UNIVERSIDADE DO EXTREMO SUL CATARINENSE
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, EXTENSÃO E INOVAÇÃO
DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MESTRADO EM EDUCAÇÃO

NICE BONNET FARIAS LIMA

FILOSOFIA DA MATEMÁTICA: OS OBJETOS MATEMÁTICOS E AS IMPLICAÇÕES NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR

CRICIÚMA

2024

NICE BONNET FARIAS LIMA

FILOSOFIA DA MATEMÁTICA: OS OBJETOS MATEMÁTICOS E AS IMPLICAÇÕES NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação (PPGE) – Mestrado em Educação, como parte dos requisitos necessários à obtenção do Título de Mestre em Educação.

Orientador: Prof. Dr. Vidalcir Ortigara

CRICIÚMA

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

L732f Lima, Nice Bonnet Farias.
Filosofia da matemática : os objetos matemáticos e as implicações na formação do professor / Nice Bonnet Farias Lima. – 2024.
91 p. : il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Programa de Pós-Graduação em Educação, Criciúma, 2024.
Orientação: Vidalcir Ortigara.

1. Matemática - Filosofia. 2. Objeto matemático. 3. Professores - Formação. I. Título.

CDD. 22. ed. 510.1

Bibliotecária Eliziane de Lucca Alosilla – CRB 14/1101
Biblioteca Central Prof. Eurico Back - UNESC

NICE BONNET FARIAS LIMA

FILOSOFIA DA MATEMÁTICA: OS OBJETOS MATEMÁTICOS E AS IMPLICAÇÕES NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR

Dissertação foi julgada e aprovada para obtenção do grau de Mestre em Educação na área de Filosofia da Matemática e Educação Matemática no Programa de Pós-Graduação em Educação (PPGE) – da Universidade do Extremo Sul Catarinense

Criciúma, 13 de junho de 2024.

BANCA EXAMINADORA

_____

Prof. Dr. Vidalcir Ortigara (Orientador)

Universidade do Extremo Sul Catarinense (UNESC)

_____

Prof. Dr. William Casagrande Candiotto

Centro Universitário Educacional Barriga Verde (UNIBAVE)

_____

Prof. Dr. Alex Sander da Silva

Universidade do Extremo Sul Catarinense (UNESC)

Ao meu grande PAI, Antônio Farias, que sempre ensina às cinco filhas o valor do trabalho, da honestidade e principalmente da EDUCAÇÃO em nossa vida. Hoje, com seus sessenta e cinco anos, luta com muita garra contra um Ca, na certeza de que teremos duas VITÓRIAS esse ano: Sua cura e a conclusão do meu mestrado.

Te amamos infinitamente!

Obrigada por tudo PAI!

AGRADECIMENTOS

Para início, que seja parafraseando Aristóteles... sendo o *homem é um ser social*, e como tal seu trabalho é o resultado de suas interações e reflexões com outras pessoas, e este estudo é um exemplo disso. Para realização desta pesquisa, que foi uma etapa importante da minha vida pessoal e acadêmica algumas pessoas contribuíram fundamentalmente, cada uma ao seu modo, que ficarão não apenas nessas páginas, mas no meu coração, com profunda gratidão.

À minha família, por sempre me apoiarem e incentivar nos estudos, já desde a infância e seguir novos caminhos que nos apetece enquanto ser humano e profissional. Pelo tempo de dedicação e cuidados dos avós e tias aos meus filhos.

Aos meus pequenos adultos cientistas que me deram o desafiante papel de ser Mãe. *Aristóteles,* com 7 anos, e *Marie Sophie,* com 5 anos, quando adultos entenderão as difíceis escolhas que tomamos, e uma delas vocês sem saber me ajudaram a não ter que escolher entre os cuidados da maternidade e a profissão docente-pesquisadora. Filhos, quando maiores terei orgulho em exibir para vocês o fruto da nossa escolha: as páginas desse constructo dissertativo.

Em especial, quero externar minha imensa gratidão ao Prof. Fabius Bonnet, que exerceu informalmente a função de coorientador nessa pesquisa, pois não apenas me cobrava, mas proporcionava as condições para a realização da produção escrita, com livros, diálogos e infindáveis correções de tantos erros com sentenças grandes, tornando meu trabalho com uma escrita agradável e didática. Mas seu papel e influência já fizeram parte desde a minha escolha de cursar a História, Física, Filosofia e Matemática, pois sempre me incentivou a entrar no campo instigante da Filosofia da Matemática. E hoje só tenho a agradecer, visto que me sinto cada vez mais apaixonada pelo universo dessa temática que acompanha a mais de uma década de estudos. Obrigada por ter estimulado este encontro meu com a Filosofia da Matemática! Obrigada infinitamente pela parceira no amor e na ciência que beiram aos quase vinte anos de convivência.

Ao meu orientador Prof. Dr. Vidalcir Ortigara, que chamamos carinhosamente de Vidal, pela paciência, confiança e por acreditar que chegaríamos até o final com uma pesquisa coesa e significativa no âmbito da Educação.

Aos Professores Dr. Alex Sander e Dr. William Candiotto pela exímia composição da banca de qualificação e defesa da dissertação com importantes sugestões de leituras e indicações de possíveis pesquisas futuras.

Ao UNINTA, instituição na qual exerço a atividade docente há 8 anos, por ter propiciado os caminhos da formação continuada.

À Profa. Dra. Gisleuda Araújo, minha colega de trabalho na docência que fez substancial revisão da estrutura e do texto diminuindo os erros e vícios da linguagem.

Aos Professores Dr. Ademir Damásio e Dr. André Cechinel, meus primeiros orientadores, pelos diálogos iniciais que tivemos durante o projeto deste trabalho.

Aos Professores do mestrado em Educação da UNESC, pelas discussões durante nossos encontros nas aulas das disciplinas contribuindo para minha formação como pesquisadora.

Aos meus colegas do mestrado, pela parceria e compartilhar ideias, diálogos e trabalhos durante nosso processo formativo. Espero que todos consigam finalizar com êxito, lembrem que diziam que eu seria a primeira a defender a dissertação, pois é não foi como pensávamos.

À toda a equipe que integra a coordenação do PPGE – UNESC em nome da Coordenadora Profa. Dra. Ângela Cristina.

Para não finalizar..., que seja parafraseando Comte-*Sponville* ...

A gratidão é a mais agradável das virtudes. É um mistério, não pelo prazer que temos com ela, mas pelo obstáculo que com ela vencemos.

Sou Grata a Todxs!

Não quero lhe falar, meu grande amor, das coisas que aprendi nos discos
Quero lhe contar como eu vivi e tudo o que aconteceu comigo
Viver é melhor que sonhar, eu sei que o amor é uma coisa boa
Mas também sei que qualquer canto é menor do que a vida de qualquer pessoa
Por isso, cuidado meu bem, há perigo na esquina
Eles venceram e o sinal está fechado prá nós que somos jovens
Para abraçar seu irmão e beijar sua menina na rua
É que se fez o seu braço, o seu lábio e a sua voz
Você me pergunta pela minha paixão
Digo que estou encantado com uma nova invenção
Eu vou ficar nesta cidade, não vou voltar pro sertão
Pois vejo vir vindo no vento o cheiro da nova estação
Eu sei de tudo na ferida viva do meu coração
Já faz tempo eu vi você na rua, cabelo ao vento, gente jovem reunida
Na parede da memória, essa lembrança é o quadro que dói mais
Minha dor é perceber que apesar de termos feito tudo o que fizemos
Ainda somos os mesmos e vivemos como nossos pais
Nossos ídolos ainda são os mesmos e as aparências não enganam não
Você diz que depois deles não apareceu mais ninguém
Você pode até dizer que eu 'tô por fora', ou então que eu 'tô inventando'
Mas é você que ama o passado e que não vê
É você que ama o passado e que não vê
Que o novo sempre vem
Hoje eu sei que quem me deu a ideia de uma nova consciência e juventude
Tá em casa guardado por Deus, contando vil metal
Minha dor é perceber que apesar de termos feito tudo, tudo, tudo o que fizemos
Nós ainda somos os mesmos e vivemos
Nós ainda somos os mesmos e vivemos
Ainda somos os mesmos e vivemos
como nossos pais!

Como nossos Pais
Belchior

RESUMO

A relação da Matemática com a Filosofia é antiga, entrecruzam-se como uma simbiose, a ponto de se ter um campo de estudo específico. A presente pesquisa investiga a natureza dos objetos matemáticos no pensamento dos filósofos Platão e Aristóteles, bem como as correntes da Filosofia da Matemática que sugiram na modernidade e suas possíveis implicações na formação do professor de matemática. A Filosofia da Matemática é um campo complexo que emana questões multifacetadas que envolvem aspectos histórico-filosófico-ontológico- epistemológico. No âmbito dessa, surgiram durante o desenvolvimento da Ciência Matemática algumas questões de cunho filosófico que são estudadas, como por exemplo: qual a natureza dos objetos matemáticos? A matemática é criada ou descoberta? Os entes matemáticos são reais ou fictícios? Entendemos que tais questões devem também estar presentes entre os temas estudados por alunos e professores que fazem matemática. Para o desenvolvimento desta pesquisa qualitativa, utilizaremos como metodologia o que concerne à bibliográfica. Para tal nos propomos inicialmente a busca no estado da arte a partir de banco de dados de dissertações, teses e artigos. Em seguida fizemos o processo de recorte dos autores que tratam da Filosofia da Matemática e da formação inicial dos professores de Matemática. Consideramos Platão e Aristóteles, com seus projetos metafísicos e ontológicos, como pioneiros na reflexão sobre os objetos matemáticos, inaugurando o que se iria chamar Filosofia da Matemática. Percebemos que as correntes clássicas que surgiram no final do século XIX para o início do XX: Logicismo, Formalismo e Intuicionismo, cada uma a seu modo, elaboraram um plano de explicação para a natureza e o conhecimento matemático. Essas concepções adicionadas a do platonismo foram e continuam influenciando o âmbito da formação do professor de matemática. Notamos algumas implicações que partem do que estas defendiam e que vão sendo tomadas por tendências pedagógicas na docência. Entendemos que a formação do professor, já na graduação, é um campo vasto que permitem longas discussões. No que concerne ao que nos propomos, ficou claro que a pesquisa deve seguir novos delineamentos e desdobramentos.

Palavras-chave: Filosofia da Matemática; Objetos Matemáticos; Professor de Matemática.

ABSTRACT

The relationship between Mathematics and Philosophy is ancient, intertwining like a symbiosis to the point of having a specific field of study. The present research investigates the nature of mathematical objects in the thoughts of philosophers Plato and Aristotle, as well as the currents of the Philosophy of Mathematics that emerged in modernity and their possible implications for the training of mathematics teachers. The Philosophy of Mathematics is a complex field that emanates multifaceted questions involving historical-philosophical-ontological-epistemological aspects. In this context, during the development of Mathematical Science, some philosophical questions arose that are studied, such as: what is the nature of mathematical objects? Is mathematics created or discovered? Are mathematical entities real or fictitious? We understand that such questions should also be present among the topics studied by students and teachers who engage with mathematics. For the development of this qualitative research, we will use bibliographic methodology. To this end, we initially propose a search in the state of the art from databases of dissertations, theses, and articles. Next, we carried out the process of selecting authors who address the Philosophy of Mathematics and the initial training of Mathematics teachers. We consider Plato and Aristotle, with their metaphysical and ontological projects, as pioneers in the reflection on mathematical objects, inaugurating what would be called the Philosophy of Mathematics. We perceive that the classical currents that emerged at the end of the 19th century and the beginning of the 20th century: Logicism, Formalism, and Intuitionism, each in their own way, elaborated an explanatory framework for the nature and knowledge of mathematics. These conceptions, added to Platonism, have been and continue to influence the field of mathematics teacher training. We note some implications stemming from what these schools of thought advocated and how they have been adopted by pedagogical trends in teaching. We understand that teacher training, even at the undergraduate level, is a vast field that allows for extensive discussions. With regard to our proposal, it became clear that the research should follow new delineations and developments.

Keywords: Philosophy of Mathematics; Mathematical Objects; Maths teacher.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Síntese Metodológica 41
Figura 2 - Graus do Conhecimento 52
Figura 3 - O quadrado do Mênon usando o Teorema de Pitágoras 55
Figura 4 - Processo de Aquisição do Conhecimento de Aristóteles 60
Figura 5 - Classificação das ciências no conhecimento aristotélico 60
Figura 6 – Correntes Filosóficas e a Educação 86

LISTA DE QUADROS

Quadro 1- Definições Euclidianas do livro 1 dos Elementos 36
Quadro 2 – A Linha dividida em Platão..... 50
Quadro 3 - Classificação das Ciência em Aristóteles..... 59
Quadro 4 - Carta de Russell para Frege 69

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....25
1.1 Histórico dos antecedentes da Pesquisa..... 25
1.2 As raízes da Matemática 26
1.3 A Relação entre a Filosofia e Matemática 27
1.4 Objetos Matemáticos..... 29
1.5 Correntes da Filosofia da Matemática 30
1.6 A Formação Matemática do Professor..... 31
2 CONTEXTO E ESBOÇO DA PESQUISA 34
2.1 DELIMITANDO O PROBLEMA..... 34
2.1.1 Objetos Matemáticos 35
2.2 APRESENTAÇÃO DOS OBJETIVOS..... 39
2.3 PLANO METODOLÓGICO 39
2.4 CONSIDERAÇÕES INCIAIS..... 41
3 OS OBJETOS MATEMÁTICOS EM PLATÃO E ARISTÓTELES 45
3.1 PLATÃO E O MUNDO DAS IDEIAS 45
3.1.1 Síntese Biográfica..... 45
3.1.2 O Mundo das Ideias..... 46
3.1.3 Três textos platônicos 47
3.1.4 Uma síntese do Mundo das Ideias..... 50
3.2 A MATEMÁTICA NO DIÁLOGO *MÊNON*..... 50
3.2.1 Os graus do conhecimento em Platão..... 51
3.2.2 A Teoria das Reminiscência de Platão 53
3.2.3 A Matemática no diálogo Mênon 54
3.3 ARISTÓTELES E O CONHECIMENTO..... 56
3.3.1 Vida e obra 56
3.3.2 Divergências entre Mestre e Discípulo..... 57
3.3.3 Aristóteles e a Sistematização do Conhecimento..... 58
3.3.4 Aristóteles e o Processo de Aquisição do Conhecimento 59
3.4 O SABER MATEMÁTICO EM ARISTÓTELES 60
3.4.1 Objetos das Ciências Físicas 61

3.4.2. Objetos das Ciências Matemáticas 61
4 FILOSOFIA DA MATEMÁTICA E POSSÍVEIS IMPLICAÇÕES NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA 64
4.1 PLATONISMO 64
4.2 LOGICISMO 66
4.2.1 Lógica matemática 67
4.3 FORMALISMO 70
4.4 INTUICIONISMO 72
4.4.1 Intuição 72
4.4.2 Intuicionismo 73
4.5 FILOSOFIAS DA MATEMÁTICA E A FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA 76
CONSIDERAÇÕES FINAIS 87
REFERÊNCIAS 89

1. INTRODUÇÃO

O estilo de um autor, assim como a graça de cada criatura, depende, porém não tanto de seu gênio, mas daquilo que nele é isento de gênio, de seu caráter.

Agamben (2007).

1.1 HISTÓRICO DOS ANTECEDENTES DA PESQUISA

Para compreender melhor essa pesquisa, vamos começar pelo início ocorrido há 10 anos. Tudo começou, quando já graduada em *História* pelo Centro Universitário Inta – UNINTA, e prestes de concluir a graduação em *Filosofia* pela Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA, decidimos fazer o TCC intitulado *Filosofia da Matemática: um enfoque platônico* (2013).

Quando disse "decidimos" é que o meu despertar para o tema nasceu das aulas de *História da Matemática* e da *História da Astronomia* do Professor Fabius Bonnet que ocorrera nos cursos de graduação e de especialização em Matemática do UNINTA. Encantada, não apenas com as aulas, mas com o brilhante professor, me tornei sua esposa. Recordo do impacto da sua explicação de que *triângulos não podem existir*. Ele argumentava usando a definição de Euclides de que "Ponto é aquilo que não tem parte" e questionava: "Como pode existir algo que não tem partes?" Admitindo que uma reta é formada de pontos, ela não poderia existir; e se um triângulo é formado de retas, ele também não poderia existir. Então, naquela aula eu perguntei: *Afinal o que os nossos olhos veem é ou não um triângulo?* Naquela época, com 20 anos de professor de Matemática da UVA nas disciplinas, de História da Matemática, Teoria dos Números e Evolução Histórica da Física, ele já tinha um amor pelo tema e me foi transmitido. Vale registrar as suas tentativas fracassadas de incluir a Filosofia da Matemática na matriz do curso de Licenciatura em Matemática.

Entretanto, os relatos das minhas raízes intelectuais, estariam incompletos se não comentasse a clareza das aulas de Astronomia que tratavam da *Cosmologia de Aristóteles.* É que foram elas que me levaram ao TCC da Licenciatura de História: *Eclipse de Sobral*, *aspectos científicos e sociais* (2011). Esse trabalho, representava o meu olhar de recém professora de história unido a percepção cientifica do meu orientador Prof. Bonnet. Como fecho da vida acadêmica, vale dizer que o TCC se transformou no livro *Eclipse de Sobral: cem anos de história* (2019), no ano que foi comemorado o centenário desse eclipse e que veio provar a previsão de Einstein: *A luz faz curva*. Com isso a nossa

Sobral está nos anais da ciência, pois 6 meses depois do eclipse, Einstein tornara-se um mito.

1.2 AS RAÍZES DA MATEMÁTICA

Pelo título dessa dissertação já vemos que que o conceito de *objetos matemáticos* é um item de destaque e é sabido que ele nasce na filosofia de Platão e Aristóteles. Por isso, como professora de história, vejo que é importante contextualizar o leitor com o próprio nascimento da Matemática, sempre lembrando que impossível ressuscitar integralmente o passado. Apesar disso, é possível usar diferentes documentos históricos e uma análise contextualizada, para chegarmos próximo à realidade de um evento ocorrido no passado.

Para Heródoto, o pai da História, a Geometria prática nasce no Egito Antigo e para os historiadores da Matemática, a Geometria como ciência demonstrativa surge na Grécia. As primeiras informações sobre a Matemática grega vêm do século VI aC, na época do nascimento da Filosofia, com *Tales* e *Pitágoras.* Mas é importante dizer que existem muitas inferências sobre as *contribuições* destes pensadores, as quais já passaram para a categoria de tradição. É que nem Tales e nem Pitágoras escreveram algum texto que tenha chegado até nós, e o que sabemos sobre eles vêm de comentários de filósofos que vieram depois. Sobre esse início da história, Boyer (1996, p. 54) o historiador americano, no seu livro *História da Matemática*, diz:

> Os primeiros Jogos Olímpicos se realizaram em 776 a.C., e por esse tempo uma maravilhosa literatura grega já tinha se desenvolvido, evidenciada pelas obras de Homero e Hesíodo. Da matemática grega da época nada sabemos. Presumivelmente estava em atraso comparada com o desenvolvimento de formas literárias, pois essas se prestam melhor à continuidade da transmissão oral. Passaram-se ainda quase dois séculos até haver alguma citação, mesmo indireta, da matemática grega. Então, durante o sexto século a.C., apareceram dois homens, Tales e Pitágoras, que tiveram na matemática o papel de Homero e Hesíodo na literatura. (...) Tales e Pitágoras também são figuras imprecisas historicamente, embora menos que Homero e Hesíodo; mas no que se refere as suas obras, o paralelo com Homero e Hesíodo cessa. Não sobreviveu nenhuma obra de qualquer deles, nem se sabe se Tales ou Pitágoras jamais compuseram tal obra. O que fizeram deve ser reconstruído com base numa tradição, não muito digna de confiança, que se formou em torno desses dois matemáticos antigos.

Na verdade, temos mais dúvidas sobre a Matemática grega de 600 aC, do que da Geometria babilônica de 1700 a.C. Isso se deve ao fato de os escribas escreverem em blocos de argila possibilitando que seus cálculos chegassem até nós. Em contrapartida, nem artefatos matemáticos do período de Homero se preservaram, porque os gregos escreviam em papiro e não há texto original de matemáticos gregos até 500 a.C. Tudo o que sabemos sobre Tales e Pitágoras vem de matemáticos e filósofos que escreveram sobre eles. Por exemplo, Aristóteles escreveu uma biografia de Pitágoras, mas foi perdida.

A fonte mais antiga sobre a Matemática grega é devida a Eudemo, um discípulo de Aristóteles que escreveu uma *História da Geometria* (330 aC). Portanto, se tivéssemos acesso a essa história, estaríamos lendo, segundo Eudemo, o que fizera Tales dois séculos antes. Entretanto, para a infelicidade de um historiador, nem essa história de Eudemo foi preservada. Mas, antes que ela desparecesse alguém resumiu uma parte dela, porém o original desse resumo está também perdido. Então, como sabemos desse passado da Matemática? Isso foi possível através do filósofo e matemático neoplatônico Proclo (410-485) que estudou em Alexandria e tornou-se um líder da Escola de Atenas. É que ele escreveu um comentário sobre Euclides que felizmente chegou até nós.

Na Antiguidade e na Idade Média, era comum encontrar autores comentando a obra de grandes pensadores do passado, por isso eles foram chamados de *comentaristas*. Foi devido a eles que belas obras científicas não foram integralmente perdidas. Eles fizeram na Antiguidade o que os livros paradidáticos atualmente fazem no ensino: divulgam, interpretam e ensinam. Por exemplo, Euclides foi comentado por Pappus (300), Theon (390) e Proclo (460). Até podemos considerar que Aristóteles foi o primeiro comentarista, pois nos seus trabalhos originais ele comentava sobre estudos do mesmo tema feito por outros que o antecederam. O objetivo do Aristóteles era ao contextualizar o seu leitor quanta ao tema, mas indiretamente ele registrava a história ocorrida.

1.3 A RELAÇÃO ENTRE A FILOSOFIA E MATEMÁTICA

Para a maioria das pessoas a *Filosofia* e a *Matemática* são duas áreas de conhecimento bem diferentes. Essa maioria poderia argumentar o seguinte: a Filosofia estuda de maneira *subjetiva* a Ética e a Metafísica, enquanto a Matemática calcula *objetivamente*, por exemplo, o volume de um cubo ou a inclinação de uma reta, e concluiriam: portanto elas não devem ter pontos de estudos em comum.

Ainda reafirmando essa distinção, uma pessoa poderia argumentar que a diferença entre ambas já está na classificação dos cursos universitários: a Filosofia está

no Centro de Ciências Humanas, enquanto a Matemática pertence ao das Ciências Exatas. Outro aspecto da distinção entre elas, é quando comparamos as avaliações pedagógicas nestes dois cursos de graduação. Por exemplo, numa prova de Filosofia espera-se que o aluno responda, não com um texto previamente concebido pelo professor, mas que ele discorra livremente sobre ideias fundamentada nas aulas, e venham a responder corretamente à pergunta feita. Diferentemente, nas avaliações da Matemática esperamos respostas calculadas, e mesmo que sejam usados métodos diferentes, ainda assim o resultado obtido pelo aluno, será mesmo que previamente fora calculada pelo professor.

Concordamos que a Matemática e a Filosofia são diferentes, mas tão distintas quanto as aparências mostram. É que refletindo profundamente sobre a *natureza* daquilo que ambas estudam sobre o *conhecimento*, começaremos o notar pontos em comum entre essas duas áreas do saber. A relação entre a Filosofia e a Matemática surge no limiar do *prático* com o *abstrato* aos olhos dos filósofos e dos matemáticos. É que estes últimos usam, desde sempre, a ideia do filósofo Aristóteles de que tudo que vier a ser usado para fundamentar uma dedução lógica, precisa ser previamente definido. Para melhor compreensão vamos exemplificar isso através da *definição de triângulo*:

- Os matemáticos definem triângulos como sendo uma superfice plana limitada por três retas;
- Os filósofos poderiam perguntar: Onde podemos encontrar essa figura para que ao olharmos possamos melhor compreendê-la?
- Os matemáticos diriam: não sei e nem importa onde estejam, pois o que nos interessa é a veracidade das relações entre os elementos dos triângulos para que possamos usá-la na solução de problemas;
- Os filosofos questionariam: Mas como usar *confiantemente* uma relação entre elementos de uma figura se não sabemos se ela própria existe?

É desse debate dialético que podemos exemplificar *os pontos comuns* entre a Filosofia de Platão e a Matemática de Euclides. Podemos dizer que neste ponto que nasce a *Filosofia da Matemática*. Ela surge quando os filósofos se debruçaram sobre a análise do conhecimento matemático, fazendo perguntas sobre aquilo que veio a ser chamado de *objetos matemáticos*.

Essa percepção holística do conhecimento, vem na contramão da visão popular da distinção entre a Filosofia e a Matemática, a qual precisa ser debatida pelos professores de ambas as disciplinas. Aliás o título dessa dissertação: *Filosofia da Matemática*, pretende ***não*** apenas informar a área geral da pesquisa, mas difundi-la no nosso ambiente acadêmico. Já o longo subtítulo: *os objetos matemáticos e as implicações*

da Filosofia da Matemática na formação matemática do professor constituem uma síntese imediata dessa própria pesquisa, que nesta introdução apenas contextualizamos.

Na verdade, o subtítulo pode ser dividido em três temas. Primeiro, os professores de filosofia ou de matemática poderiam perguntar: *O que é um objeto matemático?* Bem, nesta introdução apenas exemplificamos o conceito para relacionar tais *objetos* com o segundo tema: *As correntes da Filosófica da Matemática.* Finalmente, investigaremos se esses dois temas estão relacionados perguntando: A *Filosófica da Matemática* exerce implicações sobre a formação matemática do professor do durante a sua graduação?

1.4 OBJETOS MATEMÁTICOS

Todos sabemos que o vocábulo "objeto" tem diferentes significados e é usado em variados contextos do cotidiano. Quando é empregado significando "coisa" podemos dizer que: objeto é um corpo material construído com um objetivo de uso. Por exemplo, o serrote é um exemplo de objeto. O carpinteiro usa o serrote como objeto de trabalho na construção de móveis.

Em outra situação do cotidiano, advogados usam o termo "objeto da ação" como sendo o texto que relata fatos supostamente ocorridos. Uma outra maneira de interpretar é pensar objetos bem mais genéricos, como aqueles estudados nas diversas ciências. Assim, por exemplo, na Biologia, o objeto de estudo são as diferentes formas de vida, como animais, plantas e bactérias. Na Astronomia o objeto de estudo são os diferentes fenômenos naturais relacionado aos astros como o eclipse e o equinócio. É daqui que vem a pergunta: Qual é o objeto de estudo da Matemática?

No primeiro momento a resposta que nos vem à cabeça seria: os números. É que recordamos que a Matemática usa os números para explicar as coisas do mundo. Mas logo incluiríamos os triângulos nas explicações do mundo e eles quais não são números. Pensando mais um pouco, lembraríamos das equações que não são números nem figuras geométricas. Desse modo, podemos dizer que números, triângulos e equações são exemplos de objetos matemáticos. Discutiremos com mais profundidade esse tema no **Capítulo 2** que tratará dos objetos matemáticos em Platão e Aristóteles.

1.5 CORRENTES DA FILOSOFIA DA MATEMÁTICA

Refletindo sobre os *objetos matemáticos*, somos levados a mesma pergunta que já estamos acostumados a fazermos sobre os objetos de outras ciências relacionadas ao *tempo* e ao *local*. Por exemplo, para a Biologia, a *vida* nem sempre existiu. Para a Física, o *próton* localiza-se no núcleo do átomo. Então, perguntamos aos matemáticos: onde estão as retas? Os números sempre existiram? E os triângulos passaram a existir só depois que os homens o construíram? Tais questionamentos fazem parte de *Filosofia da Matemática*. É nesse campo de conhecimento científico que encontramos várias possibilidades de explicação da pergunta: Um triângulo sempre existe?

Achados arqueológicos mostram que a ideia de número e de formas já estavam presentes no homem das cavernas, mas a ideia abstrata de demonstração só nasce na Grécia. Portanto, a Matemática como ciência abstrata, surge com os gregos e o filósofo Platão foi primeiro a perceber a *natureza* e *localização* dos objetos matemáticos. Para ele, um triângulo existe desde sempre no *Mundo das Ideias.* Entretanto, quando desenhamos um triângulo numa folha de papel, o que temos são apenas imitações imperfeitas da ideia de triângulo.

Com isso, Platão torna-se o fundador da *Filosofia Matemática*. Por outro lado, Aristóteles, seu discípulo maior, discorda em parte de seu mestre, e rejeita a existência do mundo platônico das ideias. Para Aristóteles os objetos matemáticos existem, porém *não* estão separados dos objetos do mundo real. Por exemplo, a forma triangular existe como aspecto intrínseco captado do triângulo real através dos sentidos.

Essa introdução já mostra a complexidade do objeto matemático. Diga-se de passagem, que desde o nascimento do *Cálculo Infinitesimal* vinham surgindo problemas que levavam a conclusões contraditórias e que culminaram, no século XIX, com dúvidas sobre seus fundamentos da matemática. Assim nasceu a pergunta de natureza filosófica: *Afinal o que é a Matemática*? Para responder, nascem as correntes da Filosofia da Matemática intituladas: *Platonismo*, *Logicismo*, *Formalismo* e *Intuicionismo*. Essas percepções diferentes sobre os objetos matemáticos e sua relação com a realidade serão apresentadas no Capítulo 3. Nele o leitor encontrará também uma discussão sobre como essas questões se relacionam com a educação, ao passo que podemos indicar possíveis implicações na formação inicial do professor de matemática.

1.6 A FORMAÇÃO MATEMÁTICA DO PROFESSOR

Agora, feito esse contexto filosófico e matemático, cabem perguntas de natureza pedagógica: 1) As correntes da Filosofia da Matemática são apresentadas ao futuro professor de matemática do Ensino Básico durante a sua graduação? 2) No âmbito da didática de conceitos matemáticos é importante que o professor conheça o conceito de objeto matemático? Na maioria das matrizes curriculares dos cursos de Licenciatura em Matemática está presente a disciplina de Filosofia da Matemática? A Filosofia da Matemática pode contribuir com a Didática da Matemática? Essas são algumas questões que podemos lançar diante do tema. Entretanto não é nossa pretensão traçar uma discussão piamente sobre todas estas, mas sim apontar caminhos que estão intrinsecamente relacionados.

A formação de professor é indubitavelmente um tema de grande relevância e que tem tomado rumos de investigação e pesquisa que tentam explorar e entender o processo educativo do sujeito à profissão que exerce. Nesse contexto é que temos autores aqui apreciados como: U. e B. D'Ambrósio, Fiorentini, Garcia, Tardif, Candiotto entre outros que nos apontam uma série de discussões que vão imbricando em tantas outras no mundo da educação de maneira geral e específica da Educação Matemática.

O grande desafio é estabelecer a relação dos alunos a partir da sua realidade com os saberes produzidos ao longo da história da Matemática. Como realizar essa prática? Isso compete ao processo de formação desses futuros professores? Em que medida se revelam os problemas pedagógicos na formação inicial desses futuros na sua trajetória profissional? A complexidade e vastidão de discussões que estão em volta da formação de professores é algo a se levar em consideração, visto que se atendem a pelo menos categorias do tipo:1) acadêmica; 2) experiência e 3) continuada (Candiotto, 2014, p. 108).

O fato é que essas formações estão interligadas e que ao nos deparamos com isso, automaticamente nos levam a vários caminhos de possibilidades que se comunicam como se fossem redes de conexões. Em outras palavras, quando investigamos um dos tipos, há de fincar raízes em outra e assim por diante, e que na prática todas tratam de um mesmo sujeito, porém em etapas de formação diferente, mas que não se anulam. Quando partimos do pressuposto de que tal sujeito é histórico, filho de sua época e de uma sociedade que está em constante transformação. Vejamos, Candiotto (2014, p. 109-117):

> A formação acadêmica é um fator consideravelmente decisivo na ação pedagógica do professor de matemática. É nesse tempo que começa a idealização do que é ser um bom profissional, pois os cursos de licenciatura se estruturam com disciplinas que não só tratam de especialidades conceituais matemáticas como também de teor pedagógico, filosófico, psicológico, entre outros. A formação do acadêmico, até então, é um fator delineador, num primeiro momento, das construções dos ideais docentes que nortearão seu caminho.
> A identificação especifica com o conhecimento matemático não é a garantia para se constituir "professor de matemática". Isso significa dizer que no processo de formação, quer acadêmica ou continuada, os novos conceitos de ordem pedagógica, filosófica e epistemológica estão para serem apropriados pelo professor. Caso contrário, a adjetivação "professor de matemática perderia sentido e descaracterizaria o papel do curso de licenciatura.

Para Tardif (2014, p. 85) o que estar em jogo é especialmente o lugar que se está inserido, como foi o contato com as teorias, conteúdos e como isso se entrecruzam num processo dinâmico de formação, entendendo que este é longo, e que não cabe á nos aqui traçar uma receita pronta para resolver tamanha questão-problema. É válido sublinhar que precisamos entender que para além de um futuro professor, nós estamos diante de um sujeito. E cabe o entendimento de que antes de adentar uma universidade e cursar uma graduação, já traz consigo um leque de conhecimentos, experiências vivenciadas em sua formação humana enquanto ser coletivo, mas que também possui uma identidade.

Com a pretensão de alcançar um ensino de qualidade, entender melhor os sujeitos que são docentes e suas práticas revelam em parte, o debate da formação de professores. Em meio a isso os agentes e os aspectos políticos, sociais, culturais por exemplo, que estão envolvidos e seguem um fio que conduz a compreensão e confronto entre a teoria e prática, no sentido de buscar melhorias a partir de um determinado contexto. Ora, poderíamos citar como um exemplo disso o que vivenciamos há quatro anos, mas que estão ainda a perdurar resquícios: o negacionismo na ciência. Embora este seja nada novo, tendo em vista que a história científica registrou casos como de Galileu na inquisição.

No que se refere aos processos de formação do professor e sua identificação com a prática, além de pensar no desenvolvimento profissional desse sujeito que aprende, Garcia (2009, p. 09) afirma que o próprio conceito de formação de professor sofreu modificações ao longo da história, pelo fato de se buscar entender tais processos

> Ser um bom professor pressupõe um longo processo. Os candidatos que chegam às instituições de formação inicial de professores não são recipientes vazios. Nas suas investigações, Lortie (1975) afirma que as milhares de horas de observação enquanto estudantes contribuem para a configuração de um

> sistema de crenças acerca do ensino, por parte dos aspirantes a professores, e, por outro lado, ajuda-os a interpretar as suas experiências na formação.
> De uma maneira geral, nota-se uma grande insatisfação, tanto por parte das instâncias políticas como da classe docente em exercício, acerca da capacidade de resposta das actuais instituições de formação às necessidades da profissão docente.

Diante de tal situação que nos assola no campo da educação de uma maneira geral, o qual vivenciamos diariamente em nossa prática docente também, fica claro uma estatística de defasagem no ensino assim como nossas aspirações em formação de qualidade daquele que irá ocupar a atividade docente em breve. Somos bombardeados a todo instante pelo meio de comunicação de massa no que tange, por exemplo ao *déficit* de ensino e aprendizagem dos alunos na matemática. Eis a pergunta: Que aluno temos ou teremos? Que profissional se tornará num futuro que é presente? O que é necessário ele saber e ou fazer?

Considerando essas discussões, D'Ambrósio impulsiona nossas investigações sobre os processos formativos desse futuro professor que caminha no século XXI. Esta traz uma proposta que apresenta algumas características como metas a serem alcançadas pelo professor de matemática: 1) visão do que vem a ser a matemática; 2) Visão do que constitui a atividade matemática; 3) visão do que constitui a aprendizagem da matemática; 4) visão do que constitui um ambiente propício à aprendizagem da matemática. Tais considerações iniciais aqui expostas serão retomadas no *corpus* da pesquisa nas páginas adiantes. Se sinta convidado a embarcar nesse desafio prazeroso da pesquisa.

Na próxima sessão, **capítulo 1,** vamos realizar uma exposição sobre as questões que norteiam a pesquisa, uma contextualização histórica, do problema, e da proposta pretendida e elaborada para tal dissertação. Nele colocamos em uma breve esquematização da metodologia que esta terá em seu processo.

2 CONTEXTO E ESBOÇO DA PESQUISA

- "Gato Cheshire..., quer fazer o favor de me dizer qual é caminho que eu devo tomar?
-Isso depende muito do lugar para onde você quer ir – disse o Gato.
- Não me interessa muito para onde... - disse Alice.
- Não tem importância então o caminho que você tomar - disse o Gato".

Lewis Carroll

Nesse capítulo vamos apresentar brevemente os caminhos da presente pesquisa. Para isso iniciaremos uma pálida noção contextual das ideias que disseminam o trajeto histórico da temática em questão. O leitor encontrará aqui alguns itens que classificamos para melhor exposição textual e entendimento da estrutura do trabalho. Os pontos em destaque procuram sobretudo traçar uma sequência lógica do que nos propomos analisar e discutir ao longo da dissertação. Dito isso teremos então: a questão do problema da pesquisa; os objetivos; justificativa; referencial teórico e um plano metodológico.

2.1 DELIMITANDO O PROBLEMA

Desde o início de nossa formação escolar já estudamos a Geometria. Atualmente, já no 1º ano do Ensino Fundamental, a criança aprende os nomes de figuras geométricas, como *triângulo*, *quadrado*, *retângulo* e *circulo*, manipulando e desenhando, de modo que relacione a *forma* que vê ao *nome* que dizemos. Isso é uma influência das correntes da Psicologia da Aprendizagem sobre a Didática da Matemática, notadamente os trabalhos de Montessori com os "Materiais Dourados" e de Piaget, com o desenvolvimento cognitivo apresentado na *Epistemologia Genética*. Mas esse olhar didático da Geometria é apenas uma fração da sua longa história.

Nesse viés, vejamos a exposição clara de Candiottto (2016,p.140) ao analisar o objeto da geometria

> No movimento da produção do conhecimento matemático, aparecem elaborações de diversas civilizações, uma vez que essa ciência possui sua origem nos tempos mais primitivos. Podemos dizer que a Matemática se confunde com o surgimento do homem. A Geometria como entendemos hoje, por exemplo, era assimilada pelo homem primitivo intuitivamente ao calcular a distância entre ele e a caça, ao construir suas moradias e até mesmo ao empregar elementos estéticos em seus desenhos para representar a realidade por meio de seu misticismo. Com o tempo, a Geometria intuitiva ganhou elementos teóricos, mesmo que não sistematizados, e se tornou um conjunto de regras para a satisfação de necessidades imediatas. Nesse momento, a

> Geometria ainda estava diretamente ligada à realidade física, ou seja, não era compreendida como um possível conhecimento teórico desligado dos objetos físicos. Isso se dá, entre outros motivos, porque outras ciências também não tinham se desenvolvido suficientemente e suas necessidades ainda não impeliam a Matemática a se desenvolver.

Nesse sentido, a partir dos regsitros da História da Matemática, percebe-se que a Geometria prática segundo o historiador grego Heródoto, surge no Egito por volta de 1700 aC. No século VI aC. nasce com Tales e Pitágoras a necessidade de *demonstração* daquela geometria prática: provar a validade universal daquilo que os olhos veêm em algumas figuras geométricas.

Cerca de 200 anos depois, de acordo com Aristóteles, o geômetra Tales teria dito: "O promordial não é o que sabemos, mas porque sabemos?" Isso mostra uma presença do pensamento filosófico de Tales e, diga-se de passagem, foram necessários mais de mil anos apos a geometria prática, para surgir a geometria como ciência dedutiva, na obra *Os Elementos* (300 aC). Seu autor é o geômetra grego Euclides de Alexandria, que viveu no reinado de Ptolomeu no Egito. A obra é tão geométrica, que na primeira publicação no século XV tinha o título: *Os Elementos de Geometria* (1465).

Euclides foi aluno da Academia, portanto recebeu influências de Platão e Aristóteles. Essa obra é formada de 13 livros que reunem as mais importantes descobertas geométricas e aritméticas dos matematicos que o antecederam como: Pitágoras, Eudoxo e Teeteto. Entretanto, para compô-la Euclides se inspirou na Lógica de Aristóteles. É que quando analisamos *Os Elementos* vemos que Euclides edificou a Geometria Grega do seguinte modo: começa pelas *definições*, seguido de *axiomas* e *postulados* e finaliza com *proposições,* estas são demostradas a partir dos postulados.

2.1.1 Objetos Matemáticos

Recordemos que na introdução dissemos que o *objeto de estudo* da Biologia são as diferentes formas de vida, como animais e plantas, enquanto o objeto da Astronomia são os diferentes fenômenos naturais relacionado aos astros como o eclipse e o equinócio. Então perguntamos: *Qual é o objeto de estudo da Matemática*? Aqui vamos mostrá-los através das *definições* contidas nos *Elementos* de Euclides. Também recordemos que Euclides, em seu processo de eleboração da Geometria, segue a Lógica de Aristotélica, de modo a usar apenas conceitos antes definidos, para que as proposições geométricas, vindas das deduções lógicas, sejam consideradas verdadeiras. Isso mostra a importância das *definições euclidianas*.

De acordo com Eves (2004, p. 656) o discurso de Euclides é susceptível a várias críticas, sobretudo as suas definições

> A fim de iniciar o discurso de maneira a evitar círculos viciosos nas definições, impõe-se primeiro a fixação de um conjunto de conceitos primitivos, ou básicos, sobre cujo significado não pairem dúvidas. Todos os demais conceitos técnicos do discurso deverão ser definidos então por meio dos conceitos primitivos. Os postulados de um discurso são, portanto, em última a análise, afirmações que se assumem sobre os conceitos primitivos. Por esse ponto de vista, pode-se considerar que os conceitos primitivos estejam definidos implicitamente, no sentido de que eles são coisas ou noções que satisfazem os postulados, sendo essa forma de definição a única que um conceito primitivo pode receber. No desenvolvimento da geometria de Euclides os termos ponto e reta, por exemplo, poderiam muito bem ser incluídos no conjunto dos conceitos primitivos do discurso. De qualquer maneira, é fácil perceber que as definições de Euclides "Ponto é aquilo que não tem partes" e "Reta é um comprimento sem largura" envolvem círculos viciosos e portanto, de um ponto de vista lógico, são lamentavelmente inadequadas. Uma das distinções entre a concepção grega e a concepção moderna de método axiomático reside na questão dos conceitos primitivos; para os gregos não havia uma lista de conceitos primitivos. Justifica-se esse procedimento pelo fato de que para os gregos a geometria não era exatamente um estudo abstrato, mas uma tentativa de análise lógica do espaço físico idealizado. Para os gregos, pontos e retas eram idealizações de partículas muito pequenas e fios muito finos. É essa idealização que Euclides procurou expressar em algumas de suas definições iniciais. Há outras diferenças entre os pontos de vista grego e moderno sobre o método axiomático.

Os *Elementos* é uma obra composta de 13 Livros, e todos eles mantêm a estrutura de iniciar definindo os objetos para em seguida demonstrar proposições a cerca deles. Aquí é suficiente nos restringir ao *Livro I* que contém 23 *definições* e 5 *postulado*s. No quadro abaixo vemos essas definições euclidianas, retiradas da magnifica tradução do grego para o português feita pelo Prof. Irineu Bicudo em 2009. São essas definições que "criam" *objetos geométricos* como: ponto, linha, reta, superficie, círculo e triangulos.

Quadro 1- Definições Euclidianas do livro 1 dos Elementos

DEFINIÇÕES
1. Ponto é aquilo que não tem parte
2. Linha é um comprimento sem largura
3. Extremidade de linhas são pontos
4. Linha reta é aquela que está posta por igual com todos os pontos por si mesma
5. Superficie é aquilo que tem somente comprimento e largura
6. Extremidades de uma superfície são retas
7. Superficie plana é a que está posta por igual com as retas sobre si mesma
8. Ângulo plano é a inclinação, entre elas, de duas linhas no plano, que se tocam e nao estao postas sobre uma reta
9. Quando as linhas que contêm o ângulo sejam retas, o ângulo é chamado retilíneo
10. Quando uma reta, tendo sido alteada sobre uma reta, faça os ângulos adjacentes

iguais, cada um dos ângulos é reto, e a reta que se alteou é chamada uma perpendicular àquela sobre a qual se alteou

11. Ângulo obtuso é o maior do que um reto
12. Agudo, o menor do que um reto
13. Fronteira é aquilo que é extremidade de alguma coisa
14. Figura é o que é contido por algumas fronteiras
15. Círculo é uma figura plana contida por uma linha (que é chamada circunferencia), em relação à qual todas as retas que a encontram (até a circunferencia do circulo), a partir de um ponto dos postos no interior da figura, são iguais entre si.
16. O ponto é chamado centro do círculo
17. Diâmentro do circulo é alguma reta traçada através do centro, e terminando, em cada um dos lados, pela circunferencia do circulo, e que corta o círculo em dois
18. Semicirculo é a figura contida tanto pelo diametro quanto pela circunferencia cortada por ele. E centro do semicírculo é o mesmo do círculo.
19. Figuras retilíneas são as contidas por retas, por um lado, triláteras, as por três lados, e, por outro, quadriláteras, as por quatro, enquanto multiláteras, as contidas por mais do que quatro retas
20. Das figuras triláteras, por um lado, triângulo equilátero é o que tem os três lados iguais, e, por outro lado, isósceles, o que tem só dois lados iguais, enquanto escaleno, o que tem os três lados desiguais.
21. Ainda das figuras triláteras, por um lado, triângulo retângulo é o que tem um ângulo reto, e, por outro lado, obtusângulo, o que tem um ângulo obtuso, enquanto acutângulo, o que tem os três ângulos agudos.
22. E das figuras quadriláteras, por um lado, quadrado é aquela que é tanto eqüilátera quando retangular, e por outro lado, oblongo, a que, por um lado, é retangular, e, por outro lado, não é eqüilátera, enquanto losango, a que, por um lado, é eqüilátera, e, por outro lado, não é retangular, e rombóide, a que tem tanto os lados opostos quanto os ângulos opostos iguiais entre si, a qual não é eqüilatera nem retangular; e as quadriláteras, além dessas, sejam chamadas trapézios.

23 Paralelas sao retas que, estando no mesmo plano, e sendo prolongadas indefinidamente em cada um lados, não se encontrarão.

Fonte: EUCLIDES (2009).

Agora quando analisarmos as três primeiras definições euclidianas vemos o encadeamento lógico usado por Euclides: primeiro ele define ponto, depois a linha e em seguida define extremidade de linha como sendo pontos. Esse mesmo encadeamento de termos geométricos se repete nas definições 4, 5 e 6. Euclides espera que cada definição deixe claro o objeto geométrico que define, e certamente ele admitia que essa clareza vinha do convívio que os geômetras tinham com as figuras. Vejamos a sequência que *define um triângulo* que ele chamava de "trilátero".

13. Fronteira é aquilo que é extremidade de alguma coisa

14. Figura é o que é contida por algumas fronteiras

19. Figuras retilíneas são as contidas por retas por um lado, triláteras, as por três lados....

Agora uma proposição sobre os triângulos que foi demonstrada por Euclides: "*A soma dos três ângulos internos de qualquer triângulo é igual a dois retos*". Por mais de 2000 anos essa estrutura transformou a Geometria no modelo de ciência dedutiva.

Contudo, passados 24 séculos, agora com a maturidade de filósofos e matemáticos, surgiram questionamentos sobre essas definições euclidianas. Vejamos: A definição 1 diz: "Ponto é aquilo que não tem parte". Mas como admitir um objeto que não tenha parte? A definição 2 diz: "Linha é um comprimento sem largura". Mas, como traçar uma *linha* que não tenha largura?

Agora veja o efeito em cascata: Se uma *reta*, é um tipo de linha, então não teria espessura, portanto, não poderia também ser traçada. Daí figuras *triláteras* não seriam contidas por três retas que não foram traçadas. Aqui o filósofo perguntaria ao geômetra: como aceitar a veracidade daquela proposição sobre a soma dos ângulos de triangulos, se temos dúvidas da *existência de triângulos*? Assim, com as lentes da reflexão filosófica atual, podemos dizer o *objeto matemático* está problematizado nos *Elementos*.

Feito esse contexto de problematização, vejamos algumas questões que regem a discussão e os rumos da pesquisa. È importante também salientar que tais perguntas não serao em sua totalidade tratadas literalmente nessas páginas de uma dissertação.

O que são os objetos matemáticos? Como pensavam os Filósofos Platão e Aristóteles?
O que é Matemática?
Qual objeto de estudo da Ciência Matemática?
Como é construído o conhecimento matemático?
Em que contexto nasce a Filosofia da Matemática?
Quais implicações as correntes da Filosofia da Matemática podem trazer para a Formação do Professor durante a graduação?

2.2 APRESENTAÇÃO DOS OBJETIVOS

Geralmente os objetivos de uma pesquisa vem da resolução do problema proposto. De acordo com Appolinário (2015), os objetivos devem levar em consideração alguns elementos fundamentais nos trabalhos acadêmicos. Como exemplos citamos o tempo e os recursos disponíveis para a pesquisa.

Além disso, vale citar a experiencia do pesquisador e como a proposta de trabalho. Também podemos dizer que se define os objetivos de uma pesquisa acadêmica de algumas maneiras, por exemplo: 1) Partir de uma hipótese que se supõe solucionar um problema proposto; 2) Investigar a conexão entre dois ou mais fenômenos naturais ou sociais, 3) Tentar responder uma pergunta intuitiva de um pesquisador com muita experiência numa área da ciência ou da educação. Talvez essa última maneira esteja mais próxima dos objetivos dessa nossa pesquisa. Partindo disso, temos como objetivos a serem traçados e alcançados o que vemos abaixo:

Objetivo Geral

- Compreender como o conhecimento matemático é explicado nas filosofias de Platão e Aristóteles, bem como, estudar as correntes clássica da Filosofia da Matemática investigando quais possíveis implicações estas podem gerar na Formação do Professor.

Objetivos Específicos

1) Mostrar as diferentes explicações feitas por Platão e Aristóteles acerca dos objetos matemáticos;

2) Estudar a correntes clássicas da Filosofia da Matemática nos séculos XIX e XX mostrando como essas correntes explicam a natureza dos objetos matemáticos;

3) Investigar possíveis influências, se é que existem, na formação matemática do professor durante a sua graduação.

2.3 PLANO METODOLÓGICO

De acordo com Lakatos (2021, p. 59), quando pensamos em pesquisa precisamos entender que esta é uma atividade que se realiza para a investigação de

problemas teórico ou práticos. E que não se trata de uma procura incessante da verdade, mas de encontrar respostas para questões propostas, utilizando procedimentos científicos.

Nesse sentido, para que seja realizada a investigação faz-se, necessária a escolha dos procedimentos, da técnica e o tipo de pesquisa. Essa decisão é importante para todo o desenvolvimento da pesquisa cientifica. Segundo Fachin (2006, p. 51), os métodos são instrumentos

> [...] imprescindíveis para o desenvolvimento da investigação científica. Constituem um meio de procedimento sistemático e ordenado para o alcance de novas descobertas. Sem o emprego deles tudo será especulação sem fundamento, pois somente com o embasamento dos procedimentos metodológicos é que se poderá assegurar o desenvolvimento e a coordenação das diversas etapas de uma pesquisa. Todavia, tudo deve ser baseado em um planejamento adequado em função da investigação.

Tendo inicialmente o tema, o problema, os objetivos e o levantamento do estado da arte. Dá-se, então, a pergunta: como será realizada? Qual caminho devemos percorrer? Ao se definir isso, tem-se o norte do trabalho. O desafio para a escolha do método na pesquisa é algo também definidor de todo o desenvolvimento dela. Nos põe contra a parede para bem pensarmos os rumos e instrumentos que nos auxiliarão numa longa jornada de investigação. É preciso ter cautela na apropriação e escolha correta para realização diante de tantas possibilidades de métodos que a ciência possui. Ao compreendermos isso, podemos dizer que se torna indiscutível que uma dada pesquisa pode a partir desta ter novos olhares sobre um mesmo objeto, inclusive um bem diferente do que poderá ter o nosso. O fazer científico é isso, elaboração e produção de conhecimento, de perspectivas baseadas em leis, fatos, teorias e métodos, e não em achismos. E esse é, portanto, o nosso caminhar

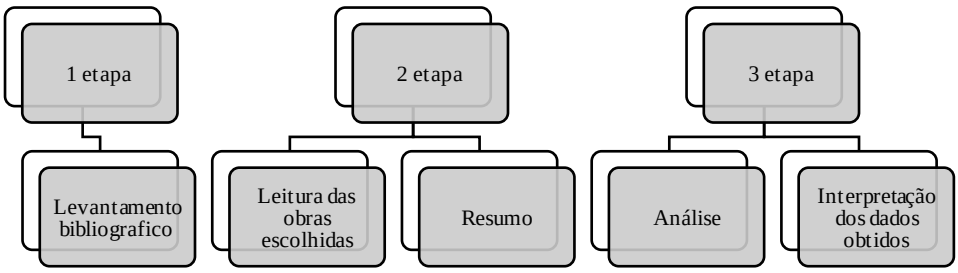
A metodologia a ser utilizada nesta pesquisa é uma análise bibliográfica, de alguns diálogos platônicos; livros da história da matemática e da filosofia; e artigos de especialistas na filosofia da matemática. Assim utilizamos o método hermenêutico de análise, como diz Severino (2017, p. 131),

> A pesquisa bibliográfica é aquela que se realiza a partir do registro disponível, decorrente de pesquisas anteriores, em documentos impressos, como livros, artigos, teses etc. Utiliza-se de dados ou de categorias teóricas já trabalhados por outros pesquisadores e devidamente registrados. Os textos tornam-se fontes dos temas a serem pesquisados. O pesquisador trabalha a partir das contribuições dos autores dos estudos analíticos constantes dos textos.

A investigação restringe-se aos diálogos platônicos *Mênon* e *A República*. Em Aristóteles os livros *Metafísica* e *Organon*. Em alguns momentos recorreremos os

especialistas como Reale (1997), Chauí (1994) e Aranha (2006). Sobre as correntes da Filosofia da Filosofia da Matemática e da História da Matemática vamos nos fixar em Meneghetti (2010), Boyer (1974) e Eves (2004). Quanto as implicações das correntes da Filosofia da Matemática na formação matemática de professores utilizaremos alguns textos de D'Ambrósio e Fiorentini. Naturalmente usaremos outros autores que podem contribuir objetivamente com seus comentários como Caraça e Shapiro.

Figura 1- Síntese Metodológica



Fonte: Elaboração nossa.

Como é sabido a pesquisa bibliográfica se vale da contribuição de vários autores, para trazer um olhar com interpretação e enfoque direcionado ao objetivo de determinada pesquisa ou de um problema proposto. O esquema acima resume isso.

2.4 CONSIDERAÇÕES INCIAIS

Comecemos perguntando ao professor de Matemática do Ensino Básico: *Qual é o objeto de estudo da Matemática?* Ele certamente teria dificuldades em elaborar uma resposta. Talvez a primeira resposta seja: os *números* e as figuras *geométricas*. Mas, depois de questionado por um filósofo, perceberia que sua resposta está incompleta, pois *funções* são estudadas pela matemática atual e, apesar de conter os números e as figuras, elas não se restringem a isso. Se isso ocorre, como supomos, isso é uma lacuna na formação matematica professor do Ensino Básico. Essa nossa pesquisa pode contribuir para uma reflexão na formação desses professores.

No livro *Conceitos Fundamentais da Matemática*, o matemático português Bento de Jesus Caraça, nos aponta a importância de refletirmos sobre a *matemática e seus objetos*. De acordo com Caraça (1988, p.13), comenta que a Matemática trata de problemas próprios e na maioria deles, distante de questões do cotidiano. "Mas não há

dúvida também de que seus fundamentos mergulham tanto como os de outro qualquer ramo da ciência, na vida real, uns e outros entroncam na mesma madre". No prefácio daquele livro Caraça ressalta duas atitudes em face da ciência. Vejamos:

> A ciência pode ser encarada sob dois aspectos diferentes. Ou se olha para ela tal como vem exposta nos livros de ensino, como coisa criada, e o aspecto é o de um todo harmonioso, onde os capítulos se encadeiam em ordem e sem contradições. Ou se procura acompanhá-la no seu desenvolvimento progressivo, assistir à maneira como foi sendo elaborada, e o aspecto é totalmente diferente – descobrem-se hesitações, dúvidas, contradições, que só um longo trabalho de reflexão e apuramento consegue eliminar, para que logo surjam outras hesitações, outras dúvidas, outras contradições.(...) No primeiro aspecto, a ciência parece bastar-se a si própria (...), no segundo, ao contrário, vê-se toda a influência que a vida social exerce sobre a criação da ciência. A ciência encarada assim, aparece-nos como um organismo vivo, impregnado de condição humana, com as suas forças e as suas fraquezas e subordinado às grandes necessidades do homem na sua luta pelo entendimento e pela libertação; aparece-nos, enfim, como um grande capítulo da vida humana social (Caraça, 1988, p. 13).

Modernamente os livros didáticos de matemática dizem que o *ponto*, a *reta* e *plano* são conceitos primitivos, isto é, conceitos que não podem ser definidos a partir de outros. Assim, podemos dizer que os matemáticos atuais "jogam pra debaixo do tapete" perguntas como: O que é um ponto? Onde estão as retas? Platão (427-347 a.C) foi o primeiro filósofo a tentar respondê-las na sua conhecida *Teoria das Ideais*. Na filosofia platônica, *a realidade* (sentida ou pensada) se divide em dois mundos: o *sensível* e o *intelectivo*. No primeiro temos a realidade material sujeita ao espaço e ao tempo. É o *objeto da opinião*. No segundo temos a realidade perfeita, imaterial, imutável, atemporal eque transcende oas sentidos. Para Platão o mundo intelectivo é concebido pelarazão e nela encontramos os objetos matemáticos o quais são *suprassensíveis.*

De acordo com Platão (1997, p. 223), os triângulos são entes perfeitos acessíveis apenas pelo intelecto, o que os olhos captam é uma imagem imperfeita do verdadeirotriângulo. No livro VI da *República,* no diálogo entre Glauco e Sócrates, este filósofo se referindo "aqueles que se dedicam a geometria e a aritmética" disse:

> Então, sabes também que eles [os matemáticos] utilizam figuras visíveis e raciocinam sobre elas pensando não nessas figuras, mas nos originais que elas reproduzem. Os seus raciocínios baseiam-se no quadrado em si mesmo e na diagonal em si mesma, e não naquela diagonal que traçam; ele vale para todas as outras figuras. Todas essas figuras que modelam ou desenham, que reproduzem sombras e seus reflexos nas águas, eles as utilizam como tantas outras imagens, para tentar ver esses objetos em si mesmo, que, de outro modo, só podem ser percebidos pelo pensamento.

Esse trecho manifesta as discussões iniciais na teoria platônica, tornando-o elemento fundador da *Filosofia da Matemática* no limiar da antiguidade grega.

Aristóteles ao discordar do idealismo platônico procurou desfazer o dualismo entre o sensível e o inteligível fundindo esses mundos platônico no *conceito de substância*. Nos livros XIII e XIV da *Metafísica,* Aristóteles expõe a natureza da Matemática. Ele defende a existência dos objetos matemáticos, mas discorda que eles existem separadamente dos objetos reais, isto é, eles *não* são *suprassensíveis*.

O trecho abaixo, do livro XIII da *Metafísica* vemos que Aristóteles não questiona a existência dos objetos matemáticos, mas nega que sejam suprassensíveis. Vejamos em Aristóteles (2012, p. 322):

> Ora, se os objetos das matemáticas existem, devem ou existir nas coisas sensíveis, como alguns opinam, ou separados delas como outros dizem; ou se não existem de nenhuma dessas maneiras, não existirá de modo algum ou existem de outra maneira. Assim, o que temos a discutir aqui não é propriamente sua existência, mas como existem. Que é impossível os objetos das matemáticas existirem nas coisas sensíveis e que, ademais, a doutrina que o sustenta é fantasiosa já foi indicado em nossa discussão das dificuldades, e as razões para isso são que dois sólidos não podem ocupar o mesmo lugar no espaço.

Para ele o mundo sensível é a única realidade e os objetos matemáticos são extraídos dos objetos sensíveis por meio do pensamento. Logo, os conceitos matemáticos são modos de tratar o mundo real. Agora trazendo essa discussão para a atualidade, Stewart Shapiro (2016, p. 25), filósofo da Universidade de Ohio, nome de destaque nessa área, no seu livro *Filosofia da Matemática* disse:

> Praticamente todas as fontes da geometria antiga, incluindo os Elementos de Euclides, fazem uso da linguagem dinâmica e construtiva: traçam-se linhas, movem-se figuras, aplicam-se funções. A esse respeito, a prática não mudou muito até hoje. Se a filosofia de Platão é correta, a linguagem dinâmica não faz sentido algum. Objetos eternos e imutáveis não são sujeitos a construção e movimento. Não podemos traçar uma linha reta ou uma circunferência que sempre existiu.

As transformações científicas mudaram os valores e os comportamentos da sociedade a tal ponto que hoje discutimos os limites dessa interferência, repensando os modelos, as práticas de consumo da relação do homem com a natureza.

É a partir do contexto social que a tecnologia encontra as motivações para seu desenrolar, que surgem a interação da ciência com a técnica. O âmbito da educação, do ensino não foge a essa realidade. E a matemática faz parte disso marcando a vida do homem moderno, como dizem Courant e Robbins (2000, p. 10) no seu livro *O que é matemática*?

> A Matemática, como expressão da mente humana, reflete a vontade ativa, a razão contemplativa, e o desejo da perfeição estética. Seus elementos básicos são a lógica e a intuição, a análise e a construção, a generalidade e a individualidade. Embora diferentes tradições possam enfatizar diferentes aspectos, é somente a influência recíproca destas forças antitéticas e a luta por sua síntese que constituem a vida, a utilidade, e o supremo valor da Ciência Matemática.

O Professor D'Ambrósio (2007, p. 22) grande nome da educação matemática – que infelizmente faleceu em 2021, deixando um legado para seus leitores – contribuindo fortemente para a discussão e formação humanizada de professores e alunos, criador da *Etnomatemática*, nos diz o seguinte:

> Dentre as distintas maneiras de fazer e de saber, algumas privilegiam comparar, classificar, quantificar, medir, explicar, generalizar, inferir e, de algum modo, avaliar. Falamos então de um saber/fazer matemático na busca de explicações e de maneiras de lidar com o ambiente imediato e remoto. Obviamente, esse saber/fazer matemático é contextualizado e responde a fatores naturais e sociais.

A atitude científica é uma busca criativa para solucionar os problemas rotineiros da realidade humana. Compreendemos que o homem pode fazer uma leitura da realidade de várias formas, usando o *senso comum*, *o crítico*, o *científico*, o *estético* ou *religioso*. De sorte, esses conhecimentos são apenas maneiras diferentes de relacionar-se com o mundo. Para o D'Ambrósio, a matemática deve dialogar com esses pensamentos e com o contexto em que estão inseridos. Torna-se necessário o estudo da História e Filosofia da Matemática na formação do professor. Ao analisar a educação matemática na visão intuicionista, o professor John Fossa (1998, p. 11), nos diz o seguinte:

> Em especial, é razoável supor que a nossa concepção sobre o que é a matemática afetará a maneira na qual a ensinaremos. Também afetará a maneira de fazer pesquisas em Educação Matemática. Assim, devemos investigar a ontologia da matemática. Além disso, talvez seja ainda mais patente que as nossas idéias sobre o que é o conhecimento matemático e como este é adquirido afetará o modo como a matemática deve ser ensinada. Assim, iremos investigar a sua epistemologia. Finalmente, as atitudes pedagógicas que assumimos na classe refletem e expressam um conjunto de valores morais e políticos.

A sociedade atual exigente cada vez mais conhecimento e atitudes quer sejam de alunos, professores ou pais para enfrentar os avanços rápidos da ciência, da tecnologia, e da informação. Mas como realizar essa tarefa ainda um desafio. O que vemos são problemas educacionais que continuam a existir na escola, na aula, na família como: a indisciplina, a desmotivação, a violência, evasão, desvalorização do professor.

3 OS OBJETOS MATEMÁTICOS EM PLATÃO E ARISTÓTELES

Mesmo na mente lúcida, há zonas obscuras,
cavernas onde ainda vivem sombras. Mesmo no novo homem,
permanecem vestígios do homem velho.
Bachelard

Nesse capítulo vamos estudar as teorias do conhecimento de Platão e de Aristóteles, visando o conhecimento matemático na perspectiva desses dois filósofos. Portanto, nos deteremos nos diálogos platônicos *A República* e *Mênon*. Já em Aristóteles, nos fixaremos nas obras *Metafísica* e *Organon*.

3.1 PLATÃO E O MUNDO DAS IDEIAS

3.1.1 Síntese Biográfica

De família aristocrata, o filósofo grego Platão (c.428-347 a.C.) nasceu em Atenas, vivenciou o chamado século de Péricles. Foi influenciado profundamente por Sócrates, chegando a dar continuidade ao pensamento de seu mestre, a quem dedicou maior parte de seus diálogos, tornando-o protagonista. Platão também herdou do filósofo Pitágoras a sua doutrina ao tratar de aspectos matemáticos em suas obras. Faz a primeira sistematização do conhecimento filosófico existente desde os filósofos naturalistas até sua época.[1]

Quando Platão tinha cerca de quarenta anos de idade, ele comprou uma propriedade nos arredores de Atenas e fundou a mais importante escola filosófica da Antiguidade: a *Academia*[2]. Nela estudaram os matemáticos Eudoxo, Teeteto, Euclides, dentre outros, bem como seu discípulo maior: Aristóteles. Por influência dos pitagóricos, a Matemática, com as suas divisões: Aritmética, Geometria, Música e Astronomia e eram

[1] Platão nasceu em Atenas, em 428/427 a.C. Seu verdadeiro nome era Aristócles. Platão é um apelido que derivou, como referem alguns, de seu vigor físico ou, como contam outros, da amplitude de seu estilo ou ainda da extensão de sua testa (em grego, *platos* significa precisamente "amplitude", "largueza", "extensão"). Seu pai contava orgulhosamente com o rei Codros entre seus antepassados, ao passo que sua mãe se orgulhava do parentesco com Sólon. Assim é natural que, desde a juventude, Platão já visse na vida política o seu próprio ideal: nascimento, inteligência, aptidões pessoais, tudo o levava para essa direção. Esse é um dado biográfico relevante, que incidiria profundamente na substância mesma de seu pensamento. Aristóteles nos relata que Platão foi inicialmente discípulo de Crátilo, seguidor de Heráclito. Posteriormente, foi discípulo de Sócrates. O encontro de Platão com Sócrates se deu, provavelmente, quando Platão tinha aproximadamente vinte anos. É certo, porém, que Platão frequentou o círculo de Sócrates com o mesmo objetivo da maior parte dos outros jovens, ou seja, não para fazer da filosofia a finalidade de sua própria vida, mas para melhor se preparar, pela filosofia, para a vida política. Entretanto, os acontecimentos orientariam a vida de Platão em outra direção. Para mais detalhes ver em Reale (1997, p. 125).

[2] A filosofia congregava todos os campos de conhecimentos que, na modernidade se especificaram em ciências, filosofia, moral e estética.

bastante apreciados na Academia Platônica. Com isso, passavam a formar os jovens, chegando a torná-los futuros governantes do Estado ideal platônico. Assim, produziu uma marcante história, que teve uma longa vida de nove séculos, não obstante, foi fechada em 529 d.C. com o decreto do Imperador Justiniano, dispersando seus filósofos.

A Academia foi retratada pelo pintor renascentista italiano Rafael Sanzio no afresco *A Escola de Atenas* (1509). Nele encontramos Platão e Aristóteles ao centro. O mestre aponta para o alto, para o mundo das ideias, enquanto o discípulo, Aristóteles, com a mão na horizontal parece trazer o diálogo para o mundo real. Também, são retratados Pitágoras, Euclides, Hipácia e o próprio Rafael. Platão escreveu a sua filosofia na forma de diálogos[3], conhecidos com *diálogos platônicos*. Suas obras ainda exercem fascínio, controvérsias e debates no meio acadêmico entre pesquisadores, tradutores, comentadores, e muitos daqueles que se depararem com os escritos de Platão.

3.1.2 O Mundo das Ideias

O projeto metafísico[4] de Platão vem do *suprassensível*, uma estrutura última da realidade, uma dimensão não física do ser. Para isso desenvolveu a conhecida *Teoria das Formas,* ou Teoria *das Ideias*. Diante disso, adota uma postura racionalmente pura e inteligível, a ponto deixar os sentidos num segundo plano. Com isso Platão assume uma postura bem diferente daquela dos filósofos naturalistas[5], chamados também de *físicos*.

Neste mundo das ideias estariam todas as *formas perfeitas,* que Platão designou de *eidos*. Entendendo que essas ideias[6] representam entidades, substâncias e não meramente conceitos, em outras palavras quer dizer que o que a torna ideia é justamente sua essência, *aquilo que faz com que cada coisa seja aquilo que é.* O mundo das ideias é lugar do imutável, do uno, do eterno, do imaterial.

Nele estão todas as ideias são perfeitas, como por exemplo, os sentimentos, as cores, as entidades numéricas e geométricas (linha, círculo, ponto.). Para Platão este é o mundo do ser e a sede da verdade. Em contraposição, está o mundo sensível, que é mera

---

[3] Com tantas polêmicas, a crítica mais recente considera como autênticos cerca de vinte e oito dos diálogos e algumas cartas de Platão, em particular a carta VII. Sobre isso podemos encontrar um estudo introdutório feito por Lygia Watanabe em: *Platão por mitos e hipóteses*.

[4] Platão parte para a metafísica com o objetivo de chegar à política. Ver Chauí (1994) e Reale (1997).

[5] Filósofos da natureza, como por exemplo, Tales, Anaxímenes, Heráclito, entre outros explicavam a totalidade por meio de fenômenos. Em outras palavras, a busca de um princípio (*arché*) para explicação da realidade, está sendo de caráter físico e mecânico, como o ar, o fogo, a água etc. E a esta fase Platão chamara de primeira navegação.

[6] A palavra grega *Idêa* significa forma. É comumente usada como sinônimo de ideia por alguns pesquisadores contemporâneos. Mas o principal é que tenhamos esclarecido que uma ideia platônica não se refere a um pensamento de alguém, ou um conceito, um conteúdo da mente, mas sim algo que existe por si mesmo como parte imutável, eterna da estrutura da realidade. Ela é fundamento e princípio de todo Ser e saber verdadeiro.

cópia, uma aparência, o mundo material mutável. Esse mundo não passa de uma sombra do verdadeiro mundo suprassensível.

3.1.3 Três textos platônicos

Para compreendermos melhor o dualismo da realidade em Platão vamos recorrer a apenas três textos platônicos intrinsecamente relacionados que estão no famoso diálogo A República: Analogia entre o Bem e o Sol; seguido da Linha dividida, e finalmente do Mito da Caverna. Eles estão respectivamente nos livros VI e VII. No primeiro Sócrates e Adimanto são os interlocutores do escritor Platão (2013, p. 219-220). Vejamos:

> **1- Analogia entre o Bem e o Sol**
>
> SÓCRATES – Qual é, na tua opinião, de todos os deuses do céu, aquele que pode realizar essa união, aquele cuja luz faz com que os nossos olhos vejam da melhor maneira possível, e que os objetos visíveis sejam vistos?
> ADIMANTO – O mesmo que tu e todas as pessoas reconhecem como senhor: o Sol
> SÓCRATES – Então, não está avista, pela natureza, nesta relação com esse deus?
> ADIMANTO – Que relação?
> SÓCRATES – Nem a vista é o Sol, nem o é o olho, onde a vista se forma.
> ADIMANTO – Evidente que não.
> SÓCRATES – Porém, de todos os órgãos dos sentidos, o olho é, no meu entender, o que mais se assemelha ao Sol.
> ADIMANTO – Sim, sem dúvida.
> SÓCRATES – Muito bem! E o poder que o olho possui não lhe vem do Sol, como emanação deste?
> ADIMANTO – Certamente.
> SÓCRATES – Não é também verdade que o Sol, que não é a vista, mas seu princípio, é percebido por ela?
> ADIMANTO – Sim, é.
> SÓCRATES – Pois é o Sol que eu chamo de filho do bem, que o bem engendrou à sua própria semelhança. Aquilo que o bem é, no campo da inteligência em relação ao pensamento e aos seus objetos, o Sol o é no campo do visível, em relação à vista e aos seus objetos.
> ADIMANTO – Como assim? Explica-me isso.
> SÓCRATES - Tu sabes, logicamente, que os olhos, quando contemplam objetos cujas cores não são iluminadas pela luz do dia, mas pela claridade dos astros noturnos, perdem a acuidade e parecem quase cegos, como se não fossem providos de visão clara.
> ADIMANTO — Sei-o muito bem.
> SÓCRATES — Mas, quando se voltam para objetos que o Sol ilumina enxergam distintamente e mostram que são providos de visão clara.
> ADIMANTO — Sem dúvida.
> SÓCRATES – Admite, portanto, que se dá o mesmo a respeito da alma. Quando ele fixa o olhar naquilo que a verdade e o ser iluminam, compreendi-o, conhece-o, e mostra que é dotada de inteligência, ...

Platão (2013, p.220) compara a ideia suprema de *Bem* com o *Sol* e ele destaca dois pontos, a visão e o conhecimento: o *Bem* como o pai e o *Sol* como seu filho. Mas

para enxergar isso com clareza Platão diz que se precisa da ***luz***, e esta é concedida pelo Sol. Assim, o papel desempenhado pela *ideia de bem* no mundo inteligível é análogo à do *Sol* no mundo sensível. Para Platão, o Bem é superior à beleza do conhecimento e da verdade[7].

Grosso modo, esta comparação entre o *Sol* (sensível) e o *Bem* (inteligível) presente na sua teoria, o fez considerar uma hierarquia de ideias. Sendo assim, o *Bem* ocupa o ápice desta "pirâmide", e esta é formada pela junção de duas ideias que estão no topo da perfeição: a *justiça* e a *beleza*, as verdades absolutas. Portanto, o Bem é ideia condicionante não condicionado por nenhuma outra ideia.

E esse diálogo entre *Sócrates* e *Glauco* no imaginário platônico continua. Num trecho mais adiante do mesmo livro VI, Platão, pela boca de Sócrates diz a Glauco que existem dois tipos de conhecimento o *visível* e o *cognoscível*. Esse ficou conhecido por "Linha Dividida", pois o próprio Sócrates diz: "pega a linha cortada em dois pedaços".

2- A linha dividida

SÓCRATES: - Considere, por exemplo, uma linha dividida em dois segmentos desiguais, depois continue a dividi-la da mesma maneira, distinguindo o segmento do tipo visível daquele do tipo inteligível. Com base na relativa clareza e obscuridade dos objetos você vai fazer um primeiro corte, correspondente às imagens. Considero tais em primeiro lugar as sombras, depois os reflexos na água e corpos opacos lisos e brilhantes e todos os fenômenos semelhantes a esses. Você está entendendo?
GLAUCO. - Sim, entendo.
SÓCRATES - Considere depois o outro segmento, do qual o primeiro é a imagem. Ele corresponde aos seres vivos, às plantas, a tudo o que existe.
GLAUCO. - Muito bem.
SÓCRATES -Você está inclinado a admitir que o mundo visível pode ser dividido em verdadeiro e falso e que a imagem está para o modelo como a opinião para a verdade?
GLAUCO - Sim, sem dúvida alguma.
SÓCRATES - Veja agora Como é preciso dividir o segmento que corresponde ao tipo inteligível.
GLAUCO -Isto é?
SÓCRATES - Na primeira seção de tal segmento, a alma, usando como imagens as coisas que no outro segmento eram os modelos, é obrigada a proceder por hipóteses, ao longo de um caminho que a conduz não para o princípio, mas para o fim. Depois, na segunda seção, ela procede em direção ao princípio absoluto sem recorrer às hipóteses e às imagens, conduzindo sua pesquisa somente por intermédio das ideias.
GLAUCO - Não entendi bem esta parte.
SÓCRATES -Vou explicá-la de novo. Talvez depois do que vou dizer agora, você irá entender melhor. Você sabe, acho, que os peritos em geometria, em aritmética e em cálculos semelhantes pressupõem o par e o ímpar, as figuras geométricas, as três espécies de ângulos e outros postulados análogos de acordo com a pesquisa que estão fazendo. Todos esses elementos eles os

[7] Vale ressaltar aqui que a ideia de Bem em Platão emana uma série de discussões das mais díspares que se possa imaginar. Assim como sua Teoria das ideias, uma vez que seu pensamento é repleto de várias interpretações. Todavia tal discussão foge do escopo deste trabalho.

> consideram como coisa comprovada, como premissas hipotéticas, tão evidentes que não o resto e, ao final, chegam à demonstração que procuravam.
> GLAUCO - Sei muito bem disso.
> SÓCRATES - Então, você sabe também que utilizam figuras visíveis e raciocinam a respeito, embora não pensem nelas, mas a seus respectivos modelos. Eles fazem os cálculos dos quadrados e do diâmetro em si, não daqueles desenhados e assim por diante. Servem-se das figuras que constroem e desenham, como se fossem sombras e imagens refletidas na água, como se fossem imagens também elas, procurando contemplar a essência daqueles seres que se compreendem somente com o pensamento.
> GLAUCO - Você tem razão

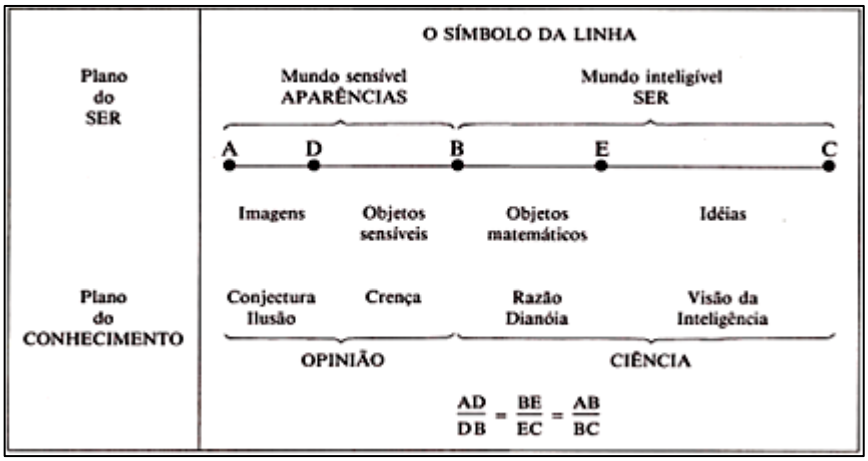
Aqui vemos que, neste trecho do Livro VI, Platão, usando Sócrates, trata de objetos da *Aritmética* e da *Geometria*, mas para dar continuidade, ele vai apresentar o "Mundo da Ideias" através do Mito da Caverna, no Livro VII da *República* (2013, p. 225-226). É isso que vemos a seguir:

> **3 - Mito da Caverna**
>
> SÓCRATES - Agora imagine a maneira como segue o estado da nossa natureza relativamente à instrução e a ignorância. Imagina homens numa morada subterrânea, em forma de caverna, com uma entrada aberta à luz; esses homens estão aí no interior desde a infância, de pernas e pelo pescoço acorrentados, de modo que não podem mexer-se nem ver senão o que está diante deles, pois as correntes os impedem de voltar a cabeça; a luz lhes vem de uma fogueira acesa numa colina que se ergue por detrás deles; entre o fogo e os prisioneiros passa uma entrada ascendente. Imagina que ao longo desse caminho está construído um pequeno muro, semelhante às divisórias que os apresentadores de títeres armam diante de si e por cima das quais exibem as suas maravilhas.
> GLAUCO- Estou vendo.
> SÓCRATES – Imagina agora, ao longo desse pequeno muro, homens que transportam objetos de toda espécie, que o transpõem: estatuetas de homens e animais, de pedra, madeira e toda espécie de matéria; naturalmente, entre esses transportadores, uns falam e outros seguem em silêncio.
> GLAUCO – Um quadro estranho e estranhos prisioneiros.
> SÓCRATES – Assemelham-se a nós. E, para começar, achas que, numa tal condição, eles tenham alguma vez visto, de si mesmos e dos seus companheiros, mais do que as sombras projetadas pelo fogo na parede da caverna que lhes fica defronte?
> GLAUCO – Como, se são obrigados a ficar de cabeça imóvel a vida toda ?
> SÓCRATES – E com as coisas que desfilam? Não se passa o mesmo?
> GLAUCO – Sem dúvida.
> SÓCRATES – E se a parede do fundo da prisão provocasse eco, sempre que um dos transportadores falasse, não julgariam ouvir a sombra que passasse diante deles?
> GLAUCO – Sim, por Zeus!
> SÓCRATES – Dessa forma, tais homens não atribuirão realidade senão às sombras dos objetos fabricados.
> GLAUCO – Assim terá de ser.
> SÓCRATES – Considera agora o que lhes acontecerá, naturalmente, se fossem libertados das suas cadeias e curados da sua ignorância. Que se liberte um desses prisioneiros, que seja ele obrigado a endireitar-se imediatamente, a voltar o pescoço, a caminhar, a erguer os olhos para a luz: ao fazer todos estes movimentos sofrerá, e o deslumbramento impedi-lo-á de distinguir os objetos de que antes via as sombras.

3.1.4 Uma síntese do Mundo das Ideias

Ao utilizar essa metáfora, Platão quis evidenciar que existem duas realidades no mundo: uma *sensível* e a outra *suprassensível*, a primeira é tida como falsa (aparência) e a segunda como verdadeira (real). A figura abaixo resume os tipos de conhecimento e os mundos segundo Platão, que representa as relações e suas distinções.

Quadro 2 – *A Linha dividida em Platão*



Fonte: Manon (1992).

No mito a imagem do interior da caverna representa o mundo em que vivemos apreendido pelos sentidos, o qual erroneamente acreditamos ser o *mundo real*. Já o *mundo das ideias* corresponde ao que está fora da caverna.

O mundo das ideias reflete dentro da caverna por meio de sombras que são vistas pelos seus prisioneiros, mas é ilusão. Por isso, precisamos desconfiar do que *vemos*, *sentimos* ou ouvimos. Ao escapar da caverna o prisioneiro consegue enxergar o que está além do visível, ou seja, as *formas.* Após sua saída, o prisioneiro filósofo deve retornar e comunicar o que vislumbrara aos outros companheiros ainda presos.[8]

3.2 A MATEMÁTICA NO DIÁLOGO *MÊNON*

Costumamos dizer que é no diálogo *Mênon* que encontramos a Matemática em Platão. Entretanto, para compreendê-lo precisamos passar pela *República,* pois

[8] Platão delineou em seu plano político uma forma para que a cidade tivesse um bom governo. Este deveria seguir antes de tudo a justiça. A cidade justa seria bem governada por filósofos que se tornassem reis, ou que os reis se tornem filósofos. Segundo Platão, os filósofos eram capazes de alcançar o grau mais elevado de conhecimento do mundo inteligível, por isso estes conhecem a verdadeira essência da justiça. Assim a filosofia desempenha papel fundamental, pois permite a prática rigorosa da política.

analisando o quadro anterior que simboliza a *linha dividida* que vemos os Mundos *sensível* e *inteligível.* No quadro também vemos onde estão colocados os *objetos físicos* e os *objetos matemáticos*.

Para uma melhor compreensão do conhecimento matemático em Platão, vamos dividir esse item assim: 1) Os *graus* de conhecimento em Platão; 2) A Teoria da Reminiscência, e 3) A Matemática no *Mênon.*

3.2.1 Os graus do conhecimento em Platão

Se retornarmos à leitura do mito da caverna, veremos que Platão simboliza níveis ou graus *de conhecimento*. No livro VI da *República* (2013, p 223-224) ele enuncia os graus de conhecimento entre o sensível e o inteligível como vemos nessa passagem:

> SÓCRATES – Eu afirmava que os objetos desse gênero pertencem à classe do cognoscível, mas que, para conseguir conhecê-lo, a alma é obrigada a recorrer a hipóteses, servindo-se destas como imagem dos mesmos objetos que produzem sombras no segmento inferior.
> GLAUCO – Compreendo-te em parte, mas não satisfatoriamente, porque tratas de um tema muito difícil. Queres estabelecer que o conhecimento do ser e do inteligível, que é adquirido pela ciência da dialética, é mais claro que aquele que é adquirido pelo que denominamos ciências, as quais possuem hipóteses como princípios. É certo que aqueles que se consagram às ciências são obrigados a utilizar o raciocínio, e não os sentidos. (....) Parece-me que denominas conhecimento discursivo, e não a inteligência, a geometria e outras ciências do mesmo gênero, considerando esse conhecimento intermediário entre a opinião e a inteligência.
> SÓCRATES – Compreendeste-me bastante bem. Aplica agora a estas quatro seções estas quatro operações da alma: a inteligência à seção mais elevada, o conhecimento discursivo à segunda, a fé à terceira, a imaginação à última; e dispõe-nas por ordem de clareza, partindo do princípio de que, quanto mais seus objetos participam da verdade, mas eles são claros.

Ao analisarmos esse texto, concluímos que o conhecimento está em dois campos: a opinião (*dóxa*) e a ciência (*epistéme*). E que ambos se realizam em níveis diferentes, ou seja, possuem graus ou forma de se apresentar a realidade ou o ser. Assim, no âmbito da opinião, estão presentes a imaginação e a crença por se tratar exclusivamente de sombras, como encontramos no mito da caverna, ou na linha dividida. A linha é basicamente uma divisão entre o mundo visível e o inteligível. Já na ciência compreende-se também em duas possibilidades: a ciência intermediária e intelecção pura.

Sendo assim, no grau sensível encontramos a *imaginação* e a *crença*, que se trata da maneira como nós percebemos os objetos sensíveis no mundo. Já o conhecimento do mundo inteligível, possui também dois graus que são: a) o *conhecimento discursivo*

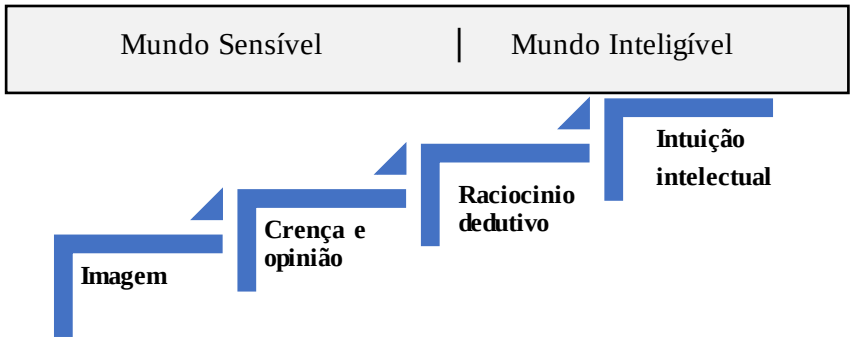
ou ciência intermediária, que representa a Matemática, por ter exclusivamente objetos matemáticos.

Diante disso Platão afirma: *a)* A Matemática é a constituição de uma propedêutica para a obtenção dos *objetos últimos* do conhecimento. A matemática ajuda a desenvolver a capacidade de abstração, é um treinamento racional. *b)* O outro, se refere à intuição intelectual, à *inteligência.* Este é o nível mais elevado, pois representa o ápice do conhecimento, por exercer a função de contemplar as ideias.

Na ciência intermediária o conhecimento geométrico, pode ser exemplificado por figuras como triângulo, quadrado, círculo etc. Estas, mesmo delineadas por demonstrações e hipóteses, e partindo de um raciocínio abstrato, mesmo assim, não rompem totalmente com o sensível.

Assim, para Platão, tais desenhos geométricos são imagens das entidades do mundo perfeito. Elas expressam contornos, formas abstratas de figuras concretas, como por exemplo, "a planta de um arquiteto representa abstratamente um prédio concreto".

Figura 2 - Graus do Conhecimento



Fonte: Elaboração nossa.

Em suma, no conhecimento existem quatro graus: 1) a apreensão das *imagens*; 2) a percepção das coisas sensíveis que confiamos na realidade dos objetos apreendidos pelos sentidos, isto é, a *crença*; 3) o conhecimento dos **objetos matemáticos** por meio da atividade racional e da demonstração, e 4) o conhecimento direto e *intuitivo,* a ideia pura, a intelecção. A figura supracitada resume os dois mundos platônicos e os respectivos graus dos conhecimentos.

3.2.2 A Teoria das Reminiscência de Platão

Os degraus da figura anterior simbolizam uma gradação no conhecimento de acordo com Platão. Neste sistema hierárquico, a *alma* [9] exerce papel fundamental por se manifestar em quatro graus que obedecem a uma sucessão no processo do conhecer. Segundo Platão, ao nascermos trazemos em nossa alma ideias, por isso mesmo, designa de ideias inatas.

O conhecimento ocorrera quando a pessoa entra em contato com o mundo dos sentidos e faz uma espécie de *recordação* em sua alma, por isso conhecemos assim como a Teoria da Reminiscência de Platão. Sobre isso, a filósofa Marilena Chauí, no seu livro *Introdução à História da Filosofia*: *Dos Pré-socráticos a Aristóteles,* diz:

> E preciso explicar como, vivendo no mundo sensível, alguns homens sentem atração pelo mundo inteligível. Como, nunca tendo tido contato com o mundo das ideias, jamais tendo contemplado as ideias, algumas almas as procuraram? De onde vem o desejo de sair da caverna? Mais do que isto, como os que sempre viveram na caverna podem supor que existia um mundo fora dela, se os altos muros não deixam ver nada externo? Para decifrar esse enigma, Platão narra o Mito de Er, conhecido como *Mito da Reminiscência*, da anamnese, que vimos ser inseparável da antiga ideia do não-esquecido (*alétheia*). O pastor Er é conduzido pela deusa até o reino dos mortos, para onde, segundo a tradição grega, sempre vão os poetas e adivinhos (Chauí, 1994, p. 198).

Essa teoria da *recordação a raiz do conhecimento* se fundamenta na crença pitagórica da imortalidade da alma. Platão admite que a alma contemplaria as ideias antes mesmo de nascer. Em outras palavras, a alma humana antes de estar ligada ao corpo sensível encontra-se com a verdade, no mundo das ideias.[10] Para Platão quanto mais os objetos participam da verdade, mais eles são claros. Esse processo é estabelecido em graus de realidade, do ser e de conhecer, nos possibilitando sair da *opinião* e alcançar a *ciência*.

Para alcançarmos esse grau mais elevado do conhecimento, Platão aplica a *dialética*, pois é por esse método que a alma pode contemplar as ideias. As almas que escolhem a sabedoria, são atraídas pelo amor ao saber, pois lembram-se que já o viram no passado.

---

[9] Termo grego *Psyché* quer dizer em latim *anima*, significando vento, sopro ou princípio vital de todo ser vivo. Na filosofia platônica a alma exerce papel pujante, pois a define como aquilo que move a si mesmo e dá movimento a tudo. Assim ela é incorpórea, imaterial, imortal, e mesmo sendo unitária Platão subdivide-a interiormente em três partes: racional; a irascível e a concupiscível. A primeira localiza-se no cérebro, a segunda no peito e a terceira no ventre.

[10] Sobre isso, ver nos diálogos platônicos: o Mito de Er, na República, como também o Mito do Cocheiro, no *Fedro*.

3.2.3 A Matemática no diálogo Mênon

O diálogo *Mênon*[11] ou da virtude trata da questão do conhecimento. O diálogo começa com o interlocutor Mênon, um amigo de Sócrates, perguntando ao filósofo: "Podes dizer-me, Sócrates, se é possível ensinar a virtude? Ou não é ensinável, e sim resultado da prática? Ou nem uma coisa nem outra?..." (Platão, 2018, p. 110).

Em seguida o filosofo faz um longo elogio à sabedoria dos conterrâneos de Mênon destacando a difícil resposta ao dizer: "Só me resta censurar-me por minha completa ignorância acerca da virtude"[12] (Platão, 2018, p. 110). Esse diálogo platônico é uma apresentação da doutrina do conhecimento como uma recordação da alma. Ele usa a religião e a imortalidade da alma defendida pelos pitagóricos como fundamento. A passagem abaixo explicita isso

> SOCRATES – Certos sacerdotes e sacerdotisas dizem o seguinte, cabendo a ti julgar se expressam a verdade: eles dizem que a alma humana é imortal, que numa ocasião atinge o fim que é chamado de morrer, e noutra renasce, porém jamais é extinta pela destruição. (...) Considerando-se que a alma é imortal, ao renascer muitas vezes contemplou todas as coisas tanto neste mundo como no mundo subterrâneo dos mortos, e nada há que não haja aprendido; disso se conclui que não é de surpreender que seja capaz de lembrar-se de tudo que aprendeu anteriormente a respeito da virtude, bem como de outras coisas. (Platão, 2018, p. 126).

Desse modo para defender essa doutrina e responder a Mênon sobre a virtude, Platão tem a brilhante ideia de usar o *conhecimento matemático* e a maiêutica socrática. Assim, no diálogo, Sócrates pede a Mênon que traga um escravo, que ele lhe mostrará que o serviçal apenas *relembrará* coisas da alma, pois na sua condição de subserviente, não deve ter aprendido na sua vida terrena coisas da geometria. Agora, vejamos uma parte deste diálogo:

> SÓCRATES – Ele é grego e fala grego?
> MÊNON – Com certeza. É nascido em minha casa.
> SÓCRATES- Agora observa se ele te impressiona lembrando ou aprendendo
> MÊNON – Eu observarei
> SÓCRATES - Dize-me rapaz: reconheces que uma superfície quadrada é desse tipo?
> ESCRAVO - Reconheço.
> SÓCRATES - A superfície quadrada então é uma superfície que tem iguais todas estas linhas, que são quatro?
> ESCRAVO - Perfeitamente.
> SÓCRATES - E estas linhas que são traçadas pelo meio são iguais o não?

[11] Mênon, um interlocutor no diálogo, é um amigo de Sócrates pertencente a uma família nobre e abastada da região da Tessália. Supõe-se que esse diálogo, registrado por Platão, tenha realmente ocorrido no ano 402 a.C. quando o jovem Mênon visitou Atenas, cidade de Sócrates.
[12] Para melhor apreciação na integra ver *Mênon*, Platão, 2018, p.110.

ESCRAVO - Sim.
SÓCRATES - E é verdade que pode haver uma superfície desse tipo tanto maior quanto menor?
ESCRAVO - Sim
SÓCRATES - Se então este lado for de dois pés e este de dois, de quantos pés será o todo? Examina da seguinte maneira. Se por este lado fosse de dois e por este de um só pé, a superfície não seria de uma vez dois pés?
ESCRAVO - Sim
SÓCRATES - Mas, uma vez que por este também é de dois pés, a superfície não vem a ser de duas vezes dois?
ESCRAVO. -Vem a ser.
SÓCRATES - Logo, ela vem a ser de duas vezes dois pés.
ESCRAVO. Sim.
SÓCRATES - Quanto é então duas vezes dois pés? Faz o cálculo e diz.
ESCRAVO - Quatro Sócrates.
SÓCRATES - E não é verdade que pode haver outra superfície deste tipo, que. seja o dobro desta, que tenha todas as linhas iguais como as tem esta?
ESCRAVO - Sim.
SÓCRATES - De quantos pés então será?
ESCRAVO - Oito.
SÓCRATES - Vê lá, tenta dizer-me de que tamanho será cada linha dessa superfície. A linha desta superfície aqui é, com efeito, de dois pés. E a linha daquela superfície que é o dobro?
ESCRAVO - Mas é evidente, Sócrates, que será o dobro.
SÓCRATES - Vês, Mênon, que eu não estou ensinando isso, e sim estou perguntando tudo? (Platão, 2018, p. 129).

Uma pergunta caberia aqui: Por que usar a Matemática para explicar a virtude? É que no *Mênon* o que importa é explicar como um conhecimento é aprendido. Além disso, a escolha do jovem escravo como um instrumento de demonstração da doutrina é convincente: notamos que o escravo vai apenas concordando com Sócrates, e como suas respostas estão corretas, isso faz Mênon perceber que o escravo já conhecia aquelas respostas. É o próprio método de Sócrates de perguntas e respostas que leva Mênon a acreditar nas relembranças do escravo. Vejamos ao final a figura que se tem durante o diálogo, evidenciada por Marcondes Filho (1997, p. 60):

Figura 3 - O quadrado do Mênon usando o Teorema de Pitágoras

Fonte: Marcondes Filho (1997).

Na verdade, as perguntas de Sócrates são conduzidas pelo Teorema de Pitágoras. E se isso não foi percebido por Mênon, com certeza também não seria pelo escravo. Para Platão, as verdades matemáticas são universais e imutáveis, sendo essa ciência a chave na explicação do mundo, como os sólidos platônico na representação da matéria.

3.3 ARISTÓTELES E O CONHECIMENTO

3.3.1 Vida e obra

O filósofo grego Aristóteles (384 - 322 a.C.) nasceu em Estagira, cidade da Macedônia. Seu pai, Nicômaco, era médico de Amintas, o rei da Macedônia. Aristóteles quando tinha 17 anos, já órfão de pai, mudou-se para Atenas para estudar na Academia, onde passou 20 anos e foi o maior discípulo de Platão. Após a morte do mestre, Aristóteles deixou a Academia e fundou em Atenas sua escola filosófica, o *Liceu.* Essa escola era dedicada às ciências naturais e foi no Liceu o seu período de maior produção intelectual. Ele foi durante 8 anos preceptor de Alexandre, o Grande e o influenciou.

A obra de Aristóteles é uma verdadeira enciclopédia. Isso pode ser visto através dos títulos dos seus trabalhos como: 1) *Metafísica*; 2) *Organon*; 3) *Metrológicos*; 4) *Física*; 5) *Da alma*; 6) *Retórica*; 7) *Poética*; 8) *Sobre o céu*; 9) *A Política*; 10) *História dos animais*; 11) *Geração e corrupção*; 12) *Ética a Nicômaco*; 13) *Constituição de Atenas*.

Os seus escritos eram divididos em: *exotéricos,* voltado para o grande público fora do Liceu; e os *acromáticos,* dirigido aos discípulos como atividade didática. Os exotéricos foram perdidos e temos apenas os títulos, mas os acromáticos chegaram até nós.

Esses trabalhos foram reunidos por seu discípulo Andrônico de Rodes (50 a.C.) na obra *Corpus Aristotelicum*. Por essa diversidade, Aristóteles é considerado o pai da Lógica, da Física, da Ética e da Biologia. Ele não apenas sistematizou o saber grego, mas deu uma grande contribuição em todos os campos do saber. Platão e Aristóteles são os filósofos que mais influenciaram o pensamento ocidental.

Platão, talvez por influência pitagórica, dava grande importância a Matemática, mas isso não ocorria com Aristóteles, que foi o maior observador da natureza. Ele observava os movimentos dos astros e refletia sobre a composição deles;

observava o desenvolvimento de embriões, dissecou animais e até baleias; criou uma classificação dos seres vivos e formulou a teoria dos quatro elementos.

Enfim, propôs-se compreender o mundo e para isso criou o primeiro método de investigação fundamentado na observação e na Lógica. Diógenes Laércio, o seu maior biógrafo disse: "Aristóteles foi o mais genuíno dos discípulos de Platão".[13] Dante disse: "Aristóteles é o Mestre dos Mestres".

3.3.2 Divergências entre Mestre e Discípulo

Para compreender melhor as diferenças entre o pensamento de Aristóteles e de Platão quanto aos *objetos matemáticos*, faz-se necessário alguns comentários sobre as divergências intelectuais entre o mestre e o discípulo. "Não há dúvida de que Aristóteles desenvolveu laços de amizade com o seu mestre e foi um dos seus discípulos favoritos".[14]

Entretando temos a frase: "Sou amigo de Platão, porém mais amigo da verdade". É natural que uma mente brilhante, como a do discípulo, admire o seu mestre, mas possa discordar de algumas explicações, e entre Platão e Aristóteles isso ficou marcado na história e até no quadro *Escola de Atenas* (1509) de Rafael Sanzio.

Sobre essas diferenças intelectuais entre esses dois filósofos, Reale (2017, p. 194), na obra *Filosofia: Antiguidade e Idade Média*, disse:

> As principais diferenças entre os dois filósofos não residem tanto no campo da filosofia, quanto nos outros interesses. Aristóteles, nas obras *exotéricas*, abandonou a componente mítico-religioso-escatológica, tão forte nos escritos do mestre. Mas, como vimos, trata-se daquela componente platônica que aprofunda suas raízes na religião órfica e se alimenta mais da fé e de crenças do que do *logos*. Assim fazendo, Aristóteles entendeu proceder, sem dúvida, a uma *organização do discurso filosófico*, procurando manter distinto o que se funda no *logos*, daquilo que se funda em crenças religiosas. Segunda diferença fundamental encontra-se no fato de que Platão interessou-se pelas ciências matemáticas, mas não pelas empíricas e, em geral, não demonstrou qualquer interesse pelos fenômenos empíricos em si: Aristóteles, pelo contrário, teve enorme interesse para com todas as ciências empíricas. (...) Ela prova que Aristóteles tinha, além de interesses puramente filosóficos, também interesses pelas ciências empíricas que o mestre não tinha.

Segundo Marcondes Filho (1997, p. 69), o desenvolvimento da tradição filosófica clássica tem em Platão e em Aristóteles suas duas vertentes principais, seus dois

[13] O leitor se desejar maiores detalhes pode ver em Reale (2017, p. 177). Diógenes foi um dos biógrafos dos Filósofos da Antiguidade.
[14] O tradutor Edson Beni enfatiza isso com suas notas biográficas sobre o filósofo grego. Ver em Aristóteles (2019, p. 9).

grandes eixos, e o platonismo e o aristotelismo inspiraram desenvolvimentos diferentes, até mesmo rivais, no pensamento filosófico e religioso.

Pode-se dizer que a filosofia aristotélica se desenvolveu a partir das críticas às filosofias pré-socráticas e platônica. A principal crítica foi ao *dualismo platônico*. Aristóteles discorda da existência desses dois mundos. É nessa divergência que está o núcleo desse nosso estudo: **os objetos matemáticos**. Recordemos que Platão coloca tais objetos no mundo das ideias, mas se Aristóteles rejeita o mundo inteligível, perguntamos: *o que é um objeto matemático para Aristóteles*?

3.3.3 Aristóteles e a Sistematização do Conhecimento

Quando dizemos que a Matemática está dividida em Aritmética e Geometria, e esta, por sua vez, é subdividida em Geometria plana e Geometria espacial, estamos fazendo uma interligação entre os diversos tópicos da Matemática. Essa visão global, que interliga e sistematiza a Matemática, permite ao estudante uma melhor compreensão do conteúdo estudado na Matemática.

Feito as devidas proporções, isso é o que fizera Aristóteles com a Filosofia: *uma sistematização de todo conhecimento*. Ele classificou os conhecimentos e mostrou como os diferentes saberes estavam interligados. Segundo Marcondes Filho (1997, p. 74), "A filosofia de Aristóteles é extremamente sistemática"[15]. Aristóteles já mostra a importância do conhecimento no início do capítulo 1 do livro I da sua mais influente obra, a *Metafísica* (2012, p. 42):

> Por natureza todos os homens desejam o conhecimento. Isso é indicado pelo valor que damos aos sentidos; pois independentemente do uso, são valorizados por si mesmos e, mais do que todos, é o sentido da *visão*. Não somente objetivando a ação, mas mesmo quando não se pretende nenhuma, preferimos a *visão*, em geral, a todos os demais sentidos. A razão disso é que a *visão*, é de todos eles, o que mais nos ajuda a conhecer as coisas, revelando as diferenças.

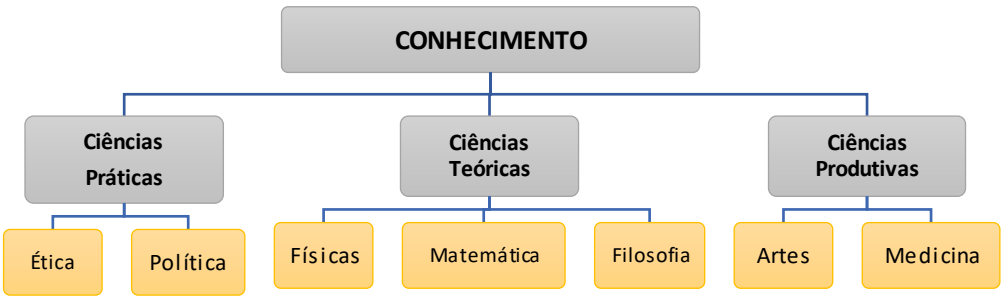
Já neste início percebemos que a importância dos *sentidos* na aquisição do conhecimento com destaque para a visão. Lembrando que em grego *episteme* pode ser entendido como *ciência, conhecimento* ou *saber*.

Assim, para Aristóteles, usando os sentidos, podemos diferenciar os conhecimentos e especificar o que cada *ciência* estuda. Ele dividia os saberes em três grandes tipos: 1) *Ciências teóricas*, que estudam o saber por si mesmo; 2) *Ciências*

[15] A filosofia sistematizada elaborada por Aristóteles é algo bem enfatizada em autores da História da Filosofia. Uma visão integrada do saber com várias subdivisões em áreas diversas.

práticas, que buscam o saber da perfeição moral; e 3) *Ciências produtivas*, que buscam o saber para produzir determinado objeto de uso Reale (2017, p. 195). Cada uma destas três ciências tinham suas subdivisões mostradas no quadro a seguir:

Quadro 3 - Classificação das Ciência em Aristóteles



Fonte: Elaboração nossa.

3.3.4 Aristóteles e o Processo de Aquisição do Conhecimento

Começamos relembrando que para Platão existia o mundo das ideias. Ao nascermos trazemos na alma ideias inatas e o conhecimento ocorria quando a pessoa entrava em contato com o mundo dos sentidos e fazia uma recordação em sua alma da ideia pré-existente. Marcondes (2007, p. 46) confronta o pensamento deles dizendo que enquanto Platão apresenta em sua visão dialética do conhecimento como resultado do processo de conversão da alma que se afasta do mundo sensível, Aristóteles caracteriza esse processo de forma cumulativa, desde impressões sensíveis até o pensamento abstrato.

Ainda, no capítulo1 da *Metafísica*, em continuação ao processo de aquisição do conhecimento, Aristóteles (2012, p. 19) diz:

> Ora os animais nascem, por natureza, com o poder da *sensação* daí adquire alguns a faculdade da *memória*, enquanto outros não. Por conseguinte, os primeiros são mais inteligentes e capazes de aprender do que aqueles que não podem se lembrar. Aqueles que não escutam os sons, como as abelhas, são inteligentes, mas não conseguem aprender; só são capazes de aprender os que possuem esse sentido, além da memória. Assim, os outros animais vivem de impressões e memória e só tem pequena parcela de *experiencia*; mas a raça humana vive também da *arte* e do raciocínio. É pela memória que os homens adquirem a experiência, porque as inúmeras lembranças da mesma coisa produzem finalmente uma experiência única. Na verdade, é pela experiência que os homens adquirem a *arte* e a *ciência*.

Esse trecho do Capítulo 1 da *Metafísica* marca bem a diferença daquele que vimos no *Mênon* em que Sócrates recorre a imortalidade da alma para depois usar *ideias inatas* como recordação e *não aquisição* do conhecimento, quando ele disse: "Vê Mênon que eu não estou ensinando e sim perguntando tudo?".

Figura 4 - Processo de Aquisição do Conhecimento de Aristóteles

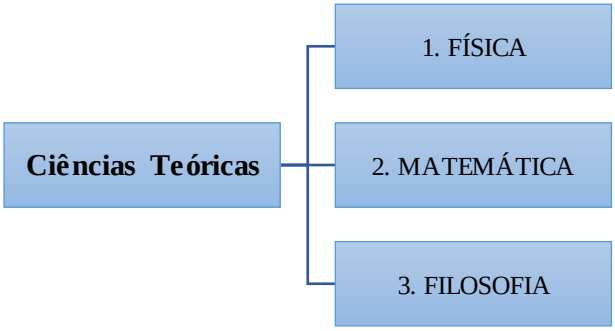
Fonte: Elaboração nossa.

Portanto, Platão usa a religião e a cultura como base da sua Teoria das Reminiscências. Já Aristóteles explica que o processo de *aquisição do conhecimento* inicia nos sentidos, passa pela *memória* e vai acumulando até chegar ao *conhecimento científico*. Esse processo é representado na figura 4.

3.4 O SABER MATEMÁTICO EM ARISTÓTELES

Vimos anteriormente que Aristóteles dividia o conhecimento em geral em três tipos, de acordo com o objeto de estudo, a saber: 1) Ciências teóricas; 2) Ciências práticas; e 3) Ciências produtivas. Nesta classificação geral o saber matemático está entre as ciências teóricas, como mostrado na figura 5.

Figura 5 - Classificação das ciências no conhecimento aristotélico



.

Fonte: Elaboração nossa.

No início do livro VI da *Metafísica*, Aristóteles (2012, p. 171) diz que a ciência investiga os princípios e as causas dos objetos em estudo. Ele reafirma que "*Só há ciência quando conhecemos as causas*". Além disso, as ciências possuem um *método* de investigação das causas.

Vamos agora nos restringir a duas ciências teóricas e, sobre elas, a filósofa Marilena Chauí (1994, p. 247) trata de maneira clara quando diz: "As ***ciências teóricas*** são aquelas que investigam os princípios e as causas de seres ou coisas que existem na Natureza independente da vontade ou da ação humana, cujo curso se desenvolve sem a participação humana".

O cientista teórico é aquele que registra, descreve, interpreta e classifica os princípios e as causas dos objetos ou seres naturais. Ele investiga os princípios de que tais seres dependem para existir e para serem como são. Todavia, agora nasce uma pergunta fundamental: como investigar esses objetos que definem as ciências teórica? A resposta vem desde os Pré-socráticos: *o movimento*. Então o que fez Aristóteles?

Para Chauí (1994, p. 247), o filósofo "Afirmou que os seres se *diferenciam* pela presença ou ausência de *movimento* que classifica as ciências teóricas." Significando que aquilo que é imóvel é sempre idêntico a si mesmo e o que é móvel é sempre mutável. Na verdade, o conceito de movimento na obra de Aristóteles transcende ao nosso que é apenas mudança de local, pois para ele a mudança na cor de uma folha, verde para amarela, era um movimento.

3.4.1 Objetos das Ciências Físicas

As *Ciências Físicas* são a subdivisão das ciências teóricas cujos objetos de estudo são *coisas* ou *seres* que possuem em si o princípio do *movimento* e do *repouso,* e que têm uma *forma* e uma *matéria*. Também podemos dizer a *física* aristotélica tem como objeto de estudo a realidade sensível e investiga os seres animados e inanimados. Fazem parte dessa subdivisão o que modernamente corresponde à física, à química, à biologia e à psicologia, em que cada uma tem seu objeto de estudo.

3.4.2. Objetos das Ciências Matemáticas

A *Matemática* é a subdivisão das ciências teóricas cujos objetos de estudo são *coisas imóveis* e *separados de qualquer matéria,* tendo apenas formas, as quais só existem

impressas na matéria. Nesta definição aristotélica de *objetos matemáticos* um exemplo é o triângulo.

Agora vejamos algumas passagens da *Metafísica* que mostram reflexões de Aristóteles sobre a natureza do conhecimento matemático. Ele foi tratado nos livros III, XI e XIII. A passagem já no início do capítulo 1 do livro XIII é muito interessante porque nele afirma que fez consideração sobre objetos sensíveis e agora vai investigar sobre objetos matemáticos, além de comentar e por vezes tecendo críticas a estes, sobre pensadores que o antecedeu. Vejamos Aristóteles (2012, p. 321):

> Na *Física,* ao tratar da matéria e mais tarde da substância como ato, explicamos o que é a substância das coisas sensíveis. Agora, uma vez que estamos investigando se há ou não alguma substância imutável e eterna além das substâncias sensíveis, e se há o que é, devemos começar pelo exame do que pensam os outros a respeito, de modo que se erraram em qualquer aspecto, não corramos o risco de cometer os mesmos erros. (...) Há *duas opiniões* acerca disso. Alguns dizem que os *objetos das matemáticas*, a saber, números, linhas são substâncias. Ora, como alguns os reconhecem como duas classes (as Ideias e os números) e outros encaram ambos como detentores de uma natureza, ainda outros afirmam que somente as substancias matemáticas são substancias, é preciso que primeiramente examinemos os *objetos das matemáticas*, sem a estes atribuir qualquer outra característica – por exemplo, indagando se são Ideias ou não, ou se são ou não princípios e substancias das coisas existentes, mas meramente indagando se como objetos matemáticos existem ou não, e se este for o caso, em que sentido. (...) Ora se os objetos das matemáticas existem, devem ou existir nas coisas sensíveis ou separados delas ou de outra maneira. Assim, o que temos a discutir aqui não é propriamente a existência dos objetos matemáticos, mas *como* existem.

Em seguida, ao enfatizar o absurdo da suposição de tais objetos, Aristóteles (2012, p. 322) critica a doutrina platônica como "fantasiosa" e elenca vários argumentos para rejeitá-la partindo de um sólido, em seguida uma linha e finaliza no ponto e conclui que isso lava a uma contradição.

> Que é impossível os objetos das matemáticas existirem nas coisas sensíveis e que, a doutrina que o sustenta é fantasiosa já foi indicado em nossa discussão das dificuldades, e os motivos para isso são que dois sólidos não podem ocupar o mesmo espaço, e que com base no mesmo argumento, todas as demais características existiriam nas coisas sensíveis, e nenhuma delas existiria separadamente. Isso já foi estabelecido, mas deve-se acrescentar que, com base nesse argumento, é impossível a divisão de qualquer sólido. O resultado será: ou tem que ser divididos quando os objetos sensíveis são divisíveis; ou então nem sequer os objetos sensíveis são divisíveis.

Esses dois trechos da *Metafisica* mostram que Aristóteles considera que os objetos matemáticos existem, mas não no mundo das ideias. Reale (2017, p. 211) observa que Aristóteles deu pela primeira vez, de forma correta, o estatuto ontológico dos objetos

dos quais se ocupam as matemáticas. Eis a solução de Aristóteles: os objetos matemáticos não são nem entidades reais, nem algo irreal. Eles subsistem potencialmente nas coisas sensíveis e na nossa razão os separa mediante a abstração.

Diante disso, percebemos o quão o grau de reflexão que o conhecimento matemático provocou entre os gregos e vemos também o quanto filosofia e matemática caminharam juntas naquela época. Para reforçar isso, a filosofa italiana Cattanei (2005, p. 21), na abertura do capítulo 1 de seu livro *Entes Matemáticos e Metafísica* diz:

> É *impossível*, *absurdo*, *ridículo* que o objeto matemático seja uma substância suprassensível. Essa é a última palavra que a filosofia pronúncia sobre a matemática no século IV a.C. É a palavra de Aristóteles. A realidade para a qual se voltam as ciências matemáticas é então excluída do âmbito do que existe, no sentido mais verdadeiro, para o qual se dirige a mais alta forma de filosofia, a filosofia primeira.

Portanto, são entes da razão que em ato subsistem só na nossa mente, exatamente em virtude de nossa capacidade de abstração, e em potência subsistem nas coisas como propriedades intrínsecas. Essa parcial redução dos entes matemáticos à dimensão mental "salvou" Aristóteles do matematismo em que caíram os discípulos imediatos de Platão.

4 FILOSOFIA DA MATEMÁTICA E POSSÍVEIS IMPLICAÇÕES NA FORMAÇÃO MATEMÁTICA DO PROFESSOR

A matemática vista corretamente, não possui apenas verdade, mas também suprema beleza.

Bertrand Russell

Nesse capítulo apresentamos as correntes da Filosofia da Matemática: Platonismo, Logicismo, Formalismo e Intuicionismo. É apenas um resumo da visão clássica dessas correntes, com apresentação de alguns nomes que foram defensores de cada corrente. Ao final analisaremos *possíveis implicações* na formação dos professores durante a graduação em matemática. Para tal, buscaremos pesquisas em teses e dissertações que tiveram como *núcleo* a relação entre Filosofia da Matemática e o atual do ensino de matemática.

4.1 PLATONISMO

Sabemos que para Platão as retas que vemos no mundo são cópias imperfeitas das retas que preexistem no mundo das ideias. Isso é pano de fundo do *platonismo na matemática*. Nos fundamentos do platonismo são apresentados argumentos que formam a tríade: *existência*, *independência* e *abstração*. Como bem observa Almeida (2017, p. 47), para o platonismo a proposição matemática 1 + 1 = 2 e todas as demais proposições verdadeiras da aritmética e da geometria são necessariamente verdadeiras porque descrevem relações imutáveis entre objetos imutáveis. Platão frisou que o raciocínio usado na geometria não se refere às figuras ou desenhos visíveis, mas às ideias absolutas que elas representam. Para ele os entes preexistem e estão fora do espaço e do tempo.

O termo *Platonismo Matemático* nasce do título do trabalho filosófico do lógico Paul Bernays, apresentado no ciclo de Conferência Internacional de Matemática na Universidade de Genebra, em 1935. Neste texto, Bernays teve como foco a discussão detalhada sobre a matemática construtivista e a platonista. Para Bernays o *platonismo* era uma característica da matemática moderna. Ele chegou a afirmar que não era exagerado dizer que essa concepção era hegemônica na fundamentação da matemática (Davis; Hersh, 1995, p. 278).

O platonismo matemático é uma corrente filosófica que defende a existência objetiva de entes matemáticos como números, retas ou funções, os quais existem independente do conhecimento que temos das propriedades desses objetos matemáticos. No século XX importantes matemáticos defenderam o platonismo como: Kurt Göedel (1906-1978), Jean Dieudonné (1906-1992), René Thom (1923-2002), Alain Connes (1947 -) e Roger Penrose (1931 -).[16]

Kurt Gödel

Kurt Friedrich Göedel nasceu em 28 de abril de 1906 na Áustria, e com 18 anos de idade ingressou na Universidade de Viena, tornando-se um lógico matemático defensor do platonismo. Isso culminou, no ano de 1925, ao integrar o famoso Círculo de Viena. Em 1930, o jovem Gödel apresentou no Congresso de Matemática, em *Königsberg*, o seu teorema da *Completude* e *Consistência*, que surpreendeu os matemáticos e lógicos do mundo. Esse foi o ano que Gödel concluiu seu doutorado, sob orientação do matemático austríaco Hans Hahn.

Nessa mesma data veio a fazer parte do corpo docente da Universidade de Viena. Logo depois veio para os *Estudos Avançados* de Princeton, permanecendo até o fim da vida, onde teve uma calorosa amizade com Einstein.

Agora vejamos a concepção plantonista de Gõedel no seu artigo: *Alguns teoremas básicos sobre os fundamentos da matemática e suas implicações* (2009, p. 889-911), apresentado na conferência de 1951. Logo na abertura, diz:

> Durante as primeiras décadas passadas a investigação em fundamentos da matemática produziu alguns resultados que me parecem ter interesse, não só em si próprios, mas também em vista das suas implicações para problemas tradicionais de filosofia acerca da natureza da matemática (....)
> Com este termo quero eu dizer o ponto de vista segundo o *qual a matemática descreve uma realidade não-sensível*, que existe independentemente quer dos atos quer das disposições da mente humana para a qual tem apenas uma percepção provavelmente incompleta. Esse ponto de vista é bastante impopular entre os matemáticos; mas existem em alguns grandes matemáticos que aderiram a ele. Por exemplo, Hermite. Nós de fato temos uma espécie de percepção dos objetos matemáticos, apesar de estarem distantes da experiência sensorial [...], não vejo motivo para que tenhamos menos confiança nessa percepção, isto é, na intuição matemática, do que na percepção sensorial.

[16] É interessante também mostrarmos que o lógico J. Monk, ao ser citado por David e Hersh,(1986, p. 363) apresenta um balanço geral estatístico sobre a aceitação dos matemáticos com relação às concepções elaboradas pelas correntes sobre a natureza da matemática. Monk introduz os dados em seu livro, que são os seguintes: estima que no mundo residem cerca de 65% de platonista; 30% de formalistas e 5% de intuicionistas/construtivistas. Como podemos ver no topo da pirâmide estar o platonismo, mas, como diz Cohen e Dieudonné, o matemático versa secretamente entre a primeira, porém fica com uma máscara à disposição para que de repente ele precisar se torna um formalista disfarçado.

Esse trecho deixa clara a visão platonista defendida por Göedel. Nessa defesa da absolutização das ideias matemáticas, ao ponto que considera a matemática como uma descoberta e não mera criação do matemático, visto que tal sujeito estaria imune ao processo, as influências do contexto social, cultural e ao próprio tempo que sua realidade se encontra.

4.2 LOGICISMO

Comecemos dizendo que o *Logicismo* é a corrente filosófica que nasceu no final do século XIX e que admite que toda a Matemática poderia ser reduzida à Lógica. Dizendo de outra maneira, se perguntássemos a um logicista o que é a Matemática, ele certamente diria: um subconjunto da lógica. Sobre isso, temos Bertrand Russell (apud Boyer, 1974, p. 440) na sua famosa obra de Lógica, *Princípios Matemáticos* (1903) dizendo: "A Matemática Pura é a classe de todas as proposições da forma *p implica q*, onde *p* e q são proposições contendo uma ou mais variáveis, onde nem *p* e nem *q*, têm apenas constantes lógicas."

Esse trecho mostra que para os logicistas a "Matemática era um ramo da Lógica". Dito isso, parece estar claro o que é a corrente *filosófica do logicismo*. Na verdade, a elaboração e compreensão dessa corrente envolvem problemas matemáticos profundos da Teoria dos Conjuntos e paradoxos dessa teoria, como paradoxo de Russell. Esse aprofundamento matemático foge ao nosso trabalho, por isso, apenas comentaremos aspectos históricos que levaram ao logicismo.

Comecemos por Aristóteles, que na obra *Organon* fundou verdadeiramente a Lógica. Na verdade, *Organon* é uma gigantesca obra que reúne *As categorias*, *A interpretação*, *Analíticos anteriores*, *Analíticos posteriores* e *Tópicos*. Aristóteles não colocou a lógica na sua classificação das ciências, pois a considerava sem um objeto de estudo, como toda ciência aristotélica deveria ter. Para ele a lógica deve ser usada para investigar do conhecimento científico.

Daí o nome "*organon*" que significa *instrumento,* dado no século III por Alexandre de Afrodisia (Reale, 2017, p. 231). É no *Tópicos* que encontramos o famoso *silogismo aristotélico*: duas proposições conectadas que geram uma conclusão. Durante a Idade Média, com os ensinamentos de Abelardo na escolástica, a lógica é retomada. Boyer (1974, p. 428) faz uma síntese da história da lógica adequada ao nosso objetivo, quando diz:

> A história da lógica pode ser dividida com simplificação excessiva em três estágios: 1) Lógica grega; 2) Lógica escolástica; e 3) Lógica matemática. No primeiro estágio, as fórmulas lógicas consistem em palavras da linguagem comum sujeitas às regras sintáticas usuais. No segundo estágio, a lógica era tirada da linguagem comum, mas caracterizada por regras sintáticas com funções semânticas espaciais. No terceiro estágio, a lógica ficou marcada pelo uso de uma *linguagem artificial* em que sinais tem funções semânticas limitadas. Nos dois primeiros estágios teoremas lógicos são derivados da linguagem comum, e a lógica do terceiro estágio procede de maneira oposta – primeiro ela constrói um sistema formal, e só depois procura a interpretação na fala comum.

4.2.1 Lógica matemática

No século XVII, com o surgimento da ciência moderna, a Matemática dá o rumo da pesquisa científica, e é nesse cenário que surge William Leibniz (1646 – 1716). Killer (1998, p. 16) diz que "Movido pelo ideal de uma *linguagem universal*, Leibniz considerou que o silogismo era capaz de assegurar a infalibilidade do raciocínio, assim reduziu a sua forma ao *cálculo algébrico*."

Esse ideal de Leibniz determina um marco divisor entre a lógica clássica aristotélica e a lógica simbólica moderna. Esse pioneirismo de Leibniz teve pouca influência em seus contemporâneos, pois a sua publicação foi tardia. Desse modo, a *lógica matemática* foi redescoberta dois séculos depois por George Boole (1815-1864), que publicou *Análise Matemática da Lógica* (1847) e *Uma Investigações das Leis do Pensamento* (1854).

Nessas obras ele cria para a lógica um *simbolismo* característico da matemática, isto é, algebriza a lógica. Ele disse: "Nós não necessitamos mais de associar lógica e metafísica, mas sim lógica e matemática". Boole, por sua redescoberta e sua influência, é considerado o fundador da lógica matemática. O passo seguinte foi transformar o conceito matemático de número natural em conceitos puramente lógicos da teoria dos conjuntos, e isso ficou a cargo dos matemáticos Peano e Frege (Eves, 2005, p. 678).

Frege e Russell

Com a criação da *lógica matemática,* seu novo rumo é o surgimento do *logicismo* iniciado pelo matemático e filósofo alemão Gottlob Frege (1848-1925). Seu objetivo era mostrar que a matemática poderia ser reduzida às leis da lógica, da mesma

maneira que os teoremas da geometria se relacionam com seus axiomas. Entretanto, ele restringiu sua análise à aritmética, visto que esta era a base da matemática.

Silva (2007, p. 127), em seu livro *Filosofias da matemática,* diz que a estratégia de Frege começa com uma releitura das distinções kantianas[17].

> Frege nos alerta de saída para nunca confundirmos o *lógico* com o *psicológico*, e portanto, evitarmos associar a distinção analítico-sintético a representações, como fez Kant. A razão é simples, representações são copias das coisas em nossa mente, elas são objetos mentais, e qualquer tentativa de definir analiticamente em termos de representações mentais corre um risco de ser contaminada pelo psicologismo.

Sendo assim, Frege tinha uma aversão a intuição, por isso afirmava que as proposições analíticas da aritmética são obtidas por meio da lógica. O programa logicista moderno dos fundamentos da matemática foi apresentado na sua obra *Fundamentos da Aritmética* (1893). Sobre isso, Lívio (2011, p. 215) nos mostra o seguinte:

> Embora tenha se concentrado primordialmente em aritmética, ele quis mostrar que mesmo conceitos familiares como números naturais, 1, 2, 3..., poderiam ser reduzidos a constructos lógicos. Consequentemente, Frege acreditava que era possível demonstrar todas as verdades da aritmética a partir de uns poucos axiomas em lógica. Em outras palavras, de acordo com Frege, mesmo sentenças como 1+1=2 não eram verdades empíricas, baseadas em observação, mas que, pelo contrário, poderiam ser derivadas de um conjunto de axiomas lógicos.

Entretanto, Russell descobriu contradições na proposta de Frege ao descobrir um paradoxo na teoria dos conjuntos que ficou conhecido por *Paradoxo do barbeiro*, que diz: Um barbeiro é incumbido de fazer a barba de *todas* as pessoas que *não fazem* a sua barba. Perguntamos se ele faz a sua própria barba? 1) Se fizer estará *errado*, pois ele só deve fazer a barba de quem *não* faz sua própria barba; 2) Se *não* fizer estará *errado*, pois ele deixará de barbear alguém que *não* faz a barba.

Portanto, ao conjunto de pessoas que *não* fazem sua própria barba, o barbeiro está incluído e não incluído, isto é um paradoxo. Então Russell, enviou uma carta à Frege falando desta contradição da teoria. Por coincidência o livro de Frege já estava para ser impresso, e em choque ele resolveu acrescentar um manuscrito com incrível confissão (Lívio, 2011, p. 216):

> Um cientista dificilmente poderá se ver diante de algo mias indesejável que ter os fundamentos cederem exatamente quando o trabalho foi terminado. Fui

[17] O filósofo alemão Immanuel Kant (1724-1804) Em sua teoria do conhecimento estabelece uma distinção entre juízos analíticos e juízos sintéticos. Os primeiros são de caracteres lógicos, já os segundos, são a *posteriori.*

colocado nesta situação por uma carta do Sr. Bertrand Russell quando o trabalho já estava quase passado pelo prelo.

Para continuar o logicismo Russell tentou contornar o paradoxo propondo a *teoria dos tipos* na sua obra de lógica *Princípios Matemáticos* (1910), que escreveu com o matemático Alfred Whitehead (1861-1947). Vejamos a seguir uma carta de um diálogo entre Russel e Frege, presente em Miguens (2001, p. 89):

Quadro 4 - Carta de Russell para Frege

Collina de sexta-feira, Haslemere, 16 de junho de 1902

Caro colega

Há ano e meio eu tomei conhecimento do seu *Fundamentos da Arithmetica* mas apenas agora encontrei tempo para fazer um estudo mais rigoroso, como era minha intenção, sobre o seu trabalho. Estou em completo acordo consigo no essencial, particularmente quando rejeita qualquer elemento psicológico [*Moment*] [2] na lógica e quando atribui grande valor a uma ideografia para os fundamentos da matemática e da lógica formal, as quais, em boa verdade, dificilmente se podem distinguir. Relativamente a muitas questões particulares, há no seu trabalho discussões, distinções e definições que dificilmente se encontrarão no trabalho de outros lógicos. Especialmente no que diz respeito à função, eu próprio fui conduzido a observações que são as mesmas, mesmo nos detalhes. Há apenas um ponto onde encontrei uma dificuldade. O colega diz que uma função também pode actuar como elemento indeterminado. Eu acreditava nisto, mas agora esta perspectiva parece-me duvidosa pela seguinte contradição. Seja *w* o predicado: para ser predicado, não pode ser predicado de si próprio. Pode *w* ser predicado de si próprio? A cada resposta o seu oposto segue-se. Portanto podemos concluir que *w* não é um predicado. Da mesma maneira, não existe nenhuma classe (como uma totalidade) de classes que, sendo cada uma tomada como uma totalidade, não pertença a si própria. Disto concluo que, sob certas circunstâncias, uma colecção definível [*Menge*] [3] não forma uma totalidade.

Estou a acabar um livro sobre os princípios da matemática no qual gostaria de discutir o seu trabalho muito aprofundadamente Já tenho os seus livros ou vou comprá-los brevemente, mas ficar-lhe-ia muito grato se me pudesse mandar separatas dos seus artigos de revistas. No caso de ser impossível, obtê-los-ei numa biblioteca. O tratamento exacto da lógica em questões fundamentais, onde os símbolos falham, tem ficado muito para trás. Nos seus trabalhos encontro aquilo que de melhor há no nosso tempo razão pela qual me permito exprimir o meu profundo respeito por si. É lamentável não ter sido publicado a segunda edição do seu *Grundgesetze*. Espero que isto ainda venha a ser feito.

Muito respeitosamente seu amigo,

Bertrand Russel

Segundo Rod (2008, p. 680), para Frege as proposições da matemática são independentes da intuição, por isso pode conceber como proposições analíticas. Contudo, quando Bertrand Russell demonstrou que as proposições de Frege levavam a contradições, este se distanciou do programa logicista e considerou, como Kant, ligar a Matemática com a intuição. A sugestão feita por Russell de modificar as proposições de maneira que não surgissem contradições não foi satisfatória para Frege.

4.3 FORMALISMO

A filosofia formalista foi criada por David Hilbert por volta de 1910, na época em que o logicismo era muito divulgado. Pode-se dizer que o principal objetivo de Hilbert era encontrar um meio para provar que a matemática clássica poderia estar livre de contradições, sem rejeitar os processos infinitos. Eves no livro *Introdução à História da Matemática* (2004, p. 682) de maneira resumida deixa claro que é o formalismo.

> A tese do formalismo é que a matemática é, essencialmente, o estudo dos sistemas simbólicos formais. De fato, o formalismo considera a matemática como uma coleção de desenvolvimentos abstratos em que os termos são meros símbolos e afirmações são apenas fórmulas envolvendo esses símbolos; a base mais funda da matemática não está plantada na lógica, mas apenas numa coleção de símbolos.

Com esse propósito em mente, Hilbert introduziu uma linguagem formal e regras de inferências para toda demonstração correta, e propôs demostrar que dentro deste sistema não havia contradições. Sobre o pensamento formalista de Hilbert, a filósofa Olga Pombo (2023, p. 01) explica em seu texto sobre *A busca dos fundamentos*:

> Na verdade, segundo o formalismo, não existem objetos matemáticos. A matemática consiste apenas em axiomas, definições e teoremas ou em fórmulas. Em limite, existem regras pelas quais se deduz uma fórmula a partir de outra. Mas as fórmulas não são acerca de coisa alguma: são apenas combinações de símbolos. É claro que os formalistas sabem que as fórmulas matemáticas se aplicam por vezes a problemas físicos. Quando se dá a uma fórmula uma interpretação física, ela ganha um significado, e pode então ser verdadeira ou falsa. Mas esta veracidade ou falsidade tem a ver com a própria interpretação física. Enquanto fórmula puramente matemática ela não tem significado nem valor lógico.

Fazer matemática para um formalista é como jogar xadrez, apenas seguimos as regras do jogo. Mediante isso, podemos dizer, em linhas gerais, a matemática se torna apenas um jogo linguístico oriundo das regras do jogo. Assim, para o formalista devem ser excluídos uma série de questionamentos sobre essa ciência, pois são inúteis e como, por exemplo: a) qual a natureza do número; b) sobre a existência; c) a objetividade. A validade é determinada pela exigência na coerência interna e completabilidade.

Conforme Eves (2004, p. 682), o sucesso ou fracasso do programa de Hilbert para salvar a matemática clássica estava ligado à resolução do problema da consistência e, sobre isso, o historiador afirma que:

> Só demonstrações consistentes garantem a ausência de contradições, e as demonstrações antigas de consistência, baseadas em interpretações e modelos, simplesmente transferem a questão da consistência de um domínio da matemática para outro. Em outras palavras, a demonstração da consistência pelo método dos modelos é apenas relativa. Hilbert, então, concebeu uma abordagem direta nova para o problema da consistência. Em grande parte, assim como se pode provar, pelas regras de um jogo, que certa situação não pode ocorrer dentro desse jogo, Hilbert esperava provar, mediante um conjunto conveniente de regras de procedimento para obtenção de fórmulas aceitáveis a partir de símbolos básicos, que nunca poderia ocorrer nenhuma fórmula contraditória. Uma fórmula contraditória, em notação lógica, é do tipo "F e não-F", onde F é alguma fórmula aceita do sistema. Podendo-se mostrar que nenhuma dessas fórmulas contraditórias é possível, então fica estabelecida a consistência do sistema.

Com esse propósito, Hilbert adianta sua crítica aos intuicionistas, em particular a Brouwer, na medida em que defende a matemática procura estabelecer sua segurança e verdade em seus métodos. A questão do teste de consistência foi designada por Hilbert de *Teoria da demonstração*, tratada em seu livro *Fundamentos da matemática.* Esta foi publicada em dois volumes (1934-1939), produzida com seu colaborador o matemático suíço de Paul Bernays, uma obra considerada monumental. Uma amostra de seu sonho axiomático encontramos em seu trabalho *Sobre o Infinito*, quando diz Hilbert, (apud Davis; Hersh, 1995, p. 378):

> O objetivo de minha teoria é estabelecer de uma vez por todas a certeza dos métodos matemáticos [...] O estado atual das coisas, em que nos chocamos com os paradoxos, é intolerável. Imaginam as definições e os métodos dedutivos que todos aprendem, ensinam e usam em matemática, os paradigmas de verdade e de certeza, conduzindo a absurdos! Se o pensamento matemático é defeituoso, onde acharemos verdade e certeza?

Porém, o programa formalista teve seu golpe final em 1930 com o *teorema da incompletude* de Göedel que mostrou que sistemas formais completos são

inconsistentes. Em outras palavras, o projeto de Hilbert estava em forte questão, pois sendo completo, por haver problemas indefiníveis.

David Hilbert

David Hilbert nasceu em 23 de janeiro de 1862, na hoje Kaliningrado, na Rússia. Estudou na Universidade de Königsberg, tendo feito o doutorado. Tornou-se professor titular da mesma universidade durante apenas um ano, quando em 1895 seguiu para lecionar na Universidade de Göttingen. De acordo com Eves (2004, p.684) Hilbert "Era o dínamo da Universidade de Göttingen cuja cidade transformou na meca da Matemática". Foi diretor da revista *Mathematische Annalen*, recebeu muitas condecorações como Medalha Lobachevsky, Prêmio Poncelet e Medalha Cothenius.

4.4 INTUICIONISMO

4.4.1 Intuição

Como o próprio nome diz, o *intuicionismo* é a Filosofia da Matemática que está baseada na *intuição* dos matemáticos. Por isso, antes de tratarmos dessa corrente filosófica, vamos iniciar tentando esclarecer o conceito de intuição.

A filosofia distingue duas maneiras em que a razão humana adquire conhecimento sobre o mundo, chamadas atividades racionais, a saber: *intuição* e *raciocínio*. A palavra *intuição* vem do latim *intuitus*, que significa ver. Assim, a razão intuitiva é uma visão imediata, direta, sem intermediários de uma verdade ou de uma conclusão sobre o objeto do conhecimento. Os psicólogos chamam de *insight* ao momento em que subitamente percebemos a solução de um problema. Os filósofos diferenciam dois tipos de intuição, vejamos como Bonnet (2012, p. 66) expõe:

> *Intuição sensível* é um conhecimento imediato no qual os nossos sentidos captam propriedades físicas dos objetos como: cor, odor, sabor, dimensão, altura, calor. Por exemplo, se o objeto é uma flor, num só lance vemos a cor, sentimos o cheiro e maciez das pétalas. Assim adquirimos o conhecimento das propriedades físicas da flor.
> *Intuição intelectual* é um conhecimento que capta imediatamente propriedades abstratas dos objetos, ou que faz conexões entre ideias, ou formula uma hipótese imediata. Para tudo isso a razão usa os princípios racionais: identidade, não-contradição, terceiro excluído e causalidade. A intuição intelectual percebe uma verdade abstrata e universal direta sem precisar de provas.

No livro *Experiência matemática,* Davis e Hersh (1998, p. 434) assinalam que a palavra intuição, da forma como é usada pelos matemáticos, transporta um grande peso de mistério e ambiguidade. “Por vezes, parece um substituto perigoso e ilegítimo de uma demonstração rigorosa. Em outros contextos, parece designar o relâmpago inexplicável de percepção pelo qual uns poucos eleitos obtêm conhecimento matemático que outros só podem atingir por longos esforços”. Também o *Dicionário de Filosofia* de Nicola Abbagnano (2007, p. 594) dedica quatro páginas para a intuição. Vejamos esse trecho:

> Hoje, mais que os filósofos, a intuição serve aos cientistas, particularmente a matemáticos e lógicos, quando estes querem frisar o caráter inventivo de sua ciência. Claude Bernard dizia: "A intuição gera a ideia ou a hipótese experimental, ou seja, a interpretação antecipada dos fenômenos da natureza. Toda a iniciativa experimental está na ideia, pois só ela provoca a experiência. O raciocínio serve apenas para deduzir as consequências da ideia e para submetê-las à experiência"

Sobre esse tema matemático francês Henri Poincaré (1854-1912) disse: "Assim, a lógica e a intuição têm cada uma sua missão. Ambas são indispensáveis. A *lógica*, a única que pode dar certezas e é o instrumento da demonstração: a *intuição* é o instrumento da invenção". Também o matemático brasileiro, Amoroso Costa (1885-1928), em seu livro *As ideias fundamentais da matemática* (1981, p. 181), faz a distinção entre a descoberta em matemática e sua demonstração ao dizer: “Intuição e lógica – o pensamento matemático desenvolve-se em duas fases bem distintas: a descoberta, posse imediata de uma verdade nova; a da demonstração, construção lógica dessa verdade.”

Com isso vemos a importância que os matemáticos dão à intuição em suas descobertas. Passemos agora a tratar do intuicionismo matemático.

4.4.2 Intuicionismo

A corrente da Filosofia da Matemática chamada de *intuicionismo* considera que a matemática é uma construção elaborada a partir dos números naturais. Esta corrente foi iniciada em 1908 com os trabalhos do matemático holandês Luitzen Brouwer (1881-1966) como resposta aos paradoxos da teoria dos conjuntos. As ideias intuicionistas de Brouwer são oriundas do matemático alemão Leopoldo Kronecker (1823-1891). “Brouwer acreditava que os números naturais são intuitivos e resultam da intuição humana de tempo discretos de nossa experiência” Eves, 2005, p.679). Ele defendeu que

a matemática é uma construção do pensamento humano e não havia nenhuma necessidade de leis lógicas e universais.

Sobre o intuicionismo, Célia Nogueira e Rui Barros (2022, p. 06), da Universidade Estadual de Maringá, no artigo *Crises da Matemática* apontam que:

> Eles acreditavam que a reconstrução da matemática deveria tomar por base a construção dos números naturais. Segundo eles, todo ser humano traz dentro de si a intuição do que seja o número 1 e a intuição do que é o número 2 pela repetição dessa ideia. Assim, se conseguimos construir qualquer coleção finita de números naturais 1, 2, ... , n. Brouwer concordava com o filosofo Kant que dizia que os humanos têm uma percepção imediata do tempo e usava a palavra "intuição" para se referir a isso. Daí o nome dessa escola ser intuicionismo

Na verdade, para os intuicionistas os únicos *entes matemáticos* aceitos são aqueles *construídos* com base nos números naturais e usando um número finito de etapas. Desse modo rejeitavam alguns teoremas clássico da matemática que são ditos existenciais. Aqui o feitiço vira contra o feiticeiro, pois o próprio fundador do intuicionismo publicou o *Teorema de Brouwer,* da existência do ponto fixo na topologia, mas que não poderia ser aceito pelos intuicionistas.

Além disso, os adeptos do intuicionismo rejeitavam o princípio do terceiro excluído, pois segundo eles uma proposição poderia ser verdadeira, falsa ou indecidível. Isso cria grandes problemas para a aritmética, álgebra e geometria clássicas, pois muitos teoremas foram demonstrados usando esse princípio lógico.

.

Brouwer e Poincaré

O matemático e filósofo *Luitzen Egbertus Jan Brouwer* nasceu na Holanda em 27 de fevereiro de 1881 e morreu em 1966. Sua vida estudantil e profissional foi em grande parte na Universidade de Amsterdã. Era chamado popularmente pelas letras iniciais do seu nome, LEJ Brouwer.

Suas preocupações não se limitaram à matemática e registrou seu nome na topologia moderna, da qual é considerado um dos fundadores. Ficou conhecido inicialmente pelo teorema do ponto fixo e o teorema da invariância. Entre seus trabalhos, escreveu *Fundamentação da Matemática Intuicionista,* composta em três partes (1925-1927).

Sendo considerado o fundador da corrente intuicionista e ter sido membro do conselho editorial da revista *Mathematische Annalen*, Brouwer julgava os trabalhos, artigos que iriam à publicação. Assim, ele instantaneamente recusava os assuntos

abordados referentes ao uso indiscriminado da redução por absurdo, ou a lei do terceiro excluído (Shapiro, 2016).

Jules Henri Poincaré é uma referência na matemática e foi em sua época considerado principal matemático. Nasceu em Nancy, na França, em 29 de abril de 1854. Em 1879 concluiu seu doutorado em Ciências Matemáticas, com tese sobre equações diferenciais, defendida na Universidade de Paris. Foi professor e proferiu conferências sobre várias disciplinas como Matemática, Ciências, Física matemática e Mecânica celeste na Universidade de Paris.

Também ocupou cargos administrativos como a presidência da Sociedade Matemática da França e da Sociedade Astronômica e aos 33 anos se tornou membro da Academia de Ciências da França. Ainda em vida publicou aproximadamente quinhentos escritos com temas diversos como: matemática pura e aplicada, óptica, eletricidade, telegrafia, teoria da relatividade e cosmologia. No livro *O valor da ciência,* ele expressar seu pensamento sobre intuição matemática ao escrever:

> Já tive a oportunidade de insistir sobre o lugar que a intuição deve guardar no ensino das ciências matemáticas. Sem ela, os jovens espíritos não poderiam iniciar-se na inteligência da matemática; não aprenderiam a amá-la, e só veriam nela uma vã logomaquia; sem a intuição, sobretudo, jamais se tornariam capazes de aplicá-la. Mas hoje, antes de tudo, é sobre o papel da intuição na própria ciência que eu gostaria de falar. Se é útil ao estudante, ela o é mais ainda ao cientista criador (Poincaré, 1995, p. 20).

Aqui, Poincaré descreve a importância da intuição no raciocínio matemático, como também no ensino. A filosofia da matemática de Poincaré, de acordo com Silva (2007, p. 72), é uma "mescla entre intuicionismo e de pragmatismo, mas que certamente fora um profundo crítico, inimigo da corrente logicista." Conforme as palavras de Eves,(2004, p.618) Poincaré foi um dos mais hábeis divulgadores da matemática e da ciência, suas obras eram rapidamente adquiridas por um público variado. Suas obras-primas jamais foram superadas, passando a ser frequentemente traduzidas em diferentes línguas.

4.5 FILOSOFIAS DA MATEMÁTICA E A FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Quando pensamos em formação, de imediato vem a palavra educação do sujeito, e ao pensar sobre isso, nos vem também a mente a formação como uma das questões chave para compreensão de um processo humano. Em uma afirmação da filosofa judia e alemã Hannah Arendt: "A educação está entre as atividades mais elementares e necessárias da sociedade humana, que jamais permanece tal qual é, porém se renova continuamente através do nascimento, da vinda de novos seres humanos" (Arendt, 1972, p. 234). Nesse sentido, fica nítido a complexidade, a subjetividade e contradições humanas.

Nessa perspectiva, o autor Rocha (2022, p.11) enfatiza a necessidade de se discutir cada vez mais a educação, seu conceito, sua finalidade e de certa forma acompanhar e consequentemente levar ao olhar fascinante e questionador da Filosofia da educação.

> A lista dos temas e problemas da Filosofia da Educação é imensa. Ela inclui questões aparentemente insolúveis, e outras mais bem delimitadas e mais práticas. Para muitos filósofos, a maior questão é o debate sobre os objetivos ou finalidades da educação. O tema é importante, mas sua abrangência pode ser desanimadora, especialmente quando é apresentado por meio de perguntas como "que tipo de ser humano e de sociedade queremos construir com a educação?". A educação seria um tipo de engenharia social para "construir" uma sociedade? Por aí começa uma conversa interminável sobre o que é "educar". A Filosofia da Educação procura pensar sobre problemas muito básicos, como os fins da educação, a natureza das aprendizagens e as mudanças nas relações humanas. O modo como vivemos, em certo sentido, é a nossa educação. É por essa razão que os filósofos dizem que, se não temos uma filosofia da educação, não devemos duvidar que ela tem a gente.
>
> Vamos ampliar a lista de questões, pensando mais na cena educacional. Onde termina o "conhecimento objetivo" e começa a "doutrinação"? Qual é a diferença entre conhecimento e ideologia? É verdade que tudo é política, incluindo a própria afirmação que tudo é política? Quais são os compromissos civilizatórios que a educação pública deve assumir? Deve existir um sistema público e leigo de educação? Como devem ser tratados temas como a educação religiosa, a inclusão cultural e social, a tolerância, o sexo, o gênero, o respeito à diversidade e dezenas de outros que, pela complexidade inerente a eles, não saem da mesa das conversações?

Contudo, de início a essa seção gostaríamos de enfatizar que nosso foco não é a Filosofia da Educação, mas sim o que no título deste trabalho registra: Filosofia da Matemática. Entretanto não podemos fugir desse diálogo, uma vez que pensadores das distintas áreas apontam relações intrínsecas entre ambas.

É plausível salientar também, logo nesse começo que pensar a Filosofia da atrelada a Educação matemática é um debate fundamental e que esse trabalho não pode fugir, ou pelo menos expor tal envergadura que a formação de um sujeito pode nos exigir pensar de maneira holística. Para nos auxiliar nessa discussão e complementar o que dissemos juntamente com Rocha (2022), vejamos o que aponta Bicudo (2011, p.15) ao concatenar as ideias e ligações da Filosofia da educação com a própria Educação Matemática.

> O amadurecimento de uma área faz-se sentir pela zona de densidade que a envolve, quando são encontrados concepções, conceitos e questões que se superpõem, entrelaçam-se, criando a impossibilidade de se ver com clareza do que e de qual perspectiva se fala. Essa situação inicial de nebulosidade pode motivar o surgimento de uma comunidade disposta a expor-se, a perguntar-se, a explorar estratégias e perspectivas, a configurar de modos de pensar e fazer. Essa é perspectiva da Educação Matemática e os caminhos que ela trilha começam a mostrar-se com maior clareza. Há matemáticos, pedagogos, psicólogos, sociólogos e outros profissionais estudando e expondo explicações e propostas sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática, sobre a realidade de seus objetos e respectivas características epistemológicas, sobre cognição e processos cognitivos que explicam a produção do conhecimento, sobre os fundantes desse conhecimento, sobre a linguagem matemática e suas características simbólicas etc. Muitas questões já exigem uma atenção maior que aquela dedicada às primeiras ideias ou a um panorama geral no qual essas ideias foram se mostrando significativas. Clamam por aprofundamento de estudos e por expansão de aplicações e inserções nas propostas pedagógicas.

Á face do exposto, fica prudente afirmar que tais questionamentos devem seguir uma discussão pautada no diálogo longo, cauteloso e com vistas ao aprimoramento das competências, da formação do sujeito, e nesse caso no sujeito que ensina matemática.

Nesse sentido, podemos dizer que a Filosofia da Educação é um campo de estudo que acumula debates cruciais em seu currículo, nos deparamos com observações contemporâneas de recuso do tipo: para que falar de Filosofia da Educação? Algo ultrapassado, meros resquícios dos povos gregos, ou ainda que esta seria a última das revelações metafísicas do mundo moderno acerca da educação.

Embora não tenhamos grandes pretensões em elaborar um estudo mais complexo, e sim tratar, enfatizar a ligação entre os assuntos dos capítulos chegando ao nosso objetivo das possíveis implicações, não nos exclui dizer que assumimos uma posição contrária às tais afirmações peremptórias acerca da Filosofia da Educação. Acreditamos que diante das implicações históricas recentes necessitamos cada vez mais nos defrontarmos com os questionamentos sobre a educação, sua natureza, seu sentido. Enfim, entendendo que o debate não está acabado nessas pálidas linhas.

A atividade filosófica requer um pensamento sistemático, pois trabalha intelectualmente com rigor, com argumentos lógicos visando uma fundamentação racional. Assim desencadeia conceitos e ideias coerentes a partir de análises, reflexões e críticas sobre a realidade e o ser.

Nesse sentido, a Filosofia não é arte, nem história, nem ciência, nem religião etc. Para Chauí (2000, p. 05-17), a filosofia é uma investigação sobre a realidade a partir de uma atitude e reflexão crítica diante do naturalizado que a sociedade nos impõe e vamos repetindo certas posturas do senso comum sem analisá-las profundamente.

Entretanto, longe de nós atribuirmos aqui uma definição genérica para a filosofia, a por isso, ela vai muito além, sendo essencialmente a busca de fundamento, do sentido das mais diversas áreas do conhecimento, não é puramente abstração. Logo, sua relação com estas, numa visão contemporânea torna-se evidente quando nos deparamos com campos de cunho filosófico, a saber: Filosofia da mente, Filosofia das ciências, Filosofia do direito, Filosofia da educação, Filosofia da matemática e como tal, Filosofia da história, entre outras. Após esses adendos, iniciaremos por tratar com mais propriedade, o que pode vir a ser então, a Filosofia da educação matemática.

De acordo com Bicudo e Garnica (2011, p. 28-44), a Filosofia da Educação consiste em interrogar os fins e os meios da ação educadora. É colocar a prática educacional do nível do saber fazer em sintonia com questões como por que e para que fazer desse modo. É esse o sentido da prática refletida. Para pensar então na matemática com essa perspectiva é compreendê-la no contexto educacional.

A Filosofia da educação matemática também traz questões sobre o conteúdo a ser ensinado e a ser apreendido e, desse modo, necessita das análises e reflexões da Filosofia da matemática sobre a natureza dos objetos matemáticos, da veracidade do conhecimento matemático, do valor da matemática. Bicudo e Garnica (2011, p.50) escrevem que esta é:

> A ação, demarcada no contexto em que ocorre, que tem um solo perceptivo – portanto, espacial, temporal e histórico –, onde se desencadeiam e se materializam as atitudes educacionais, a proposta pedagógica, a concepção do objeto e de conhecimento matemáticos. Esse procedimento solicita familiaridade com as regiões de inquérito da Filosofia, da Filosofia da Educação, da Filosofia da Matemática; mostram-se relevantes quando a proposta é a intervenção na realidade pautada na ação/reflexão/ação; é eficaz para a autoavaliação dos agentes do processo; é pertinente para que sejam traçadas direções desejáveis

Essa discussão é recente no campo da Ciência Matemática. Questões filosóficas relacionadas a matemática, educação, ensino e aprendizagem matemática eram

até então irrelevantes para um professor da disciplina. Elementos que inclusive iniciamos, em parte no nosso trabalho abordando a relação entre filosofia e matemática, os desafios em torno de uma abordagem que, quando há, manifesta-se de forma genérica e não atinge uma análise mais complexa e coesa.

Em outras palavras, Bicudo e Garnica (2011, p. 50) afirmam que temas de caráter ontológico, epistemológico e mesmo axiológicos têm sido abordados em trabalhos de Ensino da Matemática, de Psicologia da Matemática, de Educação Matemática entre outros, sem serem postos em destaque e, na maioria das vezes, tratados com certo grau de vazio. Nessa situação, partindo de que precisamos, portanto, entender pontos importantes que estão numa abordagem que é filosófica, histórica, pedagógica, e claramente epistemológica. Em síntese, temos que considerar na seguinte proposta de: natureza dos objetos matemáticos; particularidades epistemológicas; processos cognitivos; fundamentos e bases teóricas da matemática; linguagem matemática entre outras singularidades.

No que concerne a Epistemologia ou Filosofia da Ciência para alguns, traz questões fundamentais no campo da ciência matemática por exemplo, estas inclusive já amplamente citadas ao longo deste trabalho, vejamos então o que sinteticamente aponta o autor Bonnet (2019, p.189)

> A Epistemologia ou Filosofia da Ciência estuda os fundamentos c o processo de construção da ciência. Isso pode ser concluído analisando a composição da palavra, visto que, *episteme* = ciência e *logia* = estudo. Portanto, teremos a epistemologia da Física, da Química e de cada ciência. Exemplificando, é na Filosofia da Matemática que os epistemólogos procuram responder questões como: Se uma reta não tem espessura e é infinita, como ela pode existir? Se um triângulo é limitado por três retas ele existe? Existe a propriedade da soma dos ângulos que não existem? A matemática é construída ou é descoberta pelo homem? Para respondê-las os estudiosos mergulham nos trabalhos originais dos matemáticos ou dos cientistas e analisam o contexto e os motivos que os levaram a criar certos conceitos ou teorias.

Os problemas filosóficos que apontam diretamente para a matemática com questões e perspectivas divergentes sobre verdade, conhecimento, realidade, objetos matemáticos, entre tanto outros aqui já citados, recebem superficialidade dos matemáticos. Estes estariam mais preocupados com o desenvolvimento das especialidades de sua área. E assim, deixam de lado tais perguntas (Barker, 1976, p. 12).

Então como pensar uma conexão com as correntes da Filosofia da matemática e possíveis implicações no âmbito da formação inicial do professor no futuro. Na verdade, como vimos aqui, isso é apenas uma parte da imensa história que existe em torno dessas

discussões, mas que podemos esboçar um paralelo com aspectos vindos a partir de Platão e Aristóteles já na antiguidade e em seguida tomando as correntes clássicas.

Ao dialogarmos com as questões que se apresentam diante da formação do professor em linhas gerais, Perrenoud (2008, p.65) no livro organizado por ele: *Formando Professores Profissionais: Quais Estratégias? Quais Competências?* Bélair revela a complexidade do ofício do professor quando diz:

> O ofício de professor é adquirido em uma articulação entre as situações vividas (fictícias ou reais) e as teorias que tentam explicá-las através de uma generalização de processos. As formações que têm como eixo conceitos teóricos não apoiados verdadeiramente na realidade fazem com que o futuro professor não possa retomar tais conceitos posteriormente quando ele se situa em sua prática. Disso decorre uma grande distância entre uma formação acadêmica que acaba revelando-se inútil e uma prática intuitiva que responde aos imprevistos e aos problemas do momento, dando, assim, a impressão de um eterno recomeçar.

Na epistemologia matemática, na prática docente, na formação inicial do professor, por exemplo, é válido afirmar à luz de Fiorentini (1995, p.4), a maneira pela qual nos apropriamos do conhecimento, que percebemos a realidade é que nós compreendemos as coisas, no caso aqui podemos nos referir aos objetos matemáticos.

Nesse sentido, temos a natureza do saber oriundo da matemática de acordo com a perspectiva predominante no sujeito da ação é que, consequentemente, tonara-se perceptível certas influências na profissão docente. Diante de tal pressuposto, fica a premissa que a depender dos caracteres teóricos e práticos advém o modo de ver, de fazer, de ensinar a matemática e, sobretudo, a forma como o professor considera os objetos e suas inter-relações com aquilo que pratica em sala de aula e fora dela e a consideração que possui dela como campo de saberes.

Perrenoud (2008, p. 219) por exemplo, em sua discussão crítica sobre a formação, as competências e o *habitus* profissional demonstra que há uma diversidade de problemas que confrontam as ações docentes ao ponto que também deflagra a orientação do ensino, vejamos:

> A informação inicial desempenha um papel decisivo na construção de competências? Nada é menos seguro: nos sistemas educativos, coexistem professores formados de acordo com as regras da arte, outro que aprenderam seu ofício "em campo". As diferenças são espetaculares? Do mesmo modo, entre um sistema educativo e outro, a formação inicial tem durações e níveis muito variáveis, formações ao nível do *bac* ou inferiores até formações no *bac + 5,* por exemplo, para os professores primários. A diversidade de instituições, de cursos, de condutas de formação se traduz em diferenças estrondosas na eficácia em sala de aula? A socialização profissional, no início da carreira, parece ajustar fortemente os efeitos da formação inicial, legitimando aquilo que é aceitável no meio profissional, zombando daquilo que "não se faz aqui".

> Mais tarde, a experiência profissional, as confrontações com outros profissionais e a evolução contínua favorecem a evolução dos saberes e do *habitus*, conforme as fases que os estudos do ciclo de vida começam a identificar com uma certa estabilidade.

Quando nos propomos a tal tarefa é necessário conhecer os processos históricos de origem da Filosofia da matemática e consequentemente as correntes que surgiram em torno desse campo, que se consolidara entre os séculos XIX e XX. De posse disso foi o que fizemos objetivamente até aqui, uma vez que não é tão claro perceber esses delineamentos epistemológicos na formação inicial do professor sem previamente se preparar para essa reflexão. Partimos, então, para as possibilidades das implicações das quatro formas de pensamento sobre a natureza da matemática: Platonismo, Logicismo, Formalismo e Intuicionismo.

Ao nos depararmos com a corrente plantonista da matemática, já imbuído da perspectiva que desta emana ao fornecer as explicações sobre essa ciência na raiz grega antiga, atentamos nosso olhar para a figura de Platão. Vale ressaltar que os especialistas na área da Filosofia da matemática costumam chamar de *realismo platônico* e que este perdurou até o século XV. E que também colocam Aristóteles na mesma posição, enquanto outros o chamam de visão antirrealista da matemática. Sem delongas, vamos utilizar sinteticamente as interpretações de autores que estão formuladas em seus trabalhos científicos, como por exemplo: Bicudo, Bonnet, Fiorentini, D'Ambrósio e Fossa.

Na maioria dos livros escolares de matemática os autores explicam enfaticamente propriedades, teoremas, demonstrações e fazem exercícios para treinar os alunos nos referidos tópicos. Por exemplo, eles demonstram o teorema de Pitágoras, supondo que a demonstração prova para o aluno que o teorema é verdadeiro, e em seguida fazem exercícios esperando fixar essa aprendizagem. Bonnet (2019, p. 16) reafirma isso numa passagem seguinte, que vem a dialogar e evidenciar com o que vamos pontuar na sequência.

> Essa era a didática praticada por todos os professores da década de 1980, que vivenciei bastante na educação e no ensino da matemática. Porém, ao ler o excelente livro *A criação científica*, do filósofo da ciência Abraham Moles, onde estão expostos os métodos que levam os cientistas às suas descobertas, percebi que o resultado de uma pesquisa é tão importante quanto o caminho que a conduziu. *O método*, obra do matemático grego Arquimedes (séc. III aC) é um exemplo disso.

Diante dessas palavras bonnetianas, pode se dizer que é de suma importância que na formação do professor seja estudada a História da Matemática e assim estes

sujeitos terem um olhar diferente para o processo de construção dos conhecimentos dessa ciência, e sobretudo para dar significado significante a prática profissional.

A concepção platônica e logicista, segundo Fiorentini (1995, p. 6), ao serem relacionadas e, em seguida, identificadas na formação do professor, parte da compreensão que estas produzem intrinsecamente uma ligação com a tendência *formalista clássica*. Isso significa que o professor é o centro do conhecimento e da verdade. Cabe ao aluno ser um receptor que apenas repete e memoriza os conteúdos tratados passivamente e acabados. Fiorentini *apud* Miguel (1995, p.6) ao analisar a relação conteúdo-forma na tendência formalista clássica expõe que

> Foi com a concepção platónica da finalidade atribuída à educação matemática que apareceu pela primeira vez na história dessa área de conhecimento, primeiro modo de ruptura entre forma e conteúdo matemático, sendo a ênfase posta sobre o primeiro elemento desse par tensional A ênfase na forma, no sentido de ênfase no método aristotélico-euclidiano de se reproduzir o conteúdo matemático jà produzido de outra forma, foi a razão do aparecimento histórico do primeiro tipo de formalismo em educação matemática

Ao analisar a corrente formalista vemos que ele segue na linha da *formação tecnicista*. Parte da compreensão que historicamente subjaz, no Brasil, à educação do período da ditadura militar. Tal visão é vislumbrada do que se denominou de tecnicismo pedagógico, de viés norte-americano.

Nesse sentido a formação do professor se baseia na aprendizagem mecânica, bastando ao aluno responder os exercícios de maneira repetitiva, utilizando técnicas e fórmulas matemáticas. O professor formalista é um profundo demonstrador, utiliza métodos e o rigor nos processos do conhecimento matemático para a prática docente. E consequentemente, o aluno não é apreciado com sua compreensão acerca do conteúdo.

Nesse contexto vale ressaltar o Movimento da Matemática Moderna – MMM, que surge nos Estados Unidos no início da década de 1960. Sobre isso Bonnet (2019, p. 128) comenta

> (...) É que a Segunda Guerra Mundial mostrou o baixo nível de matemática dos soldados americanos. Entretanto, foi o lançamento em 1957, do 1º satélite artificial, o *Sputinik,* pelos russos, que se fez o governo americano reconhecer que seu país estava aquém dos russos em matemática e ciências. Assim, era preciso renovar o ensino com as novas linhas da pesquisa matemática como: Conjuntos, Topologia, Álgebra abstrata e Lógica simbólica. Por isso, o *slogan* criado pela comissão de reforma foi Matemática Moderna.

Na época, o historiador e matemático americano, Morris Kline teceu críticas bem ácidas a essa reforma em seu livro, que se tornou ícone no assunto, *Why Johnny can`t add: the failure of the Math,* publicado em 1973. Em seguida, este foi traduzido para o

português com o título: *O fracasso da Matemática Moderna*, sendo utilizado no Brasil e com muito êxito entre a comunidade de matemáticos e professores. D'Ambrósio realizou também muitas críticas a esse movimento, ambos condenavam a ênfase na abstração e rigor lógico matemático, como característica principal no ensino para os alunos. Ao ponto que não apoiavam o fato de não apresentar as aplicações da matemática. (Bonnet, 2019).

No que tange ao intuicionismo, o leque de implicações na formação do professor é ainda maior, uma vez que possui algumas tendências que beberam dessa fonte que são, por exemplo: Construtivismo, Etnomatemática e Histórico-crítica (Fiorentini, 1995, p. 19).

Contudo, ao afirmar que a mente humana é a criadora das entidades matemáticas através do pensamento intuitivo, o professor é, então, nesse caso, o sujeito que constrói. Assim, tanto professor quanto aluno terão respeito durante as investigações e pensamentos intuitivos. O aluno é o centro das atividades. Vejamos o que nos aponta Fossa (1998, p. 111):

> (...) O professor é mais um orientador e fonte de inspiração para o desenvolvimento do aluno do que uma autoridade cognitiva. Finalmente a desconfiabilidade da linguagem implica que as formas objetivas tradicionais de avaliação não serão do tipo de mensuração mais eficiente da aprendizagem do aluno; em vez disso, o professor terá que engajar cada aluno como um pensador legítimo e construir uma teoria sobre o desenvolvimento, a ser testada através de diálogos intensivos com o aluno.

Se partimos da premissa que o professor da formação inicial é o aluno hoje e o professor no futuro, logo podemos dizer: o intuicionismo faz com que o aluno assuma uma postura de total abstração e no mais elevado nível possível ele construa mentalmente sozinho.

A esse professor, no futuro, compete, como citado anteriormente, propiciar durante a formação de seus alunos atividades que os auxiliem a intuir objetos matemáticos, em detrimento de meras exposições axiomáticas e ou linguísticas. A compreensão da formação intuicionista de determinado professor, quando estudada com mais profundidade, nos permite perceber que esta dará elementos para o desenvolvimento do que se denominou posteriormente de construtivismo (Fossa, 1998, p. 117).

As ideias do construtivismo surgem na Educação Matemática a partir da década de 1980 pegando como raízes o pensamento na teoria da epistemologia genética de Piaget. Vejamos algumas considerações que aponta Garcia (2009, p. 182)

> Na perspectiva do Construtivismo Social, conhecimento tem uma ontogenia social e está intimamente ligado à experiência. Resolução de problemas e metodologia de projetos são opções atuais e bem justificadas teoricamente,

> para o ensino de Matemática. Nessas opções, os estudantes são encorajados a propor ideias, incentivados a testar hipóteses por si mesmos, a tentar sugerir, generalizar e comparar métodos, e a procurar outros problemas da mesma natureza que já foram previamente resolvidos. A expectativa é que, o aumento do envolvimento e da participação tenha como consequência o aumento do prazer de aprender, fruto da percepção da relevância da Matemática para o problema A aprendizagem ocorre com a conversação que não é apenas troca de informações. A sugestão consiste em salientar o respeito mútuo e a sinceridade entre professor e aprendiz; ouvir os aprendizes, demonstrar e sentir interesse por seus pontos de vista, suas concepções e suas construções de sentido; transformar o ensino numa conversação real, num verdadeiro dialogo onde existe respeito pela inteligência e espaço para a iniciativa do aprendiz; tratar questões e objetos reais de interesse mútuo e de benefício mútuo.

O construtivismo concebe a matemática como uma construção humana e que não se encontra à margem das interações com o meio ambiente. Fiorentini (1995, p. 20) relata que essa tendência não resulta do mundo físico, nem tampouco de mentes isoladas da realidade. Mas se revela pela proposta de ações reflexivas estabelecendo relações com o sujeito que age.

Traçando um olhar para aquele que está no processo de formação inicial rumo à docência, nos cabe dizer que este irá desenvolver um pensamento por vias da lógica, mas que se manifesta a partir de uma atividade protagonizada por este. Em síntese, se esse sujeito for o aluno ele é então o centro do processo de formação e de prática, agora se é o professor esse tem fundamentalmente o papel de realizar orientações e problematizar tais ações e compreensões oriundas da construção matemática.

A Etnomatemática de D'Ambrósio é "filha" da tendência socio etnocultural dos anos de 1980, no qual pesquisadores que estudam o ensino da matemática iniciaram a discussão em torno da inserção das questões sociais e culturais, e a importância disso para detectar a produção do conhecimento a partir de ambiente que ocupa (Fiorentini, 1995, p. 23). Sem nos atermos aos detalhes, uma visão mais ampla com a Etnomatemática é proposta por D' Ambrósio (1990, p. 34). Vejamos o que ele diz:

> É limitada em técnicas, uma vez que se baseia em fontes restritas. Por outro lado, seu componente criativo é alto, uma vez que é livre de regras formais, obedecendo critérios não relacionados com a situação. (...) A Etnomatemática é uma codificação natural, um caminho desejado para uma versão mais humana do racionalismo.

O sujeito em sua formação é capaz de produzir conhecimento e este manifesta elementos da cultura dos grupos que estão relacionados com a prática e teoria sobre a realidade que vivencia. Em outras palavras, a valorização dos conceitos informais construídos pelos sujeitos na formação.

Fiorentini (1990, p. 25) aponta que o grande mérito da Etnomatemática foi trazer uma nova visão de Matemática e de Educação Matemática

> de feição antropológica, social e política, que passam a ser vistas como atividades humanas determinadas sociocultural mente pelo contexto em que são realizadas A Matemática, por exemplo, só adquire validade e significação no interior de um grupo cultural - que tanto pode ser uma comunidade indígena, uma classe de alunos ou até uma comunidade cientifica - onde se encontra presente nas diferentes práticas sócioculturais

Nesse aspecto, o próprio D' Ambrósio (1993, p. 6-10) deixa os traços fundamentais do Programa de Etnomatematica, em um artigo longo ao apresentar seu envolvimento e sua trajetória com essa ideia, a ponto de então considerar como pesquisa no sentido lakatosiano, vejamos um trecho

> Gosto de me referir a Etnomatemática como um programa (...). O que eu chamo de Programa Etnomatemática de pesquisa no sentido lakatosiano que vem crescendo em repercussão e vem se mostrando uma alternativa válida para um programa de ação pedagógica, Etnomatemática propõe um enfoque epistemológico alternativo associado a uma historiografia mais ampla Parte da realidade e chega, de maneira natural e através de um enfoque cognitivo com forte fundamentação cultural, à ação pedagógica (...) Para se levar então o Programa Etnomatemàtica às suas amplas possibilidades de pesquisa e de ação pedagógica um passo essencial è libertar-se do padrão eurocêntrico e procurar entender, dentro do próprio contexto cultural do indivíduo, seus processos de pensamento e seus modos de explicar, de entender e de se desempenhar na sua realidade. (...), isso implica, também, numa revisão crítica de teorias correntes de cognição, epistemologia, história e política (...)
> Na verdade, a Etnomatemática procura a reincorporação da História da Matemática e da Filosofia da Matemática à História e a Filosofia "tout court". Não há como fragmentar a História, como tão pouco a Filosofia. E muito menos a Matemática, que tem sua razão de ser na busca de explicações e compreensões de maneiras e modos de lidar com a realidade, que é necessariamente uma totalidade.

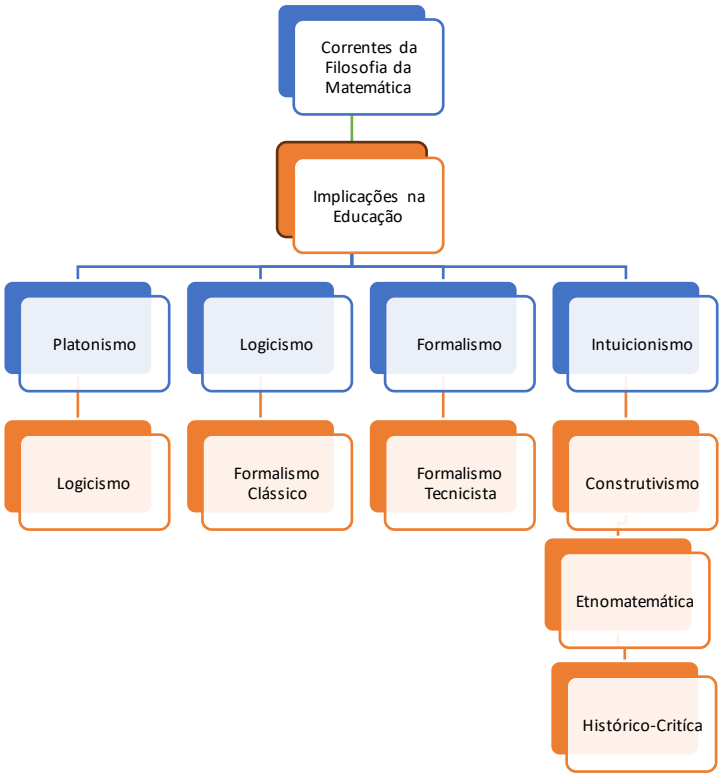
Fiorentini (1995, p. 31) aponta como tendência emergente a Histórico-crítica, como um conhecimento que se produz com dinamismo que se veste dos estímulos internos e externos, como necessidade dos conceitos e relacionada às questões sociais. O professor em sua atividade matemática e formativa busca impulsionar os alunos a perceber, a partir dos conceitos oriundos de um processo histórico, que podem ser gerados outros conhecimentos num grau amplo de liberdade e aplicações dos conceitos apreendidos.

> (...) sob um ponto de vista histórico-crítico, a aprendizagem efetiva da Matemática não consiste apenas no desenvolvimento de habilidades (como do cálculo ou da resolução de problemas), ou na fixação de alguns conceitos através da memorização ou da realização de uma série de exercícios, como entende a pedagogia tradicional ou tecnicista. O aluno aprende significativamente matemática, quando consegue atribuir sentido e significado às ideias matemáticas - mesmo aquelas mais puras (isto é, abstraídas de uma

realidade mais concreta) - e, sobre elas, é capaz de pensar, estabelecer relações, justificar, analisar, discutir e cria

Passamos à exposição sintética e gráfica dessas implicações na formação do professor que são discutidas, mesmo que de maneira tímida, nas relações com o surgimento de questões educacionais.

Figura 6 – Correntes Filosóficas e a Educação



Fonte: Elaboração nossa.

Durante a graduação, no processo de formação do então futuro professor de matemática, são apresentadas disciplinas que abordam questões históricas, epistemológicas, conceituais e outras que se direcionam para a especificidade da área, e destas para o delineamento teórico e prático dos procedimentos pedagógicos.

Parafraseando Fiorentini (1995, p. 30), é desejável que o professor tomasse conhecimento de como foi construída a história de conceitos, teoremas, teorias que marcam uma trajetória e caminho de possibilidade para uma compreensão e, quem sabe, até fazer a tomada de decisão naquela que mais apetece e que se adeque a sua realidade.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Minha utopia, como educador, é que as novas gerações serão capazes de atingir cidadania e criatividade... Minha utopia, como matemático, é que a matemática é essencial para atingir a minha utopia de educador.

D'Ambrósio

O título de um livro ou de um artigo é uma maneira sintética de informarmos o conteúdo tratado. Por vez, recorre-se a um subtítulo que especifica melhor o assunto contido. Foi assim que procedemos nessa nossa pesquisa, com o título *Filosofia da Matemática*: *seus objetos e as possíveis implicações na formação do professor*. Aqui faremos algumas considerações da análise que realizamos.

Relembremos o que nos motivou nessa empreitada: *o objeto matemático.* Para estudá-lo recorremos às correntes filosóficas: Platonismo, Logicismo, Intuicionismo e Formalismo, cujo intuito foi mostrarmos como elas respondem às perguntas: Qual é a natureza do conhecimento matemático? A Matemática é construída ou é descoberta pelo homem? Nessa pesquisa vimos que até os grandes matemáticos que se propuseram a responder tais questionamentos não chegaram a um denominador comum. Por exemplo, um platonista como Gödel (Hersch,1985 p. 360) disse: "Não vejo nenhuma razão por que deveríamos ter menos confiança nesse tipo de percepção, isto é na intuição matemática, do que na percepção dos sentidos. Esses objetos também representa um aspecto da realidade objetiva."

Em contrapartida, o formalista contemporâneo de Gödel, Hilbert defendia que: *não existem objetos matemáticos*, a matemática consiste apenas em axiomas, definições e teoremas em fórmulas, mas estas não são acerca de coisa alguma: são apenas combinações de símbolos. Já para o intuicionista Brouwer, os *objetos matemáticos existem,* desde que sejam construídos sem recorrer a processos infinitos.

Destes três exemplos, podemos concluir que a pergunta o que é um objeto matemático não é fácil de ser respondida, como no início nós havíamos pensado. E a nossa surpresa é que não há um consenso entre os especialistas da área para essa resposta.

Agora, para a segunda parte, analisamos algumas teses e dissertações que trataram das correntes filosóficas da matemática com um enfoque na Educação Matemática. Também buscamos conhecer o pensamento de representantes como: U. D'Ambrósio, J. Fossa e D. Fiorentini acerca das correntes filosóficas voltadas para a educação. Aqui encontramos pesquisas que relacionam as correntes filosóficas atuais com a Etnomatemática. Entretanto, a ligação dessas correntes com a formação do professor

pareceu-nos um tema ainda pouco explorado, e não percebemos a defesa enfática da prevalência de nenhuma corrente, quer seja clássica ou atual, na formação.

Concluímos reconhecendo que o problema que no início nos pareceu simples, se mostrou grandioso ao longo da pesquisa, por isso a nossa pequena contribuição, mas que nos proporcionou grande aprendizado. Esperamos que esse trabalho ajude a reforçar a ponte, que por um milênio existiu, entre a *Filosofia* e a *Matemática*. Uma relação tão defendida por Ubiratan e Beatriz D'Ambrósio quando apresentam a ideia de priorizar esses dois conhecimentos, além da história da matemática, na formação do professor.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. *Dicionário de filosofia*. 4 ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

AGAMBEN, G. *Profanações*. São Paulo: Boitempo, 2007.

ALMEIDA, M. de Campos. *A Matemática na Idade da Pedra: filosofia, epistemologia, neurofisiologia e pré-história da Matemática.* São Paulo: Livraria da Física, 2017.

APPOLINÁRIO, F. *Metodologia da Ciência: filosofia e prática da pesquisa*. 2 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2015

ARANHA, M. L. A. *Filosofia da educação*. São Paulo: Moderna, 2006.

ARENDT, H. *Entre o Passado e o futuro*. São Paulo: Perspectiva, 1972.

ARISTÓTELES, *Metafísica*. Trad. Edson Bini, São Paulo, 2 ed. Edipro, 2012.

ARISTÓTELES, *Organón*. Trad. Edson Bini, São Paulo, 3 ed. Edipro, 2016.

BARKER, S. F. *Filosofia da matemática*. Rio de Janeiro, Zahar, 1976.

BICUDO, M. A. V.; GARNICA, A. V. M. *Filosofia da Educação Matemática.* 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

BONNET, F. *Confronto Didático: A História da Matemática como recurso didático.* Sobral: Edições Uva, 2012

BONNET, F. *Matemática: O mdc de uma vida*. Sobral: Edições Uva, 2019

BOYER, C. B. *História da matemática*. Trad. de Helena Castro. São Paulo, Edgard Blücher, 1996.

CARAÇA, B. J. *Conceitos fundamentais da matemática*. Lisboa: Gradiva, 1998.

CATTANEI, E. *Entes Matemáticos e Metafísica*: *Platão, Academia e Aristóteles em confronto*. São Paulo, Loyola, 2005.

CHAUÍ, M. *Introdução a Filosofia*: dos pré-socráticos a Aristóteles. São Paulo: Editora Brasiliense, 1994.

CHAUÍ, M. *Convite à Filosofia*. São Paulo: Editora Ática, 2000.

COMTE-SPONVILLE, A. *Pequeno tratado das grandes virtudes*. São Paulo: Martins Fontes, 1996.

COSTA, A. *As ideias fundamentais da matemática.* São Paulo: Convívio/EDUSP, 1981.

COURANT, R.; ROBBINS, H. *O que é Matemática*? Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2000.

DAVIS, P.J.; HERSH, R. *A experiência matemática.* Lisboa: Gradiva, 1995.

EUCLIDES. *Os elementos*. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FACHIN, O. *Fundamentos de metodologia*. 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2006

FIORENTINI, D. *Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. Zetetike*, Campinas, SP, v. 3, n. 1, p. 1–38, 1995. DOI: 10.20396/zet.v3i4.8646877.

FOSSA, J. *Teoria Intuicionista da Educação Matemática*. Natal: ed. UFRN, 1998.

GARCIA, V. C. V. *Fundamentação teórica para as perguntas primárias: O que é matemática? Por que ensinar?* Como se ensina e como se aprende?. **Educação**, *[S. l.]*, v. 32, n. 2, 2009.

LAKATOS, E. M. *Metodologia do Trabalho Científico.* 9. ed. - São Paulo: Atlas, 2021.

LÍVIO, M. *Deus é matemático*. Rio de Janeiro: Record, 2011.

MANON, S. *Platão*. São Paulo: Martins Fontes, 1992.

MARCONDES FILHO, D. *Iniciação à História da Filosofia*: dos pré-socráticos a Wittgenstein. 4. ed. Rio de Janeiro: J. Zahar, 1997.

MENEGHETTI, R. C. G. *Constituição do saber matemático: reflexões filosóficas e históricas*. Londrina: EDUEL, 2010.

MIGUEL, A. *A constituição do paradigma do formalismo pedagógico clássico em educação matemática. Revista Zetetiké*, Campinas, SP, ano 3, n. 3, p. 7-39, 1995. Disponível em https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646908. Acesso em: 04 de fev 2023.

MIGUENS, S. *Filosofia da Linguagem: uma introdução*. Porto: Campo das Letras, 2001.

NOGUEIRA, C.; BARROS, R. *Crise da matemática*. 2022. Disponível em: www.yumpu.com/pt/document/view/14344232/as-tres-crises-da-matematica-inf-unioeste. Acesso em: 20 de outubro de 2023.

PENROSE, R. *A mente nova do rei: computadores, mentes e as leis da física*. Rio de Janeiro: Campus, 1993.

PERRENOUD, P. *Formando professores profissionais: quais estratégias? quais competências?* 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2008.

PLATÃO. *Menon*. Trad. de Maura Iglesias, 7ª ed. São Paulo, Loyola, 2012.

PLATÃO. *Carta VII.* Trad. de José Trindade Santos e Juvino Maia Jr. São Paulo:Edições Loyola, 2008. (Bibliotheca Antiqua).

PLATÃO. *A República*. Tradução: Ciro Mioranza. São Paulo: Lafonte, 2017.

PLATÃO. *A República*. Trad. de Maria Helena Rocha. 13ª edição, FundaçãoCalouste Gulbenkian, Lisboa, 2013.

PLATÃO. *Eutífron, Apologia de Sócrates, Críton e Fédon*. Trad. de José Cavalcante de Souza. São Paulo: Nova Cultural: 1996. (Coleção Os Pensadores).

PLATÃO. *O Banquete - Sofista - Político*. Tradução e notas de José Cavalcante de Souza, Jorge Paleikat e João Cruz Costa. São Paulo: Abril Cultural, 1991 (Os Pensadores)

PLATÃO. *Vida e obra.* Poética; Organon; Política; Constituição de Atenas. São Paulo: Nova Cultural, 1999. (Os Pensadores).

PLATÃO. *O Banquete, Mênon (ou Da Virtude), Timeu, Crítias*. Trad., textos adicionais e notas Edson Bini. Bauru/SP: Edipro, 2018.

PLATÃO. *Número e Razão: Os Fundamentos Matemáticos da Metafísica* Platônica. Natal: Editora da UFRN, 2005.

PLATÃO. *Timeu*. Trad. de Maria Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 2004.

POINCARÉ, Henri. *O valor da Ciência.* Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

ROCHA, R. *Filosofia da educação*. São Paulo: Editora Contexto, 2022.

POMBO, O. *A busca de fundamentos*. 2023. Disponível em www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario. Acesso em: 20 set.2023.

REALE, G. *Para uma nova interpretação de Platão.* Releitura da metafísica dos grandes diálogos à luz das "Doutrinas não-escritas". Trad. de Marcelo Perini. São Paulo: Loyola, 1997.

REALE, M. *Introdução à Filosofia*, 4ª edição. São Paulo: Saraiva, 2007.

RUSSELL, B. *Introdução à Filosofia da Matemática*. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1966.

SEVERINO, A. J. *Metodologia do trabalho científico.* 24ª edição, São Paulo: Cortez, 2017.

SHAPIRO, S. *Filosofia da matemática*. Lisboa, Edições 70, 2016.

SILVA, J. *Filosofias da matemática.* São Paulo: UNESP, 2007.

TARDIF, M. *Saberes Docentes e Formação Profissional*. Petrópolis, RJ: Vozes, 2002

WATANABE, Lygia. *Platão, por mitos e hipóteses:* um convite à leitura dos Diálogos. São Paulo: Editora Moderna, 1995.