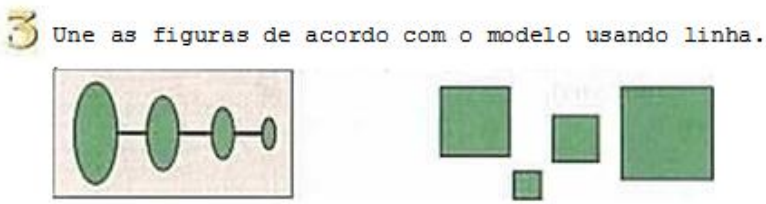


Figura D11- Tarefa referente à ordenação, crescente e decrescente dos objetos

Fonte: Davidov (2012, p. 7)

As duas tarefas anteriores, além da ideia de ordenação, que se apresenta como principal, trazem sutilmente em seus procedimentos de execução de algo conceitual: anúncios dos conceitos geométricos de linha curva (Figura D10) e linha reta (D11), que serão evidenciados a seguir.

d) Linhas curvas e retas. Pontos. Segmentos

As tarefas a seguir introduzem elementos conceituais geométricos que são essenciais na formação do pensamento conceitual de número, no que tange tanto sua forma gráfica de representação quanto à aquisição do seu conteúdo geral, a grandeza. Inserem-se, pois, no propósito de familiarização da criança com o referido objeto geral, com vistas ao posterior estudo das manifestações de casos particulares (DAVÝDOV, 1982).

Por isso, as tarefas particulares configuradas por D12 e D13 colocam as crianças em ação investigativa sobre as primeiras noções de linha curva, linha reta, ponto e segmento, como também suas posições e em relação de pertinência. Por exemplo: o ponto pertence ou não à linha curva ou à reta; as linhas passam ou não passa pelo ponto, a linha une os pontos, os pontos indicam ou não os fins das linhas; o que define o cruzamento ou não das linhas cruzadas.

Para tal, Gorbv, S.F.; Mikulina, G.G.; Savieliev, O.V. (2008) sugerem ao professor que proponha, inicialmente, a tarefa a seguir descrita. Entrega, aos estudantes, duas folhas de papel e solicita-lhes que dobrarem uma delas de acordo com aquela que ele mostra, dobrada diagonalmente, mas não passa pelo vértice e sim pelos lados. Por estarem em ação investigativa, consequência da possibilidade de elaborarem perguntas, eles descobrem que a dobra aparenta uma linha reta, semelhante aos lados da folha.

Em seguida, o professor propõe que desenhem a linha reta na outra folha. Como não dispõem de instrumentos (régua) e nem de orientação para o seu uso, as crianças tentam executar a tarefa à mão livre. Porém, ao compará-la com aquela definida pela dobra na primeira folha, elas percebem que suas linhas não estão retas. Decorre então a pergunta: Como fazer para desenhar uma linha reta? As sugestões apontadas pelos estudantes são discutidas e submetidas à comprovação. Espera-se, no entanto, que eles indiquem um procedimento pertinente, como por exemplo, uma folha dobrada ou outro objeto com os lados retos. É nesse momento que o professor apresentará a régua como instrumento criado para tal finalidade.

Apresentaremos outra tarefa indicada por Gorbv, S.F.; Mikulina, G.G.; Savieliev, O.V. (2008) para que o professor desenvolva com os estudantes, antes daquelas do livro didático. Ela é desenvolvida, concomitantemente, nos cadernos e no quadro. Trata-se de desenhar uma linha curva e, com a régua, uma reta, de modo tal que elas se cruzem. Também, marcam com um ponto os locais em que ocorrem as intersecções.

Além disso, o professor propõe que marquem dois pontos na reta e destaquem, com lápis de outra cor, a parte que une ambos. Novamente, entra o papel orientador do professor de expor que a parte destacada chama-se **segmento**, ou seja, é como algo extraído da reta. Acrescenta que, às vezes, seus extremos são marcados com pequenos riscos verticais, como se fossem a linha de corte. Outros segmentos devem ser definidos com a marcação dos pontos em outros locais da reta. É nesse contexto que se apresenta a diferença entre o segmento e a linha reta. Esta que não definida, porque é possível continuá-la, passando todos os pontos. Por sua vez, o segmento é uma parte da linha reta limitada por dois pontos estabelecidos.

O desenvolvimento dessas e outras tarefas do livro de orientação do professor (GORBOV, S.F.; MIKULINA, G.G.; SAVIELIEV, O.V., 2008) é sucedido por outras do livro didático do aluno (DAVIDOV, 2012). A figura D12 apresenta três tarefas. A primeira coloca o estudante em ação investigativa com foco na identificação e diferenciação de linha curva e linha reta. Além dessa finalidade pedagógica, a segunda tarefa aborda a ideia de pontos de intersecção ou não de duas linhas (curva e reta). A terceira expande para a apropriação de um dos princípios da geometria euclidiana: por um ponto passa infinitas retas. Para tanto, extrapola a exigência de participação da criança somente pela observação e identificação, pois requer que ela marque e ponto e trace as retas concorrentes nele.

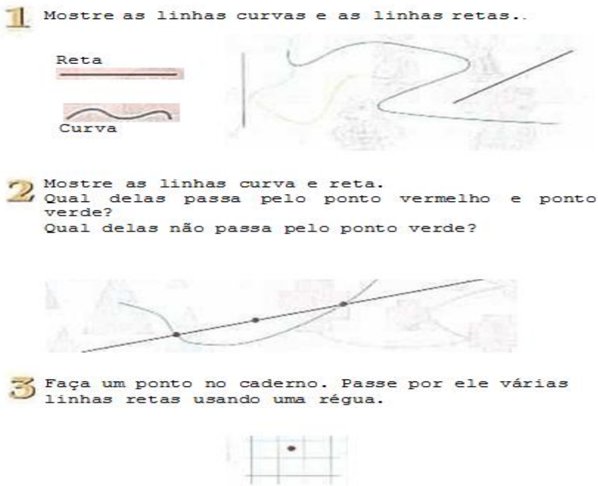


Figura D12 - Tarefa introdutória de linhas curvas e retas
Fonte: Davidov (2012, p. 8)

A mesma lógica de organização das tarefas de D12 é adotada para D13, qual seja: as duas primeiras colocam os estudantes em situação de observação e a última na condição de execução. A primeira e a segunda focam na identificação de segmentos de reta. A terceira atribui à criança a responsabilidade de construção de dois segmentos – não coincidentes e nem colineares – bem como do ponto de concorrência, intersecção. Como forma de orientação para tal, estabelece os pontos definidores dos segmentos.

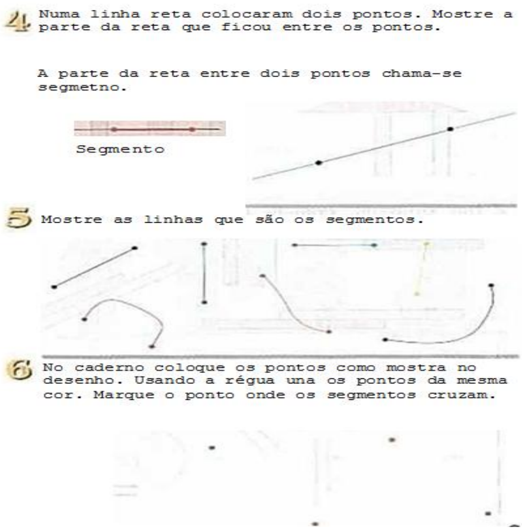


Figura D13 - Tarefa introdutória de segmentos e pontos de concorrência
Fonte: Davidov (2012, p. 9)

Observa-se que há uma preservação da lógica de organização das tarefas em que há uma articulação entre o conteúdo de uma com a seguinte que acrescenta algo novo. Isso atende o próprio pressuposto de Davídov (1988) de que as crianças, ao resolverem as tarefas iniciais com base um método geral, se apropriam dele e, simultaneamente, do conceito de número.

Vale destacar que esses conceitos não são tratados pela proposta modernista, no contexto de introdução do conceito de número. As linhas retas e curvas até aparecem, mas como tipos de diagramas delimitadores dos conjuntos.

Essas tarefas da proposta davydoviana – inseridas no processo de familiarização dos conhecimentos particulares concretos, exigência para a apropriação dos conhecimentos de caráter geral e abstrato (DAVÍDOV; SLOBÓDCHIKOV, 1991) – também são anunciativas do processo de formação do pensamento referente à reta numérica. Isso significa dizer que o referido conceito tem peculiar importância para o ensino e a aprendizagem de número. Portanto, prenuncia que a apresentação da reta numérica ocorre num contexto de discussão sobre o melhor modo de apresentação dos numerais que possibilita a identificação da propriedade numérica de uma grandeza sem ser necessária a contagem das unidades.

3.2.2 Tarefas que introduzem o conteúdo geral do conceito de número: grandeza

Em 3.2.1 – O ponto de partida para o ensino do conceito de número proposto por Davydov – analisamos as tarefas que colocam os estudantes em processo de familiarização com as ideias que pré-anunciam o conceito de número. A base dos prenúncios conceituais foram características como: tamanho, cor, forma e noções geométricas referentes a linhas e segmento.

Na presente subseção, trataremos das tarefas que propiciam, aos estudantes, a análise que os conduzem à apropriação teórica da relação entre grandezas. Esta, no sistema de ensino davydoviano, é considerada a abstração inicial referente ao número real. Isso se reveste de grande importância, pois segundo Rosa (2012, p. 116), "sem ela não se pode compreender teoricamente o conceito de número, por outro lado, é possível compreender a relação entre grandezas sem conhecer o número".

Vale reafirmar, que as relações entre grandezas de mesma espécie, fundamento do número real, se constituem em unidade de singularidades numéricas como os naturais, inteiros, racionais e irracionais. Abarcam comprimento, área, volume, capacidade, massa e quantidade discreta. Também, é a partir delas que as crianças iniciam e desenvolvem o processo de representação em seus níveis: objetal, gráfico e literal.

A seguir, discutiremos as tarefas concernentes às relações. Para tanto, seguiremos a ordem em que as grandezas aparecem no livro didático (DAVIDOV, 2012).

a) Relações entre a grandeza comprimento

A orientação dada ao professor (GORBOV, S.F.; MIKULINA, G.G.; SAVIELIEV, O.V., 2008) é para que, inicialmente, se volte à ideia do tamanho. Para tanto, se faz necessário que as tarefas emparelhem objetos, de modo tal, que elas descubram a característica comprimento. Este deve ser percebido em suas variadas dimensões como, por exemplo: horizontal, vertical, largura, espessura, altura, profundidade, entre outras.

Para tanto, a tarefa introdutória sugerida por Gorbv, S.F.; Mikulina, G.G.; Savieliev, O.V. (2008) é similar aquela apresentada anteriormente em D1. O professor expõe no quadro o modelo plano de uma fachada do prédio, com ausência de uma das suas colunas. Trata-se, então, de encontrá-la de modo que atenda todas as características das demais que alicerçam a construção simulada. Entre aquelas disponíveis, há somente uma que atende os requisitos exigidos. As demais são descartadas por não conferir por alguns atributos, como por exemplo: cor, forma, comprimento, largura. Porém, o professor, em tom afirmativo, apresenta uma por uma, aos estudantes, como sendo a ideal. As rejeições devem ser justificadas com a indicação das características imprecisas. Além disso, as discussões são permeadas por demonstrações (emparelhamento, sobreposição, indicação) que comprovam a rejeição ou aceitação. A coluna correta é a última a ser apresentada com o argumento, por parte das crianças, de que tem as variantes requeridas. Ao professor, cabe esclarecer que a indicação da altura, largura, espessura e profundidade podem ser antecedidas pela palavra **comprimento**. Por exemplo, diz-se ‘comprimento da altura’.

Embora a situação apresente uma única solução, a proposta davydoviana abre discussão sobre cada uma das possibilidades apresentadas. Ou seja, a atenção não se volta apenas para aquela considerada a correta e somente apontar ou fazer a indicação, como procede o movimento modernista da Matemática, do tipo: ‘é esta’. O processo de discussão promovido pelo professor envolve os estudantes pela necessidade de analisar peça por peça para justificar a coerência ou incoerência em relação às exigências a atender. Em outras palavras, há um movimento do pensamento das crianças.

Após a execução da tarefa, anteriormente comentada, os alunos voltam-se para o desenvolvimento de outra (D14) do livro didático.

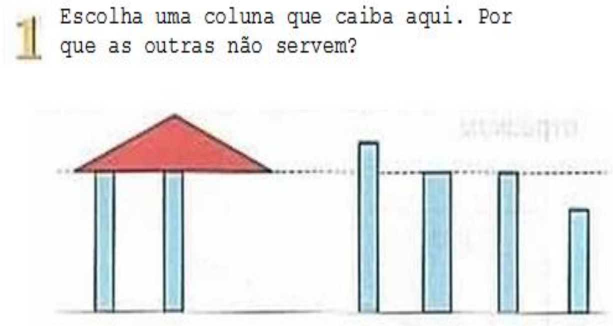


Figura D14 - Tarefa que envolve a grandeza comprimento da largura e da altura
Fonte: Davidov (2012, p. 10)

A tarefa de D14 é menos abrangente, em relação a anterior, pois não há variação de cores e nem de espessura. A atenção se volta apenas para o comprimento da altura e da largura, o que pode aparentar algo simples. No entanto, isso só ocorre pelo cuidado de, nas tarefas introdutórias de algo novo, contemplar a amplitude de seus aspectos, em vez de apresentar sequencialmente aquilo que se considera do mais simples ao mais complexo. Por exemplo, a tarefa orientativa anterior, tratou de todas as dimensões em relação ao comprimento (altura, largura, espessura) não organizadas de modo individual. Ou seja, o ponto de partida contempla a totalidade dos elementos que caracterizam um determinado conceito do sistema.

As tarefas subsequentes (D15 e D16) têm sua importância por se traduzir em referência para o processo de representação, respectivamente, objetal e gráfica. Antes de apresenta-las, reportaremo-nos a uma tarefa que as precedem, sugeridas no livro de orientação aos professores (GORBOV, S.F.; MIKULINA, G.G.; SAVIELIEV, O.V. 2008).

As crianças têm à disposição tiras de várias cores e diferentes comprimentos, em relação à altura e largura, para serem comparadas. Previamente, é estabelecido o que será considerado comprimento e as crianças movimentam o dedo, por exemplo, pelo lado mais comprido de uma ficha retangular (GORBOV, S.F.; MIKULINA, G.G.; SAVIELIEV, O.V. 2008).

Na sequência, o professor apresenta às crianças duas tiras: uma na mão esquerda e a outra na direita.

Professor: Temos que comparar as tiras pelo comprimento, c*omo vamos fazê-lo? A*s crianças apresentam sugestões de como aproximá-las e, ao mesmo tempo, indicam o modo correto e rejeitam aqueles que consideram errados. Posteriormente, elas escolhem e apresentam tiras iguais em conformidade com às expostas pelo professor.

Além da comprovação, também é exigido a expressão verbal correta, como: “a tira verde é maior que a tira vermelha pelo comprimento”; ou o “comprimento da tira verde é maior que o comprimento da tira vermelha (GORBOV, S.F.; MIKULINA, G.G.; SAVIELIEV, O.V. 2008).”

Decorrente dessa tarefa de cunho orientativo, os alunos passam desenvolver outra (D15) do livro didático.

Figura D15 - Comparação da grandeza comprimento em relação às suas dimensões possíveis
Fonte: Davidov (2012, p. 10)

A expressão “onde for possível” do enunciado da tarefa dá, ao mesmo tempo, liberdade e restrições às crianças na comparação das tiras. Liberdade porque elas precisam descobrir quais as dimensões com possibilidade de comparação, isto é: as tiras de tonalidade azul têm o mesmo comprimento da altura, mas diferente na largura; o mesmo ocorre com as de cor verde, como também as de coloração amarela; as tiras vermelhas apresentam-se iguais tanto o comprimento da largura quanto da altura. Essas comparações também explicitam as restrições por serem elas as possibilidades. Por exemplo, é impossível que se compare o comprimento da espessura e da profundidade.

Vale reafirmar que tiras similares àquelas do desenho anterior serão disponibilizadas às crianças, em tarefas posteriores, para indicar as relações de igualdade ou desigualdades. Tratar-se-á da primeira forma de representação, a objetal.

Assim também, a tarefa da figura D16, além de cumprir o objetivo de comparar comprimentos, prepara para a segunda forma de representação, a gráfica. Porém, é antecedida por outra do livro de orientação do professor. Este expõe no quadro duas tiras de papel com mesmo comprimento e propõe que as crianças as comparem. A conclusão a elaborar é que elas têm o mesmo comprimento.

Como é peculiar na proposta de Davydov, uma tarefa particular não se limita apenas a uma resposta esperada, mas também possibilita a expansão para algo a mais que promova o movimento do pensamento conceitual. É com esse propósito que o professor pega uma das tiras e corta um pedaço, o que acarreta na diminuição do comprimento da largura. Questiona, aos estudantes, se o comprimento da altura continua sendo igual ao da tira que permanece no quadro. As respostas são submetidas à comprovação pelo emparelhamento de ambas.

O professor corta mais duas vezes a referida tira para diminuir ainda mais sua largura, o que contribui para novas intervenções dos estudantes com emissão de opiniões sobre a relação de comprimento em foco. Importa o destaque para a permanência do comprimento da altura. Se a tarefa exigia até então o pensamento com base visual e comprovação física, na sequência ela requer uma forma de representação escrita. Para tanto, o professor instiga os estudantes a desenharem algo representativo para um comprimento único para a altura de ambas as tiras. Pergunta-lhes: Como é possível fazê-lo? Do debate marcado por sugestões e tentativas, a conclusão é de que um modo ideal seria o desenho, entre as tiras, de dois segmentos de mesmo comprimento da altura, porém uma mais larga que a outra.

A tarefa D16 do livro didático apresenta cinco pares de segmentos dispostos em várias posições para serem comparados pelo comprimento. Em quatro deles, é possível discernir o tamanho de um dos segmentos em relação ao outro e, consequentemente, indicar se ambos são iguais ou um deles é mais comprido. Porém, há um dos pares, considerado uma “pegadinha”[7] que, em vez de posicionados paralelamente, seus segmentos estão posicionados perpendicularmente.

---

[7] O termo pegadinha apresenta dois significados: 1) não é possível a elaboração de uma resposta que satisfaça às condições requeridas; 2) há sutilezas que requerem atenção redobrada, por parte das crianças.

Isso requer dos estudantes a busca de estratégias para cumprir a finalidade da tarefa.

Figura D16 - Comparação da grandeza comprimento em segmentos
Fonte: Davidov (2012, p. 10)

As tarefas seguintes – D17, D18 e D19 – são representativas da preservação da organicidade do sistema com a atenção para manter o estudante em processo investigativo. Consequentemente, colocá-lo em movimento de apropriação do modo geral do conceito de número, que envolve a grandeza no contexto da relação de medida de suas várias dimensões.

A tarefa D17 exige que o aluno, além de comparar dois comprimentos e identificar qual deles é o maior e o menor, solicita algo mais: a determinação de figura ou tira de comprimento tal que seja superior a uma e inferior a outra, tidas como referência.

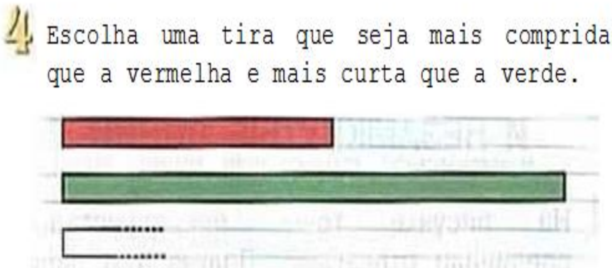


Figura D17 - Comparação da grandeza comprimento que requer a opção por uma intermediária
Fonte: Davidov (2012, p. 11)

A tarefa de D19 do livro didático do aluno traz uma particularidade de outra apresentada pelo professor que extrapola figuras geométricas, além de promover a necessidade de opção por qual dimensão do comprimento se determinará a comparação. É com ela que se inicia a representação gráfica, segundo tipo, por meio de segmentos.

O professor, supostamente, convida as crianças a comparar comprimentos relativos aos alunos. A problematização se concentra nos possíveis tamanhos a adotar: pelo comprimento da altura e da largura, entre outros sugeridos. Algumas delas se dirigem à frente do quadro. Mas, previamente, optam pelo tipo de comparação e desenham segmentos – por exemplo, verticais – indicativos de que a comparação se fará pela altura, em vez da largura.

A tarefa expressa em D18 requer atenção, pois a comparação pela altura se torna imediata se a referência entre Olga, Pedro e Nicolas. Porém dá margem para indecisão, ao se tratar de Tânia em relação aos demais. Em outras palavras, deve-se desconsiderá-la, caso se opte por evitar emissão de respostas com base em suposições.

Figura D18 - Comparação da grandeza comprimento com prévia representação gráfica

Fonte: Davidov (2012, p. 11)

Diferentemente das proposições formalistas modernas que se organizam, predominantemente, para que os estudantes cheguem à resposta de forma afirmativa ou negativa, cada tarefa davydoviana sempre traz uma condição ou um fator para que os estudantes articulem ideias adquiridas e levem a novas elaborações. Assim, a tarefa da figura D19 requer a manutenção da comparação de comprimento de figuras de mesma altura, mas responsabiliza os estudantes para esboçar desenhos diferentes.

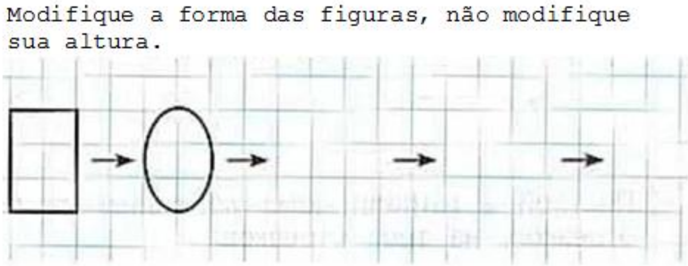


Figura D19 – Criação de novas figuras com conservação da grandeza comprimento da altura
Fonte: Davidov (2012, p. 11)

b) Relações entre a grandeza área

Vale esclarecer que no estudo da grandeza área há varias tarefas que retornam às noções geométricas de linha reta, linhas curvas (abertas e fechadas) e pontos que pertencem ou não a ela. Acresce a ideia de superfície e propõe tarefas do tipo: “Faça no caderno uma linha fechada. Pinte a figura por ela limitada (DAVIDOV, 2012, p. 14)”. Embora consideramo-las como essenciais por introduzirem os estudantes no conceito de área, não as detalharemos dado que estenderíamos demais a dissertação. Por isso, dedicar-nos-emos a apresentar aquelas que, no nosso entendimento, são indispensáveis para o leitor perceber as relações caracterizadoras do processo de ensino e apropriação do conceito de número.

De acordo com Gorbv, S.F.; Mikulina, G.G.; Savieliev, O.V. (2008), as tarefas que seguem ainda focam os tamanhos dos objetos que, ao sobrepô-las ou emparelha-las se apresenta uma nova característica de comparação: a área. Porém, ainda não trata de situações mais complexas, por exemplo, de comparar por meio de divisão em partes e seu reagrupamento de superfícies.

A tarefa introdutória sugerida em Gorbv, S.F.; Mikulina, G.G.; Savieliev, O.V. (2008) diz que o professor apresenta às crianças duas figuras (uma de cor amarela e outra vermelha) grandes e acentuadamente irregulares, porém de mesma forma. Estas são geradoras de dúvidas no que diz respeito à identificação de possível medida linear, por não estar bem definidas a altura, nem a largura e o comprimento.

A suposição é de que não haverá problemas na comparação das duas figuras pelo parâmetro cor, uma vez que são diferentes, e pela forma por ser a mesma. A restrição de facilidade fica para o tamanho. As sugestões das crianças são consideradas, mas colocadas em discussão com as devidas justificativas. Por exemplo, se houver a indicação que a figura amarela é maior que a vermelha, cabe ao professor aceitá-la, mas solicita que seja especificado o tipo de tamanho. As crianças poderão fazer referências às dimensões lineares – altura, largura ou comprimento – problematizadas pelo professor. Para tanto, o professor gira as figuras como forma de mostrar que é difícil indicar as referidas dimensões. Posteriormente, emparelha-as de modo tal que dá margem para a dúbia afirmação: a figura vermelha é maior em comprimento do que a amarela é menor em tamanho (GORBOV, S.F.; MIKULINA, G.G.; SAVIELIEV, O.V., 2008).

Mas há crianças que não admitem esse modo de posicionar as figuras, o que leva o professor solicita-lhes que apresentem a melhor maneira com condições para a identificação da maior figura. Isso ocorre porque é possível sobrepô-las de modo que a vermelha fique completamente dentro da amarela. Esta, portanto, é a maior. Além de concordar com tal conclusão, o professor explicita que este modo é correto de comparar as figuras por estar em questão a grandeza ‘área’. Esta palavra, ao ser anunciada, é acompanhada pelo movimento da mão pela figura inteira, em vez de um determinado comprimento.

Há outras tarefas em Gorbv, S.F.; Mikulina, G.G.; Savieliev, O.V. (2008) que orientam o professor para a introdução da comparação de áreas. Porém, descreveremos apenas mais uma delas para elucidar que cada uma delas apresentam elementos novos em relação às antecedentes. Por exemplo, a tarefa que muda da comparação de figuras irregulares para regulares. Colocam-se à disposição das crianças duas tiras de superfícies retangulares para centrar no modo de compará-las: sobreposição, pela área; emparelhamento, pelo comprimento e largura.

De modo geral, a orientação é de que, no desenvolvimento das tarefas do livro didático, a comparação de áreas deve ser feita aproximadamente e com argumentos que justifiquem uma determinada resposta ou procedimento adotado.

O livro didático propõe que os estudantes desenvolvam três tarefas sobre a comparação de áreas, conforme as Figuras D20, D21 e D22. Na primeira, D20, a atenção dos estudantes volta-se para a identificação de características de cinco desenhos: que se conservam (cor e forma) e se altera, a área.

Figura D20 – Comparação de áreas com variação de tamanho
Fonte: Davidov (2012, p. 11)

Em D21, o diferencial em relação a anterior é que traz à tona a ideia de que superfícies de que figuras – como, por exemplo, quadradas – delimitadas por segmentos de mesmas medidas podem não ter a mesma área. Isso ocorre se, em um delas, há uma região a não considerar ou possuir orifícios, como simula a figura azul.

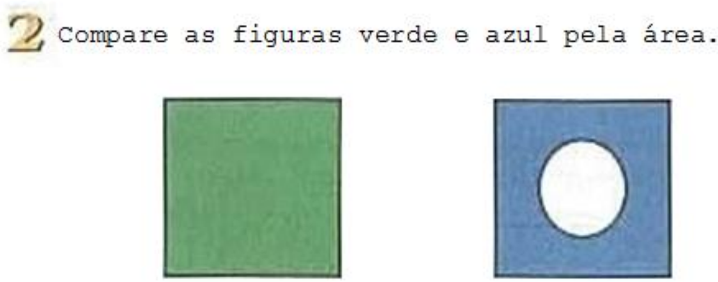


Figura D21 - Comparação, pela área, de figuras com aparentes superfícies
Fonte: Davidov (2012, p. 11)

Por sua vez, a tarefa de D22 traz a situação de D21, isto é, superfícies aparentemente iguais, mas de áreas diferentes. Porém, apresenta alternativas de igualá-las, que demanda dos estudantes a atenção para identificar a peça que preenche, convenientemente, os espaços. Há possibilidade do desencadeamento de discussões frente a possíveis indicações corretas ou incorretas, dada a condição prévia da necessidade de justificá-las.

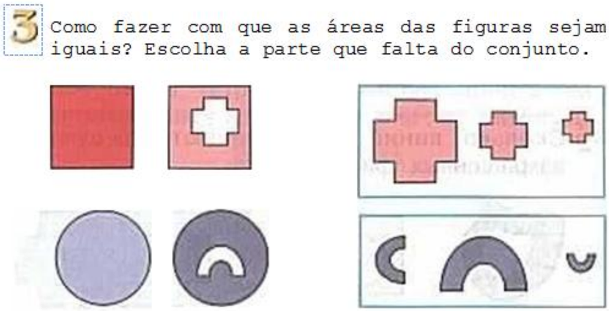


Figura D22 - Tarefa que discute possibilidade de igualar áreas
Fonte: Davidov (2012, p. 16)

c) Relação de comparação da grandeza volume

O tamanho continua sendo a centralidade das tarefas, porém voltado para o volume. Além disso, conforme orientam Gorbv, S.F.; Mikulina, G.G.; Savieliev, O.V. (2008), o estudo dessa nova grandeza é que se intensifica a representação objetal das comparações que se estabelecem entre elas. Para tanto, as crianças utilizam-se de tiras de papel, como forma de substituir a relação entre volumes pela de comprimentos. Trata-se de um procedimento inicial com vistas à apropriação do conceito de grandeza em nível abstrato.

Antes de envolver os estudantes no estudo das relações de volume, o professor apresenta-lhes uma tarefa que também se volta para a familiarização da representação objetal da comparação entre grandezas. Para tal, envolve-os em situações que sintam a necessidade de indicar uma forma de mostrar que existe algo igual ou diferente entre as figuras. Cada um deles têm sobre a mesa três tiras com as seguintes características: todas de mesma cor, duas têm o mesmo comprimento e uma delas mais curta. O professor apresenta-lhes duas figuras para que eles indiquem a igualdade ou não pela forma. As interações marcadamente dialógicas mediadas por um propósito conceitual, representação de uma relação de comparação, propiciam a conciliação de diferentes alternativas. A saída é: as tiras de papel que estão nas carteiras. Assim, para indicar que as duas figuras são iguais pela largura, apresenta-se duas tiras do mesmo comprimento; porém, se desiguais, mostram-se tiras de comprimentos diferentes (GORBOV, S.F.; MIKULINA, G.G.; SAVIELIEV, O.V., 2008).

Na sequência, Gorbv, S.F.; Mikulina, G.G.; Savieliev, O.V. (2008) propõem várias tarefas (não discorreremos cada uma delas por razões apresentadas anteriormente) que põem as crianças em processo de comparação, por exemplo, de figuras ou objetos de dimensões diferentes (bi e tridimensionais) de modo que favoreça o uso das fichas para indicar que o tamanho das grandezas em referência são iguais ou não. Isso ocorre permeado de dúvidas, principalmente, quando as figuras têm algumas disparidades e geram estranheza em relação à possibilidade de comparação. Nessa circunstância, o professor pode apresentar as características que diferenciam figuras planas e não planas, com a devida nomenclatura, por exemplo: corpo e suas particularidades, como prisma. Porém, esses nomes não são o elemento principal, pois o objetivo é que as crianças elaborem a ideia do corpo relacionada ao conceito de volume.

Em novas intervenções, durante o desenvolvimento de tarefas pertinentes, é que o professor vai dizer: o tamanho "geral" das caixas recebe o nome de **volume**, e mostra a quantidade de espaço numa caixa.

Depois de executarem as diversas tarefas sugeridas por Gorbv, S.F.; Mikulina, G.G.; Savieliev, O.V. (2008), as crianças voltam-se para aquelas propostas no livro didático, figuras D23 e D24.

A tarefa de D23 simula uma situação de comparação de volumes de água, que deve ser explicitada pela indicação das fichas que representam devidamente a igualdade ou desigualdade. Além de identificar o procedimento de cada um dos personagens, as crianças atentam para possíveis equívocos de algum deles, pois na situação analisada por Tânia a igualdade ou desigualdade dos volumes a ser comparados não são tão evidentes.

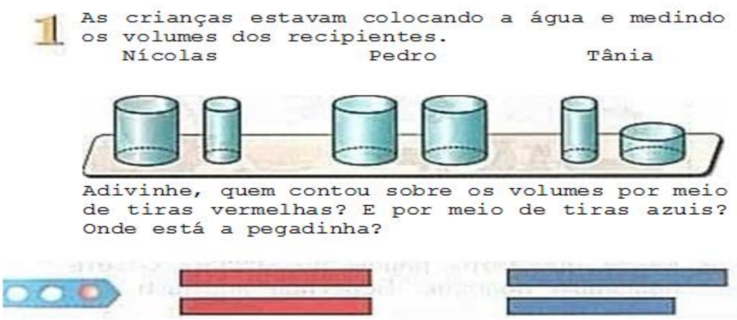


Figura D23 – Comparação de volumes
Fonte: Davidov (2012, p. 17)

As situações da figura D24 extrapola a ideia de volume de figuras eminentemente da geometria euclidiana (prisma, cilindro) por também propor comparações de objetos do cotidiano (xícaras, estátuas). Todavia, continua a ênfase na representação objetal por meio de tiras, não mais apresentadas fisicamente, mas desenhadas no espaço indicado no livro.

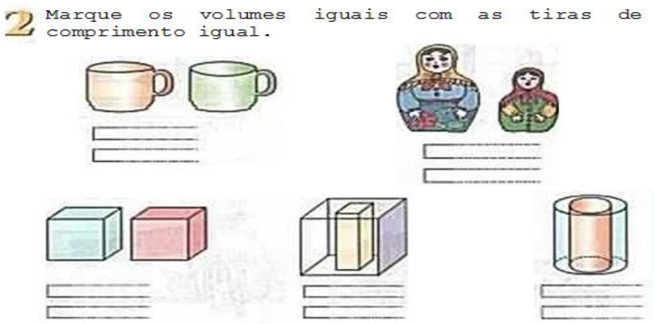


Figura D 24 - Tarefa que requer a representação objetal de igualdade de volumes
Fonte: Davidov (2012, p. 17)

A tarefa anterior, D24, ao requerer que os estudantes desenhem as tiras em vez de mostrá-las, prediz a representação gráfica das relações de comparação de tamanho. Além disso, dirige para o início da segunda ação de estudo, que tem como objetivo a modelação e, aos poucos, atingir a forma literal.

d) Relação de comparação da grandeza massa

O estudo da comparação entre corpos pela grandeza massa é introduzido por duas tarefas que constam no livro de orientação do professor (GORBOV, S.F.; MIKULINA, G.G.; SAVIELIEV, O.V., 2008). No entanto, descreveremos somente uma delas, antes de apresentar aquelas trazidas pelo livro didático (figuras D25 e D26).

Inicialmente, o professor apresenta às crianças duas caixas que se diferenciam pelo volume e pela cor, mas de mesma forma (prismas, paralelepípedos). São comparadas em relação às seguintes características: cor, forma, comprimento, área, volume. Alguns estudantes, individualmente, são chamados em frente ao quadro para estabelecer uma comparação entre as caixas e indicar a característica adotada. As demais têm como função de mostra o resultado valendo-se das tiras, representação objetal.

Na sequência, o foco volta-se para duas caixas cúbicas – que estão sobre a mesa do professor – por contemplar todas as características até então estudadas e, como forma de introduzir uma nova dimensão a ser comparada, apresentam massas diferentes. O professor simula que estudantes de outra série escolar, ao compará-las, mostraram duas tiras de comprimentos diferentes. Incita-as para expressar suas hipóteses sobre o critério que eles adoram na comparação. Isso propicia o retorno às análises das grandezas adotadas anteriormente e concluírem que as caixas são iguais. A questão que emerge é: Então, o que há de diferente para que houvesse uma representação objetal indicativas de desigualdade? Uma criança, convidada para pegar as duas caixas, concluirá que uma delas é mais pesada que a outra, e revela aos demais colegas da classe. Então, o professor nomeia e demonstra a nova característica: massa.

As tarefas do livro didático (figuras D25 e D26) apresentam um teor não tanto problematizador quanto aquelas orientadoras precedentes. Requerem uma análise mais objetiva, dos estudantes, para indicar a igualdade ou desigualdade das massas. Ou seja, se as duas figuras em comparação simulam as seguintes possibilidades: cheio/vazio, leve/pesado. Em síntese, que uma tem maior ou menor massa que a outra. A exceção, considerada como ‘pegadinha’, é para última situação de D26, pois não há elementos argumentativos que possa garantir qualquer afirmação em relação às massas dos peixes.

Dado que suas finalidades são a identificação e indicação da relação comparativa, compete às crianças recorrerem à representação objetal, isto é, marcar com tiras.

Figura D 25 - Tarefa que requer a representação objetal de igualdade ou desigualdade de massa
Fonte: Davidov (2012, p. 18)

Figura D 26 - Situações com possibilidade ou não da representação objetal de comparação de massas
Fonte: Davidov (2012, p. 18)

Vale esclarecer que, em uma das tarefas orientativas, colocavam os estudantes em ação investigativa que sentiam a necessidade de um instrumento e medida de massa. Oportunidade em que o professor apresentava e utilizava a balança. Por isso, conjecturamos a razão pela qual, nas tarefas, há um predomínio de situações com tal instrumento.

3.2.3 A comparação das grandezas em movimento: o momento da representação gráfica

Na presente subseção, trataremos da comparação entre grandezas que preparam e, posteriormente, possibilitam o movimento de uma igualar-se ou diferenciar-se da outra por aumento ou diminuição. São essas ideias que provocam a exigência de um novo modo de representação: a gráfica, cuja proposição é o uso de algo visualmente semelhante o segmento de reta. Para tanto, o pensamento conceitual se sustenta das relações de igualdade, não como dadas unicamente prontas, mas também como o culminar de uma comparação – medida – consequência de acréscimo ou diminuição, com confluência do conceito de quantidade.

As tarefas das proposições davydovianas promotoras das inter-relações que integram o conceito teórico de número se agrupam em dois blocos, a seguir especificadas.

a) Igual – Maior – Menor

As tarefas D27, D28 e D29 abarcam conceitualmente todas as características das grandezas até então consideradas no processo de comparação. Apresenta como aspecto novo a representação gráfica por meio de dois segmentos.

Na tarefa da figura D27, a relação de igualdade ou desigualdade ocorra entre dois desenhos (potes com mel), no entanto, aprece três pares de segmento, que provocam os estudantes a identificar o critério adotado correspondente a cada representação.

No âmbito das discussões, as crianças identificam que cada par de segmentos são representativos do resultado da comparação das duas embalagens. O importante é a conclusão a elaborar, frente às circunstâncias propiciadas pela própria organização da tarefa. Assim, os pares de seguimentos indicam: se de mesmo comprimento, as grandezas consideradas são forma e volume; se forem diferentes, a massa, pois uma embalagem está cheia e a outra não, o que dá diferença no peso.

Figura D27 – Tarefa que inicia representação gráfica
Fonte: Davidov (2012, p. 19)

A tarefa de D28, assim como em D27, também apresenta o resultado de comparação, com foco somente para a igualdade. Tem como propósito que os estudantes identifiquem a característica possível de satisfazer a referida relação. Na situação da esquerda essa relação só se estabelece pelo comprimento da altura, pela forma (cilíndrica) e cor, enquanto a da esquerda é somente pela massa.

Figura D 28 – Tarefa com a identificação da característica que estabelece a relação de igualdade
Fonte: Davidov (2012, p. 19)

Em D29, o propósito é colocar o estudante em processo de análise para a identificação da característica que possibilita a relação de comparação de igualdade e desigualdade. Na primeira situação, parece evidente que a altura é a referência para o igual, por sua vez, forma e volume para o desigual. A segunda situação a altura dos mastros é indicador de igualdade e o tamanho da área são diferentes.

Figura D29 – Tarefa com a identificação da característica que estabelece a relação de igualdade e desigualdade
Fonte: Davidov (2012, p. 19)

As relações de comparação – igualdade e desigualdade (maior e menor) – prenunciam outro elemento conceitual, a quantidade, do processo de elaboração do modelo universal.

b) Quantidade

As tarefas, que descreveremos a seguir, objetivam a introdução dos alunos na ação investigativa que os levam á elaboração da ideia de quantidade. É nesse momento que a correspondência biunívoca também se apresenta, porém no âmbito da relação de comparação, entre grandeza discreta. Enfim, sugere a comparação de igualdade ou desigualdade e sua representação gráfica. Assim, o "um" a "um" da relação biunívoca ultrapassa a noção de unidade constituída, por exemplo, de único elemento concreto físico. Em outras palavras, a unidade como medida também pode se constituir de outras quantidades.

Por isso, pode ocorrer que em certa situação, dependendo da constituição da unidade, pode ou não ocorrer a biunivocidade entre dois agrupamentos.

Esse entendimento é a base das tarefas que Gorbv, S.F.; Mikulina, G.G.; Savieliev, O.V. (2008) orientam os professores para que introduzam a ideia de quantidade. Nelas, o modo de aquisição da noção de correspondência biunívoca difere das proposições modernistas que exige dos estudantes apenas a ligação, por meio de uma linha, dos elementos de dois conjuntos.

Em uma dessas tarefas, cada estudante recebe oito cartões, sendo quatro com a figura de uma bandeirinha e quatro de uma criança. O professor interroga se quantidade de bandeirinhas é suficiente para dividir entre as crianças. Os estudantes concluem que a quantidade de ambas as figuras é exatamente a mesma. Eles juntam os cartões, em pares, e procedem a representação gráfica (segmentos iguais) (GORBOV, S.F.; MIKULINA, G.G.; SAVIELIEV, O.V., 2008).

Outra condição é proposta: a divisão de modo que cada criança receba duas bandeirinhas. Estas, nesse caso, não são suficientes para atender a relação exigida na tarefa. Assim sendo, a representação gráfica do resultado se dará por segmentos de comprimentos diferentes.

A divergência de resultados das duas tarefas torna-se objeto de discussão entre estudantes e o professor, dirigida pela questão: por que ao comparar os mesmos objetos, houve diferença na representação? A consonância é de que, na primeira tarefa, a comparação se estabeleceu entre cada bandeirinha a cada criança. Por sua vez, na segunda, a relação ocorreu entre o par de bandeirinhas e uma só criança.

Outras tarefas similares acrescidas de peculiaridades, referentes à temática, compõem o livro de orientação ao professor. Na sequência, é que o estudante desenvolve as tarefas do seu livro (Figuras D30, D31, D32, D33 e D34). A comparação de dois grupos de objetos e o modo de procedê-la é o que sugere as duas situações de D31, cada qual precedida, lateralmente à esquerda, por uma orientação visual do critério da relação a estabelecer com as unidades de referência, respectivamente: caneca/pires e triângulo/quadrado. As duas situações trazem em comum que, em seus pares, a quantidade de objetos não é a mesma, o que caracteriza uma relação de desigualdade. Por consequência das discussões e apropriações anteriores, os estudantes podem indicar, como forma de expressar o resultado da comparação, a representação gráfica por dois segmentos de tamanhos diferentes.

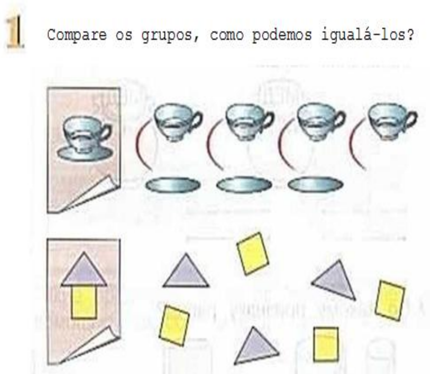


Figura D30 – Comparação de quantidades discretas, introdutória da noção de quantidade
Fonte: Davidov (2012, p. 20)

Subjacente à tarefa da figura D31está a condição para que o estudante estabeleça necessariamente a relação de igualdade expressa na representação gráfica (segmentos de mesmo tamanho). Na primeira situação a indicação para a relação ‘dois para um’ (duas rodas para cada bicicleta). A segunda situação não determina o critério para a comparação com a condição de igualdade. Essa ausência pode ser justificada pela similaridade com a anterior e pela figura do triciclo, de cunho orientativo, o que propicia a conclusão de que a comparação requisitada só é possível pela relação “três para um”.

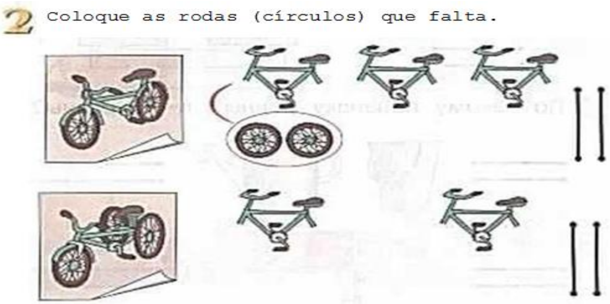


Figura D31 – Comparação de quantidades discretas, na relação vários para um
Fonte: Davidov (2012, p. 20)

A essência requerida nas duas tarefas anteriores é mantida nas que seguem (Figuras D32, D33 e D34). Porém, apresentam algumas peculiaridades que cumprem com a preocupação dos propositores de evitar que os alunos resolvam, mecanicamente, uma tarefa pela identidade com aquelas desenvolvidas. Pelo contrário, eles precisam estar atentos para novos detalhes e exigências que deixem-lhes em permanente ação investigativa, que proporcionam o movimento do pensamento de elaboração conceitual.

Assim, a tarefa da figura D32 solicita a comparação conforme o critério estabelecido que na primeira situação é estipulada e ocorre a relação “dois para um”. O critério da segunda é ‘um a um’, o que requer o acréscimo de quadrados para que a relação com os círculos seja estabelecida.

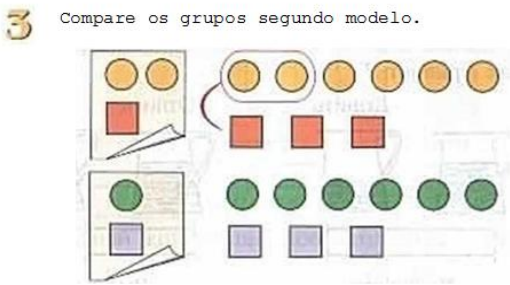


Figura D32 – Comparação de quantidades discretas, que requer ou não acréscimos para a ocorrência da relação
Fonte: Davidov (2012, p. 21)

A condição para a comparação não é estabelecida explicitamente na tarefa de D33, e sim identificada pela representação gráfica. O mesmo comprimento dos segmentos da primeira situação e a disposição emparelhada dos dois grupos de figuras (triângulos e quadrados) são referências para os estudantes concluírem que a igualdade ocorre na relação ‘um a um’. Diferentemente, da segunda situação, em que a disposição par a par das figuras ajuda na identificação de que não há a ocorrência da relação de desigualdade, como sugere os segmentos.

Figura D33 – Comparação de quantidades discretas sem condição prévia, mas expressa pela representação gráfica.
Fonte: Davidov (2012, p. 21)

Por fim, a tarefa da figura D34 condiciona a comparação de duas maneiras: previamente – que indica a relação ‘dois para um’ – e pela representação de igualdade (seguimentos de mesmo comprimento). Por isso, a enunciado: “Coloque as figuras que faltaram”.

Figura D34 – Comparação de quantidades discretas, cuja condição é expressa previamente pela representação gráfica.
Fonte: Davidov (2012, p. 21)

O desenvolvimento das tarefas referentes à temática ‘quantidade’ dá condições para que os estudantes: executem, como esperado, a comparação de figuras em conformidade com a característica predeterminada; identifiquem e nomeiem a característica, ao se referir à igualdade ou desigualdade de objetos; procedam a representação da relação, por meio de segmentos.

Assim, a noção de quantidade não se limita – como apresenta a proposta do Movimento da Matemática Moderna – apenas à correspondência um a um, entre elementos de conjuntos equipotentes. Conforme Gorbv, S.F.; Mikulina, G.G.; Savieliev, O.V. (2008) tal relação até é necessária, porém, consideram que não há quantidade em um grupo de certos objetos, em si. Ela só surge como resultado, se um conjunto corresponde a outro meio de correlação univalente, ou seja, traz a ideia de comparação, medida.

Para encerrar essa subseção, vale uma reflexão sobre as indicações ou direcionamentos, que aparecem em cada uma das tarefas, para quais critérios ou unidades a adotar na comparação. Tal orientação tem base teórica histórico-cultural de que, no processo interativo ensino/aprendizagem/desenvolvimento, cumpre ao professor auxiliar as crianças nas circunstâncias em que suas apropriações ainda não dão a base necessária para novas aquisições (VIGOTSKI, 2000). Além disso, evita a dispersão da atenção dos estudantes para outros critérios que não condizentes ao conceito em foco.

3.2.4 A comparação das grandezas em movimento: a diferença

As tarefas da presente subseção, não só requerem que os estudantes compararem as grandezas e procedam a representação por meio de segmentos, como em 3.2.3, mas também que aumente-as ou diminua-as para demonstrar a ocorrência de transformação de uma desigualdade em igualdade.

Em Gorbv, S.F.; Mikulina, G.G.; Savieliev, O.V. (2008) existem várias tarefas introdutórias que orientam o professor e contemplam diversas grandezas, volume, massa, comprimento, discreta, entre outras. Em uma delas, o professor apresenta, no quadro, dois segmentos de comprimentos diferentes, indicadores do volume de água a ser colocado dentro de dois recipientes iguais que estão sobre sua mesa. Propõe a duas crianças que derramem – uma após a outra – o líquido em um dos recipientes, de modo que corresponda ao segmento menor, e só depois colocar a água no outro. Os demais estudantes acompanham e descobrem que o importante não é volume de água, mas a condição de que ele seja maior no primeiro recipiente e menor no segundo. Além disso, elas desenham nos seus cadernos os segmentos correspondentes.

O desenvolvimento da tarefa continua e se inicia um processo caracterizado por um movimento de aumento ou diminuição dos segmentos de retas que representam a situação em análise, pelas crianças. As interações entre estudantes e professores são mediadas pela necessidade de fazer com que o volume menor de água de um dos recipientes se torne igual ao do outro. Ao serem interrogadas, as crianças, sugerem que se acrescente mais líquido, o que é aceito pelo professor. Ao igualar os volumes cada criança completa com outra cor o segmento menor para que fique de mesmo comprimento do maior.

Como a preocupação maior é com a representação, em vez das manipulações dos líquidos, se estabelece o diálogo que explicite a diferença de procedimentos: o professor utilizou água para expressar o aumento do volume do recipiente; por sua vez, as crianças completaram o desenho, segmento. Nesse momento, é introduzida a palavra ‘diferença’ que é indicada, respectivamente, no recipiente e no segmento.

Procedimento similar é adotado para igualar o maior ao menor. Isso implica na elaboração da conclusão de que é necessário diminuir, não de qualquer maneira, do maior, mas um valor exatamente igual à diferença do volume de água de um recipiente em relação ao outro. Esse procedimento é demonstrado nos segmentos por riscos que indicam a parte diminuída do segmento maior. Posteriormente, é proposto que os estudantes desenvolvam as tarefas do livro didático, desencadeadas pela aquela expressa na figura D35.

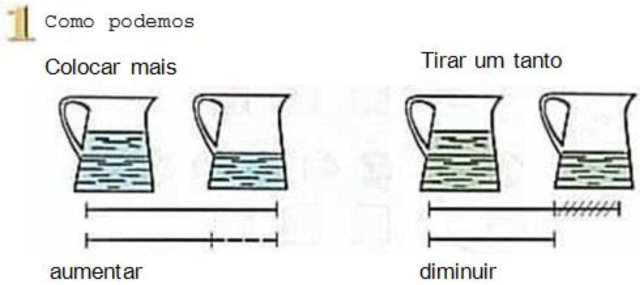


Figura D35 – Tarefa indicativa do movimento de aumento ou diminuição de quantidade
Fonte: Davidov (2012, p. 22)

A tarefa da figura D36, com referência à grandeza massa, requer prévia explicação do professor de que o desenho da esquerda se refere à situação inicial. A seta indica que o desenho da direita é o resultado, consequência de alguma modificação e que se faz necessário identifica-la. O resultado, diferença, é representado com aumento ou diminuição de um dos segmentos.

A outra situação, o segundo par de desenhos, difere da anterior somente pelo tipo de grandeza, discreta, que faz a correlação das quantidades, um a um, (cubos e cilindros).

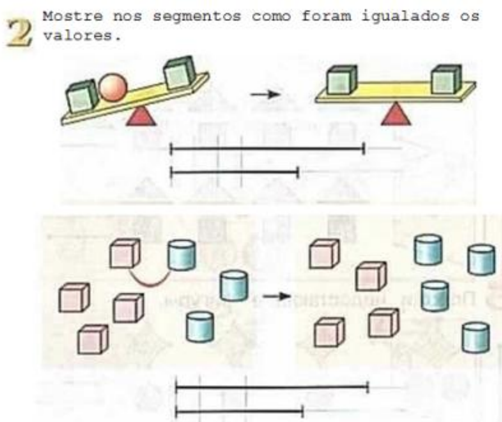


Figura D36 – Tarefa indicativa do movimento de aumento ou diminuição de massa ou quantidade discreta
Fonte: Davidov (2012, p. 22)

As duas tarefas da figura D37 diferem das anteriores, pois as diferenças se apresentam relacionadas a três situações a serem observadas concomitantemente. Na primeira tarefa (3), os volumes expressos apresentam a possibilidade de ser iguais em todos os recipientes. Por isso, a atenção dos estudantes se volta para o par de segmentos de cada uma das três variantes. A tarefa requer deles a explicação de quando há aumento e diminuição.

A segunda tarefa (4) da figura D37, também visa à representação de igualdade das quantidades em conformidade com o procedimento com base no desenho. Orientados pela representação dos segmentos e pela indicação da curva da relação um a um. As crianças concluem que é preciso diminuir a quantidade maior e riscam os círculos excedentes.

Na sequência, analisam uma situação que simula procedimentos adotados por três crianças (Nicolas, Pedro e Tânia). A intenção é que os estudantes indiquem que Nícolas, corretamente, representou por segmentos a situação, como também riscou a quantidade necessária de círculos. Pedro adotou o procedimento de diminuição acertadamente, mas cometeu o equívoco de riscar círculos a mais. E Tânia teve que aumentar a quantidade de quadrados.

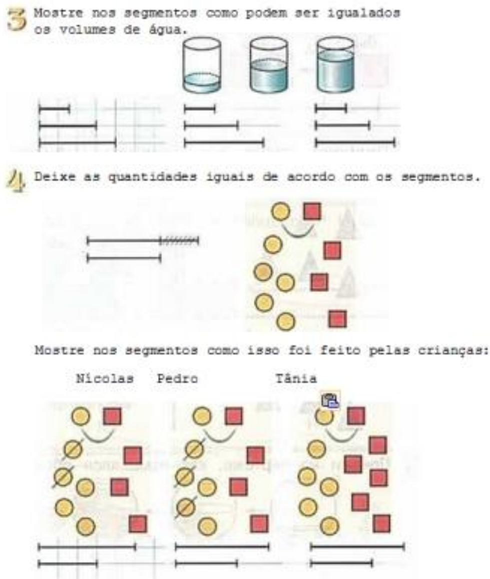


Figura D37 – Tarefa indicativa do movimento de aumento ou diminuição de volume ou quantidade discreta
Fonte: Davidov (2012, p. 23)

De acordo com Gorbv, S.F.; Mikulina, G.G.; Savieliev, O.V. (2008), o importante nessa etapa é que as crianças: identifiquem os procedimentos de aumento e diminuição; percebam as circunstâncias que implicam em necessidade de igualar; procedam a contagem da diferença.

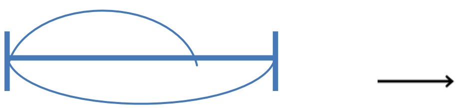
Portanto, inicia-se os estudantes no processo de entendimento de que é possível aumentar ou diminuir uma determinada grandeza para que se torne igual a outra. Isso imprime, em sua representação gráfica, um movimento de sentido contrário, pois o acréscimo em um segmento com vistas à igualdade, implica na diminuição de mesmo comprimento do outro. Além disso, prenuncia de que esse sentido oposto do movimento, ao ser introduzido na reta numérica, é o indicativo do maior ou menor número. Também, é base de unidade de contrários, constituída pelas operações de adição e subtração.

3.2.5 A comparação das grandezas em movimento: o momento da representação literal

Essa subseção adentra na análise de tarefas que não perdem de vista a ideia central de Davydov sobre o conceito de número, a grandeza, porém avança no processo ao adotar a ‘representação literal’. Esta, além do uso de letras, adota apenas um segmento de reta e arcos sobre ele que expressam o movimento das alterações de determinada situação em relação a outra, isto é, expressão de desigualdades e igualdades. As tarefas cada vez mais trazem um teor abstrato e, por isso, instigam as crianças a pensarem procedimentos que não são dados explicitamente.

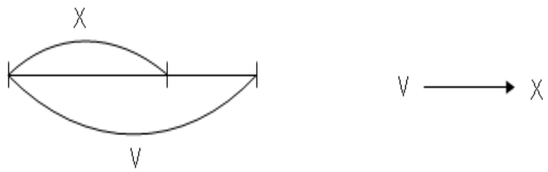
A tarefa introdutória, conforme Gorbv, S.F.; Mikulina, G.G.; Savieliev, O.V. (2008), demanda que o professor tenha sobre sua mesa um pacote de cereal, cuja massa é representada por um segmento no quadro. Ele corta uma parte do segmento com um traço vertical, mas sem risca-lo em toda sua extensão. Também, questiona as crianças se seu procedimento expressa o que é necessário fazer com o cereal. Algumas crianças deslocam-se até a mesa e tiram do pacote uma porção de cereal. Em seguida, solicita-lhes que identifiquem a parte do segmento representativa do restante do cereal. O professor indica dois estudantes para que se dirijam ao quadro. Por meio de gesto com as duas mãos, um deles tem a incumbência de mostrar, no desenho, a massa inicial e o outro a situação final depois da diminuição. É nesse momento que o professor sugere a substituição dos gestos manuais por uma linha em forma de arco sobre o segmento. O professor faz a representação sobre o segmento maior, representativo da massa inicial e um dos alunos para o menor, quantidade retirada.

Para a inclusão da letra nessa nova forma de representação, segmento e arcos, a tarefa introdutória tem como referência um recipiente com água sobre a mesa. Além disso, há um desenho (figura a seguir) no quadro que o professor diz representar a alteração do volume de água por alunos de outra sala.



Fonte: Adaptação de Rosa (2012)

O convite é para que as crianças identifiquem o referido procedimento. Das discussões, decorre a conclusão, a partir do desenho, de que há dois volumes, mas nada se pode dizer se houve aumento ou diminuição. É impossível fazer afirmação sobre qual deles é o inicial ou final. O professor atende aos princípios da teoria histórico-cultural e se dispõe a ajudá-los e diz que recorrerá a sinais. Ele volta-se ao registro do quadro para marcar os respectivos volumes com sinais (letras) anexados aos arcos e, a par, interligados pela seta, conforme figura a seguir.



Fonte: Adaptação de Rosa (2012)

A disposição das letras e as intervenções do professor dão elementos de análise para que as crianças produzirem a síntese: o “v” representa o volume maior e o “x” o menor. Por sua vez, a seta é a indicadora do procedimento adotado: inicial e final, respectivamente, **v** e **x.** Isso fornece argumentos para afirmar que houve uma diminuição de volume de água. Novamente, entra em cena o papel do professor de esclarecer aquilo que qualquer tarefa não conseguiria fazer por si só, ou seja: informar que, em matemática, representam-se os valores por letras. Como forma de iniciar os estudantes na representação algébrica com foco para as relações conceituais, em vez do convencionalismo do uso de determinadas letras, o professor sugere que refaçam o registro com a adoção de outras letras.

No livro didático, são propostas treze tarefas que trazem nuances referentes a essa temática, indispensáveis à apropriação desse novo modo de representação. Como forma de explicitar que cada uma delas trazem algumas peculiaridades, descreveremos algumas delas.

A tarefa 1 da figura D38 incita os estudantes a identificarem que ocorrera o aumento de volume. Para tanto, a discussão volta-se para a relação entre os dois recipientes e à observação de que havia, inicialmente, o volume A e houve um acréscimo que proporcionou atingir o estado final R. Posteriormente, as crianças desenham em seus cadernos a representação e acrescentam as referidas letras nos respectivos arcos.

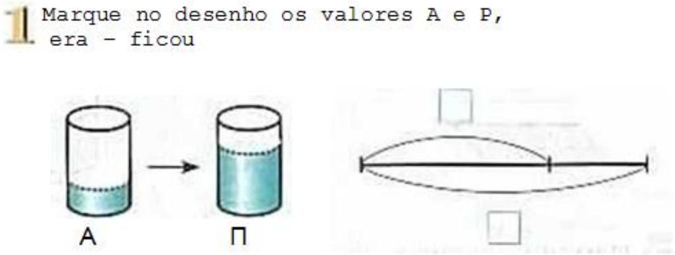


Figura D38 – Tarefa indicativa do movimento de aumento de volume e sua representação literal
Fonte: Davidov (2012, p. 25)

Se a tarefa anterior exigia a análise de situação de variação de volume para a sua representação literal, a que segue (figura D39) tem a mesma centralidade. Porém, a transformação se dá com a grandeza geométrica área.

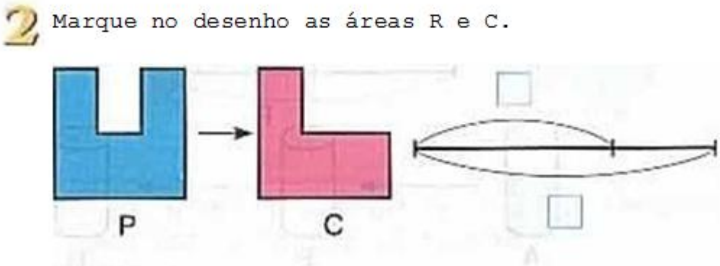


Figura D39 – Tarefa indicativa do movimento de diminuição de superfície e sua representação literal
Fonte: Davidov (2012, p. 25)

A tarefa da figura D40 tem como finalidade que os estudantes identifiquem a modificação – acréscimo ou diminuição do valor – em conformidade com a representação literal pré-estabelecida. Trata-se de quantidade relacionada à grandeza discreta. Eles observam a representação para alterar a quantidade de figuras. Assim, na situação da esquerda, a quantidade K de círculos, por ser a menor, conforme a indicação do arco deve ser aumentada, uma vez que P é considerado maior. Na situação da direita, ocorre o contrário, pois é necessário que se diminua o número A de triângulos para P. Em ambas as situações, os procedimentos são registrados no caderno, de modo tal que apareça o valor inicial, seguido da seta e a quantidade final. Também, registra a seta que tem em sua origem a letra indicativa do valor inicial e em sua extremidade a letra correspondente à quantidade final.

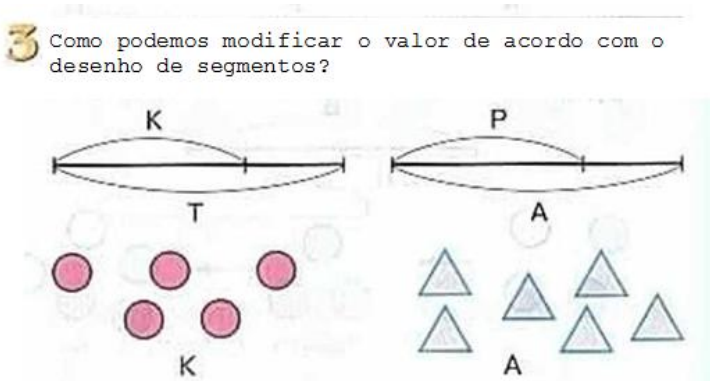


Figura D40 – Modificação do valor de acordo com a representação literal
Fonte: Davidov (2012, p. 25)

Finalidade similar às anteriores traz a tarefa da figura D41, com a diferença que exige a análise da variação de três situações consecutivas. Há, pois, duas alterações de valores que, consequentemente, demanda três letras: parte de P, que é diminuída e atinge R e com o acréscimo alcança o valor B.

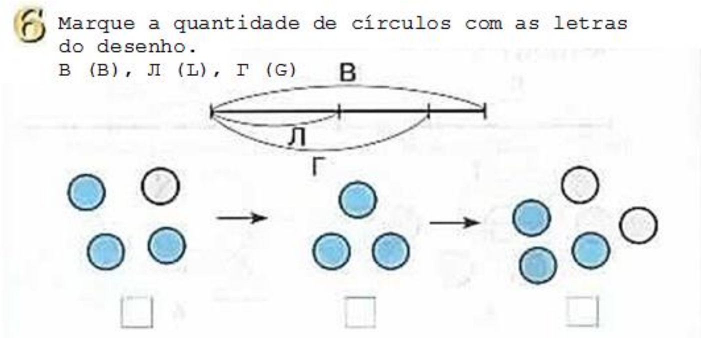


Figura D41 – Representação com três letras
Fonte: Davidov (2012, p. 26)

A tarefa da figura D42 retoma conhecimento de área que as crianças adquiriram. Elas devem reconhecer se as áreas são iguais para marcarem com a mesma letra e representa-las com segmentos de mesmo comprimento.

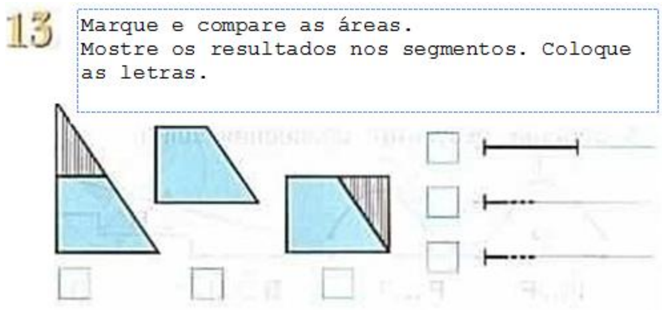


Figura D42 – Representação com três letras
Fonte: Davidov (2012, p. 29)

Gorbv, S.F.; Mikulina, G.G.; Savieliev, O.V. (2008) chamam atenção pela possibilidade de algumas crianças, ao se envolverem com a representação com arcos e letras, considerarem o arco ou a letra como representações do valor em do segmento. Por exemplo, ao solicitar-lhes que mostrem um valor P, eles mostram o arco ou a letra.

A introdução da representação literal atinge o nível algébrico, ou como dizem Panossian e Moura (2010), o registro simbólico da variável em seu aspecto mais sintetizado e formal, estágio atual da linguagem algébrica. Em termos de desenvolvimento e aprendizagem, significa que as crianças atingem o objetivo da proposta davydoviana de que, mesmo no início do Ensino Fundamental, elas desenvolvem o potencial para a assimilação da operação algébrica (DAVÍDOV; SLOBÓDCHIKOV, 1991).

Esse estágio de desenvolvimento do pensamento conceitual matemático é outro argumento que diferencia as consequências da proposta davydoviana em relação ao ensino fundamentado na perspectiva do Movimento da Matemática Moderna. Este, conforme explicitações anteriores, dá atenção basicamente para o campo dos números naturais com teor eminentemente aritmético.

3.2.6 A comparação das grandezas em movimento: a representação por meio de símbolos e a ordenação

De acordo com Davídov (1988), a criança apropria o conceito teórico pelo do princípio da igualdade ou desigualdade entre as grandezas. Como visto no desenrolar dessa seção, inicialmente, a criança necessita da interação com o objeto para estabelecer relação e abstraí-las na forma gráfica. Posteriormente, atinge a forma literal, isto é, a passagem do objeto para um símbolo que extrapola a percepção para algo basicamente mental. Para Davídov (1988), o movimento dessas abstrações mentais das relações gerais entre as grandezas promove o desenvolvimento do pensamento teórico.

Segundo Rosa (2012), expressar e revelar por meio de símbolos as relações essenciais entre as grandezas é condição essencial para a reprodução teórica do modelo geral, ou seja, a abstração que se expressa em fórmulas literais. Em outras palavras: “Quanto mais as tarefas adentram na essência das relações entre grandezas, mais abstratas são as formas de expressão de tais relações e, consequentemente, mais concretas e plenas de conteúdo teórico (ROSA, 2012, p. 132).

Para introduzir os símbolos matemáticos o professor explica que, geralmente, esses resultados de comparação são registrados por letras e símbolos. Com isso, o professor oferece bolas de massinha de modelar de cores e volumes diferentes para os estudantes fazer as comparações. Em seguida, solicita-lhes que representem as mesmas por letras. Para registrar as comparações, o professor escreve entre as letras o sinal “igual” (=), lendo-o após o registro. Por exemplo: A=T, *massa A é igual à massa T,* referindo-se a volume de massas iguais, mas, de cores diferentes (GORBOV, S.F.; MIKULINA, G.G.; SAVIELIEV, O.V., 2008). No entanto, podem emergir dúvidas entre os estudantes, pois, anteriormente, os valores iguais eram marcados por letras iguais. Nesse caso, o professor explica que as letras eram escolhidas antes de começar a comparação. E, a partir desse momento, a igualdade é demonstrada por meio de sinal, uma vez que a análise se refere à quantidade em termos de grandeza, representada pela letra.

Em seguida, o professor sugere a comparação de volumes diferentes fazendo o registro com o sinal “diferente” (≠) e procede a representação e a respectiva leitura: A≠L, *massa A é diferente da massa L* (GORBOV, S.F.; MIKULINA, G.G.; SAVIELIEV, O.V., 2008). De acordo com os referidos autores, o mais importante, neste momento, é ler cada representação, com a indicação dos valores das massas. Com isso, evita que os estudantes o entendam como igualdade ou desigualdade das letras em si.

Do mesmo modo, o professor fará a apresentação dos sinais “maior” (>) e “menor” (<). Vale-se de recipientes com água para descobrir qual deles contém mais, isto é, um volume maior ou menor. É feito outro registro para esclarecer, por exemplo: se a representação for P>A, significa que o recipiente correspondente à letra P contém mais água que o da letra A.

A partir dessas tarefas introdutórias, é proposto, aos estudantes, que realizem as tarefas do livro didático (figuras D43 e D44), em que deverão utilizar os símbolos aprendidos e comparar as grandeza de acordo com as orientações que cada uma traz.

Antes da primeira tarefa propriamente dita, há dois quadros que também orientam a execução das demais. Nele fica explicito que a atenção se volta para o uso dos símbolos =, ≠, > e <.

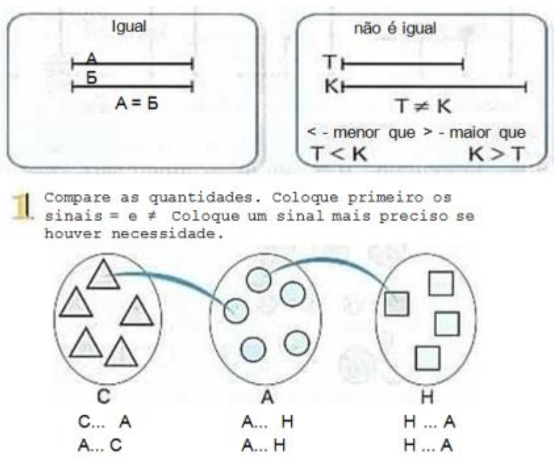


Figura D43 - Tarefa de comparação de quantidades discretas com a utilização de símbolos

Fonte: Davidov (2012, p. 30)

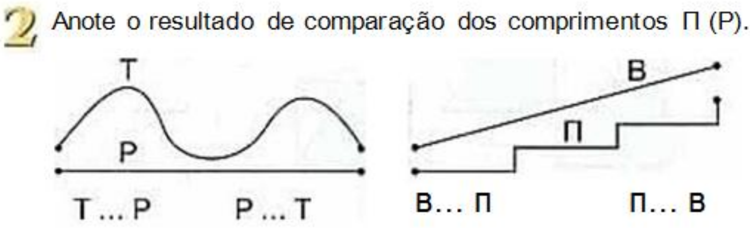


Figura D44- Utilização de símbolos na comparação de comprimento
Fonte: Davidov (2012, p. 30)

Essas duas tarefas exemplificam o processo de apropriação do registro de resultados relacionados à comparação de grandezas, que permitem o estudo das propriedades entre relações de igualdade e desigualdade. Embora elas tragam respectivamente, as relações entre quantidade discreta e a grandeza comprimento, as demais também se referem às formas espaciais e planas.

As tarefas seguintes trazem, além da necessidade dos símbolos, um novo componente relacionado a comparações de valores: ordem crescente e decrescente. Os estudantes devem identificar o que difere em cada série ordenada de valores (área, comprimento e volume) em relação à outra e utilização dos sinais maior (>) ou menor (<), conforme a orientação de cada tarefa.

O processo de análise se inicia com a apresentação, pelo professor, de quatro recipientes com diferentes volumes. Por sua vez, as crianças têm quatro tiras de vários tamanhos que se distinguem pelo comprimento e, também, pela cor que pode auxiliar na mudança de opinião. As crianças irão fazer com as tiras os mesmos procedimentos que o professor fará com os recipientes. Os recipientes são colocados em ordem decrescente em relação ao volume, pelo professor que interroga os estudantes sobre o que foi feito e a característica adotada. Eles dizem que foram dispostos em ordem de volume. Em seguida, passa representar aquela situação com as tiras e nelas escrevem as letras. O professor diz que as marcas (letras) representam os volumes dos recipientes que, por sua vez, foram substituídos pelas tiras substituem os recipientes. A série ordenada é: A, R, H, K. Em seguida, são lançadas várias questões como: Qual o maior e o menor volume? Qual é o volume que é menor que o K? (Não há). Maior que o A? (Não há). Qual é o volume que é maior que o R? (É o A) Menor que o R? (H e K). Qual foi o volume que eu pensei se ele é maior que o K, mas é menor que o

R? Maior que o K, mas é menor que o A? (GORBOV, S.F.; MIKULINA, G.G.; SAVIELIEV, O.V., 2008)

As tarefas subsequentes (D45, D46 e D47) exemplificam aquelas apresentadas pelo livro didático para serem desenvolvidas pelas crianças. D45 propõe a construção de várias superfícies retangulares, em ordem decrescente, conforme as desigualdades propostas simbolicamente e por letras. D46 sugere que os estudantes deem continuidade à ordenação e completem com o sinal correspondente. O propósito de ordenação também está presente em D47. Tendo por base o desenho, é necessária identificar se eles estão em ordem como requer a representação correspondente.

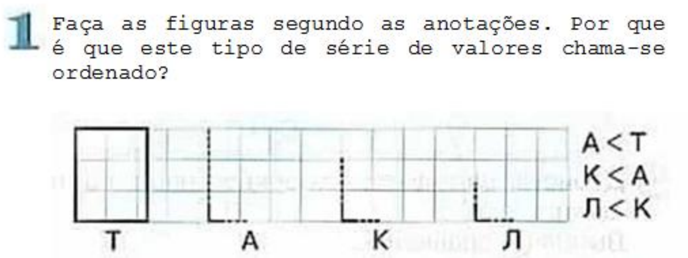


Figura D45 - Construção de figuras conforme a orientação prévia pela relação simbólica de desigualdade
Fonte: Davidov (2012, p. 33)

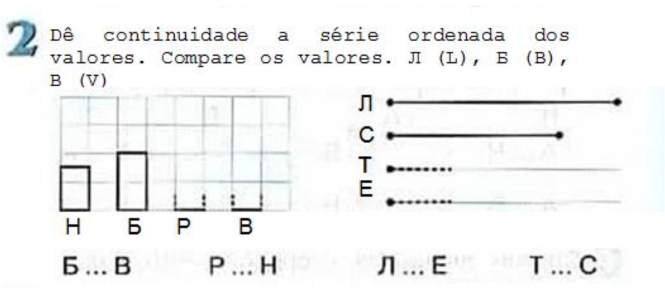


Figura D46 - Tarefa de comparação de valores ordenados relacionado à grandeza área
Fonte: Davidov (2012, p. 33)

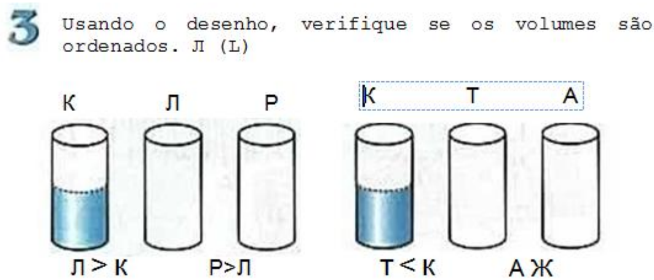


Figura D47 - Tarefa de comparação de valores ordenados relacionado à grandeza volume
Fonte: Davidov (2012, p. 33)

As proposições davydovianas pressupõem uma resolução teórica das tarefas, por permitir aos estudantes a compreensão essencial da ordenação crescente e decrescente em todos os tipos de medidas (volume, área e comprimento). Em suas orientações, Gorbv, S.F.; Mikulina, G.G.; Savieliev, O.V. (2008) estabelecem quatro critérios de assimilação das ideias centrais dessas tarefas, por parte dos estudantes. São eles: 1) representação, no desenho, de uma modificação do valor, bem como a identificação dos valores (inicial e final), marcando-os com as letras diferentes; 2) realização de manipulações com os valores representados pelos objetos, de acordo com desenho, como também os registros com as letras e símbolos; 3) registro dos resultados da comparação, na forma de sentenças matemáticas; 4) escolha dos valores correspondentes à fórmula dada.

Vale lembrar que nas proposições formalistas essas relações ficam apenas na observação, imagem sensorial, de quantidades discretas, sem promover nenhum tipo de diálogo mediador.

3.2.7 A comparação das grandezas em movimento: a necessidade de uma unidade de medida

Em determinadas situações, a comparação direta se torna insuficiente. Nesse contexto é que surge a necessidade de buscar outra grandeza/medida, isto é, uma unidade condicional. Esta possibilitará a repetição de um dado valor em um determinado número de vezes. Com isso, introduz-se a ideia de número, entendida por Davýdov (1982), como resultado de uma relação multiplicativa, isto é, quantas vezes uma unidade de medida está contida numa determinada grandeza.

Para esse fim, as proposições trazem tarefas com diferentes situações que colocam os estudantes em ação investigativa para sentir a necessidade, determinar e usar uma unidade de medida. Nesse sentido, analisaremos apenas desse tipo de situação que requer a referida necessidade: grandezas geométricas e parlendas.

a) Por grandezas geométricas

Para introduzir um novo modo de comparação e reprodução das medidas. Concomitantemente, adentra-se no processo de contagem das quantidades com o uso marcas, isto é, a forma mais antiga da história humana. A adoção de marcas tem uma finalidade de atrair a atenção dos estudantes de que o essencial é o processo de medição e reprodução do valor em vez do que o seu resultado. Além disso, é introduzido um esquema representativo tanto do resultado quanto de seus componentes.

Apresentamos, a seguir, algumas das várias tarefas que evidenciam a dinamicidade do processo de apropriação do novo modo de compara, medir.

A tarefa D48 exige a reprodução de um valor dado, a área (figura B e Π), porém não determina a necessidade de comparação. A falta de um critério leva o grupo a concluir que é preciso tomar algo para medir. As crianças recorrem aos envelopes (com recortes da figura A, C T e P) que lhes foram disponibilizados e não identificam uma figura igual a do livro a ser medida. Novamente, entra o papel simulador do professor. Ele diz que as crianças de outra sala conseguiram usar o mesmo material e faz menção aos os pequenos retângulos (A, C, T e P) do livro. As crianças tomam a referidas peças do envelope e, depois de várias tentativas e discussões, montam uma das figuras, que se constitui de três partes. A figura construída é contornada no caderno.

O desenvolvimento da tarefa necessita de uma nova intervenção do professor. Explica que as crianças da pré-escola não conseguiram montar a figura e, por isso, precisam de ajuda. Propõe o envio de uma “carta”, com a indicação do procedimento adotado. Porém, a condição é de que se faça a leitura da “carta” seguinte maneira: o valor B foi obtido com ajuda de valores (GORBOV, S.F.; MIKULINA, G.G.; SAVIELIEV, O.V., 2008). Na oportunidade é afirmado que se trata de um novo modo medir.

Para a reprodução da área Π adota-se procedimento similar ao anterior. Porém, só é possível reconstruir a figura com as áreas (medidores) C ou P, o que requer usá-las repetidas vezes. Depois de reproduzi-la no caderno, discute-se o elemento novo, qual seja: o uso de um só medidor, mas repetido várias vezes. O professor diz que esse tipo de medidor recebe nome de ‘medida’.

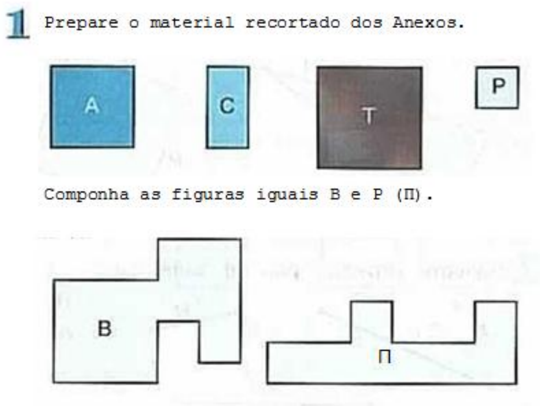


Figura D48 - Tarefa introdutória da unidade de medida
Fonte: Davidov (2012, p. 36)

Na tarefa seguinte, figura D49, os estudantes deverão reproduzir uma figura que tenha a área dada (H), mas de outra forma. Os alunos recorrem às figuras geométricas recortadas e, por tentativas, descobrem uma tira com a área C será utilizada como medida. A escolha dessa medida também é registrada na “carta”, a ser enviada às crianças da pré-escola, da seguinte forma: H⟵C. O desafio é buscar outro modo de registrar a tarefa. O professor mostra que as marcas indicam quantas vezes é preciso usar a medida C (esquema da figura D49). Porém, elas podem ser de tipos variados: riscos, círculos, xis, etc. Posteriormente, faz-se a análise relativa à localização: da quantidade de marcas necessária sobre a seta, do valor (letra H) e da medida (C).

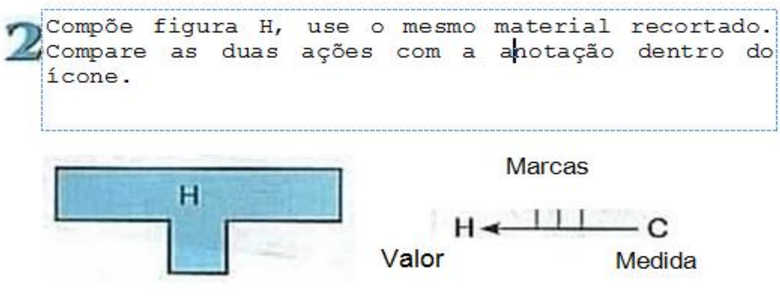


Figura D49- Representação do processo de medição com a unidade de medida
Fonte: Davidov (2012, p. 36)

Além dessas duas tarefas, o livro didático apresenta mais nove situações que requer o trânsito dos estudantes pela trama de que envolve a adoção da unidade de medida e a construção do registro (esquema). Gorbv, S.F.; Mikulina, G.G.; Savieliev, O.V. (2008) que algumas delas sejam desenvolvidas em pares de estudantes, em que um deles dedica-se ao objeto e o outro com o registro. No entanto, ambos leem as marcas: uma vez, mais uma vez... A tarefa é repetida, mas com a mudança de papéis. Todas as situações devem ser reproduzidas no caderno de cada estudante.

b) Por parlendas ou outro tipo de texto

As proposições davydovianas extrapolam a medida (comparação) das grandezas com significações eminentemente matemáticas (volume, capacidade, comprimento) e recorrem a algo da linguagem materna, para conceituar o número, por exemplo, as parlendas. Estas ou outro tipo de texto (cantigas) anunciam a leitura e a escrita numérica e interligam com a unidade geométrica.

Conforme Gorbv, S.F.; Mikulina, G.G.; Savieliev, O.V. (2008), elas trazem uma nova característica para registro das medidas marcadas durante a medição: o cálculo, contagem. Por extensão, solidifica dupla ideia: de série ordenada de números e que, cada um deles, tem seu lugar próprio. Prenuncia, então, o aspecto ordinal do número.

Diferentemente das proposições modernistas que a contagem sequencial é uma preocupação inicial, o ensino davydoviano demonstra a preocupação para que ela represente um procedimento consciente. É nesse contexto de não apresentar a contagem como uma ação mecânica, que as parlendas entram como referência para iniciar os estudantes num sistema de numerais não padronizados.

A tarefa da figura D50 é antecedida por outra apresentada pelo professor, com ampla discussão, que proporciona todo o embasamento da finalidade da parlenda, como elemento de medição. Para a execução da referida, o professor sugere que se utilize uma sequência de palavras, de uma parlenda conhecida, para que os estudantes as utilizem para fazer o registro das marcas, relacionando cada unidade de medida com uma das palavras.

Essa tarefa permite que o estudante sinta a necessidade de padronizar a sequência de palavras para a contagem das unidades de medida de uma determinada grandeza.

Nota-se que Davydov e seus colaboradores organizam essas tarefas de uma maneira que as palavras não se repetem, ou seja, cada unidade de medida possui uma palavra correspondente. Eles também contemplam as diferentes medidas: comprimento, capacidade e área, conforme mostra a figura abaixo.

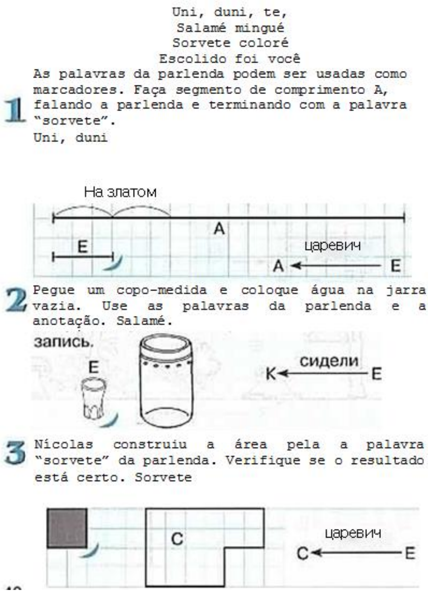


Figura D50 – A unidade de medida como palavras de uma parlenda.
Fonte: Davidov (2012, p. 40)

A atenção, no desenvolvimento desse tipo de tarefa, é para que as crianças percebam a dificuldade de, concomitantemente, realizar sozinha a medição e colocar as marcas no registro. Nesse caso, as palavras servem de parâmetros para promover a introdução dos numerais.

As parlendas, cantigas ou outras formas de texto, também são adotadas num contextos de problematização. Por exemplo, quando há palavras repetidas dá condições perceber sua limitação, pois implica em resultados diferentes. Nessas circunstâncias, o professor ajuda as crianças estabelecer critérios para o uso da parlenda e determine um único resultado da medição. Situação similar acontece quando é percebido de que não basta saber somente uma palavra, mas a parlenda toda. Por isso que todos devem usar a mesma parlenda. Nesse caso, a ordem das palavras é uma condição necessária. As tarefas da figura D51 promovem a discussão entre os estudantes sobre essa limitações e possibilidades.

Figura D51 – Parlenda com palavra repetida
Fonte: Davidov (2012, p. 40)

Como dito, anteriormente, as parlendas criam o espaço propício para apresentação, pela primeira vez, dos numerais às crianças. Para tanto, interligam-se a medida, o numeral em si, escrita e leitura em outros idiomas. As tarefas da figura D52 (9, 10, 11) expressam a concepção davydoviana do momento e o contexto investigativo em que os estudantes entram em contato com o numeral. Na tarefa 9, as crianças se defrontam com 'jeito de contar' (até o quatro) de vários povos e propõe que elas continuem. Também, anuncia que no lugar das palavras-marcadoras pode ser usados sinais-marcadores. Eles se chamam numerais. Em 10, são dados numerais eslavos que são lidos com ajuda de uma "parlenda russa" e, posteriormente, registrar no esquema, até o número 3, com a pronúncia em voz alta. Em 11, é que algarismos arábicos são apresentados e lidos em voz alta à medida que procedem à medição. Por fim, anotam o resultado.

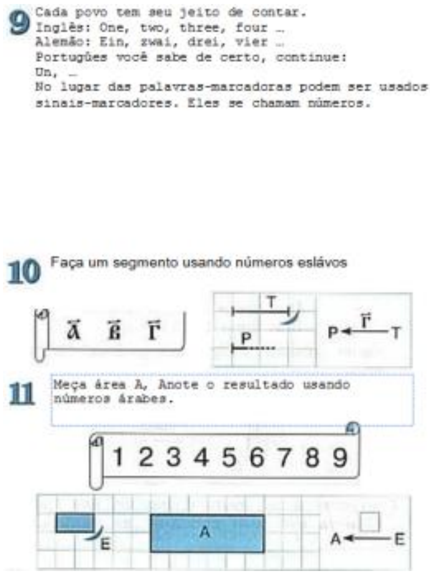


Figura D52 – A apresentação dos numerais
Fonte: Davidov (2012, p. 44)

Observa-se, então que o símbolo numérico só se apresenta aos estudantes depois de uma longa inserção em tarefas que os levaram a se apropriar da gênese do conceito científico de número, medida de grandeza. E, nesse momento, surge, conforme Davýdov (1982), em uma singularidade: o número natural. É no desenvolvimento das tarefas com parlendas que a necessidade de contagem é gerada mais enfaticamente, como condição para a existência de uma sequência padronizada de unidades de medida.

Por consequência, é possível apontar a diferença. Em relação ao proposto por Júnior (sd) referente ao ensino com pressupostos do Movimento da Matemática Moderna, em que o símbolo numérico aparece nas primeiras aulas.

3.2.8 A necessidade de uma medida intermediária: condição para o modelo universal do número.

As tarefas referências dessa subseção têm como característica marcante a possibilidade da elaboração da síntese representativa do conceito de número em sua relação geral e universal, respectivamente, a grandeza e a/b = c (DAVÝDOV, 1982). Isso significa que elas centram a atenção dos estudantes no processo de medição. Nesse sentido, o foco é: para o número com relação de medida e representação numérica (1).

O sistema de tarefas proposto por Davidov (2012), a sequência numérica padronizada é introduzida, gradativamente, por meio de sequências de palavras de parlendas, poemas, entre outros, como vimos as seção anterior. Esse processo de formação de medidas das grandezas, que se formam com as unidades de medidas irá permitir que a criança não tenha o objeto como referência da grandeza, mas realmente a unidade de medida.

Nas palavras de Rosa (2012, p. 153), “o professor precisa assegurar que as crianças tenham o domínio do procedimento geral, da ação objetal de medição”, porque em Davydov o número representa uma medida de uma determinada grandeza.

a) O número como relação de medida

As tarefas D53, D54 e D55 levam à formulação do modelo universal do número, em que as grandezas são representadas por letras. A relação multiplicativa que o caracteriza é consequência da introdução de uma unidade intermediária, que agrupa unidades básicas. Para apresentar o número como relação de uma medida, é necessária a substituição dos objetos, em comparação, por letras.

Na tarefa a seguir, figura D53, as crianças – que já desenvolveram com o professor a tarefa introdutória do livro de orientação – terão que medir um volume K de água para colocá-la no recipiente com tal indicação literal. O desenho B à esquerda (canecas) e o registro superior à direita dão elementos para as crianças identificarem que: a medida é composta de dois copinhos e deve ser colocada em contagem até três. Gorbv, S.F.; Mikulina, G.G.; Savieliev, O.V. (2008) orienta para que uma criança se responsabilize com a medida da água. As demais farão os registros dos procedimentos no desenho, com segmentos de unidades B, conforme estabelecido pelo desenho inferior à direita. Quando a primeira medição é feita, o professor não interfere para que faça o registra uma vez que já está pronto. Porém, na medida seguinte, solicita-lhe para que marque no desenho. Pode ocorrer que as crianças cometam equívocos que serão contestados para que permaneçam com mesma medida e obtenham o resultado que é marcado no desenho com arco.

1 Meça volume K usando medida composta B. Represente seu trabalho por meio dos segmentos.

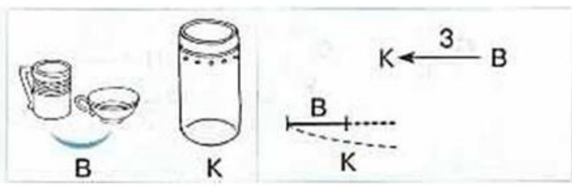


Figura D53 – Introdução da medição com unidade intermediária
Fonte: Davidov (2012, p. 45)

A tarefa da figura D 54 tem a mesma finalidade e, visualmente, se diferencia da anterior por se tratar de grandezas discretas, além de não indicar numericamente, no desenho, o valor numérico do resultado. A condição é que as crianças meçam quantidade, mostrem minuciosamente no desenho (forma grupos de duas bolas) e registrar no esquema.

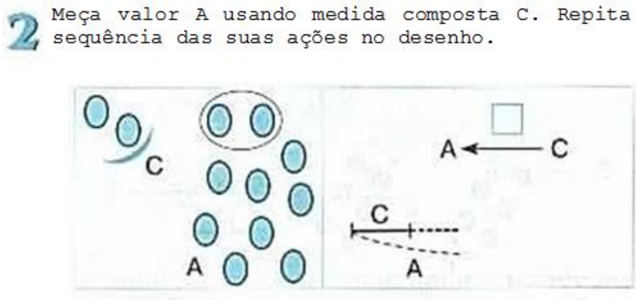


Figura D54 – Medição com unidade intermediária
Fonte: Davidov (2012, p. 45)

A figura D55 traz a tarefa que apresenta com aspecto diferenciador, em relação a D51 e D52, a ausência da grandeza a ser medida. Também, não apresenta o registro numérico no esquema. No entanto, traz o registro completo que subsidia os estudantes a concluírem, pois lhes compete desenhar três quadrados, quatro vezes, registra-se 4 no esquema.

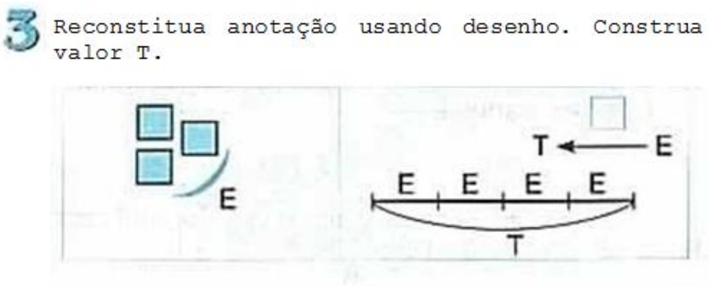


Figura D55 - Medição com unidade intermediária com a ausência da grandeza a ser medida
Fonte: Davidov (2012, p. 45)

b) O número 1, como unidade de medida, e as demais quantidades

Tanto em Gorbv, S.F.; Mikulina, G.G.; Savieliev, O.V. (2008) como em Davidov (2012) trazem, na sequência como título, "NÚMERO 1". O objetivo é fazer com que os estudantes se apropriem do aspecto quantitativo do referido número. Ou seja, extrapolar a compreensão de sê-lo apenas o primeiro passo no processo de colocação consecutiva das medidas, mas como uma parte qualquer do valor, que é igual à unidade de medida.

Assim, a tarefa da figura de D56 propõe que as crianças meçam, em cada situação, o valor H com a medida indicada à esquerda de cada uma delas. Também, façam os respectivos desenhos e esquema com a indicação do valor H. Na última situação, é necessária a comparação entre a medida T e o valor H (T = H).

Posteriormente, o professor solicita-lhes que mostrem, em cada situação, o número 1, a começar pela última. Esta tem a peculiaridade de fazer com as crianças perceber que precisam mostrar o valor inteiro com a própria unidade.

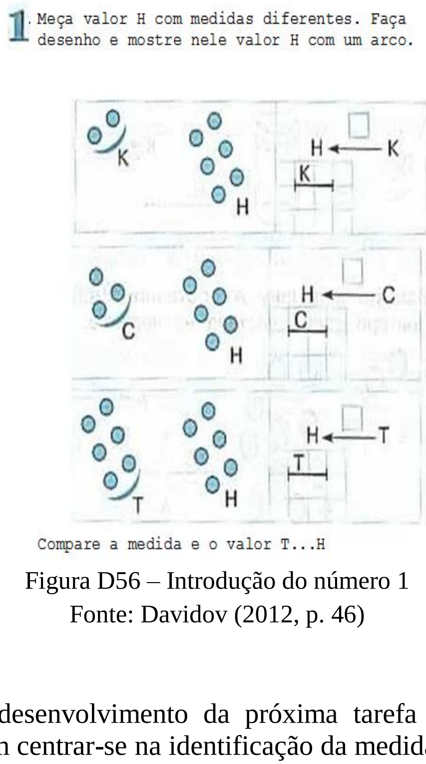


Figura D56 – Introdução do número 1
Fonte: Davidov (2012, p. 46)

Para o desenvolvimento da próxima tarefa (figura D57), as crianças precisam centrar-se na identificação da medida para concluírem a medição e a anotação. O entendimento a ser elaborado é de que, cada uma das partes (valor, unidade de medida, agrupamento) da grandeza a ser determinado, pode ser número 1. Isso significa que o início da contagem pode ser por qualquer uma dessas partes.

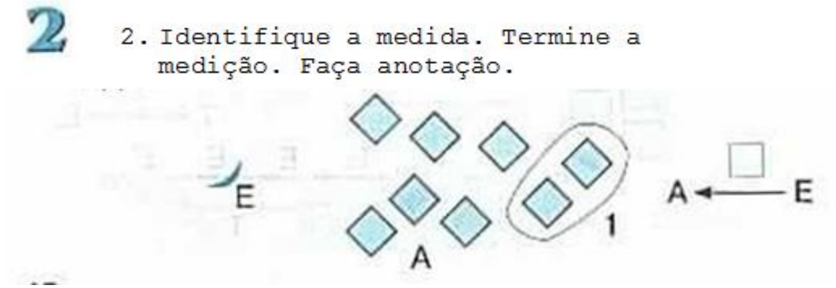


Figura D57 – O número 1 como sendo necessariamente unidade de medida
Fonte: Davidov (2012, p. 46)

A figura D58 traz uma tarefa que requer duas operações fundamentais das crianças para a sua execução: identificação das áreas que são possíveis medir com a unidade E em termos inteiros e estabelecer a comparação entre a medida e o valor. Convém, de acordo com Gorbv, S.F.; Mikulina, G.G.; Savieliev, O.V. (2008), lembrá-las mais uma vez que a medida não é o objeto em si, mas o seu valor.

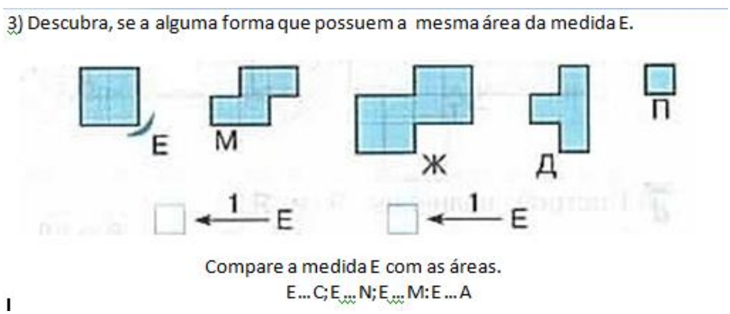


Figura D58 – O número 1 como unidade de medida inteira
Fonte: Davidov (2012, p. 47)

Subjacente às tarefas D59 e D60 está a busca pela resposta da pergunta: Quantas medidas são? Ou, “quantas medidas E cabem dentro do valor A? Sendo assim, procura enfatizar o aspecto quantitativo do número: o **resultado** da medição, a contagem. Traz, portanto, um novo sentido e um novo modo de registro que requer: o sinal de igualdade entre as duas letras, respectivamente, da grandeza e da unidade, esta última acompanhada do seu valor. Por exemplo, A = 5E. Em tarefas posteriores pode transformar-se em A=5cm, em que é apresentada a o uso da régua.

A tarefa D59, enunciada pelas perguntas, "Quantas medidas K contem o valor T?" e "Quantas medidas K contem valor C?", requer a atenção dos estudantes para o registro a ser completado, respectivamente, por T=7K e C=3K.

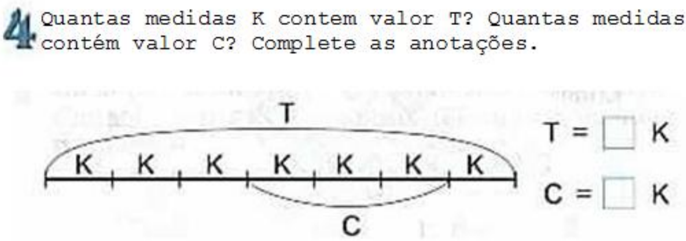


Figura D59 – O número 1 como unidade de medida inteira
Fonte: Davidov (2012, p. 48)

Em D60, a tarefa requer que o estudante para satisfazer a condição estabelecida na igualdade E = 6K. E dessas, pintar duas medidas, isto é, para estabelecer a relação representada no registro C = 2K.

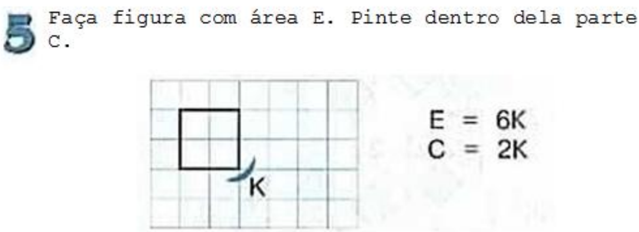


Figura D60 – O número 1 como unidade de medida inteira
Fonte: Davidov (2012, p. 48)

Conforme Gorbv, S.F.; Mikulina, G.G.; Savieliev, O.V. (2008), nesse estágio, as tarefas requerem alguns critérios: execução correta da medição do valor, pelo esquema, bem como do valor com ajuda da medida; descrição do processo por meio do esquema de setas; seleção de uma parte do valor, correspondente ao número; proceder a contagem de numerais até 10, saber os algarismos, exceto 0.

São com essas tarefas que se chega à fórmula que estabelece a relação de multiplicidade entre grandezas: $\boldsymbol{a = nc}$. Desse modo, **a** é a grandeza que se quer medir **c** a unidade pré-determinada e ***n*** o número de vez que **c** cabe em **a**.

Chega-se, assim, à modelação prevista na segunda ação de estudo proposta por Davydov. Consequentemente, atinge-se o modelo abstrato do conceito teórico de número que possibilita, no decorre dos anos escolares, as crianças se apropriarem das diversas singularidades numéricas (Davýdov, 1982).

c) A reta numérica

A reta numérica é introduzida sem o zero. Em seu lugar, está uma bandeira, o que induz à ideia de uma referência e, por extensão, de possibilidade para existência de números que também possam situá-los antes[8] dela e não só depois como, até então, tem ocorrido. A substituição da bandeira pelo zero só ocorrerá no âmbito do estudo da adição e subtração.

Vale repetir que, para atingir essa nova significação, a reta numérica foi sendo elaborada desde a página 7 (sete) do livro didático do primeiro ano, numa tarefa enunciada como "Linha reta, linha curva, ponto e segmento" (figura D12). A criança tem a função de circular de verde as linhas curvas da direita, as linhas retas de amarelo e o ponto de intersecção de vermelho.

Segundo Davidov (2012), a construção da reta numérica, propriamente dita também tem como base a representação do resultado de uma medição e requer a observação de algumas condições: escolha do ponto inicial, da direção e da unidade. A reta torna-se o meio de expressar duas significações do número: inicialmente, como ponto, aspecto ordinal do número; depois, como um segmento da reta, aspecto qualitativo.

Sua construção se dá com base em um esquema (segmentos) que as crianças produziram em uma situação de medição, em que se estabeleceu uma unidade de medida arbitrária: o passo. Embora a referência seja os segmentos, a reta será apresentada com a explicitação de sua diferença: o ponto inicial (origem) e a direção.

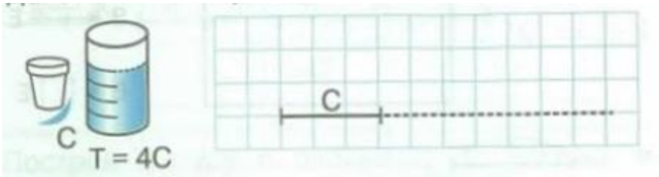
---

[8] Conforme Gorbv, S.F.; Mikulina, G.G.; Savieliev, O.V. (2008), somente no quinto ano ocorrerá o estudo dos números negativos, que se situam antes da bandeira ou do zero.

A tarefa introdutória (DAVIDOV, 2012) consta de: sobre a mesa do professor, um recipiente com água (grandeza a ser medida) e um recipiente (unidade de medida); no quadro, o registro: A=5C. Essa igualdade passa a ser mediadora das discussões. O professor diz, aos estudantes, que A representa o volume de água a colocar no recipiente. Porém, apresenta a suposição que Vitor colocara um pouco e se faz necessário enchê-lo. A questão que se apresenta, entre as crianças é: Quantas medidas de água foram despejadas no recipiente? A resposta simuladora do professor e em tom de lamentação é de que não viu o procedimento de Vitor. Ainda acrescenta: quando se mede a água, não se vê as medidas, como acontece com a área e o comprimento. Decide-se por medir a água do recipiente, o que causa uma nova necessidade: tornar “visíveis” as medidas dentro do recipiente. Dada disponibilidade material, as alternativas são: marcá-las, no vidro, com a caneta ou elástico. A medição é registrada no quadro pelo professor. Porém, propositalmente, representa o segundo passo (arco) de tamanho diferente em relação ao primeiro, para que as crianças percebam e corrijam o equívoco. Finalmente, identificam que há apenas 3 medidas, em vez de 5, como a indicara a igualdade do apresentada no quadro (GORBOV, S.F.; MIKULINA, G.G.; SAVIELIEV, O.V., 2008).

As tarefas do livro didático fazem os estudantes transitarem pelas relações representações até então desenvolvidas e são trazidas para serem inseridas na reta. A primeira tarefa (D61) é similar à introdutória e ainda tem função orientativa. As crianças analisam a figura do livro, incialmente para os recipientes e a relação de igualdade expressa por T = 4C, bem como a representação da unidade C numa reta em processo de construção. Trata-se de uma situação fictícia de um personagem, Nícolas, que colocou água no recipiente maior com a medida C, como também, fez marcação no vidro. As crianças devem as ações do personagem no segmento. Na sequência, precisam avaliar os procedimentos de outros personagens (Tânia e Pedro) (GORBOV, S.F.; MIKULINA, G.G.; SAVIELIEV, O.V., 2008).

Nícolas estava colocando água com a medida C e fazia marcação no vidro.
Repita suas ações no segmento.



Observe o trabalho de outras crianças:

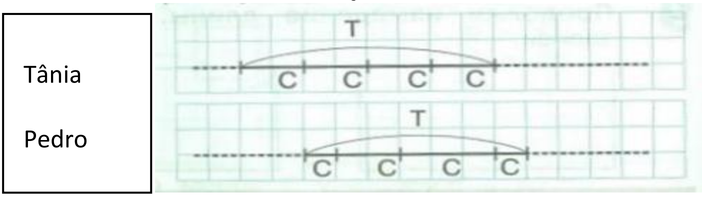


Figura D61 – Introdução da reta numérica
Fonte: Davidov (2012, p. 50)

Em D62, Nícolas se apresenta com outra situação de medir o colocar água em recipiente A com uma unidade de medida P. As crianças, além de completar a representação literal (algébrica) precisam reproduzir na reta, a partir da bandeirinha, cuja unidade é expressa no segmento com arco. Além disso, precisam destacar o valor A com um arco.

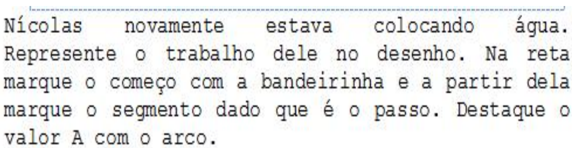

Nícolas novamente estava colocando água. Represente o trabalho dele no desenho. Na reta marque o começo com a bandeirinha e a partir dela marque o segmento dado que é o passo. Destaque o valor A com o arco.

Figura D62 – Representação na reta numérica a partir de uma unidade pré-estabelecida
Fonte: Davidov (2012, p. 50)

A figura D63 traz a tarefa própria para apresentação da nomenclatura “reta numérica”. O professor conta que Olga e o Paulo queriam saber a quantidade de água no tubo representado no desenho. As crianças concluem que A=8E. Em seguida, a análise volta-se para os desenhos das duas retas: a superior, como representação das marcas do tubo, elaborada por Olga e a inferior por Paulo. O professor esclarece que a menina fez o desenho antecipadamente e o menino fez o mesmo e acrescentou a cada unidade o numeral. Ele ainda propõe que uma criança marque o valor A, usando o desenho da Olga e o seu colega o de Paulo. Com ajuda do professor, elas percebem que é mais fácil trabalhar com o segundo desenho, pois os numerais mostram valor, sem recorrer à contagem dos passos. O professor informa: uma reta com os numerais chama-se reta numérica (GORBOV, S.F.; MIKULINA, G.G.; SAVIELIEV, O.V., 2008).

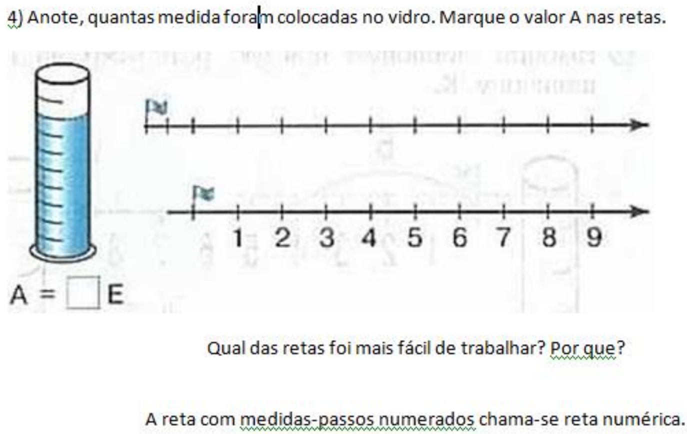


Figura D63 – Introdução da reta numérica com os numerais
Fonte: Davidov (2012, p. 51)

O livro didático propõe uma série de tarefas que direcionam para a apropriação da composição da reta numérica. Evidenciam que: a medição da grandeza é representada por certo número de unidades a partir do ponto inicial; o último numeral indica a quantidade de unidades; a manutenção da uniformidade da unidade (comprimento da unidade); o registro das unidades ocorre necessariamente numa direção, cuja escolha é livre também; entre os numerais vizinhos, só há uma unidade.

Além disso, em termos operacionais, elas levam as crianças a entenderem que cada número é composto por certa quantidade de unidades, representada na reta numérica pela quantidade de passos. Também, que é possível a identificação do significado do resultado na reta numérica, mesmo se a representação iniciar do ponto que não seja o inicial, desde que se indique o começo do arco. A tarefa da figura D64 contempla esses requisitos conceituais, bem como elaborar a seguinte síntese: valores diferentes podem ser representados, na reta numérica, pelos segmentos do mesmo comprimento, porém, não são iguais por adotarem unidade diferente de medida.

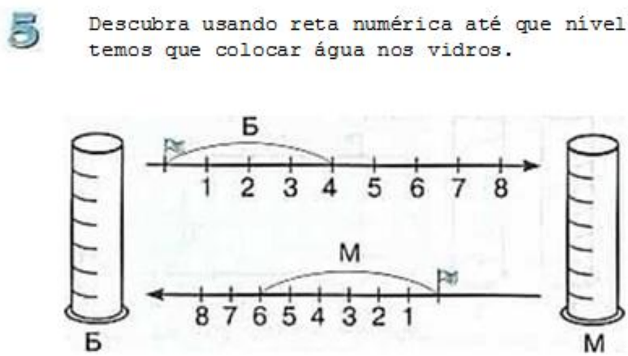


Figura D64 – Representação na reta numérica de valores desiguais em segmentos iguais
Fonte: Davidov (2012, p. 52)

Portanto, a apresentação da reta numérica se dá num contexto de discussão sobre o melhor modo de apresentação dos numerais que possibilita a identificação da propriedade numérica de uma grandeza sem ser necessária a contagem das unidades. É introduzida, posteriormente, ao desenvolvimento de experimento na forma objetal, revelador e modelador da relação universal entre as grandezas, marcadamente pelas ideias de multiplicidade e divisibilidade. No entanto, a tarefa em que surge, requisita o processo inverso, uma vez que o modelo – tido como essencial por ser a abstração geneticamente inicial – apresenta duas características: 1) se torna a base de orientação da ação objetal para também expressar o cerne do modo abstrato do conceito de número; 2) elucida as propriedades secundárias do conceito de número, não evidenciadas no próprio processo de abstração.

Desse modo, ela assume o significado de reta numérica propriamente dita, como lugar geométrico dos números, inicialmente voltada para os inteiros naturais. Além disso, prenuncia a possibilidade de, ainda no decorrer dos anos escolares iniciais, a criança, ao poucos, entender de que é marcadamente compacta por outras singularidades numéricas que compõe a totalidade dos números reais: inteiros relativos, os racionais e os irracionais.

3.2.9 A continuidade

Para mantermos o critério delimitador para a análise das duas propostas de ensino, adotamos o percurso da introdução do conceito de número até 9. Vale lembrar que essa opção se deu por consequência de iniciarmos a análise pela proposta modernista que, ao focar a ideia de número natural, estrutura o ensino sequencialmente, em conformidade com a ordem crescente. Conceitualmente, a escolha de 9 como limite é por não adentrar a necessidade de agrupamento, o que exige uma análise detalhada, própria para uma outra pesquisa.

A proposta modernista em sua trajetória de ensinar o número em ordem de 0 a 9 já insere o conceito de adição e subtração com seus algoritmos, a partir do conceito de quatro. Ressaltamos que a proposta de Davydov não segue a ordem numérica, por isso faremos uma breve apresentação dessas operações que transcendem a delimitação do em 9. A mesma intenção ocorrerá com referência ao zero.

a) As operações de adição e subtração

Reafirmamos que a adição e subtração também aparecem no contexto do sistema conceitual de número, porém seus modelos e representação não surgem em concomitância com a sequência numérica (0 a 9). Com título específico “Adição e Subtração” (DAVIDOV, 2012, p. 76), incia-se a concomitância de ideias conceituais e suas representações simbólicas e algorítmicas. No entanto, as noções essenciais se apresentam – na página 25 do livro didático – no momento da representação literal com a necessidade de aumentar ou diminuir um segmento para expressar a igualdade de uma determinada relação de comparação.

Vale destacar que a adição e subtração são tratadas simultaneamente, com base em movimento na reta numérica e trazem a ideia de equação. Portanto, não se trata de uma “conta” (algorítimos) em si que expressa a junção ou retirada de quantidades discretas como entende a proposta modernista de Júnior (sd). Davidov (2012) orienta que a primeira tarefa do livro didático (figura D65) deve ser desenvolvida com intensa participação do professor. A primeira situação propõe que os estudantes encontrem na reta o número que satisfaça a indicação do registro: □ > 5 (diferença 2)[9]. O professor propõe-lhes que localizem o 5 na reta numérica, como também, interroga-os para concluírem que número desconhecido é maior. A questão a lançar é: A partir do 5, para que lado devemos prosseguir pela reta numérica, isto é, distanciando ou se aproximando do seu início?

Os estudantes, consequências de elaborações anteriores, respondem que é necessário seguir a indicação da seta, pois, à medida que se afasta do início, o número se torna maior. Orientados pelo ‘registro’, □ > 5 (diferença 2), do enunciado (figura, D65), indicam com seta que são necessárias 2 unidades. O professor escreve no quadro a operação 5+2, demonstra o movimento na reta e faz a leitura: ‘cinco mais dois’ ou ‘adicionamos dois a cinco’. Também informa que a operação de aumento de um número pelo outro chama-se *adição*. Por sua vez, a diminuição chama-se *subtração*.

Procedimentos similares são adotados no desenvolvimento das duas situações subsequentes, com orientações, dos registros, respectivamente, □ < 7 (diferença 3), □ < 6 (diferença 2) e □ < 6 (diferença 3). Na terceira situação, a condição é que os registros serão na mesma reta. Finalmente, o próprio livro explicita que os procedimentos na reta numérica são anotados pelas seguintes operações expressas: “5+2 e 6+3 para encontro de número maior, 7-3 e 6-2 para encontro de número menor (DAVIDOV, 2012, p. 76).”

[9] Esse tipo de registro é familiar às crianças e surgirá de modo gradual em consequência de tarefas relacionadas à medida de grandezas.

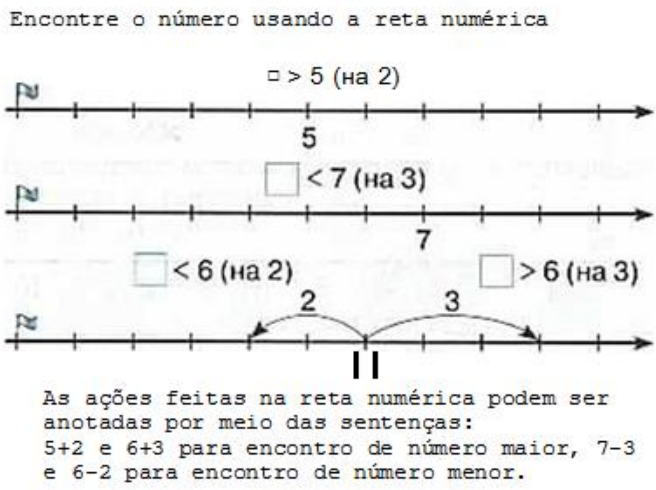


Figura D65 – Tarefa introdutória da sistematização da adição e subtração
Fonte: Davidov (2012, p. 76)

A partir dessa tarefa se desencadeiam outras[10] cada qual com alguma peculiaridade em relação a anterior. No entanto, não perdem a característica da trama de procedimentos e relações conceituais, tais como: maior ou menor, identificação do número na reta, o deslocamento na reta e a indicação por meio de arcos com setas, o registro e a leitura das sentenças, entre outras. Observa-se que a reta numérica tem grande importância no ensino da adição e subtração como meio de expressar a existência de um movimento que diferencia uma da outra pelo sentido (direita para esquerda e vice-versa).

A título de ilustração, exporemos a seguir algumas figuras de tarefas que, numa análise mais apurada, é possível identificar a trama conceitual envolvendo essas duas operações no âmbito do conceito de número.

1) A tarefa da figura D66 propõe que o aluno relacione a leitura com a correspondente sentença e, ainda, demonstre cada operação na reta numérica.

[10] Não apresentaremos maiores detalhes, que implicaria em discutir suas especificidades, o que estenderia ainda mais o estudo e, consequentemente, a dissertação.

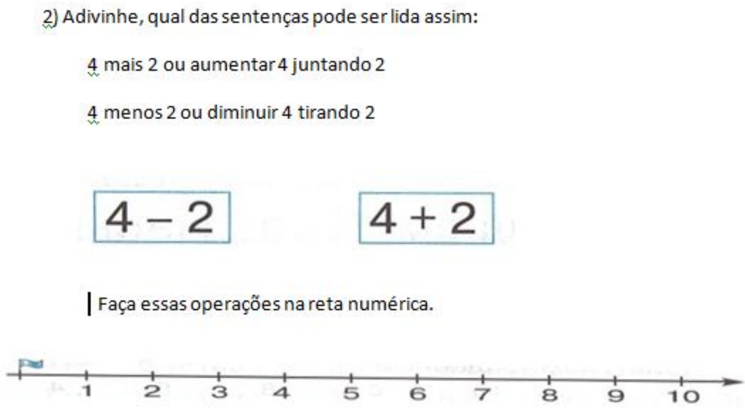


Figura D66 – A relação sentença aditiva ou subtrativa e sua leitura
Fonte: Davidov (2012, p.76)

2) Subjacentemente, a tarefa da figura D67 traz a ideia de incógnita, pois a criança precisa estabelecer um valor não explícito mediante uma condição de desigualdade para, somente depois, buscar a igualdade por via da reta numérica e, finalmente, escrever a sentença.

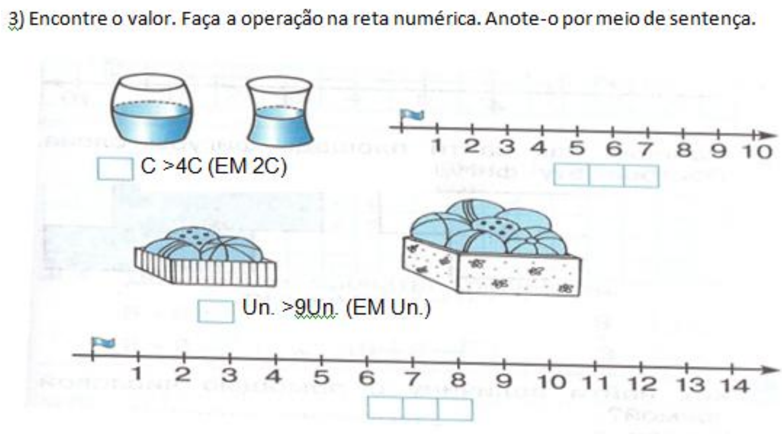
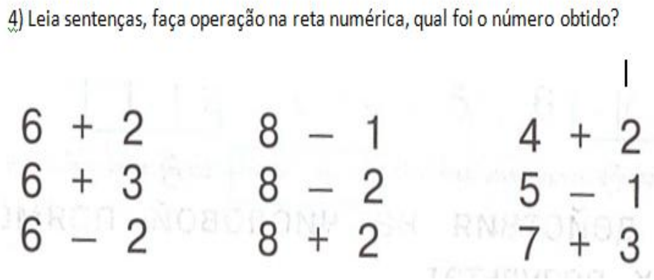


Figura D67 – A relação sentença aditiva ou subtrativa e sua leitura
Fonte: Davidov (2012, p. 77)

3) Dada uma série de sentenças, representar cada uma delas na reta numérica, com indicação do número obtido (figura D68).


4) Leia sentenças, faça operação na reta numérica, qual foi o número obtido?

6 + 2	8 – 1	4 + 2
6 + 3	8 – 2	5 – 1
6 – 2	8 + 2	7 + 3

Figura D68 – Representação de sentença aditiva ou subtrativa na reta.
Fonte: Davidov (2012, p. 77)

4) A referência é a grandeza área especificada em uma figura para a construção de outra, que requer do estudante a identificação da unidade de medida adotada. Além disso, é necessário atender a condição da desigualdade, previamente dada (Figura D69).

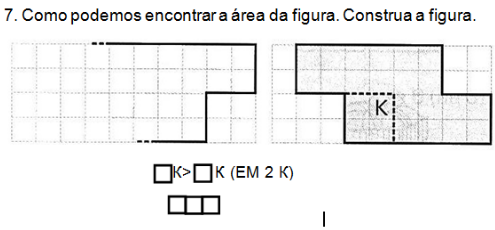


Figura D69 – A sentença aditiva com base na grandeza área
Fonte: Davidov (2012, p. 78)

5) A partir da indicação de um intervalo (entre 5 e 8), por meio de uma seta, o estudante precisa explicitar a relação que fora adotada e escrever a sentença. É nessa tarefa que as duas operações são apresentadas com

todos os seus componentes (números a operar e o resultado) na forma de igualdade (Figura D70).

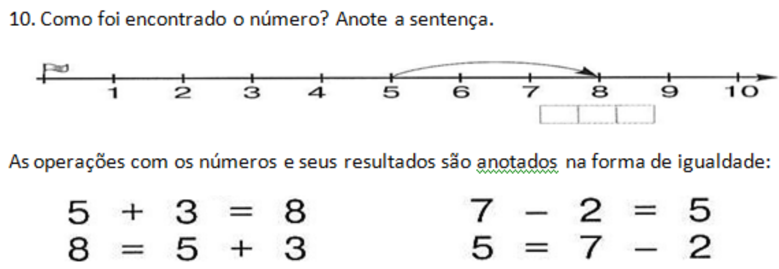


Figura D70 – A sentença aditiva completa
Fonte: Davidov (2012, p. 79)

6) Depois de resolver adições e subtrações, com ajuda da reta numérica, esta dá subsídios para as sentenças se transformarem em equação algébrica (Figura D71).

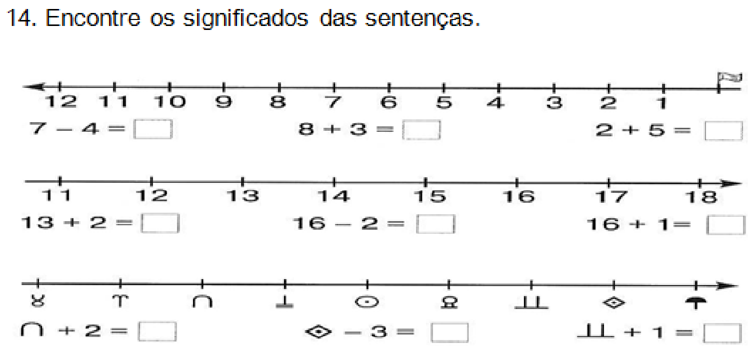


Figura D71 – A sentença transformada em equação
Fonte: Davidov (2012, p. 80)

7) Inicia a elaboração da sequência numérica com a ideia de sucessor e antecessor, no contexto de adicionar ou subtrair o 1 (um) (Figura D72).

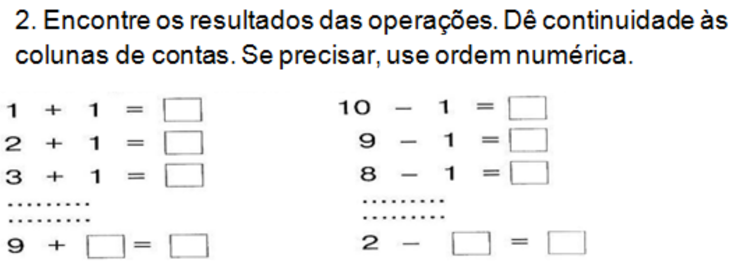


Figura D72 – A sequência numérica
Fonte: Davidov (2012, p. 81)

Vale acrescentar que essas tarefas, como aquelas não apresentadas, são precedidas por outras do livro de orientação ao professor. Há encaminhamentos que dinamizam os procedimentos para a participação ativa dos estudantes. Algumas delas são desenvolvidas em duplas; outras simulam situações de uma escola mágica em que os estudantes apresentam formas diferentes de resolução; também, as "pegadinhas" que necessitam de muita atenção para não descaracterizar elementos conceituais. A preocupação é com a atividade mental e, para tal, inicialmente a base é a reta numérica.

A análise dessas poucas tarefas referentes à adição e à subtração traz evidências de diferenças em relação à proposta representativa das pretensões do Movimento da Matemática Moderna. Na proposição de Júnior (sd), depois de ensinar os números 1, 2 e 3, é apresenta o 4 e, com ele, adição com a ideia de 'juntar' uma quantidade com a outra. A intenção é mostrar que um número é composto pela adição: dele com o zero, de seu antecessor com o 1, do antecessor de seu antecessor com o 2 e, assim, sucessivamente. A subtração é entendida como "tirar" uma quantidade – menor ou igual – de outra. A passagem da ideia conceitual para a representação algorítmica é marcada por expressão da lógica formal do tipo: se, então.

Na proposta davydoviana, a adição e subtração são desenvolvidas no âmbito do conceito de número como relação entre grandeza, medida, o que requer um dinamismo do pensamento das crianças. A necessidade de identificação de um valor, a partir de outro estipulado é movida pela simultaneidade da relação de desigualdade (maior ou menor) e igualdade. Esse movimento sobrevém da possibilidade, proporcionada pela tarefa, das crianças atuarem ativamente sobre algo do mundo objetivo que toma por base a lógica interna do desenvolvimento do pensamento conceitual.

Sendo assim, o ensino da adição e subtração, reflete o que Davýdov considera a base universal do conceito de número: a grandeza em suas relações de medida. E, por se tratarem de conceitos, conforme Kopnin (1978, p. 205), essas operações também expressam “o universal em relação com o singular.”

b) O zero

Embora as primeiras noções se estendam por várias tarefas anteriores, o conceito de zero também é apresentado em um capítulo próprio no livro didático, com a atenção voltada para sua inclusão na reta numérica. Por isso, como veremos a seguir, traz uma concepção diferente da proposta modernista, qual seja: como um subconjunto vazio, isto é, como ausência de quantidade. E, como componente da sequência numérica é o primeiro da ordem crescente dos números naturais.

Na tarefa inicial (figura D73), de acordo com Gorbv, S.F.; Mikulina, G.G.; Savieliev, O.V. (2008), a reta do livro didático (DAVIDOV, 2012, p. 89) também está desenhada. Nelas, estudantes e professor procedem às diferenças sucessivas: 4-1, 4-2, 4-3, 4-4. A discussão volta-se para a última operação da sequência, pois, no movimento das representações ela atinge o ponto da bandeira, seu início. Como é a primeira vez que os estudantes se defrontam com essa situação, a questão decorrente é: com que número anotar o resultado. Podem advir sugestões, mas o professor apresenta o 0 (zero) e informa que é a referência para o início da reta numérica.

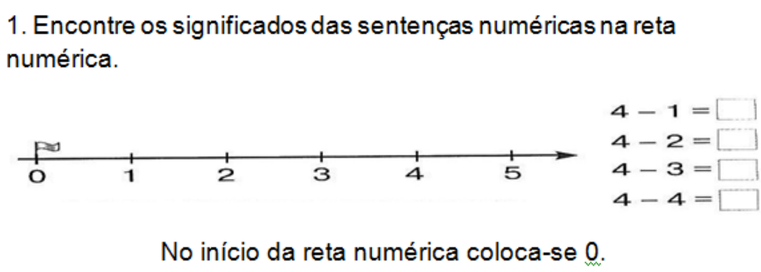


Figura D73 – A introdução do zero na reta numérica
Fonte: Davidov (2012, p. 89)

A segunda tarefa (figura D74) torna mais abrangente o significado do zero, ao incluí-lo também na adição e no contexto algébrico como forma de generalização de que ele é resultado da subtração de mesmo número (a – a = 0).

Construa reta numérica. Complete as igualdades.

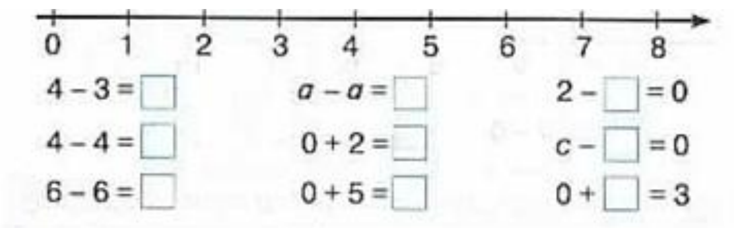


Figura D74 – O zero como generalizador do resultado da subtração de mesmo número.
Fonte: Davidov (2012, p. 89)

A tarefa seguinte (figura D75) enunciada por "Construa os segmentos segundo os registros" (DAVIDOV, 2012, p. 89), tem a finalidade de apresentar o significado quantitativo do número 0, isto é, "nenhuma medida" (DAVIDOV, 2012). Para tal, é necessária a construção dos segmentos proposto. A última situação oportuniza a conclusão de que não é preciso deslocar-se do ponto, ou seja, há 0 centímetro.

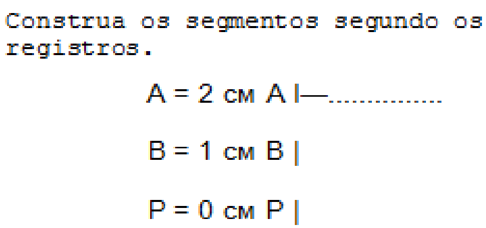


Figura D75 – O significado quantitativo do número 0.
Fonte: Davidov (2012, p. 89)

As demais tarefas mantém essas significações e, em termos de procedimentos, levam os estudantes à elaboração de sínteses, tais como:
1) o número 0 pode ocupar o primeiro ou segundo lugar na sentença (a+0 ou 0 + a), significa que o deslocamento pela reta é feito a partir de número *a*, ou do *0*. Quando a partida é do zero é necessário o deslocamento; se for de *a*, então não ocorrerá o movimento. Porém, em ambos os casos o ponto final (resultado) é o *a*;
2) o deslocamento da mesma quantidade unidades para a esquerda, na sequência numérica, irá coincidir com o zero,
3) dar *0* passo significa que nenhum deslocamento é necessário, consequentemente, permanece no ponto de partida.
4) se o número está *a* passos do início, significa que a há uma relação de desigualdade $0<a$, isto é, diferença *a*.

Mas para chegar a tais elaborações, segundo Davidov (2012), as tarefas, consequentemente o desenvolvimento delas pelos estudantes, devem ter como critério de assimilação a referência da reta para: determinar a diferença de números; representar a diferença solicitada; realizar a adição e a subtração.

Em síntese, o número real e não o natural é apropriação que Davýdov (1982) propõe para a criança que inicia sua atividade de estudo nos sistema escolar. A organização do ensino é de um modo tal que, inicialmente, as tarefas particulares visam o desenvolvimento da ação investigadora que tem elemento mediador as características de objetos. Por isso, valoriza-se muito a elaboração das perguntas, pelos estudantes, direcionadas ao professor em primeiro lugar e, depois, entre si.

Davidov (2012), em suas orientações aos professores, alertam que a atividade de estudo deve permitir o desenvolvimento da capacidade da criança de agir, o que pressupõe um ensino que lhe possibilite a busca de novos caminhos, a organização de seus próprios meios que garantam os objetivos de aprendizagem.

Mas para tal, as tarefas devem se articular entre si pela necessidade de manter o elemento geral do conceito de número, a grandeza. Porém, cada qual se apresenta com alguma peculiaridade que torna cada vez complexa o sistema conceitual e a relações de comparação, até atingir um nível de compreensão de medida. Para tal, inicialmente, as tarefas focam em características externas (cor, forma, tamanho, dimensão, localização, entre outras), bem como grandeza (comprimento, área, volume, massa, discreta).

Essas tarefas iniciais se inserem no contexto da ‘primeira ação de estudo’ prevista na proposta de Davydov por revelar a relação geral e universal do conceito científico de número, consequência da transformação dos dados da tarefa (DAVÍDOV, 1988).

Na sequência, as relações com os objetos reais e desenhos marcam o processo de representação, inicialmente, **objetal** com a apresentação de dois objetos (tiras de papel) de tamanho iguais ou diferentes, conforme o resultado da comparação. Esta pode ter com referência as características externas, como também resultado de medida de grandeza contínua (comprimento, área, volume, massa).

Posteriormente, a representação **gráfica** por meio de dois segmentos de reta, o que ocorre no momento em que a centralidade está na relação de igualdade e desigualdade proveniente do processo de comparação entre grandezas, isto é, a medida. Essa ideia é mantida na de representação literal e simbólica registrada em fórmulas como; $A = B$, $A > B$, $A < B$, $A \neq B$. Observa-se que a essência é a medida, o que leva, na sequência, tarefas que explicitam a necessidade de introdução da unidade. Posteriormente, observa-se a existência de uma conexão interna de relações múltiplas estabelecidas entre a grandeza a ser medida e sua unidade.

O ápice do processo de representação, o ‘modelo universal’ do conceito de número, traduz a sua principal característica: a grandeza. Esta, segundo Davýdov (1982), é, além de gênese, o geral que torna singular todos os números do campo dos reais, sejam naturais, racionais e irracionais. O modelo universal expresso por $\frac{A}{E} = n$ e $A = nE$ uma unidade de nexos e relações essenciais.

Rosa (2012) assim explica a trama dialética do referido modelo:

> O modelo expresso pelas fórmulas $\frac{A}{E} = n$ e $A = nE$ é a unidade entre a essência universal (relação de multiplicidade e divisibilidade entre grandezas) e sua expressão singular (os números naturais, inteiros, racionais e irracionais) é mediatizada pela unidade de medida. Se a unidade couber um número inteiro de vezes na grandeza a ser medida o

> resultado da medição será um número inteiro, se não, é racional. E, ainda, se a unidade for incomensurável em relação à grandeza, o resultado será um número irracional (ROSA, 2012, p. 160).

Todo esse movimento de representação, em termos pedagógicos, contempla a segunda ação de estudo para as crianças que adentram no processo de aprendizagem do conceito de número: modelação da relação universal na unidade das formas literal, gráfica e objetal (DAVÍDOV, 1988).

Vale ressaltar que no presente estudo, dadas às delimitações apresentadas anteriormente, as análises voltaram-se basicamente para as tarefas concernentes as duas primeiras ações de estudo, estabelecidas pela proposta davydoviana. No entanto, na subseção 3.2.9, algumas tarefas expressam as características da terceira ação, uma vez que algumas propriedades numéricas e operativas se apresentam e são estudadas como consequência da transformação do modelo da relação universal (DAVÍDOV, 1988).

Todas as tarefas particulares da proposta davydoviana mantém coerência à sua teorização em relação à organização da atividade de ensino e de estudo. Tal afirmação pode ser justificada por dupla razão, a seguir apresentadas.

1) Por atenderem a primeira tarefa de estudo estabelecida, uma vez que elas proporcionam, aos estudantes do primeiro ano escolar, o desenvolvimento do pensamento conceitual de número, não como contagem de elementos discretos (conforme propõe o ensino tradicional), mas como meio especial de comparação das grandezas. Cada uma das tarefas particulares contempla a ideia de medida ou criam as condições para tal. Por exemplo, a tarefa da figura D13 não sugere a relação entre grandezas e nem de igualdade ou desigualdade por qualquer característica, inicia a familiarização com o conceito geométrico de linha reta, que se constitui em elemento essencial para a futura representação gráfica com dois segmentos. Assim, as relações que se tornam permanente, durante o processo, são estabelecidas entre grandezas. Portanto, difere do ensino modernista que ocorrem na correspondência um a um entre elementos discretos.

2) Por se inserirem no contexto de todas ações de estudo enunciadas anteriormente (primeira, segunda e terceira). Nessa inserção, as tarefas trazem como característica marcante: os estudantes como seres ativos no processo de desenvolvimento de cada uma delas. O envolvimento não se dá de forma espontânea, mas com a orientação quer do professor diretamente, quer do próprio enunciado. Essa diretividade é expressão de cumprimento do objetivo de promover o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes, o que requer a apropriação do conceito científico de número real (DAVÝDOV, 1982). Deixá-los livres descaracterizaria um dos princípios da escola que, segundo Davídov e Slobódchikov (1991), é proporcionar as condições para que a formação do pensamento teórico seja uma norma e não exceção como se observa na escola atual. Nesta, até pode ocorrer que alguns alunos adquiram os meios do pensamento teórico; porém, consequência de sua forma espontânea, há possibilidade de fragilidades.

O envolvimento ativo dos estudantes se explicita na primeira ação de estudo quando eles têm oportunidade para elaborar questões sobre a pertinência das características dos objetos ou da grandeza para atender as relações necessárias. Também, na exposição de argumentos que justificam que o procedimento adotado é compatível com a comparação sugerida. Vale lembrar que as comparações, nessa proposta de ensino, estão relacionadas à medida/grandeza. Ou seja, as crianças precisam descobrir um modo de comparação que contribua para a elaboração, bem como na adoção, de suas diferentes representações.

O mesmo envolvimento ocorre nas tarefas pertinentes à segunda ação de estudo, modelação, pela necessidade de identificação da conexão essencial, bem como a reprodução nas formas objetais, gráficas e literais. É pela reflexão sobre a determinação de uma unidade de medida e da quantidade vez que ela está contida na grandeza, que a criança reproduz o modelo universal do número.

Em outras palavras, nesse modo de organizar a atividade de estudo não há possibilidade de uma lógica de apresentação de modelos prontos, nem tão pouco de omissão de participação dos estudantes e do professor. As tarefas exigem que a criança esteja em constante estado de tomadas de decisões a respeito da existência ou não de resposta a questionamentos orientativos. Porém, não basta a emissão de um ‘sim’ ou um ‘não’ como exigia as proposições formalistas modernas, é preciso que o estudante apresente justificativa plausível concernente às propriedades das relações conceituais.

Se as tarefas particulares expressam a coerência com os princípios e características entendidos como essenciais para a “nova educação” (DAVÍDOV; SLOBÓDCHIKOV, 1991), sua base teórica pedagógica, por sua vez, contempla os pressupostos da matriz teórica: o materialismo histórico e dialético. Isso se expressa na consonância das ações de estudos com o que Davýdov (1982), capítulo V, denominou de princípios do materialismo dialético, dentre eles destacamos: a atividade prática como base do pensamento humano, o ideal como reflexo do objeto em sua especificidade da sensibilidade humana, o pensamento empírico e o pensamento teórico que têm suas particularidades e conteúdos específicos, a modelação como meio do pensamento científico, o sensorial e o racional no conhecimento e existência de um procedimento da ascensão do abstrato ao concreto.

Esses princípios se objetivam articuladamente nas tarefas particulares ao terem como referência uma situação que precisa ser observada e analisada. No entanto, não se trata de extrair delas as características empíricas que se apresentam aos órgãos dos sentidos, principalmente, a visão como a cor de objetos ou desenho, o movimento da balança, o transporte de água de um recipiente a outro. Em vez disso, as situações solicitam dos estudantes as relações gerais que promovem as comparações entre grandezas apresentadas objetalmente. A finalidade é a abstração da relação essencial, genética do conceito de número que, reafirmamos, é o conceito de grandeza. Esta se apresenta desde as tarefas introdutórias da primeira ação de estudo que, de imediato, requerem o estabelecimento de relações de igualdade e desigualdade. Aos poucos, consequência do modo de organização e do teor das tarefas, as referidas relações são fixadas pelos estudantes por meio de fórmulas expressas por letras. Em outras palavras, o ideal se constitui em reflexo do objeto como especificidade da sensibilidade humana. Desse modo, configura-se a condição necessária para adentrar ao estudo, não maios das relações de igualdade e desigualdade, em si, mas de suas propriedades na forma pura. E isso traz à tona uma das características do ineditismo da proposta de Davydov, pois, ainda sem terem chegado à escrita dos numerais, as crianças expressam os resultados de comparações por vias basicamente algébricas: $a = b$, $a \neq b$, $a > b$, $a < b$.

No entanto, a comparação entre duas grandezas nem sempre se estabelece diretamente, pois necessita de uma terceira, ou seja, uma unidade de medida. Esta passa ser o elemento mediador no processo de medição, uma vez que se busca saber quantas vezes ela cabe nas duas grandezas a serem comparadas.

A mediação pela unidade de medida é a base para os estudantes apreenderem e determinarem a relação múltipla e universal que se sintetiza no modelo ($A/E = n$) que, como dito anteriormente, é outro princípio da dialética materialista. É modelo, segundo Davídov (1988), porque traz a relação universal, a essência da integralidade de um objeto – identificadas e reproduzidas em todo o processo de representação (objetal, gráfica e literal) – o que possibilita a extrapolação para a análise de outras situações.

Nesse movimento que é entendido o princípio da dialética referente às formas de generalizações e pensamentos: empírico e teórico. Para Davýdov (1982), é teórico pelo seu conteúdo – que se mantém em todo o processo, inclusive no modelo – que estabelece as propriedades internas do objeto, portanto, aquelas não observáveis diretamente.

Mas, para chegar a esse grau de desenvolvimento de pensamento, as tarefas particulares são executadas num ambiente eminentemente reflexivo e de discussão. Além disso, primam pela não repetitividade, pois, caso ocorresse, tornariam passível a condução para a generalização empírica da relação geral e, consequentemente, ao desenvolvimento do pensamento empírico.

Da mesma forma, a proposição de ensino de Davydov, atende ao pressuposto do movimento de apropriação do pensamento conceitual em sua relação geral/particular/singular. Davídov (1988, p. 245) expressa seu entendimento a respeito desse movimento, ao dizer que, no processo de desenvolvimento da tarefa de estudo, os estudantes, aos poucos, devem "dominar o procedimento geral de solução de todas as tarefas particulares de uma determinada classe". Rosa (2012) afirma que esse movimento traz as interconexões entre as significações algébricas, geométricas e aritméticas do conceito de número. Este tem seu conteúdo teórico estruturado em conformidade com o movimento do pensamento de ascensão do abstrato ao concreto.

Para a referida autora:

> Esse movimento é expresso nas proposições davydovianas, pois, inicialmente, se analisou as relações gerais e abstratas entre grandezas. Na sequência, introduziu-se a unidade de medida, como elemento particular, que mediou a gênese de uma singularidade, o número (ROSA, 2012, p. 160).

Enfim, as apropriações dos estudantes, referente ao conceito de número, trazem as suas significações produzidas historicamente, mas a partir de seu desenvolvimento atual, número real, com a ideia de medida, relações entre grandezas. Não é, pois, uma simples contagem representada por numerais, peculiaridade do número natural, como advogam as propostas que Davýdov (1982) denomina de ensino tradicional.

4 AINDA CABEM ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

De início, esclarecemos que essas considerações refletem muito mais nossa consciência da incompletude da dissertação do que algo conclusivo, como normalmente se espera no fechamento de uma pesquisa. Dentre as necessidades de aprofundamento, cita-se o processo de análise de modo que contemplasse a ampliação do número das tarefas particulares davydovianas e as proposições modernistas, com maior detalhamento e de forma articulada com as bases teóricas.

Contudo, valer expressar que a produção do presente trabalho colocou-nos em permanentes conflitos, uma vez que nos possibilitou novos graus de compreensão, não só do objeto de estudo em si, mas da realidade social na qual nos inserimos. Entendimento que se constituíram desde as reflexões sobre o contexto de problematização para o estabelecimento do objeto de pesquisa. Isso se deu com base no nosso processo de formação acadêmica, no exercício da docência e com base teórica, Teoria Histórico-Cultural. Esta representa, para nós, como sendo a que mais se aproxima daquilo que concebemos e buscamos em relação à educação.

Por isso, a referência à proposta davydoviana, considerada aquela que se tem de mais atual e se trata de uma objetivação da teoria histórico-cultural. Mas, não a entendemos como algo novo no processo educacional, que surgiu no 'mundo das ideias, expomo-nos ao esforço de estudá-la a par de outra proposição, Movimento da Matemática Moderna, que também se apresentou como novo e combativo.

Resta-nos, então, retornar ao compromisso assumido em relação à pesquisa, isto é, aos seus questionamentos voltados às diferenças entre as proposições de Davydov e a formalista moderna, referentes ao ensino do conceito de número no primeiro ano do ensino fundamental. Como decorrência, questões auxiliares foram formuladas em relação: aos elementos peculiares da proposta de Davydov e da concepção formalista moderna; à essência, o geral das duas propostas; às implicações das referidas proposições de ensino para a promoção do desenvolvimento do pensamento numérico dos estudantes.

Embora constituam uma unidade de uma prática social, o ensino, as duas propostas revelam seus contrários pelas distintas bases teóricas: a dialética materialista da proposta de Davydov e a lógica formal do Movimento da Matemática Moderna. Tal diferença é, para nós, indicadora de impossibilidade de admitirmos similaridade entre ambas.

A base interna geral do conceito de número, abordado no primeiro ano escolar, são extremamente distintas em relação a uma e outra das duas propostas. Uma leitura dialética do modo de organização do ensino concernente ao Movimento da Matemática Moderna indica-nos que o movimento conceitual é restrito aos números naturais. E, como tal, tem o **conjunto** como base genética, o *geral*, e suas inter-relações com as *singularidades* – **cada número** (por exemplo, 4 é uma singularidade) – que se expressa no modelo n(A) = n(B)[11] que traduz o modelo universal da proposta (**relação de biunivocidade**), mediada por uma particularidade, a **unidade** (elemento discreto do conjunto).

Para a síntese do movimento conceitual de número, referente à proposta davydoviana, recorremos a Rosa (2012). Para tanto, a referência é o modelo expresso pelas fórmulas A/B = *n* e A = *n*E, a unidade entre a essência *universal* – **relação de multiplicidade e divisibilidade** – que ocorre com base em algo *geral* – **grandezas** – e a sua expressão *singular* - os **diferentes números** (naturais, inteiros, racionais e irracionais) – com mediação de uma *particularidade* – a **unidade de medida**. Se a unidade couber um número inteiro de vezes na grandeza a ser medida o resultado da medição será um número inteiro, se não, é racional.

Para a referida autora:

> Esse movimento é expresso nas proposições davydovianas, pois, inicialmente, se analisou as relações gerais e abstratas entre grandezas. Na sequência, introduziu-se a unidade de medida, como elemento particular, que mediou a gênese de uma singularidade, o número (ROSA, 2012, p. 160).

O movimento conceitual modernista ao se restringir aos números naturais, contempla apenas uma singularidade em relação ao proposto por Davydov. Observa-se, então, que o singular nas proposições davydovianas é um conjunto numérico (naturais, nesse caso). Para a proposição do Movimento da Matemática Moderna é cada número, por exemplo 6. Essa redução de algo singular em universal restringe e promove menores delimitações de espaços de mobilidade e possibilidades do pensamento da criança.

---

[11] N(A) lê-se: número de elementos do conjunto A;
N(B) lê-se: número de elementos do conjunto B;

Esses movimentos distintos, que refletem no modo de organização do ensino para a introdução do conceito de número, trazem consequências peculiares. Nesse sentido, vale destacar que as proposições modernistas (JÚNIOR, sd) revelam uma base eminentemente empírica, dada a ênfase para que os estudantes apenas observem no exposto (conjuntos) o aparente.

A omissão de enunciado e a objetividade da pergunta quando aparece em cada proposição têm, implicitamente, um teor indicativo e localizativo. Consequentemente, restringem a exposição da criança a poucas palavras: ‘sim’, ‘não’, ‘é tal coisa’, ‘está ali’. As raras situações que requerem uma exposição verbal mais abrangente dos estudantes são contornadas por componentes da lógica formal. Ou seja, a linguagem é proposicional movida pela bicondicionalidade do tipo $P \leftrightarrow Q$. Sendo assim, cerceiam a oportunidade dos estudantes expressarem os argumentos de suas elaborações. Mas essas condições são pertinentes à própria concepção de número como ‘abstração’, propriedade dos conjuntos de objetos, que é apropriada em ordem crescente: primeiro o um, depois o dois,... Tratam-se, pois, de abstrações de que Rosental e Straks (1958) consideram elementares por serem obtidas pela simples comparação para destacar o universal, o que contempla o procedimento da lógica formal.

Diferentemente, a proposta davydoviana de ensino de Matemática, ao focar de modo enfático a relação entre medidas de grandezas de mesma natureza, convida e coloca o estudante em permanente processo de análise, não somente com base em aparências externas, mas pelas relações e nexos do próprio conceito. Por exemplo, o volume não se explicita pela observação de dois recipientes, que se conclui com indicações do tipo: “este tem mais” e “aquele tem menos”, ou ‘está mais ou menos cheio que’. Em outros termos, o volume não é a água ou qualquer outro liquido, mas uma elaboração mental humana produzida historicamente, que tem como gênese a necessidade de medir. Sendo assim, a grandeza é algo geral que se revela em grandezas singulares (comprimento, área, massa, volume, etc.) e requer inter-relações de base conceitual teórica: multiplicidade e divisibilidade. A síntese dessa relação, ou seja, da comparação de grandezas que advém o número. Este, como tal, se objetiva nas necessidades humanas como quantidade de “vez”, que não está na “coisa” (objeto) e mesmo na grandeza, mas na relação ‘entre’. E, como relação, não está dada empiricamente, isto é, pelos olhos ou pelas mãos. Trata-se, pois, de determinação teórica, conceitual. Assim, as singularidades numéricas são determinadas pela quantidade de ‘vez’: se inteira, número natural; se não inteira com possibilidade de definir o seu fracionamento, número racional; se não inteira, e impossível de determinar seu fracionamento, número irracional. Como todos têm a mesma base genética – a medida – constituem o campo dos números reais.

Portanto, o conjunto de tarefas particulares que a proposta de Davydov e colaboradores propõem aos estudantes, contempla o pressuposto de que o conteúdo da atividade de estudo é o conceito teórico. E, mais ainda, promove as mudanças qualitativas referentes ao desenvolvimento psíquico da criança, uma vez que se apropria dos procedimentos generalizados de ação em nível dos conceitos teóricos (DAVÍDOV; MARKOVA, 1987).

Mas, para tanto, as tarefas particulares em si, mesmo que bem elaboradas e organizadas, não são suficientes. O conjunto delas só faz sentido se em sua base está uma "pedagogia da colaboração" que coloca estudantes e o professor em processo interativo. Nesse caso, elas contemplam as possibilidades psíquicas das crianças, não somente no seu estado atual, mas principalmente no se devir (DAVÍDOV; SLOBÓDCHIKOV, 1991).

Se a análise dos livros das duas proposições trouxeram evidências de diferenças de ordem conceituais e pedagógicas, o estudo da literatura também nos proporcionou a reflexão sobre outras distinções entre ambas. Elas não se inseriram explicitamente nos objetivos da pesquisa, mas consideramo-las importante, como forma de expressar nossa preocupação, que permeou o processo de investigação, de não perder de vista o contexto social e político dessas duas propostas de ensino.

A principal distinção entre as duas propostas educativas está na perspectiva de formação humana, ou seja, embora constitua uma unidade de uma prática social, o ensino, elas revelam seus contrários pelas distintas bases teóricas: a dialética materialista da proposta de Davydov e a lógica formal do Movimento da Matemática Moderna. Tal diferença é indicadora de que não é possível admitir similaridade entre ambas as propostas, como anunciado, anteriormente, no momento da problematização da pesquisa.

O formalismo apresenta como precaução e conservação os componentes subjacentes à proposta de ensino do Movimento da Matemática Moderna. A precaução se define pela necessidade de manter seus princípios lógicos internos para mostrar-se diferente em relação ao formalismo clássico. A conservação se caracteriza pelo seu componente político de propiciar maior competência matemática à sociedade conservadora do modo de produção capitalista (FIORENTINI, 1995).

Como dito reiteradas vezes, a proposição moderna da Matemática – mesmo com sua expectativa de ser algo novo em relação ao ensino formalista clássico – traz princípios pertinentes ao que Davydov denomina de pensamento pedagógico tradicional. Este, de acordo com Davídov e Slobódchikov (1991), privilegia um ensino com ênfase na transmissão direta, aos estudantes, de conhecimentos, habilidades e hábitos úteis à vida futura. Da mesma forma, a educação é concebida como a formação de propriedades que atendem somente as exigências sociais, em termos econômicos. A escola é considerada uma megamáquina que funciona como meio de transmissão, aos seus alunos, das propriedades (técnica e intelectual) pertinentes à força de trabalho. Portanto, ela tem como componente ideológico pela sua função social de incutir um mundo pronto e relativamente estável.

O aspecto de precaução e de conservação da tendência formalista moderna respalda-se no argumento de que a assimilação das estruturas subjacentes ao conhecimento matemático capacitaria o aluno para aplicar formas estruturais do pensamento inteligente dentro e fora da matemática. Em outras palavras, a possibilidade de melhoria da qualidade de ensino dá-se pelos desdobramentos lógico-estruturais das ideias matemáticas.

A princípio, a proposta apresentada pela Matemática Moderna parece apresentar algo novo para o ensino do conceito de número. Porém, essa ideia se desfaz ao priorizar a correspondência biunívoca entre os elementos dos conjuntos. De acordo com Davýdov (1982), a formação de conceito que prioriza a classificação dos objetos pelas semelhanças comuns estabelecidas entre eles, sem analisar suas propriedades particulares e específicas, se dá por pensamento empírico e não teórico.

A proposta de Davydov se apresenta num movimento dialético em que os contrários se definem pelo seu teor de transformação e manutenção social. Seus fins de transformação advém dos princípios da Revolução Russa de 1917 que advogam por uma relação de produção socialista. Portanto, têm duplo sentido: de conquista, pela superação do modo capitalista de produzir; de compromisso, pela necessidade de contribuir com a formação do homem para a consequente sociedade. Por sua vez, outro componente do contrário, a manutenção, volta-se ao contexto de levar avante o processo de transformação social de base socialista.

Assim sendo, a proposta de Davydov tem como essência, geral, a formação humana dos estudantes, em vez de prepará-los para a vida, em termos basicamente profissionais. Para o referido autor, o ensino deve ter como finalidade o desenvolvimento das capacidades genéricas humanas e que permita, aos estudantes, a apropriação dos procedimentos universais da atividade de estudo. Dessa maneira, é necessário considerar o lugar que o indivíduo ocupa na sociedade, bem como, as relações históricas, sociais e culturais envolvidas nesse processo.

As proposições de Davydov e colaboradores, orientada pelo materialismo histórico e dialético, oferecem as condições para que os estudantes, desde o primeiro escolar, estabeleçam múltiplas relações entre as diversas significações matemáticas que caracterizam o conceito de número. O processo de apropriação dessas significações tem como fundamento o procedimento de ascensão do abstrato ao concreto no movimento: geral ↔ particular ↔ universal ↔ particular ↔ singular (ROSA, 2012).

Enfim, durante o processo de elaboração dessa dissertação, outras inquietações se manifestaram que poderão determinar novos estudos. Entre elas, o questionamento: Qual a visão de mundo que é desenvolvida nos estudantes numa proposta em que proporciona o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes? Como os alunos que vivenciam essa proposta leem a realidade?

REFERÊNCIAS

BARKER, S. f. Filosofia da Matemática. Rio de Janeiro, Zahar, 1976.

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** introdução aos parâmetros curriculares nacionais /Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BEHRING, E. R.; BOSCHETTI, I**. Política Social: fundamentos e história.** 5. ed. São Paulo: Cortez, 2008.

BERNARDES, M. E. M. **Mediações simbólicas na atividade pedagógica:** contribuições do enfoque histórico-cultural para o ensino e aprendizagem. 2006. 330f. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo. São Paulo.

BOURBAKI, N. **Elementos de historia de las matemáticas.** Versión española de Jesús Hernández. Madrid: Alianza Editorial, S. A., 1969.

BOYER, C. B. História da matemática. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília, DF: MEC/SEF, 1997.

BÚRIGO, E. Z. Matemática Moderna: progresso e democracia na visão de educadores brasileiros nos anos 60. **Teoria & Educação**, v.2, p.255-265, 1990.

_________. O Movimento da Matemática Moderna no Brasil: encontros de certezas e ambiguidades. **Revista Diálogo Educacional**. Curitiba, v.6, n.18, 2006, p. 35-47.

_________. Tradições Modernas: reconfigurações da matemática escolar nos anos 1960. **Bolema.** Rio Claro (SP), v. 23, nº 35B, p. 277-300, abril 2010.

CYRINO, H. **Matemática & Gregos**. Campinas, SP: Átomo, 2006.

DAMAZIO, A.; ROSA, J. E.; EUZÉBIO, J. S. **O ensino do conceito de número em diferentes perspectivas**. Revista Educação Matemática e Pesquisa. SãoPaulo. PUC, v.14, n.01, p. 209-231, 2012.

DAVÍDOV, V. V.; MARKOVA. A. El desarrollo del pensamiento en la edad escolar. In: SUARE, M. **La psicología Evolutiva y pedagógica en la URSS**. Moscú: Progreso, p. 173-174, 1987.

DAVÍDOV, V. V. Análisis de los principios didácticos de la escuela tradicional y posibles principios de enseñanza en el futuro próximo. In: SHUARE, Marta. **La psicología Evolutiva y pedagógica en la URSS.** Moscú: Progreso, p. 143-155, 1987.

DAVÍDOV, V.V. Desarrollo Psiquico en El escolar pequeño. In: PETROVSKI, A. (Org.). **Psicologia Evolutiva e Pedagógica**. Moscou: Editorial Progreso, 1985.

_________. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico: investigación teórica y experimental.** Moscú: Editorial Progreso, 1988.

DAVÍDOV, V. V.; SLOBÓDCHIKOV, V. I. La enseñanza que desarrolla en la escuela del desarrollo; en **La educación y la enseñanza**: una mirada al futuro. Moscú: Progreso, p. 118-144, 1991.

DAVÝDOV, V. V. **Tipos de generalización en la enseñanza**. Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1982.

DIENES, Z. P. **A Matemática Moderna no ensino primário**. Rio de Janeiro: Livros Horizontes, 1967.

EVES, H. **Introdução à historia da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Unicamp, 2007.

FIORENTINI, D. Alguns Modos de Ver e Conceber o Ensino de Matemática no Brasil. **Zetetiké**. Campinas, UNICAMP, ano 3, n.4, p.1-36, 1995.

FUNCHS, W.R. **Matemática Moderna**; tradução de Marianne Arnsdoff e José Manasterski. São Paulo: Polígono, 1970.

GILBERT, R. **Como enseñar al niño la Matematica Moderna**. Buenos Aires: Editorial Paidos, 1974.

INEP (Brasília) (Org.). **Ideb.** Disponível em:<http://www.inep.gov.br/>. Acesso em: 20 out. 2012.

JÚNIOR, Mário Magnusson. **Matemática Moderna** (1ª série). São Paulo: Cia. Brasileira de IMPRESSÃO E Propaganda, sem data.

KOPININ, P. V. A dialética como lógica e teoria do conhecimento. Tradução:Paulo Bezerra. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

LEONTIEV, A. **O Desenvolvimento do Psiquism**o. Lisboa: Livros Horizonte, 1978.

________. **Actividad, Conciencia y Personalidad**. Buenos Aires: Ediciones Ciencias del Hombre, 1978a.

LIBÂNEO, J. C. **Democratização da Escola Pública**: A pedagogia crítico-social dos conteúdos. 20ª ed. São Paulo: Edições Loyola, 2005.

MACHADO, N. J. **Matemática e Realidade**. São Paulo: Cotez, 1987.

MARX, Karl. O Método da Economia Política. In: ______. **Para a crítica da economia política.** Trad. de José Arthur Giannotti e Edgar Malagodi. Coleção Os Pensadores. Abril Cultural, 1974.

MARX, K., ENGELS, F. **A Ideologia Alemã**. São Paulo: Ed. Moraes, 1984. 119p.

MIZUKAMI, M. G. N. **Ensino: As abordagens do processo**. São Paulo: EPU, 1986.

PANOSSIAN, M. L.; MOURA, M. O. A formação do pensamento matemático a partir da teoria histórico-cultural. **ANAIS DO XV ENDIPE** – Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino, Belo Horizonte, UFMG, 2010.

PIAGET, J. Las estructuras matemáticas y las estrucuturas operatorias de la inteligencia. In: PIAGET, et all. **La enseñanza de las matemáticas**. Madrid: Aguilar, 1968.

REVUZ, A. **Matemática Moderna Matemática Viva**. Lisboa: Livros Horizontes, 1967.

ROSA, J. E. da. **O desenvolvimento de conceitos na proposta curricular de matemática do estado de Santa Catarina e na abordagem histórico-cultural: um estudo de relações**. Dissertação de Mestrado. UFPR, Curitiba, 2006.

ROSA, J. E.; DAMAZIO, A. Introdução ao conceito de número em Davidov. In: **ANAIS do XV Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino** – XV ENDIPE, v. 1, p. 24-36, Belo Horizonte, UFMG, 2010.

ROSA, J. E.; SOARES, M. T.; DAMAZIO, A. . Conceito de número no sistema de ensino de Davydov. In: **Anais XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática**, 2011, Recife.

ROSA, Josélia Euzébio da. **Proposições de Davydovy para o ensino de Matemática no primeiro ano escolar: inter-relações dos sistemas de significações numéricas**. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Paraná, 2012.

_____________. O ensino do conceito de número: uma leitura com base em Davydov. **Revista Unión,** v.30, p. 81- 100, San Cristobal de La Laguna, 2012.

ROSENTAL, M. M.; STRAKS, G. M. **Categorias del Materialismo Dialecto**. México: Editorial Grijalbo, 1958.

SALLA, F. O PISA além do Ranking. In: **Revista Nova Escola**, n. 240. São Paulo, Editora Abril, março de 2001

SANGIORGI, Osvaldo. **Matemática – Curso Moderno - para os ginásios**. 13.ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1969.

SANTA CATARINA, Secretaria de Estado da Educação Ciência e Tecnologia. **Proposta curricular de Santa Catarina**: estudos temáticos. Florianópolis: IOESC, 2005.

SANTA CATARINA, Secretaria de Estado da Educação e do Desporto. **Proposta curricular de Santa Catarina**. Florianópolis: GOGEM, 1998.

SOARES, Elenir Terezinha Paluch. Movimento da Matemática Moderna e o conceito de número natural. In: **Anais do IX Congresso Nacional de Educação (EDUCERE) e III Encontro Sul Brasileiro de Psicopedagogia**. Curitiba, PUC, 2009.

TRIVIÑOS, Augusto Nibaldo Silva. **Introdução à Pesquisa em Ciências Sociais**: a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo: Atlas, 1995.

VALENTE, Wagner Rodrigues. A Matemática Moderna nas escolas do Brasil: um tema para estudos históricos comparativos. **Diálogo Educacional**. Curitiba, v. 6, n. 18, maio/ago 2006.

VIGOTSKI, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

VITÓRIO, S. M. **Avaliação do ensino de Matemática na escola: um olhar na perspectiva histórico-cultural**. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade do Extremo Sul Catarinense. Criciúma, SC.

ГОРБОВ С. Ф.; МИКУЛИНА Г. Г.; САВЕЛЬЕВА О. В. **Обучение математике. 1 класс: Пособие для учителей начальной школы** (Система Д.Б. Эльконина – В.В. Давыдова). 2-е ида, перераб. - М.:ВИТА-ПРЕССб 2008. 128р. [GORBOV, S.F.; MIKULINA, G.G.; SAVIELIEV, O.V. **Ensino de Matemática. 1 ano: livro do professor do ensino fundamental** (Sistema do D.B. Elkonin – V.V. Davidov). 2ª edição redigida, Moscou, Vita-Press, 2008.]

ДАВЫДОВ, В. В. О. et al. **Математика, 1-Kjiacc.** Mockba: Mnpoc - Аргус, 1997. [Davidov, V.V. **Matemática, 1ª série**. Livro didático e de exercícios para os estudantes da primeira série. Moscou: MIROS, Argus, 2012.